



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**HOMOGENEIZACIÓN Y COEFICIENTES EFECTIVOS DE
COMPUESTOS PERIÓDICOS BIFÁSICOS FIBROSOS CON
PROPIEDADES DIELECTRICAS COMPLEJAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
DAVID YAÑEZ OLMOS

DIRECTOR
DR. JULIÁN BRAVO CASTILLERO
UNIDAD ACADÉMICA DEL INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS DEL ESTADO DE YUCATÁN
IIMAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO ABRIL 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante la maestría, a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de cursar mis estudios de maestría en el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS). Fue justo pertenecer a esta gran institución.

Al finalizar un trabajo complicado como lo es el desarrollo de una tesis, es inevitable en el muy humano egocentrismo que te lleva a concentrar la mayor parte del mérito al aporte que has hecho. Sin embargo, analizando objetivamente, de manera inmediata se tiene que este trabajo no hubiese sido posible sin la participación de personas que me han facilitado las cosas en este periodo, para que el trabajo llegue a un feliz término. Es un placer utilizar este espacio para ser justo con estas personas, expresándoles mis agradecimientos.

Primeramente al Dr. Julián Bravo Castellero por haber confiado en mi persona y por la paciencia mostrada. También por estar dispuesto a ir más allá de los temarios para satisfacer mi curiosidad -porque después de aquel curso de mecánica analítica me dí cuenta del área a la cual yo quería pertenecer- y por la dirección de este trabajo. Además, le agradezco por haberme facilitado todos los medios posibles para llevar a cabo las actividades. Por la confianza brindada y los buenos consejos que me ha dado, gracias a usted.

A mis amigos Roberto, Omar Fabian, Pedro, Miguel, Toño y Ana Rosa. Por la confianza que me han tenido y por su ayuda, pues sin ustedes no habría sido posible concluir este proyecto; espero dejar algo bueno en cada una de sus vidas como, a mi parecer, han hecho ustedes en la mía.

Al resto de los miembros del jurado de corrección de tesis Dr. Federico Juan Sabina Ciscar, Dr. Yoanh Espinosa Almeyda, Dr. Luis Fernando López Ríos, Dr. Raul Esquivel Sirvent y Dr. Rogelio Oscar Caballero Pérez les agradezco profundamente su tiempo y dedicación para corregir el escrito y fungir como miembros del jurado.

A Todos, Muchas gracias.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	5
1.1.1. Objetivo general	5
1.1.2. Objetivos específicos	5
2. Conceptos Preliminares	7
2.1. Relación de orden	7
2.2. Expansión asintótica	9
2.3. Solución asintótica formal	9
3. Ecuaciones de Maxwell. Una introducción al modelo matemático	11
3.1. Leyes fundamentales de la electrostática	11
3.2. Propiedades integrales y diferenciales de E y D	13
3.3. Potencial electrostático	15
3.4. Modelo matemático	18
4. Metodo de homogeneización asintótica aplicado a compuestos pe- riódicos con coeficientes reales	21
4.1. Planteamiento del problema con componentes reales	21
4.2. Aplicación del método de homogeneización	23
4.3. Conservación de simetría	32
4.4. Conservación del carácter definido positivo	34
4.5. Relación de aproximación de u^ε y u_0	36
4.6. Formulación del problema con coeficientes complejas	39
4.7. Modelo de homogeneización usando notación matricial	41
5. Coeficientes efectivos de compuestos periódicos fibrosos con arreglo hexagonal	49
5.1. Forma explícita de los coeficientes efectivos y problemas locales	49
5.2. Problemas locales y coeficientes efectivos. Caso isótropo	53
5.3. Solución del problema local I^q para $q = 1$.	56
5.4. Cálculo de coeficientes efectivos para $q = 1$.	65

5.5. Solución del problema local I^q para $q = 2$.	69
5.6. Cálculo de coeficientes efectivos para $q = 2$.	76
5.7. Derivación de expresiones de forma explícita.	80
6. Ejemplos numéricos	85
6.1. Coeficientes efectivos para $n_o = 1$.	85
6.2. Coeficientes efectivos para $n_o = 2$.	86
6.3. Coeficientes efectivos para $n_o = 3$.	90
6.4. Comparación de los coeficientes efectivos usando truncamiento sucesivo	91
6.5. Comparación con la fórmula de Godin YA	93
7. Conclusiones	95
A. Espacios de Sobolev	99
A.1. Teoría de integración de Lebesgue.	99
A.2. Derivadas generalizadas	101
A.3. Norma de Sobolev y espacio asociado.	102
A.4. Espacios producto interno y espacios de Hilbert	104
A.5. Formulación de problemas variacionales simétricos	107
A.6. Formulación de problemas variacionales no simétricos	109
A.7. Formulación variacional para ecuaciones elípticas	110
A.8. Formulación variacional para el sistema de ecuaciones en teoría de elasticidad	113
B. La función Zeta de Weierstrass	115
B.1. La función \wp de Weierstrass.	115
B.2. La función ζ de Weierstrass.	120
B.3. Desarrollo en serie de Laurent	123
C. Suma de Lattices	127
C.1. Convergencia de la Serie	127
C.2. Pertenencia de S_λ al cuerpo de los números \mathbb{R}	128
C.3. Valores de λ para que $S_\lambda \neq 0$.	129
Bibliografía	131

Capítulo 1

Introducción

Un material compuesto se puede definir como la combinación debidamente dispuesta de dos o más materiales (llamados constituyentes) con propiedades físicas diferentes, e insolubles entre sí, que se unen enérgicamente por medio de una mezcla, manteniendo íntegro cada componente para conformar un nuevo material. Este nuevo material puede constar de una matriz y otro u otros reforzantes (refuerzos), los cuales están determinados por una proporción entre ellos para obtener características y propiedades específicas y pueden identificarse físicamente gracias a la interfaz que existe entre ellos. Si además, estos materiales constituyentes están periódicamente distribuidos, entonces se dice que es un material compuesto periódico.

Existen materiales compuestos naturales como el hueso y los tejidos biológicos. La mayoría de estos compuestos se basan en fibras como motivo primario. Por ejemplo, el hueso es un excelente compuesto biológico en el que las fibras de colágeno y los minerales se ensamblan, formando una gran variedad de estructuras que tienen diferentes rendimientos mecánicos. Generalmente este tipo de compuestos (híbridos) duros o blandos en forma de multicapas periódicas o teselaciones permiten una gran cantidad de propiedades sin un cambio en la composición [1].

También se consideran materiales compuestos a estructuras perforadas (o sea, con espacios vacíos) tales como medios porosos, esqueletos, rejillas, celosías, etc. Los materiales compuestos se utilizan como sustituciones de materiales tradicionales en la industria aeroespacial, automotriz, civil, mecánica, deportiva y otras [2].

Los materiales compuestos combinan propiedades tales como alta rigidez y pequeña densidad, alta resistencia a fracturas, baja conductividad térmica, alto coeficiente de acoplamiento electromecánico y baja impedancia acústica, entre otras. A su vez, existen materiales compuestos con nanotubos de carbono y aditivos de grafeno que en la actualidad se están aplicando como perspectivas interesantes entre las aplicaciones de la nanotecnología, con el propósito de desarrollar materiales de alta resistencia, baja densidad y alta conductividad con nanotubos o grafeno [3].

Por otro lado, conocer las propiedades macroscópicas de los materiales compuestos como función de sus características físicas y geométricas es necesario para la obtención de nuevos materiales con mejores propiedades para una determinada aplicación. Los métodos que facilitan realizar los cálculos de estas propiedades microscópicas se les denominan de homogeneización.

Los modelos matemáticos asociados a la modelación de materiales compuestos están determinados por familias de ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros pequeños que representan la relación entre las escalas involucradas. La aplicación y el desarrollo de métodos matemáticos adecuados que permitan interpretar el qué acontece en cada una de estas escalas y el cómo están interconectadas representa un problema de interés actual en las diferentes ramas de la ciencia y la técnica. El estudio numérico directo de tales ecuaciones requiere de una malla extremadamente fina que hace prácticamente imposible el éxito de la implementación computacional.

Por otro lado, el método de homogeneización asintótica (MHA), que fue desarrollado [4] para operadores elípticos escalares con coeficientes reales, garantiza el paso a una ecuación homogeneizada, independiente de los parámetros pequeños, cuya solución está próxima a la del problema original cuando los parámetros pequeños tienden a cero. Los coeficientes de la ecuación homogeneizada son llamados coeficientes efectivos u homogeneizados del medio heterogéneo original.

La propuesta de investigación de esta tesis de maestría está motivada por el desarrollo y la solución de un problema de dielectricidad lineal que involucra a operadores elípticos con coeficientes complejos. Este tipo de problemas son de gran interés en diversas aplicaciones. Materiales compuestos con propiedades dieléctricas complejas son útiles, por ejemplo: en modelos para el estudio de tejidos biológicos contenientes de celdas tubulares, tales como los músculos esqueléticos [5]; en aplicaciones para el tratamiento y diagnóstico no invasivo, como tomografía por impedancia eléctrica [6], diálisis [7], ablación e hipertermia por radio-frecuencia [8], entre otras.

La metodología que se propone desarrollar durante la ejecución de este trabajo permitirá obtener modelos matemáticos para el cálculo de los coeficientes efectivos. La metodología se basa en la solución de una ecuación diferencial con coeficientes complejos a través del estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes reales. Esto facilitará el proceso de separación de las partes real e imaginaria en las expresiones finales de los coeficientes efectivos los cuales dependen de la solución de problemas locales o problemas sobre la celda *periódica básica*.

Los problemas locales están representados por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, sujetos a condiciones de contacto sobre las interfaces existentes entre las fases constituyentes que conforman al compuesto, y condiciones de periodicidad

en las caras opuestas de la celda periódica. La solución analítica de tales problemas solo puede alcanzarse para geometrías particulares de las inclusiones o la celda periódica. Por ejemplo, en el caso de medios fibrosos con sección transversal circular de las fibras es posible encontrar la solución usando elementos de la teoría de funciones elípticas [9], [10].

Por otro lado, la derivación de fórmulas para los coeficientes efectivos de compuestos dieléctricos con constantes dieléctricas complejas se lleva a cabo mediante la homogeneización del sistema equivalente de ecuaciones con coeficientes reales. En el caso de inclusiones circulares isótropas empotradas en una matriz cuadrada isótropa, las fórmulas se dan explícitamente y dependen de una matriz cuadrada simétrica $2n_o \times 2n_o$ que facilita el cálculo de los coeficientes efectivos para cualquier orden de truncamiento n_o . Especialmente para valores pequeños de n_o encontraremos fórmulas cortas que son muy útiles en la determinación de las propiedades de mejora de ganancia y mejora de pérdida de un compuesto homogeneizado.

El artículo [10] fue un pilar fundamental para llevar a cabo este proyecto. A su vez, es importante hacer notar que existen similitudes y diferencias que enriquecen los resultados de tal trabajo. En las siguientes líneas se darán referencias de algunas de ellas:

1. Similitudes:

- a) Formulación del problema para operador elíptico con coeficientes complejos.
- b) Aplicación del método de homogeneización asintótica usando notación matricial.
- c) Solución de los problemas locales. Caso isótropo.
- d) Cálculo de expresiones explícitas para los coeficientes efectivos. Caso isótropo.
- e) Comparación de los coeficientes efectivos usando truncamiento sucesivo.

2. Diferencias:

- a) En [10] la distribución periódica del material adopta una forma cuadrada (con periodos $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = i$) con inclusión circular, mientras que en el presente trabajo tal distribución será hexagonal (con periodos $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi i}{3}}$) con inclusión circular.
- b) Debido a la geometría de la celda periódica(hexagonal), los sistemas lineales cuadráticos de tamaño $2n \times 2n$ se reducen ligeramente a efecto de la cantidad de ceros que aparecen en sus entradas. Por otro lado, las

entradas n y $n + 1$ de la solución de los sistemas lineales cuadráticos son fundamentales para determinar las aproximaciones sucesivas a los coeficientes efectivos.

Estas diferencias, nos resumen la novedad de este trabajo y fueron presentadas en febrero 2019 en el evento *EUROPEAN - LATIN - AMERICAN CONFERENCE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS* que se llevó a cabo en la Universidad de la Habana, Cuba. Tales resultados fueron publicados en [28].

Respecto a lo anterior, se puede inferir la gran importancia del método de homogeneización asintótica para el cálculo de coeficientes efectivos de materiales compuestos periódicos bifásicos con constituyentes dieléctricas complejas.

En el capítulo 2 se abordarán conceptos importantes tales como relación de orden, expansión asintótica y solución asintótica de una familia de operadores. Estos conceptos están estrechamente relacionados con la teoría de homogeneización.

En el capítulo 3 se dará una introducción al modelo matemático tomando como vía las leyes fundamentales de la electrostática. Finalmente, hablaremos de una equivalencia matemática del modelo introducido con diversos problemas físicos de interés.

En el capítulo 4 se plantearán las ecuaciones y condiciones para un problema de un compuesto periódico bifásico con propiedades dieléctricas reales, y posteriormente se desarrollarán las etapas fundamentales del método de homogeneización aplicado a una familia de estos problemas, cuando los coeficientes son periódicos y rápidamente oscilantes. También, se abordará el problema cuando las propiedades dieléctricas son complejas. Aquí, mediante el método de separación de la parte real e imaginaria de un número complejo nos permitirá pasar del problema con coeficientes complejos a coeficientes matriciales reales. Finalmente, se aplicará el método de homogeneización a este último problema para determinar los coeficientes efectivos (coeficientes de la matriz del problema homogeneizado) que son el objetivo central de este trabajo.

En el capítulo 5 estudiaremos los coeficientes efectivos para el caso de un compuesto bifásico isótropo, donde se determinarán fórmulas analíticas para tales coeficientes efectivos. Como veremos, estos coeficientes dependerán de ciertas constantes que pueden ser determinadas mediante la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Aquí, el sistema lineal de ecuaciones será el truncamiento sucesivo de un sistema lineal infinito para cualquier orden de aproximación.

En el capítulo 6 se calcularán los coeficientes efectivos (parte real e imaginaria) usando las fórmulas que se obtuvieron en el capítulo 5 para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2, 3$ y 4 . Aquí obtendremos fórmulas explícitas que con la ayuda del programa *Wolfram Mathematica 2011* se graficarán en función del área de la fibra para un compuesto con propiedades dieléctricas complejas dadas por:

$$\kappa^{(1)} = 1 - 5i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 30 - 0.3i$$

En tales gráficas, se observará la proximidad de uno respecto al otro según el

orden de truncamiento del sistema lineal. Finalmente, se tomará el compuesto con propiedades dieléctricas

$$\kappa^{(1)} = 2 - 0.3i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 1 - 8i$$

donde serán comparadas las aproximaciones de los coeficientes efectivos (parte real e imaginaria) tomando los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2$ y 3 con los resultados reportados en [21]. Aquí se observará que los coeficientes efectivos para el orden de truncamiento $n_o = 3$ es suficiente para tener una buena aproximación en el intervalo $[0, V_p]$, donde V_p es el límite de percolación.

Estas comparaciones reafirman el uso de fórmulas cortas para investigar los coeficientes efectivos complejos.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Aplicar el método de homogeneización asintótica a un problema que involucra operadores elípticos con fin de conocer las propiedades macroscópicas de un compuesto periódico bifásico fibroso con propiedades dieléctricas complejas.

1.1.2. Objetivos específicos

- Aplicar el método de homogeneización asintótica para obtener los coeficientes efectivos de materiales compuestos periódicos bifásicos fibrosos, con propiedades dieléctricas complejas, cuando hay contacto perfecto sobre la interfaz.
- Determinar fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos parte real(imaginaria) para el caso de un compuesto bifásico isótropo.
- Comparar los coeficientes efectivos (parte real e imaginaria) con los resultados reportados en [21], para el compuesto particular con propiedades dieléctricas:

$$\kappa^{(1)} = 2 - 0.3i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 1 - 8i.$$

Capítulo 2

Conceptos Preliminares

En esta sección se introducirán conceptos y resultados estrechamente relacionados con teoría de la homogeneización asintótica, los cuales serán utilizados a lo largo de el presente trabajo. Su comprensión resulta esencial para lograr un mejor entendimiento de todo el proceso que será desarrollado más adelante.

2.1. Relación de orden

Sea B_ε un espacio normado de funciones $f(x, \varepsilon)$ ($x \in D \subset \mathbb{R}^n$) provisto con la norma $\|f(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon(D)}$ definida para cada $\varepsilon > 0$.

Definición 2.1 (Relación de Orden) Sean $f, g \in B_\varepsilon$. Decimos que

$$f(x, \varepsilon) = O(g(x, \varepsilon)) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0 \text{ en } B_\varepsilon, \quad (2.1.1)$$

si existen constantes $C > 0$ y $\varepsilon_o > 0$, tal que

$$\|f(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon} \leq C \|g(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon} \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_o.$$

En particular, $f(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$ para algún $N \in \mathbb{N}$, es equivalente decir que existen $C_1 > 0$ y $\varepsilon_o > 0$ tal que

$$\|f(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon^N \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_o.$$

Dado que B_ε es espacio vectorial equipado con la norma $\|\cdot\|_{B_\varepsilon}$, entonces no es difícil demostrar que el conjunto B_ε^n definido como:

$$B_\varepsilon^n := \{(f_1, f_2, \dots, f_n) : f_i \in B_\varepsilon \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (2.1.2)$$

tiene estructura de espacio vectorial para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la aplicación

$$\|\cdot\|_{B_\varepsilon^n} : B_\varepsilon^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\| \varphi \|_{B_\varepsilon^n} := \max_{1 \leq i \leq n} \| \varphi_i \|_{B_\varepsilon},$$

cumple las propiedades de norma en B_ε^n como consecuencia de que la función máxima es una norma y por lo tanto $(B_\varepsilon^n, \| \cdot \|_{B_\varepsilon^n})$ es espacio vectorial normado de donde se puede observar lo siguiente.

Observación 2.1 Si $u \in B_\varepsilon^n$, entonces

$$u = O(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0$$

si y solo si

$$u_i = O(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

Prueba: \Rightarrow] Suponga que $u = O(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$, entonces existen constantes positivas A, ε_0 tal que

$$\| u(x) \|_{B_\varepsilon^n} = \max_{1 \leq i \leq n} \| u_i \|_{B_\varepsilon} \leq A\varepsilon \text{ para cada } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Por lo tanto, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\| u_i \|_{B_\varepsilon} \leq A\varepsilon \text{ para cada } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

de donde se tiene que

$$u_i = O(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

[\Leftarrow Ahora suponga que para cada $i = 1, 2, \dots, n$

$$u_i = O(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0,$$

por lo tanto, existen constantes positivas A_1, A_2, \dots, A_n y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ tal que, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\| u_i \|_{B_\varepsilon} \leq A_i \varepsilon \text{ para cada } \varepsilon \in (0, \varepsilon_i).$$

En particular, como para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\| u_i \|_{B_\varepsilon} \leq A_i \varepsilon \text{ con } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m),$$

donde

$$\varepsilon_m = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \varepsilon_i \},$$

entonces

$$\| u \|_{B_\varepsilon^n} = \max_{1 \leq i \leq n} \| u_i \|_{B_\varepsilon} \leq \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \varepsilon \text{ con } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m).$$

Así,

$$u = O(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$

□

2.2. Expansión asintótica

Definición 2.2 (Expansión asintótica (e.a)) Sea $f(x, \varepsilon)$ que pertenece al espacio normado B_ε . Una serie infinita de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon), \quad (2.2.1)$$

con $g_i \in B_\varepsilon$, que cumpla que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ existe un número M_o , tal que si $m \geq M_o$, entonces

$$f(x, \varepsilon) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N),$$

cuando $\varepsilon \downarrow 0$ en la norma de B_ε , se conoce como **expansión asintótica** de $f(x, \varepsilon)$. (Esta serie no es necesariamente convergente).

Este concepto se refiere a la **e.a** de una función dada, pero un problema aparece cuando se desea determinar la **e.a** de la solución de, por ejemplo, ecuaciones diferenciales donde la función solución es desconocida. Para esto se introduce el concepto de **solución asintótica formal**.

2.3. Solución asintótica formal

Definición 2.3 (Solución asintótica formal (s.a.f)) Dada la ecuación

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad (2.3.1)$$

donde L^ε es un operador de $B_{1\varepsilon}$ en $B_{2\varepsilon}$ ($B_{1\varepsilon}$ y $B_{2\varepsilon}$ son espacios normados), se conoce como **solución asintótica formal** de (2.3.1) a la serie infinita de la forma:

$$u^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon), \quad g_i \in B_{1\varepsilon}, \quad (2.3.2)$$

tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = O(\varepsilon^N), \quad (2.3.3)$$

para todo $m \geq M$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$ en la norma de $B_{2\varepsilon}$, donde

$$u^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon).$$

Observación 2.2 Si el operador \mathcal{L}^ε en (2.3.1) es lineal y existe el estimado

$$\| u \|_{B_{1\varepsilon}} \leq C_1 \varepsilon^{c_2} \| f \|_{B_{2\varepsilon}}, \quad (2.3.4)$$

con $C_1 > 0$ y c_2 constantes independientes de ε , entonces la **s.a.f** de la ecuación (2.3.1) es una **e.a** de la solución exacta del problema.

Prueba: Sea $u^\infty = \sum_{i=0}^\infty \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$, $g_i \in B_{1\varepsilon}$, la **s.a.f** de (2.3.1), entonces para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = g, \quad (2.3.5)$$

para todo $m \geq M$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Aquí $g = O(\varepsilon^N)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Aplicando la linealidad del operador \mathcal{L}^ε en (2.3.5) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon(u^{(m)} - u) &= \mathcal{L}^\varepsilon(u^{(m)}) - \mathcal{L}^\varepsilon(u) \\ &= f + g - f \\ &= g. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

De (2.3.6) se tiene que existen constantes positivas C_1 y c_2 independientes de ε tal que

$$\| u^{(m)} - u \|_{B_{1\varepsilon}} \leq C_1 \varepsilon^{c_2} \| g \|_{B_{2\varepsilon}}. \quad (2.3.7)$$

Por otro lado, dado que $g = O(\varepsilon^N)$, entonces existen constantes positivas C_2 y ε_o tal que

$$\| g \|_{B_{2\varepsilon}} \leq C_2 \varepsilon^N, \quad (2.3.8)$$

para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$.

Tomando en cuenta la desigualdad (2.3.8) en (2.3.7) se tiene

$$\| u^{(m)} - u \|_{B_{1\varepsilon}} \leq C_1 C_2 \varepsilon^{c_2} \varepsilon^N = C \varepsilon^{c_2+N} \leq C \varepsilon^N, \quad (2.3.9)$$

para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$.

□

Capítulo 3

Ecuaciones de Maxwell. Una introducción al modelo matemático

En el presente capítulo se dará una breve introducción a un modelo matemático definido por leyes fundamentales de la electrostática. También se describirá la equivalencia matemática del modelo introducido con diversos problemas físicos, - de aquí la importancia de este trabajo cuyos resultados pueden aplicarse a diversos problemas físicos -.

A lo largo de este trabajo es importante dar información respecto a la notación empleada. Una de estas es la representación de un vector o de un campo vectorial. Estos objetos matemáticos serán denotados mediante letras en “**negrita**”.

3.1. Leyes fundamentales de la electrostática

Esta sección partirá, a saber, de dos leyes fundamentales de la electrostática, la ley de *Coulomb* y el principio de superposición, tal como se enuncia a continuación. Supongamos dos cargas puntuales de valor q_1 y q_2 separadas una distancia r .

La Ley de *Coulomb* establece que: *Dos cargas eléctricas estacionarias se repelen o se atraen entre sí con una fuerza proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional a su distancia mutua.*

Podemos expresarla abreviadamente en forma vectorial como:

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}, \quad (3.1.1)$$

donde q_1 y q_2 son números escalares que dan el valor y signo de las cargas respectivas, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ es el vector unitario en la dirección de la carga q_1 a q_2 y \mathbf{F}_2 es la fuerza que actúa sobre la carga q_2 , ver [24], pág. 7. Así, entre otras cosas, la ecuación (3.1.1) expresa que entre las cargas de signos iguales se repelen y las cargas de signo distinto atraen y la fuerza es Newtoniana, es decir;

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$

El vector \hat{r}_{21} indica que la fuerza es paralela a la recta que las une. El valor de la constante k en la ecuación (3.1.1) depende del sistema de unidades en el que se expresen r , \mathbf{F} y q . En el Sistema Internacional, r se mide en metros, \mathbf{F} en newton y q en coulomb. Cuando la carga se encuentra en el vacío, la constante k depende de la constante de permitividad del vacío ε_o , en la forma

$$k = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_o},$$

donde el valor de ε_o es:

$$\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}, \quad (3.1.2)$$

donde F es el *faradio* y m es *metro* en el SI (Sistema Internacional de Unidades). Para medios lineales, homogéneos e isotrópicos distintos al vacío, la permitividad ε se expresa como:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o,$$

donde ε_r es la *permitividad* del medio.

Más adelante, comentaremos brevemente como se introducen los medios materiales en la descripción del fenómeno electromagnético. En cuanto al principio de superposición, establece que la fuerza que experimenta una carga dada debida a una distribución de cargas es la suma vectorial de las fuerzas que producirían cada una de las cargas de la distribución si estuvieran aisladas del resto.

Definición 3.1 *Se define el campo eléctrico \mathbf{E} creado por la carga q' en la posición de la carga q como la fuerza que experimenta la unidad de carga:*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q},$$

de donde se sigue que:

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.1.3)$$

Las unidades del campo eléctrico \mathbf{E} , en el SI, son

$$\frac{N}{C} \quad \text{o} \quad \frac{V}{m},$$

donde N, C, V y m son *newtons*, *coulomb*, *voltios* y *metros*, respectivamente. Por otra parte, el principio de superposición se expresa como:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (3.1.4)$$

Definición 3.2 Se define el campo vectorial desplazamiento eléctrico \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.1.5)$$

asumiendo una relación lineal entre \mathbf{E} y \mathbf{D} .

La ecuación (3.1.5) es llamada relación *constitutiva* que en general depende el medio. Además, su flujo a través de una superficie cerrada que englobe a la carga es igual a la carga total:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i. \quad (3.1.6)$$

Cuando se trabaja con medios materiales reales (medios polarizables), no el vacío, la presencia de un campo eléctrico en dichos medios puede provocar que las cargas de las moléculas, neutras en un principio, se desplacen de forma que dichas moléculas se polarizan. También puede ocurrir que la molécula inicialmente se encuentre polarizada - o lo que es lo mismo, que tenga un momento dipolar permanente -, por lo que el campo hará que se oriente en determinada forma. En general, el campo final será la suma del campo inicial más las contribuciones de los distintos dipolos y la distribución de campo en el interior del material será difícil de determinar y presentará grandes variaciones a nivel microscópico. De acuerdo con la evidencia experimental, se verifica que:

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathcal{P}_e, \quad (3.1.7)$$

donde \mathcal{P}_e es la polarización eléctrica.

En medios *lineales, homogéneos e isótropos* (3.1.7) se convierte en:

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \epsilon_o \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_o (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.1.8)$$

donde χ_e es una constante positiva que depende del material y se denomina *susceptibilidad* eléctrica, ver [25], pág. 42.

3.2. Propiedades integrales y diferenciales de \mathbf{E} y \mathbf{D}

Estudiemos las propiedades integrales y diferenciales de \mathbf{E} a partir de la ecuación (3.1.3) utilizando resultados conocidos del cálculo vectorial. De la ley de *Gauss* (ver

[20], pág. 176) se tiene

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dV, \quad (3.2.1)$$

donde S es la superficie cerrada que encierra el volumen V y ρ_v la densidad de carga volumétrica que a su vez se define como:

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (3.2.2)$$

Integrando la ecuación (3.2.2) sobre el volumen que encierra la carga total se tiene:

$$Q_T = \int_V dq = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (3.2.3)$$

Observe que la ecuación (3.1.6) es la ley de *Gauss* para una distribución discreta de carga; Por otro lado, para obtener una expresión diferencial de la ley de *Gauss*, ecuación (3.2.1), aplicamos el teorema de la divergencia de *Gauss* al lado izquierdo de (3.2.1), se tiene:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dV, \quad (3.2.4)$$

donde

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho_v dV, \quad (3.2.5)$$

para cada volumen que encierra la distribución de carga. Por lo tanto, se obtiene la forma diferencial de la ley de *Gauss*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (3.2.6)$$

a su vez resulta ser una de las ecuaciones de *Maxwell* (ver [26], pág. 15). Además, a partir de la ecuación (3.1.5), la ecuación de *Maxwell* (3.2.6) se puede reescribir como:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_v(\mathbf{r}). \quad (3.2.7)$$

Sabemos que la ley constitutiva (3.1.5), depende de las propiedades del medio en el dominio ocupado por el campo eléctrico. Se distinguen tres casos a saber (ver [27], pág. 5):

- (*En el vacío*). En el vacío, la relación constitutiva (3.1.5) viene dada por

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.2.8)$$

donde ε es la constante positiva de *permitividad eléctrica* dada por $\varepsilon = \varepsilon_0$ que, a su vez, está dada por la ecuación (3.1.2).

- (*Material isotrópico no homogéneo*). En este caso, el material no homogéneo ocupa el dominio del campo eléctrico y las propiedades del material no dependen de la dirección del campo (lineal). En este caso, el coeficiente ε de la relación constitutiva (3.1.5) es una función escalar positiva que depende de la posición.
- (*Material anisótropo no homogéneo*). En este caso, las propiedades eléctricas de los materiales constituyentes dependen de la dirección del campo. En tal caso, el coeficiente constitutivo ε de la ecuación (3.1.5) es un *tensor de segundo orden* con componentes posiblemente complejas (matriz de 3×3 definida positiva) definidas sobre \mathbb{R}^3 .

Por otro lado, la ecuación constitutiva (3.1.5) que corresponde al punto número 3 planteado anteriormente, - es decir, para *Material anisótropo no homogéneo*, donde \mathbf{D} y \mathbf{E} se suponen campos vectoriales en \mathbb{R}^3 -, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

o de forma equivalente

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j, \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3. \quad (3.2.10)$$

3.3. Potencial electrostático

En el presente apartado se mostrará que la ecuación de *Maxwell* (3.2.7) toma una forma especialmente importante para el resto del presente trabajo, tal como a continuación se indica.

De la ecuación (3.1.3) se observa que para una distribución discreta de cargas en el espacio, el campo eléctrico \mathbf{E} es puramente radial - es decir - :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

De manera análoga, para una distribución volumétrica de carga, el campo producido en un punto cualquiera puede calcularse dividiendo el volumen total en elementos infinitesimales con carga dq . Entonces, se calcula el campo $d\mathbf{E}$ que produce cada elemento infinitesimal de volumen tratándolos como si fueran cargas puntuales. Por

lo tanto, de la ecuación (3.1.3) se tiene que:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.3.1)$$

El campo resultante en un punto determinado, entonces, es la suma de todos los campos eléctricos debidos a los elementos de carga. Esto es integrando, o sea:

$$\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E}.$$

Ahora, dado que es una distribución volumétrica de carga, se considera una densidad volumétrica de carga

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \frac{dq}{dV}, \quad \text{entonces} \quad dq = \rho_v(\mathbf{r})dV.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(r)dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.3.2)$$

Por otro lado, si \mathbf{A} es campo vectorial arbitrario, dado en coordenadas esféricas, es decir,

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

donde A_r , A_θ y A_ϕ representan las componentes del campo vectorial en la dirección de los nuevos vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, respectivamente.

El operador rotacional aplicado al campo \mathbf{A} en coordenadas esféricas viene dado por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin(\theta)) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Dado que el campo eléctrico \mathbf{E} es puramente radial, ecuación (3.3.2), por lo tanto,

$$\mathbf{E} = f(r) \hat{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}} + 0 \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (3.3.4)$$

Aplicando el operador rotacional al campo eléctrico (3.3.4) se tiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.3.5)$$

Observe que la ecuación (3.3.5) es un caso particular (en la electrostática) de la

ecuación de *Maxwell* (ecuación en forma diferencial de la ley de *Faraday*)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3.6)$$

donde \mathbf{B} es el campo de *inducción magnética*. Por otra parte, aplicando el teorema de *Stokes* a la ecuación (3.3.5), se tiene

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (3.3.7)$$

donde se deduce que \mathbf{E} es conservativo, es decir

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (3.3.8)$$

donde $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ es un potencial. Por consiguiente, la ecuación (3.2.7), se puede reescribir en términos del potencial Φ como:

$$-\nabla(\varepsilon(\mathbf{r})\nabla\Phi) = \rho(\mathbf{r}). \quad (3.3.9)$$

La ecuación (3.3.9) se puede reescribir como:

$$-\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \rho(\mathbf{r}), \quad (3.3.10)$$

donde $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ son las entradas del tensor de segundo orden.

Por otro lado, la ecuación de continuidad viene dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}, \quad (3.3.11)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente. Combinando la ley de *Gauss* ecuación (3.2.6) con (3.3.11) se obtiene

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.3.12)$$

La ley de *Ohm* establece que

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.3.13)$$

donde σ es la conductividad y \mathbf{E} el campo eléctrico. Sustituyendo (3.3.13) y (3.2.6) en (3.3.12) se obtiene que

$$\nabla \cdot \left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathbf{E} \right) = 0. \quad (3.3.14)$$

Cuando el material dieléctrico no es magnético y además el campo eléctrico es

sinusoidal, es decir;

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i\omega t}, \quad (3.3.15)$$

donde ω es la frecuencia, entonces la ecuación (3.3.14) finalmente se puede reescribir como:

$$-\nabla \cdot ((\sigma + i\omega\varepsilon)\nabla\Phi) = 0, \quad (3.3.16)$$

donde $\sigma + i\omega\varepsilon$ es llamada *constante dieléctrica relativa* del medio y Φ es el potencial eléctrico. Así, la ecuación (3.3.16) se puede reescribir como:

$$-\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (3.3.17)$$

El modelo de la ecuación (3.3.16) se puede hallar en [22].

En la ecuación (3.3.10) y en el resto del presente trabajo, el símbolo de suma doble será sustituido simplemente por el convenio de suma o *Notación de Einstein*, según el cual se utilizan índices repetidos para indicar suma.

3.4. Modelo matemático

En esta sección vamos a dar una formulación del modelo matemático que se obtiene vía leyes fundamentales de la electrostática (para un material anisótropo no homogéneo). Además, se mostrará una tabla que muestra la equivalencia matemática de la formulación de diferentes problemas físicos.

Suponga que el cuerpo del compuesto ocupa el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y que además, se conoce el potencial eléctrico Φ en la frontera $\partial\Omega$, de manera que

$$\Phi = \psi, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (3.4.1)$$

A partir de las ecuaciones (3.3.10) y (3.4.1), se define el problema electrostático de contorno:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = f(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega, \\ \Phi = \psi(\mathbf{x}), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

donde $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ son las componentes de un tensor simétrico de segundo orden definido positivo (posiblemente complejas), siendo $f = f(\mathbf{x})$ y $\psi = \psi(\mathbf{x})$ funciones conocidas. El problema electrostático de contorno (3.4.2) tiene equivalencia matemática en la formulación de diversos problemas físicos, ver el prefacio de [23]. A continuación, en la Tabla 3.1 se muestran algunas de estas equivalencias:

Problema	\mathbf{D}	\mathbf{E}	Φ	ε
Conducción térmica	Corriente de calor	Gradiente de temperatura	Temperatura	Conductividad térmica
Conducción eléctrica	Corriente eléctrica	Campo eléctrico	Potencial eléctrico	Conductividad
Dieléctricos	Desplazamiento eléctrico	Campo eléctrico	Potencial eléctrico	Permitividad
Difusión	Corriente de partículas	Gradiente de concentración	Densidad	Difusividad
Magnetismo	Inducción magnética	Intensidad del campo magnético	Potencial magnético	Permeabilidad

Tabla 3.1: Equivalencia matemática en la formulación de algunos problemas físicos.

De aquí que el desarrollo de este trabajo y todos sus resultados sean aplicables a estos diversos problemas.

Observe que el renglón número 4 de la tabla [3.1](#) (problema dieléctrico) corresponde al modelo matemático ecuación [\(3.4.2\)](#), donde \mathbf{D} , \mathbf{E} , Φ y ε son desplazamiento eléctrico, campo electrostático, potencial eléctrico y tensor de permitividad dieléctrica de segundo orden respectivamente.

Por otro lado, los diferentes problemas físicos enunciados en la Tabla [3.1](#), que tiene equivalencia matemática en su formulación, a menudo son encontrados para medios isótropos. Por ejemplo; para *conducción térmica* ver [\[29\]](#), pág. 7, para *conducción eléctrica*, el modelo se puede obtener, por medio de la ley de conservación de carga y considerando que el campo magnético \mathbf{B} es independiente del tiempo en la ley de *Faraday* ver [\[30\]](#), pág. 177 - 179. Para problemas de *difusión* ver [\[31\]](#), pág. 4 y finalmente para problemas *magnéticos*, cuando no hay flujo de corriente en la ley de *Ampère* (ver [\[30\]](#), pág. 177).

Capítulo 4

Metodo de homogeneización asintótica aplicado a compuestos periódicos con coeficientes reales

En el presente capítulo, se plantearán las ecuaciones y condiciones fundamentales que describen a un problema electrostático de contorno referente al estudio de compuestos periódicos bifásicos con propiedades dieléctricas reales y complejas. Además, se describirán las etapas fundamentales del proceso de homogeneización aplicado a una familia de estos problemas cuando los coeficientes de las ecuaciones son diferenciales, periódicos y rápidamente oscilantes, con el objetivo de obtener expresiones que describan el problema homogeneizado, problemas locales y los coeficientes efectivos.

4.1. Planteamiento del problema con componentes reales

Consideremos un material con sección transversal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que se supone suficientemente grandes, acotado y conexo con frontera $\partial\Omega$ suave. Sea $\varepsilon > 0$ un parámetro geométrico pequeño que caracteriza la micro-estructura. Además de las coordenadas globales \mathbf{x} se introducen coordenadas locales o rápidas $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$. Se considera la celda hexagonal Y , en coordenadas globales tal que cubre al dominio Ω . Es decir,

$$\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon,$$

donde Ω_1^ε representa la matriz o conjunto conexo, Ω_2^ε las fibras o conjunto no conexo (una distribución ε -periódica de círculos de radio R_ε) de componentes conexas y $\Omega_1^\varepsilon \cap \Omega_2^\varepsilon = \emptyset$. Por otro lado, Γ^ε es la interfaz entre Ω_1^ε y Ω_2^ε , es decir, $\Gamma^\varepsilon \equiv \partial\Omega_2^\varepsilon$.

Sea $Y \subset \mathbb{R}^2$ la celda básica, cuya replicación genera Ω , la cual está definida en términos de la variable rápida $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, y a su vez, en términos de la variable

global $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en Ω (Figura 4.1).

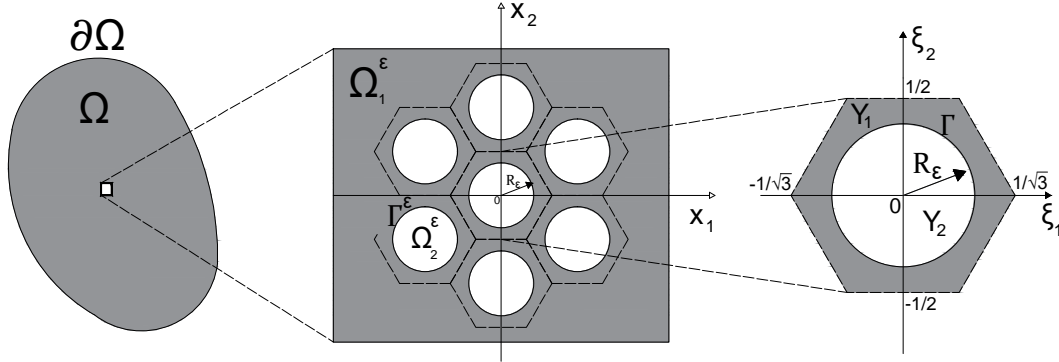


Figura 4.1: (Izquierda) Dominio Ω con frontera $\partial\Omega$ suave. (Centro) Un dominio contenido en Ω mostrando la geometría del compuesto reforzado con fibras en coordenadas globales. (Derecha) Celda hexagonal en coordenadas locales o rápidas.

Se busca una solución u^ϵ al problema:

$$\mathcal{L}^\epsilon u^\epsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_{ij}^\epsilon \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \right) = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma^\epsilon, \quad (4.1.1)$$

$$[[u^\epsilon]] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma^\epsilon, \quad (4.1.2)$$

$$\left[\left[\kappa_{ij}^\epsilon \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} n_i \right] \right] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma^\epsilon, \quad (4.1.3)$$

$$u^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4.1.4)$$

donde κ_{ij}^ϵ son las componentes de un tensor simétrico definido positivo que a su vez representan las propiedades del medio. Además, se suponen en $C^1(\Omega)$ y Y -periódicas, es decir;

$$\kappa_{kj}^\epsilon(\boldsymbol{\xi}) = \kappa_{jk}^\epsilon(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{para } \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \quad k, j = 1, 2, \dots, s$$

y existe $\eta > 0$ tal que

$$\kappa_{kj}^\epsilon(\boldsymbol{\xi}) x_i x_j \geq \eta x_j x_j,$$

para cada $\mathbf{x} \in \Omega$. Aquí $f = f(\mathbf{x})$ es una función conocida, el operador $[[\cdot]] = (\cdot)^1 - (\cdot)^2$ denota el salto de la función adjunta a través de la interfaz Γ^ϵ , n_i denota la i -ésima componente del vector normal a la interfaz. Las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.3) expresan condiciones de continuidad a través de la interfaz Γ^ϵ y finalmente la ecuación (4.1.4) es condición homogénea de *Dirichlet*, donde 0 es la función nula.

4.2. Aplicación del método de homogeneización

En esta sección se aplicará la teoría matemática de homogeneización desarrollada en [13] al problema (4.1.1) - (4.1.4) para obtener el problema homogeneizado que resultará ser condición de existencia para el tercer sumando de la **s.a.f.** Posteriormente, se determinarán dos problemas (problemas locales) cuyas soluciones garantizan la existencia de la **s.a.f.** truncada al tercer sumando. El método de homogeneización será aplicado para el problema en múltiples escalas ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$) y nuestro problema se obtendrá como caso particular cuando $s = 2$.

Se desarrolla u^ε en potencias del parámetro pequeño ε , truncando en el término correspondiente a la segunda potencia de ε , de modo que se obtiene la siguiente aproximación de la solución u^ε

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx u^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (4.2.1)$$

donde se supone que las funciones $u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ son diferenciables en $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$ y Y -periódicas en $\boldsymbol{\xi}$. Se obtendrán expresiones para estas funciones de manera que

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f = O(\varepsilon) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

es decir, se hallarán expresiones para $u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de modo tal que $u^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sea el truncamiento en el segundo término de una **s.a.f.** de (4.1.1).

Por otro lado, si $F = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ función diferenciable en \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$, entonces por la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dF}{dx_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j}. \quad (4.2.2)$$

Definamos los operadores:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} = \sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta_j} \right), \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in \{x, \xi\}. \quad (4.2.3)$$

Sustituyendo (4.2.1) en la ecuación (4.1.1) teniendo en cuenta (4.2.2) y posteriormente agrupando términos de potencias iguales de ε se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(\mathbf{x}) &= \varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{\xi\xi} u_o + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{\xi\xi} u_1 + \mathcal{L}_{\xi x} u_o + \mathcal{L}_{x\xi} u_o) \\ &+ \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{\xi\xi} u_2 + \mathcal{L}_{\xi x} u_1 + \mathcal{L}_{x\xi} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_o - f(\mathbf{x})) \\ &+ \varepsilon^1 (\mathcal{L}_{\xi x} u_2 + \mathcal{L}_{x\xi} u_2 + \mathcal{L}_{xx} u_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{xx} u_2, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Por otro lado, para que la ecuación (4.2.1) sea una solución asintótica formal de (4.1.1), las siguientes condiciones se deben cumplir:

$$\varepsilon^{-2} : \quad \mathcal{L}_{\xi\xi} u_o = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\varepsilon^{-1} : \quad \mathcal{L}_{\xi\xi} u_1 = -\mathcal{L}_{\xi x} u_o - \mathcal{L}_{x\xi} u_o, \quad (4.2.6)$$

$$\varepsilon^0 : \quad \mathcal{L}_{\xi\xi} u_2 = -\mathcal{L}_{xx} u_o - \mathcal{L}_{x\xi} u_1 - \mathcal{L}_{\xi x} u_1 + f(\mathbf{x}). \quad (4.2.7)$$

Por otro lado, con el objetivo de garantizar la existencia de soluciones periódicas de estos problemas, se tiene el siguiente Lema cuya demostración se puede hallar en [13], pág. 106.

Lema 4.1 Sean $\kappa_{kj}(\boldsymbol{\xi})$, $F(\boldsymbol{\xi})$ funciones diferenciables, Y -periódicas y además $\kappa_{kj}(\boldsymbol{\xi})$ satisface las condiciones de simetría y positividad:

$$\kappa_{kj}(\boldsymbol{\xi}) = \kappa_{jk}(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{para cada } k, j = 1, \dots, s$$

$$\kappa_{kj}(\boldsymbol{\xi}) \eta_k \eta_j \geq k \eta_j \eta_j \quad \text{para } \bar{\eta} \in \Omega.$$

Entonces, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución Y -periódica de la ecuación

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} N \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{jk}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}) \right) = F(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.2.8)$$

es

$$\langle F(\boldsymbol{\xi}) \rangle = \int_Y F(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

La solución general de la ecuación (4.2.8) se escribe como

$$N(\boldsymbol{\xi}) = N_1(\boldsymbol{\xi}) + C,$$

donde $N_1(\boldsymbol{\xi})$ es la solución de (4.2.8) de promedio nulo en la celda periódica, es decir,

$$\langle N_1(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0$$

y C constante arbitraria. Antes de aplicar el Lema (4.1) se demostrarán dos lemas que nos permitirán justificar pasos importantes en la construcción de una **s.a.f** del problema.

Lema 4.2 Si F y G son funciones suaves y Y -periódicas, entonces

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right\rangle := \int_Y \frac{\partial F}{\partial \xi_i} d\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (4.2.9)$$

y

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \xi_i} G \right\rangle = - \left\langle F \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \right\rangle. \quad (4.2.10)$$

Prueba: Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $Y = [0, 1]^n$, entonces

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right\rangle &:= \int_{I^n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} d\xi \\ &= \int_{I^{n-1}} (F(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 1, \dots, \xi_n) - (F(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 0, \dots, \xi_n))) d\xi^{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, derivando la función producto FG respecto a ξ_i se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (FG) = F \frac{\partial G}{\partial \xi_i} + G \frac{\partial F}{\partial \xi_i}. \quad (4.2.11)$$

Aplicando el operador $\langle \cdot \rangle$ a la ecuación (4.2.11) y, posteriormente, aplicando (4.2.9) (FG son Y -periódicas), se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \xi_i} G \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial FG}{\partial \xi_i} \right\rangle - \left\langle F \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \right\rangle \\ &= - \left\langle F \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 4.3 *Suponga que existe $\eta > 0$ tal que*

$$\kappa_{kj}^\varepsilon(\xi) x_i x_j \geq \eta x_j x_j, \quad (4.2.12)$$

para cada $\mathbf{x} \in \Omega$. Si

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} u(\mathbf{x}, \xi) = 0, \quad (4.2.13)$$

entonces $u(\mathbf{x}, \xi) = u(\mathbf{x})$.

Prueba: Multiplicando la ecuación (4.2.13) por $u(\mathbf{x}, \xi)$ e integrando sobre la celda periódica Y y, además, teniendo en cuenta la ecuación (4.2.10) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Y u(\mathbf{x}, \xi) \mathcal{L}_{\xi\xi} u(\mathbf{x}, \xi) d\xi \\ &= - \int_Y u \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right) d\xi \\ &= \int_Y \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \kappa_{kj} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} d\xi \\ &= \int_Y \kappa_{kj} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} d\xi \\ &\geq \int_Y \eta \|\nabla_\xi u\|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\| \nabla_{\xi} u \| = 0.$$

□

Por otro lado, se observa que la ecuación (4.2.5) cumple las hipótesis del **Lema (4.1)**, de lo cual existe solución Y -periódica u_o . Del **Lema (4.3)** se tiene que:

$$u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = u_o(\mathbf{x}). \quad (4.2.14)$$

Considerando (4.2.14) en (4.2.6), la ecuación (4.2.6) se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} u_1 = -\mathcal{L}_{\xi x} u_o. \quad (4.2.15)$$

Aplicando el **Lema (4.1)** a la ecuación (4.2.15) con

$$F(\boldsymbol{\xi}) = -\mathcal{L}_{\xi x} u_o \equiv -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kj}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u_o}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial u_o}{\partial x_j} \frac{\partial \kappa_{kj}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}, \quad (4.2.16)$$

se deduce

$$\langle F(\boldsymbol{\xi}) \rangle = -\frac{\partial u_o}{\partial x_j} \int_Y \frac{\partial \kappa_{kj}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} d\boldsymbol{\xi} = 0,$$

por periodicidad de las funciones $\kappa_{kj}^{\varepsilon}$. Por lo tanto, existe solución $u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ Y -periódica en $\boldsymbol{\xi}$, la cual se propone por separación de variables de la forma:

$$u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = N_p(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u_o}{\partial x_p}. \quad (4.2.17)$$

Sustituyendo (4.2.17) en (4.2.15), se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} N_p \frac{\partial u_o}{\partial x_p} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kj}^{\varepsilon} \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial u_o}{\partial x_p} = -\frac{\partial \kappa_{kj}^{\varepsilon}}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_o}{\partial x_j}. \quad (4.2.18)$$

Si se cambia el índice j por p del lado derecho de la ecuación (4.2.18) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kp}^{\varepsilon} + \kappa_{kj}^{\varepsilon} \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial u_o}{\partial x_p} = 0. \quad (4.2.19)$$

Ahora, si $\frac{\partial u_o}{\partial x_p} \neq 0$ en (4.2.19), entonces se busca solución $N_p(\boldsymbol{\xi})$ Y -periódica para cada $p = 1, 2, 3, \dots, s$, del problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\xi\xi} (N_p - \xi_p) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kp}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) + \kappa_{kj}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) = 0, & \text{con } \boldsymbol{\xi} \in Y, \\ \langle N_p(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

Claramente, para cada $p = 1, 2, 3, \dots, s$, la solución Y -periódica al problema (4.2.20) existe, dado que se satisface la condición necesaria y suficiente del **Lema** (4.1) tomando

$$F(\boldsymbol{\xi}) \equiv -\frac{\partial \kappa_{kp}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}.$$

La unicidad de la solución se garantiza con la condición $\langle N_p(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0$. Aplicando la condición necesaria y suficiente del **Lema** (4.1) a la ecuación (4.2.7) se tiene:

$$\langle -\mathcal{L}_{xx}u_o - \mathcal{L}_{x\xi}u_1 - \mathcal{L}_{\xi x}u_1 \rangle + f(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.2.21)$$

Sustituyendo (4.2.14) y (4.2.17) en (4.2.21), resulta

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\kappa_{kj}^\varepsilon N_p) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_j \partial x_p} + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p} + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = f(\mathbf{x}). \quad (4.2.22)$$

o de forma equivalente

$$\left\langle \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\kappa_{kj}^\varepsilon N_p) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_j \partial x_p} \right\rangle + \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = f(\mathbf{x}). \quad (4.2.23)$$

Por otra parte, se observa que el segundo sumando de la ecuación (4.2.23) está dado por:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\kappa_{kj}^\varepsilon N_p) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_j \partial x_p} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\kappa_{kj}^\varepsilon N_p) \right\rangle \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_j \partial x_p} = 0, \quad (4.2.24)$$

dado que κ_{kj}^ε y N_p son Y -periódicas. Por lo tanto, teniendo en cuenta (4.2.24) y sustituyendo el índice j por índice p en el tercer sumando del lado izquierdo de la ecuación (4.2.23), la ecuación (4.2.23) se reescribe como:

$$\left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kp}^\varepsilon \right\rangle \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p} = f(\mathbf{x}). \quad (4.2.25)$$

De donde se obtiene el problema **homogeneizado**:

$$\begin{cases} \widehat{\kappa}_{kp} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p} = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u_o(\mathbf{x}) = 0, & \text{con } \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2.26)$$

donde $\widehat{\kappa}_{kp}$ son los llamados **coeficientes efectivos**, dados por

$$\widehat{\kappa}_{kp} = \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kp}^\varepsilon \right\rangle. \quad (4.2.27)$$

Observe que la ecuación (4.2.25) es la condición de existencia de la solución Y -periódica $u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de la ecuación (4.2.7).

Ahora, desarrollando cada uno de los sumandos de la ecuación (4.2.7) del lado derecho, tenemos:

$$\mathcal{L}_{xx}u_o = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_o}{\partial x_j} \right) = \kappa_{kp}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p}, \quad (4.2.28)$$

$$\mathcal{L}_{x\xi}u_1 = \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p}, \quad (4.2.29)$$

$$\mathcal{L}_{\xi\xi}u_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\kappa_{kj}^\varepsilon N_p \right) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_j \partial x_p} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\kappa_{jk}^\varepsilon N_p \right) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p}. \quad (4.2.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2.25) y (4.2.28) - (4.2.30) en la ecuación (4.2.7), se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\xi\xi}u_2 = [\widehat{\kappa}_{kp} - T_{pq}(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_k \partial x_p}, \quad (4.2.31)$$

donde

$$T_{pq}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\kappa_{jq}^\varepsilon N_p \right) + \kappa_{qj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{pq}^\varepsilon.$$

Claramente la ecuación (4.2.31) satisface la condición necesaria y suficiente del **Lema (4.1)** dado que

$$\widehat{\kappa}_{kp} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\kappa_{jk}^\varepsilon N_p \right) + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kp}^\varepsilon \right\rangle,$$

y, por lo tanto, existe solución Y -periódica de la ecuación (4.2.7), la cual se propone por separación de variables como:

$$u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = N_{pq} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_p \partial x_q}. \quad (4.2.32)$$

Sustituyendo (4.2.32) en (4.2.31), y cambiando los índices k por p y p por q del lado derecho de la ecuación (4.2.31) se tiene

$$\mathcal{L}_{\xi\xi}N_{pq} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_p \partial x_q} = [\widehat{\kappa}_{pq} - T_{pq}(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_p \partial x_q}. \quad (4.2.33)$$

Por otro lado, si

$$\frac{\partial^2 u_o}{\partial x_p \partial x_q} \neq 0,$$

la función $N_{pq}(\boldsymbol{\xi})$ es solución periódica del problema local, dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\xi\xi} N_{pq} = \widehat{\kappa}_{pq} - T_{pq}(\boldsymbol{\xi}), & \text{con } \boldsymbol{\xi} \in Y, \\ \langle N_{pq}(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0, \end{cases} \quad (4.2.34)$$

cuya existencia está garantizada por el **Lema (4.1)**.

Por los resultados anteriormente fundamentados, hemos construido la segunda suma parcial de la **s.a.f** de la ecuación (4.1.1), dada por:

$$u^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = u_o(\mathbf{x}) + \varepsilon N_p(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u_o}{\partial x_p} + \varepsilon^2 N_{pq}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x_p \partial x_q}, \quad \text{con } \boldsymbol{\xi} = \varepsilon^{-1} \mathbf{x}. \quad (4.2.35)$$

Por otro lado, se quiere que $u^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ cumpla las condición de contacto (4.1.2), entonces tenemos que:

$$\llbracket u^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = \llbracket u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket + \varepsilon \llbracket u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket + \varepsilon^2 \llbracket u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0,$$

igualando a cero cada sumando, se tienen las tres ecuaciones:

$$\llbracket u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.2.36)$$

$$\llbracket u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.2.37)$$

$$\llbracket u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.38)$$

Ahora, dado que $u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = u_o(\mathbf{x})$, la ecuación (4.2.36) se transforma en

$$\llbracket u_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = \llbracket u_o(\mathbf{x}) \rrbracket = u_o(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.39)$$

También $u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ se puede representar por la ecuación (4.2.17), por lo tanto la ecuación (4.2.37) se transforma en

$$\llbracket u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rrbracket = \llbracket N_p(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u_o}{\partial x_p} \rrbracket = \llbracket N_p(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket \frac{\partial u_o}{\partial x_p} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.40)$$

Finalmente la ecuación (4.2.37) se reescribe como

$$\llbracket N_p(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.41)$$

De manera análoga, la ecuación (4.2.38) se puede reescribir a partir de la representación de $u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ecuación (4.2.32) como

$$\llbracket N_{pq}(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.42)$$

Con la necesidad de que $u^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ también cumpla la segunda condición de contacto (4.1.3), procedemos a calcular la derivada parcial respecto a x_j (teniendo en

cuenta la regla de la cadena) y multiplicando por κ_{kj}^ε se tiene

$$\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_j} = \kappa_{kj}^\varepsilon \left[\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_o}{\partial \xi_j} + \varepsilon^o \left(\frac{\partial u_o}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_j} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_j} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right]. \quad (4.2.43)$$

Ahora, aplicando la condición

$$\left[\left[\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_j} n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon$$

en (4.2.43) y, posteriormente, igualando a cero los coeficientes que multiplican a ε^{-1} , ε^0 y ε^1 se tienen las condiciones de continuidad:

$$\left[\left[\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_o}{\partial \xi_j} n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.2.44)$$

$$\left[\left[\kappa_{kj}^\varepsilon \left(\frac{\partial u_o}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_j} \right) n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.2.45)$$

$$\left[\left[\kappa_{kj}^\varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_j} \right) n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.46)$$

Sustituyendo la representación de $u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ecuación (4.2.17) en la ecuación (4.2.45) y teniendo en cuenta que $\frac{\partial u_o}{\partial x_j} \neq 0$, entonces (4.2.45) se reescribe como

$$\left[\left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.47)$$

De manera análoga para la ecuación (4.2.46), teniendo en cuenta las representaciones de $u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ y $u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ecuaciones (4.2.17) y (4.2.32), se obtiene la condición de continuidad

$$\left[\left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon N_p + \kappa_{kp}^\varepsilon \frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_p} \right) n_k \right] \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon. \quad (4.2.48)$$

Con el problema (4.2.20) y las condiciones de contacto (4.2.41) y (4.2.47) se obtiene el **primer problema local**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\xi\xi} N_p = -\frac{\partial \kappa_{kj}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}, \quad \text{con } \boldsymbol{\xi} \in Y, \\ \llbracket N_p(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) n_k \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \\ \langle N_p(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (4.2.49)$$

De forma análoga, con (4.2.34) y las condiciones de contacto (4.2.42) y (4.2.48) se obtiene el **segundo problema local**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\xi\xi} N_{pq} = \widehat{\kappa}_{pq} - T_{pq}(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{con } \boldsymbol{\xi} \in Y, \\ \llbracket N_{pq}(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon N_p + \kappa_{kp}^\varepsilon \frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_p} \right) n_k \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \\ \langle N_{pq}(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (4.2.50)$$

Los problemas locales (4.2.49) y (4.2.50) tienen solución periódica a consecuencia del siguiente **Lema (4.4)**, cuya demostración se puede encontrar en [13] pág. 112.

Lema 4.4 Sean $A_{kj}(\boldsymbol{\xi})$, $F_o(\boldsymbol{\xi})$ y $F_k(\boldsymbol{\xi})$ son Y -periódicas, suaves por partes y además $A_{kj}(\boldsymbol{\xi})$ es simétrica y definida positiva. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución Y -periódica del problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi} N &= F_o(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial F_k(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \\ \llbracket N(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \left[\left(A_{kj}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N}{\partial \xi_j} - F_k(\boldsymbol{\xi}) \right) n_k \right] &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{aligned}$$

es que

$$\langle F_o(\boldsymbol{\xi}) \rangle = 0. \quad (4.2.51)$$

A continuación daremos algunas aclaraciones de la aplicación del **Lema (4.4)** a los problemas locales (4.2.49) y (4.2.50). Para el **primer problema local (4.2.49)**

se observa que

$$F_o(\boldsymbol{\xi}) = 0,$$

y

$$F_k(\boldsymbol{\xi}) = -\kappa_{kj}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}),$$

y claramente son Y -periódicas, dado que κ_{kj}^ε y F_o lo son. Por otro lado, la tercera condición de contacto del **primer problema local** es:

$$\left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} \right) n_k \right] = \left[\left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} - F_k \right) n_k \right] = 0.$$

Por lo tanto, se garantiza la existencia de N_p solución Y -periódica del **primer problema local**. Ahora, para finalizar, del **segundo problema local** se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa}_{pq} - T_{pq}(\boldsymbol{\xi}) &= \widehat{\kappa}_{pq} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\kappa_{jq}^\varepsilon N_p) - \kappa_{qj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} - \kappa_{pq}^\varepsilon \\ &= \widehat{\kappa}_{pq} - \left(\kappa_{qj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{pq}^\varepsilon \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\kappa_{jq}^\varepsilon N_p). \end{aligned}$$

Así, para el **segundo problema local** tomando

$$F_o(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\kappa}_{pq} - \left(\kappa_{qj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{pq}^\varepsilon \right)$$

y

$$F_k(\boldsymbol{\xi}) = -\kappa_{jq}^\varepsilon N_p,$$

con κ_{kj}^ε , N_p y $\frac{\partial N_p}{\partial \xi_j}$ Y -periódicas y por consecuencia F_o y F_k también lo son. Por otro lado, la tercera condición de contacto del **segundo problema local** es

$$\left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon N_p + \kappa_{kp}^\varepsilon \frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_p} \right) n_k \right] = \left[\left(\kappa_{kp}^\varepsilon \frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_p} - F_1 \right) n_k \right] = 0.$$

Por lo tanto se garantiza la existencia de N_{pq} solución Y -periódica del **segundo problema local**.

4.3. Conservación de simetría

Otro resultado importante de homogeneización asintótica en problemas multi-dimensionales es que los coeficientes efectivos preservan simetría y carácter definido positivo de los coeficientes originales. Estos resultados serán demostrados a continuación.

De la ecuación (4.2.27) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa}_{kp} &= \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kp}^\varepsilon \right\rangle = \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kj}^\varepsilon \delta_{jp} \right\rangle = \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial \xi_p}{\partial \xi_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_p + \xi_p) \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

donde $M_p = N_p + \xi_p$. Además de (4.3.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa}_{kp} &= \left\langle \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \delta_{lk} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_l} (M_k - N_k) \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle - \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Falta por demostrar que el primer sumando del lado derecho de la ecuación (4.3.2) es simétrico respecto a k y j y el segundo sumando se anula.

Del primer problema local, ecuación (4.2.20), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right) = 0, \quad \text{en } Y. \tag{4.3.3}$$

Ahora si $\phi = \phi(\boldsymbol{\xi})$ es Y -periódica y continuamente diferenciable, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right) \phi(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \text{en } Y. \tag{4.3.4}$$

Por otro lado, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \phi(\boldsymbol{\xi}) \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right) \phi(\boldsymbol{\xi}) + \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l}, \tag{4.3.5}$$

y aplicando el operador de promediación se tiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \phi(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right) \phi(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle + \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} \right\rangle. \tag{4.3.6}$$

Dado que $M_p = N_p + \xi_p$, es Y -periódica, entonces

$$\frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi_j} + \delta_{pj},$$

es Y -periódica. Por lo tanto

$$\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \phi(\boldsymbol{\xi}),$$

es Y -periódica y así se tiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \phi(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.3.6) se reescribe como:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right) \phi(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle = - \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} \right\rangle. \quad (4.3.7)$$

Aplicando (4.3.4) se deduce:

$$\left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} \right\rangle = 0, \quad (4.3.8)$$

para cada $\phi \in C^1(Y)$ Y -periódica. En particular, tomando $\phi(\boldsymbol{\xi}) = N_k(\boldsymbol{\xi})$, se tiene que:

$$\left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle = 0. \quad (4.3.9)$$

De (4.3.9), la ecuación (4.3.2) se reescribe como:

$$\widehat{\kappa}_{kp} = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle. \quad (4.3.10)$$

Aplicando la simetría de los coeficientes κ_{lj}^ε en la ecuación (4.3.10) se reescribe

$$\widehat{\kappa}_{kp} = \left\langle \kappa_{jl}^\varepsilon \frac{\partial M_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_l} \right\rangle = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_p}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_k}{\partial \xi_j} \right\rangle = \widehat{\kappa}_{pk}. \quad (4.3.11)$$

Así se tiene que

$$\widehat{\kappa}_{kp} = \widehat{\kappa}_{pk}. \quad (4.3.12)$$

4.4. Conservación del carácter definido positivo

Otro importante resultado del proceso de homogeneización es la conservación del carácter definido positivo de los coeficientes efectivos, también llamada condición de elipticidad de la ecuación del problema homogeneizado. La condición de elipticidad del problema original para los coeficientes κ_{kj}^ε viene dada por: Existe $c > 0$, tal que para cada $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^s$, se tiene

$$\kappa_{kj}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \eta_k \eta_j \geq c \eta_j \eta_j,$$

para cada $\boldsymbol{\xi} \in Y$.

Sea $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^s$ y $\boldsymbol{\xi} \in Y$, entonces de la ecuación (4.3.10) se tiene

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \frac{\partial M_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle \eta_k \eta_p = \left\langle \kappa_{lj}^\varepsilon \eta_k \frac{\partial M_k}{\partial \xi_l} \eta_p \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \right\rangle. \quad (4.4.1)$$

De la positividad para los coeficientes κ_{lj}^ε se tiene que:

$$\kappa_{lj}^\varepsilon \eta_k \frac{\partial M_k}{\partial \xi_l} \eta_p \frac{\partial M_p}{\partial \xi_j} \geq c \sum_{j=1}^s \left(\eta_k \frac{\partial M_k}{\partial \xi_j} \right)^2, \quad \text{para cada } \boldsymbol{\xi} \in Y. \quad (4.4.2)$$

Sustituyendo (4.4.2) en (4.4.1) tenemos

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p \geq c \sum_{j=1}^s \left\langle \left(\eta_k \frac{\partial M_k}{\partial \xi_j} \right)^2 \right\rangle. \quad (4.4.3)$$

De la desigualdad de *Cauchy – Buniakovski* (Hölder para $p = q = 2$) (ver [17], pág. 41) se deduce:

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p \geq c \sum_{j=1}^s \left\langle \eta_k \frac{\partial M_k}{\partial \xi_j} \right\rangle^2, \quad (4.4.4)$$

que podemos reescribir como:

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p \geq c \sum_{j=1}^s \left[\left\langle \eta_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_j} \right\rangle + \left\langle \eta_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} \right\rangle \right]^2, \quad (4.4.5)$$

pero

$$\left\langle \eta_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_j} \right\rangle = 0$$

y

$$\left\langle \eta_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} \right\rangle = \eta_k \langle \delta_{kj} \rangle.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.4.5) se reescribe como

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p \geq c \sum_{j=1}^s (\eta_k \delta_{kj})^2, \quad (4.4.6)$$

así se tiene

$$\widehat{\kappa}_{kp} \eta_k \eta_p \geq c \eta_k^2 = c \eta_k \eta_k. \quad (4.4.7)$$

4.5. Relación de aproximación de u^ε y u_o

En esta sección se dará una demostración del orden de aproximación de la solución exacta de la ecuación (4.1.1) a la solución del problema homogeneizado (4.2.26).

Suponga que u_o , N_p y N_{pq} son soluciones de los problemas (4.2.26), (4.2.20) y (4.2.34), respectivamente. Entonces, se tiene que $u^{(2)}$ dada por (4.2.35) es solución del problema:

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(\mathbf{x}) = \varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad (4.5.1)$$

donde $\varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ está dado en términos de las potencias de ε^1 y ε^2 de la ecuación (4.2.4). Es decir,

$$\varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \varepsilon^1 (\mathcal{L}_{\xi\mathbf{x}} u_2 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\xi} u_2 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} u_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} u_2.$$

Por otro lado, si $u_o \in C^4(\Omega)$, entonces, existe una constante $C_1 > 0$ independiente de ε (por teorema de *Weierstrass*) tal que:

$$|r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)| \leq C_1 \quad \text{para } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (4.5.2)$$

Además tenemos

$$u^{(2)} \upharpoonright_{\partial\Omega} = u_o \upharpoonright_{\partial\Omega} + \varepsilon u_1 \upharpoonright_{\partial\Omega} + \varepsilon^2 u_2 \upharpoonright_{\partial\Omega} = \varepsilon u_1 \upharpoonright_{\partial\Omega} + \varepsilon^2 u_2 \upharpoonright_{\partial\Omega}. \quad (4.5.3)$$

Considere una $\chi = \chi(\mathbf{x})$ función infinitamente diferenciable tal que

$$\text{Supp}(\chi) \subset B_\varepsilon(\partial\Omega), \quad \chi \upharpoonright_{\partial\Omega} = 1 \quad \text{y} \quad |\chi(\mathbf{x})| \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\left| \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right| \leq C_1, \quad \text{con } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (4.5.4)$$

donde C_1 es una constante positiva independiente de ε .

Por otro lado, consideremos la función

$$a_k(\mathbf{x}, \varepsilon) = \kappa_{kj}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi u_1) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi u_2) \right]. \quad (4.5.5)$$

Bajo las hipótesis de χ se observa claramente que

$$\text{Supp}(a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)) \subset B_\varepsilon(\partial\Omega)$$

y

$$|a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)| \leq K \quad \text{en } \Omega,$$

donde K es una constante independiente de ε . También se puede observar que

$$\|a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)\|_{L_2(\bar{\Omega})} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.5.6)$$

Considere la función $\tilde{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ dada por

$$\tilde{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = u^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \chi(\mathbf{x}) (\varepsilon u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})). \quad (4.5.7)$$

Dado que $\chi \upharpoonright_{\partial\Omega} = 1$, entonces se tiene que:

$$\tilde{u}^{(2)} \upharpoonright_{\partial\Omega} = 0.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon \tilde{u}^{(2)} - f(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (u^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \chi(\mathbf{x}) (\varepsilon u_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))) \right\} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_j} \right) - f(\mathbf{x}) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\kappa_{kj}^\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi u_1) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi u_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Teniendo en cuenta (4.5.1) y (4.5.5), la (4.5.8) se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}^\varepsilon \tilde{u}^{(2)} - f(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(\mathbf{x}) - \frac{\partial a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial x_k} = \varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \frac{\partial a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial x_k}. \quad (4.5.9)$$

Sustituyendo $f(\mathbf{x})$ por el lado izquierdo de la ecuación (4.1.1) y teniendo en cuenta la linealidad del operador \mathcal{L}^ε , la ecuación (4.5.9) se reescribe como:

$$\mathcal{L}^\varepsilon (\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon) = \varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \frac{\partial a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial x_k}. \quad (4.5.10)$$

Por otra parte

$$(\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon) \upharpoonright_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.5.11)$$

Por lo tanto, se tiene el problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon (\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon) = \varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \frac{\partial a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial x_k}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ (\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon) \upharpoonright_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.5.12)$$

Para dar una estimación entre $\tilde{u}^{(2)}$ y u^ε en algún espacio normado, se recurrirá al **Teorema A.10** (ver Apéndice A. Sección A.7) al problema (4.5.12) teniendo en cuenta (4.5.2) y (4.5.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}^2 - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq C \left(\|\varepsilon r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} + \|a_k(\mathbf{x}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(\varepsilon \|r^{(2)}(\mathbf{x}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} + K\sqrt{\varepsilon} \right) \\
&\leq C (C_1\varepsilon + K\sqrt{\varepsilon}) \\
&\leq K_1\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

donde $K_1 = C(C_1 + K)$. Teniendo en cuenta la ecuación (4.5.7) y posteriormente aplicando la desigualdad (4.5.13) se puede obtener una aproximación entre $u^{(2)}$ y u^ε como sigue:

$$\begin{aligned}
\|u^{(2)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} &= \|\tilde{u}^{(2)} + \chi(\mathbf{x}) (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq \|\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\chi(\mathbf{x}) (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq K_1\sqrt{\varepsilon} + C_2\sqrt{\varepsilon} \\
&= K_2\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

donde $K_2 = K_1 + C_2$. De forma análoga, haciendo uso de la desigualdad (4.5.14) se puede obtener una aproximación entre $u^{(1)}$ y u^ε como sigue:

$$\begin{aligned}
\|u^{(1)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} &= \|u^{(1)} - u^{(2)} + u^{(2)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq \|u^{(2)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u^{(2)} - u^{(1)}\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq K_2\sqrt{\varepsilon} + C_3\sqrt{\varepsilon} \\
&= K_3\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

donde $K_3 = K_2 + C_3$. Finalmente, se obtendrá una aproximación entre la solución exacta del problema u^ε y la solución del problema homogeneizado u_o .

$$\begin{aligned}
\|u_o - u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|u_o - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u_o - u^{(1)} + u^{(1)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq \|u^{(1)} - u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_o - u^{(1)}\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leq K_3\sqrt{\varepsilon} + C_4\sqrt{\varepsilon} \\
&= K_4\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

donde $K_4 = K_3 + C_4$.

4.6. Formulación del problema con coeficientes complejos

En esta sección, se abordará el problema (4.1.1) - (4.1.4) cuando los coeficientes son complejos. De la ecuación (3.3.16), se puede observar que los coeficientes pueden representar en un medio dieléctrico las *constantes dieléctricas relativas*, ver [22].

Considere un potencial complejo dado por

$$u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon + i\psi^\varepsilon. \quad (4.6.1)$$

Los coeficientes complejos del tensor en un medio bidimensional Ω están dadas por

$$\kappa_{jl}^\varepsilon = \alpha_{jl}^\varepsilon + i\beta_{jl}^\varepsilon,$$

donde $i^2 = -1$ y $j = 1, 2$. Las funciones reales α_{jl}^ε y β_{jl}^ε definidas en Ω , se suponen continuamente diferenciables, rápidamente oscilantes y εY -periódicas en la variable \mathbf{y} . Tales funciones son definidas como:

$$\alpha_{jl}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_{jl}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \beta_{jl}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \beta_{jl}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.6.2)$$

Por otra parte, se suponen las condiciones de simetría para las funciones $\alpha_{jl}^\varepsilon, \beta_{jl}^\varepsilon$ y la condición de positividad de la matriz de coeficientes α_{jl}^ε . Es decir;

$$\alpha_{jl}^\varepsilon = \alpha_{ij}^\varepsilon \quad \beta_{jl}^\varepsilon = \beta_{ij}^\varepsilon \quad (4.6.3)$$

y

$$\alpha_{jl}^\varepsilon(\mathbf{x})a_ja_l \geq ka_ja_l, \quad (4.6.4)$$

donde $k > 0$ y $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ vector arbitrario. Ahora, el problema dieléctrico complejo puede ser escrito como un sistema real de ecuaciones diferenciales parciales como a continuación se indica.

Dado que $\kappa_{jl}^\varepsilon = \alpha_{jl}^\varepsilon + i\beta_{jl}^\varepsilon$, y $u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon + i\psi^\varepsilon$, entonces sustituyendo en la ecuación (4.1.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_l} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\alpha_{jl}^\varepsilon + i\beta_{jl}^\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\alpha_{jl}^\varepsilon, -\beta_{jl}^\varepsilon) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} \\ \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \end{pmatrix} + i(\beta_{jl}^\varepsilon, \alpha_{jl}^\varepsilon) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} \\ \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \end{pmatrix} \right) &= f(\mathbf{x}) + 0i. \end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} - \beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = f(\mathbf{x}) \quad (4.6.5)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} + \alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = 0. \quad (4.6.6)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.1.1) con $\kappa_{jl}^\varepsilon = \alpha_{jl}^\varepsilon + i\beta_{jl}^\varepsilon$ y $u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon + i\psi^\varepsilon$ es equivalente al sistema

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\begin{pmatrix} \alpha_{jl}^\varepsilon & -\beta_{jl}^\varepsilon \\ -\beta_{jl}^\varepsilon & -\alpha_{jl}^\varepsilon \end{pmatrix} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6.7)$$

donde

$$U^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varphi^\varepsilon \\ \psi^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

De manera análoga para la ecuación (4.1.3) con $\kappa_{jl}^\varepsilon = \alpha_{jl}^\varepsilon + i\beta_{jl}^\varepsilon$, y $u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon + i\psi^\varepsilon$, se tiene

$$\left[\left[\kappa_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_l} n_j \right] \right] = \left[\left[\left(\alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} - \beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) n_j + i \left(\beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} + \alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) n_j \right] \right] = 0 + i0.$$

Aplicando linealidad del operador $[\cdot]$ e igualando parte real e imaginaria, se tienen las ecuaciones:

$$\left[\left[\left(\alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} - \beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) n_j \right] \right] = 0 \quad (4.6.8)$$

y

$$\left[\left[\left(\beta_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_l} + \alpha_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_l} \right) n_j \right] \right] = 0. \quad (4.6.9)$$

Las ecuaciones (4.6.8) y (4.6.9) se pueden reescribir en una sola ecuación matricial de la forma

$$\left[\left[\begin{pmatrix} \alpha_{jl}^\varepsilon & -\beta_{jl}^\varepsilon \\ -\beta_{jl}^\varepsilon & -\alpha_{jl}^\varepsilon \end{pmatrix} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} n_j \right] \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6.10)$$

Por lo tanto, el problema (4.1.2) - (4.1.4) con condición de frontera homogénea lo podemos escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales reales dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = F(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma^\varepsilon, \quad (4.6.11)$$

$$[U^\varepsilon] = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.6.12)$$

$$\left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} n_j \right] \right] = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad \text{sobre } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.6.13)$$

$$U^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4.6.14)$$

donde F es la función 2-dimensional dada por

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{0}_{2 \times 1}$ es el vector cero en \mathbb{R}^2 , A_{jl}^ε es la matriz real simétrica definida positiva dada por

$$A_{jl}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha_{jl}^\varepsilon & -\beta_{jl}^\varepsilon \\ -\beta_{jl}^\varepsilon & -\alpha_{jl}^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4.6.15)$$

y finalmente $\mathbf{0}$ en la ecuación (4.6.14) representa una función 2-dimensional cuyas entradas son las funciones idénticamente cero en $\partial\Omega$.

Por otro lado, si $A_{kj}(\boldsymbol{\xi})$ es una matriz $s \times s$ 1-periódica suave a trozos, tal que

$$a_{kj}^{ih}(\boldsymbol{\xi}) = a_{ij}^{kh}(\boldsymbol{\xi}) = a_{kh}^{ij}(\boldsymbol{\xi}) = a_{jk}^{hi}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.6.16)$$

y

$$a_{kj}^{ih}(\boldsymbol{\xi})\eta_{ik}\eta_{hj} \geq k\eta_{ik}\eta_{ik}, \quad (4.6.17)$$

donde k es una constante positiva. El problema de *Dirichlet* para el sistema de ecuaciones en teoría de elasticidad se escribe como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(A_{kj} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6.18)$$

donde $u(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x})$ son funciones s -dimensionales, $f(\mathbf{x}) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, Ω es un dominio acotado en \mathbb{R}^s y $\partial\Omega$ suficientemente suave. Las matrices A_{kj} satisfacen (4.6.16) y (4.6.17) (ver Apéndice A. Sección A.8).

El problema (4.6.18) describe el estado de deformación de una muestra elástica hecha de un material compuesto que ocupa el dominio Ω y está sujeto a fuerzas externas distribuidas con densidad $f(\mathbf{x})$ (ver [13], pág. 138). La solución del problema (4.6.18) se entiende en el sentido generalizado (ver Apéndice A. Sección A.8).

De lo anterior se observa que los problemas (4.6.11) con condiciones (4.6.14) está bien planteado como caso particular del problema general (4.6.18).

4.7. Modelo de homogeneización usando notación matricial

Con el objetivo de obtener el problema homogeneizado de (4.6.11) - (4.6.14), la solución exacta U^ε puede ser aproximada por la suma de los tres primeros términos de la **s.a.f** dada por la ecuación (4.2.35) como sigue

$$U^{(2)}(\mathbf{x}) = U_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon U_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 U_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (4.7.1)$$

donde U_o , U_1 y U_2 son funciones vectoriales y además se suponen continuamente diferenciables Y -periódicas. De manera análoga a la sección (4.2), sustituyendo (4.7.1) en la ecuación (4.6.11) y posteriormente agrupando los términos de potencias de ε , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon U^{(2)} &= \varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_o + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_1 + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} U_o + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} U_o) \\ &+ \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_2 + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} U_1 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} U_1 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} U_o - F(\mathbf{x})) \\ &+ \varepsilon^1 (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} U_2 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} U_2 + \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} U_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} U_2 \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} = \sum_{j,l=1}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta_l} \right) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\}.$$

Igualando a cero los coeficientes de potencias no positivas de ε de la ecuación (4.7.2) se obtienen los problemas:

$$\varepsilon^{-2} : \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_o = \mathbf{0}, \quad (4.7.3)$$

$$\varepsilon^{-1} : \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_1 = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} U_o - \mathcal{L}_{\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} U_o, \quad (4.7.4)$$

$$\varepsilon^0 : \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} U_2 = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} U_1 - \mathcal{L}_{\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} U_1 - \mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} U_o + F(\mathbf{x}), \quad (4.7.5)$$

donde \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$ son las nuevas variables independientes. Por otro lado, para dar solución a los problemas (4.7.3) - (4.7.5) es necesario enunciar un problema más general cuya solución se puede entender en el sentido **fuerte** o **débil (generalizado)**, tal como a continuación se enuncia.

Sea $A_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ ($i, j = 1, 2, \dots, s$) función matricial de $n \times n$, f_k para $k = 0, 1, 2, \dots, s$ funciones n -dimensionales donde A_{ij} y f_k son acotadas, medibles, Y -periódicos y $A_{ij} = A_{ij}^T$.

Considere el sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^n

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right) = f_o(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} f_k(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.7.6)$$

Si los coeficientes A_{ij} , f_o y f_k son funciones suaves, entonces una solución Y -periódica de (4.7.6) es llamada solución **fuerte** de (4.7.6).

A partir de la ecuación (4.7.6) podemos obtener la formulación débil de sistema, como a continuación se deduce:

Sea $\phi = \phi(\boldsymbol{\xi})$ función vectorial Y -periódica y continuamente diferenciable, entonces se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \phi \right) = \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \right), \phi \right), \quad (4.7.7)$$

donde los paréntesis (\cdot, \cdot) denotan el producto escalar en \mathbb{R}^n . Sustituyendo la ecuación (4.7.6) en (4.7.7) y aplicando la linealidad de la función producto escalar, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \phi \right) &= \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + (f_o, \phi) + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_k}, \phi \right) \\ &= \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + (f_o, \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} (f_k, \phi) - \left(f_k, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \phi \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (f_k, \phi) = \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + (f_o, \phi) - \left(f_k, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \right). \quad (4.7.8)$$

Ahora, integrando la ecuación (4.7.8) sobre la celda periódica Y , se tiene:

$$- \int_Y \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) d\xi = \int_Y (f_o, \phi) d\xi - \int_Y \left(f_k, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \right) d\xi, \quad (4.7.9)$$

para cada función $\phi = \phi(\xi)$, Y -periódica y continuamente diferenciable.

Observe que si existe $u \in W_2^1(Y)$ tal que satisfaga (4.7.9) para cada función $\phi \in \mathcal{D}(Y)$ Y -periódica, entonces u es solución **generalizada** del problema (4.7.6) sujeta a condición de frontera homogénea (ver Apéndice A. Sección A.8).

Por otro lado, para garantizar la existencia de la solución $U_i (i = 0, 1, 2)$ de los problemas (4.7.3) - (4.7.5) se recurre al siguiente teorema cuya demostración se puede ver en [13], pág. 346.

Teorema 4.1 *Suponga que se tiene*

$$\left\langle \left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \xi_l}, \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \right) \right\rangle \geq k \left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_j}, \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \right) \right\rangle, \quad (4.7.10)$$

con $k > 0$, para cada $U(\xi) \in W_2^1(Y)$. En este caso el sistema (4.7.6) tiene solución débil si y sólo si

$$\langle f_o(\xi) \rangle = \mathbf{0}. \quad (4.7.11)$$

Además, la solución es única, salvo un vector constante aditivo. Es decir:

$$U(\xi) = U_o(\xi) + \mathbf{C}, \quad (4.7.12)$$

donde U_o es solución Y -periódica del sistema (4.7.6) de promedio nulo en Y , es

decir:

$$\langle U_o \rangle = \mathbf{0}. \quad (4.7.13)$$

Por otro lado, debido a que A_{jl}^ε es matriz 2×2 definida positiva y simétrica, entonces la desigualdad (4.7.10) se satisface, dado que es caso particular del sistema 5×5 que se aborda en [16], cuya demostración se encuentra en [16] Apéndice. A.

Aplicando el **Teorema 4.1** a la ecuación (4.7.3), donde se observa que $F_o = \mathbf{0}$, y por lo tanto, cumple la condición necesaria y suficiente (4.7.11), así existe solución U_o independiente de la variable rápida $\boldsymbol{\xi}$, es decir:

$$U_o = U_o(\mathbf{x}). \quad (4.7.14)$$

Por lo tanto, se puede escribir como:

$$U_o(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi^o(\mathbf{x}) \\ \psi^o(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.7.15)$$

Considerando la ecuación (4.7.14) en (4.7.4), se tiene:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}U_1 = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}U_o = -\frac{\partial A_{jl}^\varepsilon}{\partial \xi_j} \frac{\partial U_o}{\partial x_l}. \quad (4.7.16)$$

Ahora, tomando

$$F_o(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\partial A_{jl}^\varepsilon}{\partial \xi_j} \frac{\partial U_o}{\partial x_l}$$

y aplicando condición necesaria y suficiente, se tiene

$$\langle F_o(\boldsymbol{\xi}) \rangle = -\left\langle \frac{\partial A_{jl}^\varepsilon}{\partial \xi_j} \frac{\partial U_o}{\partial x_l} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial A_{jl}^\varepsilon}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial U_o}{\partial x_l} = \mathbf{0}. \quad (4.7.17)$$

De tal manera, existe solución Y -periódica $U_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ del problema (4.7.4) y aplicando el método de separación de variables, podemos suponer a U_1 como

$$U_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = N_q(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U_o}{\partial x_q}, \quad (4.7.18)$$

con N_q matriz 2×2 Y -periódica. Más explícitamente:

$$N_q(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \omega^q(\boldsymbol{\xi}) & g^q(\boldsymbol{\xi}) \\ \zeta^q(\boldsymbol{\xi}) & \xi^q(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, sustituyendo la ecuación (4.7.18) en (4.7.16) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \right) \frac{\partial U_o}{\partial x_q} + \frac{\partial A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial U_o}{\partial x_l} = \mathbf{0}. \quad (4.7.19)$$

Cambiando el índice l por q en el segundo sumando del lado derecho de la ecuación

(4.7.19) se observa que $N_q(\boldsymbol{\xi})$ tiene que ser solución Y -periódica de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \right) = \mathbf{0}, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma. \quad (4.7.20)$$

El problema local (4.7.20) tiene solución única Y -periódica, dado que los problemas:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \mathbf{e}_1^T + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_1^T \right) = \mathbf{0}, \quad \text{en } Y \quad (4.7.21)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \mathbf{e}_2^T + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_2^T \right) = \mathbf{0}, \quad \text{en } Y \quad (4.7.22)$$

cumplen la condición necesaria y suficiente del **Teorema 4.1**, tomando

$$F_o = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_1^T$$

para la ecuación (4.7.21) y

$$F_o = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_2^T$$

para (4.7.22). Aquí \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son los vectores canónicos de \mathbb{R}^2 . La unicidad se garantiza por medio de las condiciones:

$$\langle N_q(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_1^T \rangle = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \langle N_q(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_2^T \rangle = \mathbf{0},$$

dado que $N_q(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_1^T$ y $N_q(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_2^T$ existen salvo un vector constante aditivo.

Aplicando la condición de continuidad (4.6.12) a la ecuación (4.7.18), se tiene

$$[[U_1(\boldsymbol{\xi})]] = [[N_q(\boldsymbol{\xi})]] \frac{\partial U_o}{\partial x_l} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.7.23)$$

de donde se obtiene

$$[[N_q(\boldsymbol{\xi})]] = \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (4.7.24)$$

Sustituyendo (4.7.18) en la condición (4.6.13), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} n_j \right] \right] &= \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_l} (U_o + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2) n_j \right] \right] \\
&= \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_o}{\partial x_l} n_j \right] \right] + \varepsilon \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_l} n_j \right] \right] + \varepsilon^2 \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial x_l} n_j \right] \right] \\
&= \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_o}{\partial x_l} n_j \right] \right] + \varepsilon \left[\left[A_{jl}^\varepsilon \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_l} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_l} \right) n_j \right] \right] \\
&= \left[\left[\left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_o}{\partial x_l} + A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \xi_l} \right) n_j \right] \right] + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.7.25}$$

Ahora sustituyendo (4.7.18) en (4.7.25) se obtiene

$$\left[\left[A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_l} n_j \right] \right] = \left[\left[\left(A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial U_o}{\partial x_l} + A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_l} \frac{\partial U_o}{\partial x_q} \right) n_j \right] \right] + O(\varepsilon). \tag{4.7.26}$$

Tomando $l = q$ en el primer sumando dentro de los paréntesis del lado derecho de (4.7.26) se obtiene finalmente que

$$\left[\left[\left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \right) n_j \right] \right] = \mathbf{0}_{2 \times 2} \text{ sobre } \Gamma. \tag{4.7.27}$$

De las ecuaciones (4.7.20), (4.7.24) y (4.7.27) resulta que $N_q(\boldsymbol{\xi})$ es solución de los **problemas locales**:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \right) = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \text{ en } Y \setminus \Gamma, \tag{4.7.28}$$

$$\llbracket N_q(\boldsymbol{\xi}) \rrbracket = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \text{ sobre } \Gamma, \tag{4.7.29}$$

$$\left[\left[\left(A_{jl}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} + A_{jq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \right) n_j \right] \right] = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \text{ sobre } \Gamma, \tag{4.7.30}$$

$$\langle N_q(\boldsymbol{\xi}) \rangle = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \tag{4.7.31}$$

donde $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ denota la matriz cero de 2×2 .

Por otro lado, aplicando la condición necesaria y suficiente del **Teorema 4.1** al lado derecho de la ecuación (4.7.5), se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{\xi x} U_1 + \mathcal{L}_{x\xi} U_1 + \mathcal{L}_{xx} U_o \rangle - F(\mathbf{x}) &= \langle \mathcal{L}_{\xi x} U_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_{x\xi} U_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_{xx} U_o \rangle - F(\mathbf{x}) \\
&= \langle \mathcal{L}_{x\xi} U_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_{xx} U_o \rangle - F(\mathbf{x}) \\
&= \left\langle A_{jl}^\varepsilon \frac{\partial N_p}{\partial \xi_l} \right\rangle \frac{\partial^2 U_o}{\partial x_j \partial x_p} + \langle A_{jl}^\varepsilon \rangle \frac{\partial^2 U_o}{\partial x_j \partial x_l} - F(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4.7.32}$$

Tomando $j = p$ y $l = q$ en el segundo sumando del lado derecho en (4.7.32), se obtiene

$$\langle \mathcal{L}_{\xi x} U_1 + \mathcal{L}_{x\xi} U_1 + \mathcal{L}_{xx} U_o \rangle = \left\langle A_{pq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) + A_{pl}^\varepsilon \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \right\rangle \frac{\partial^2 U_o}{\partial x_p \partial x_q}. \tag{4.7.33}$$

Por lo tanto, U^o debe ser solución del problema **homogeneizado**:

$$\begin{cases} \widehat{A}_{pq} \frac{\partial^2 U^o}{\partial x_p \partial x_q} = F(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega, \\ U^o = \mathbf{0} & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7.34}$$

donde la matriz efectiva \widehat{A}_{pq} viene dada por:

$$\widehat{A}_{pq} = \left\langle A_{pq}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) + A_{pl}^\varepsilon \frac{\partial N_q(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \right\rangle. \tag{4.7.35}$$

Capítulo 5

Coeficientes efectivos de compuestos periódicos fibrosos con arreglo hexagonal

En este capítulo consideramos un compuesto fibroso bifásico consistente de cilindros circulares idénticos (fibras) rodeados por otro material (matriz). Ambos materiales son homogéneos. Las fibras están orientadas de forma paralela al eje x_3 y están distribuidas de forma periódica siguiendo un arreglo hexagonal, como se muestra en la Figura 4.1. Se asume que existen condiciones de contacto perfecto en las superficies Γ^ε entre las fibras y la matriz.

Por otra parte, se resolverán los problemas locales implícitos en las ecuaciones (4.7.28) - (4.7.31) para el caso isótropo por medio de coeficientes indeterminados, que serán hallados como solución de ciertos sistemas cuadráticos lineales que, a su vez, cada sistema lineal cuadrático es un truncamiento sucesivos de un cierto sistema lineal infinito. También se darán expresiones explícitas de las entradas de la matriz efectiva, ecuación (4.7.35) (coeficientes efectivos), bajo ciertas condiciones de regularidad.

5.1. Forma explícita de los coeficientes efectivos y problemas locales

A partir del problema homogeneizado (4.7.34) y la ecuación de coeficientes efectivos (4.7.35) es posible obtener una forma explícita del problema homogeneizado como a continuación se indica. Dado que la matriz efectiva viene dada por

$$\widehat{A}_{pq} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_{pq} & -\widehat{\beta}_{pq} \\ -\widehat{\beta}_{pq} & -\widehat{\alpha}_{pq} \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial^2 U^o}{\partial x_p \partial x_q} = \left(\frac{\partial^2 \varphi^o}{\partial x_p \partial x_q}, \frac{\partial^2 \psi^o}{\partial x_p \partial x_q} \right)^T,$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} \widehat{\alpha}_{pq} \varphi_{pq}^o - \widehat{\beta}_{pq} \psi_{pq}^o = 0 & \text{en } \Omega, \\ -\widehat{\beta}_{pq} \varphi_{pq}^o - \widehat{\alpha}_{pq} \psi_{pq}^o = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

donde

$$\varphi^o(\mathbf{x}) = u_{01}(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \psi^o(\mathbf{x}) = u_{02}(\mathbf{x}), \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (5.1.2)$$

Por otra parte, de la matriz efectiva ecuación (4.7.35), los coeficientes efectivos vienen dados por:

$$\widehat{\alpha}_{pq} = \left\langle \alpha_{pq} + \alpha_{pj} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_j} - \beta_{pj} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.3)$$

$$\widehat{\alpha}_{pq} = \left\langle \alpha_{pq} + \beta_{pj} \frac{\partial g^q}{\partial y_j} + \alpha_{pj} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.4)$$

$$\widehat{\beta}_{pq} = \left\langle \beta_{pq} - \alpha_{pj} \frac{\partial g^q}{\partial y_j} + \beta_{pj} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.5)$$

$$\widehat{\beta}_{pq} = \left\langle \beta_{pq} + \beta_{pj} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_j} + \alpha_{pj} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.6)$$

donde ω^q , ζ^q , g^q y ξ^q son las entradas de la matriz solución N_q de la ecuación (4.7.28). Por otro lado, el problema (4.7.28) - (4.7.31) se dividirá en dos problemas locales L_1^q y L_2^q como sigue:

De la ecuación (4.7.28), igualando las respectivas entradas de las matrices, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma. \quad (5.1.10)$$

De manera análoga, de la ecuación (4.7.29) se tienen cuatro condiciones de contacto para las funciones ω^q , ζ^q , g^q y ξ^q dadas por:

$$[[\omega^q(\mathbf{y})]] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.11)$$

$$[[\zeta^q(\mathbf{y})]] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.12)$$

$$[[g^q(\mathbf{y})]] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.13)$$

$$[[\xi^q(\mathbf{y})]] = 0, \text{ sobre } \Gamma. \quad (5.1.14)$$

También la ecuación matricial (4.7.30) nos arroja las siguientes condiciones de contacto dadas por:

$$\left[\left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.15)$$

$$\left[\left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.16)$$

$$\left[\left(\beta_{kq} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.17)$$

$$\left[\left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \text{ sobre } \Gamma. \quad (5.1.18)$$

Finalmente, de la ecuación de promedio sobre la celda periódica (4.7.31), se tienen las condiciones:

$$\langle \omega^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad (5.1.19)$$

$$\langle \zeta^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad (5.1.20)$$

$$\langle g^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad (5.1.21)$$

$$\langle \xi^q(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (5.1.22)$$

De las ecuaciones (5.1.7), (5.1.8), (5.1.11), (5.1.12), (5.1.15), (5.1.16), (5.1.19) y (5.1.20) se tiene el problema

Problema L_1^q : Hallar ω^q, ζ^q funciones Y -periódicas tal que:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = 0, \text{ en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = 0, \text{ en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.24)$$

$$[[\omega^q(\mathbf{y})]] = 0, \quad [[\zeta^q(\mathbf{y})]] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.25)$$

$$\left[\left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.1.26)$$

$$\left[\left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.1.27)$$

$$\langle \omega^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad \langle \zeta^q(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (5.1.28)$$

Una vez resuelto el problema L_1^q , es posible determinar los coeficientes efectivos dados por las ecuaciones (5.1.3) y (5.1.6). De manera análoga al problema L_1^q , de las ecuaciones (5.1.9), (5.1.10), (5.1.13), (5.1.14), (5.1.17), (5.1.18), (5.1.21) y (5.1.22) se tiene el problema

Problema L_2^q : Hallar g^q, ξ^q funciones Y -periódicas tal que:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma, \quad (5.1.30)$$

$$[[g^q(\mathbf{y})]] = 0, \quad [[\xi^q(\mathbf{y})]] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.1.31)$$

$$\left[\left(\beta_{kq} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.1.32)$$

$$\left[\left(\alpha_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.1.33)$$

$$\langle g^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad \langle \xi^q(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (5.1.34)$$

Una vez resuelto el problema L_2^q , es posible determinar los coeficientes efectivos dados por las ecuaciones (5.1.4) y (5.1.5).

Observación 5.1 *Los problemas L_1^q, L_2^q y las relaciones de los coeficientes efectivos son equivalentes.*

Prueba: Tomemos la transformación dada por:

$$\begin{cases} \omega^q = \xi^q, \\ \zeta^q = -g^q. \end{cases} \quad (5.1.35)$$

Las expresiones del lado izquierdo de las ecuaciones (5.1.23) - (5.1.28) del problema L_1^q bajo la transformación (5.1.35) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right), \quad (5.1.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right), \quad (5.1.37)$$

$$\llbracket \omega^q(\mathbf{y}) \rrbracket = \llbracket \xi^q(\mathbf{y}) \rrbracket, \quad \llbracket \zeta^q(\mathbf{y}) \rrbracket = -\llbracket g^q(\mathbf{y}) \rrbracket, \quad (5.1.38)$$

$$\left[\left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} - \beta_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = \left[\left(\alpha_{kq} + \alpha_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} + \beta_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_k \right], \quad (5.1.39)$$

$$\left[\left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_p} + \alpha_{kp} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = \left[\left(\beta_{kq} + \beta_{kp} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} - \alpha_{kp} \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] \quad (5.1.40)$$

y

$$\langle \omega^q(\mathbf{y}) \rangle = \langle \xi^q(\mathbf{y}) \rangle, \quad \langle \zeta^q(\mathbf{y}) \rangle = -\langle g^q(\mathbf{y}) \rangle. \quad (5.1.41)$$

Se observa que el lado derecho de las expresiones (5.1.36) - (5.1.41) corresponden a las expresiones del lado izquierdo del problema L_2^q salvo multiplicación por signo, de donde se tiene que los problemas L_1^q y L_2^q son equivalentes. Análogamente, las expresiones de los coeficientes efectivos, ecuaciones (5.1.3) y (5.1.6), se tiene:

$$\widehat{\alpha}_{pq} = \left\langle \alpha_{pq} + \alpha_{pj} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_j} - \beta_{pj} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \alpha_{pq} + \alpha_{pj} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_j} + \beta_{pj} \frac{\partial g^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.42)$$

$$\widehat{\beta}_{pq} = \left\langle \beta_{pq} + \beta_{pj} \frac{\partial \omega^q}{\partial y_j} + \alpha_{pj} \frac{\partial \zeta^q}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \beta_{pq} + \beta_{pj} \frac{\partial \xi^q}{\partial y_j} - \alpha_{pj} \frac{\partial g^q}{\partial y_j} \right\rangle, \quad (5.1.43)$$

que corresponden a las expresiones de los coeficientes efectivos dados por las ecuaciones (5.1.4) y (5.1.6).

□

5.2. Problemas locales y coeficientes efectivos. Caso isótropo

En el problema local L_2^q los coeficientes efectivos dados por las ecuaciones (5.1.4) y (5.1.5) será considerado el caso de dos componentes isotrópicas. Es decir, se considera

$$\begin{cases} \alpha_{jk} = \alpha \delta_{jk} \\ \beta_{jk} = \beta \delta_{jk} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

con α, β constantes dadas y δ_{jk} denota la delta de *Kronecker*. Sustituyendo (5.2.1) en las ecuaciones (5.1.29) y (5.1.30) se obtiene

$$\alpha \left(\sum_{p=1}^2 \frac{\partial^2 g^q}{\partial y_p^2} \right) - \beta \left(\sum_{p=1}^2 \frac{\partial^2 \xi^q}{\partial y_p^2} \right) = 0 \quad (5.2.2)$$

y

$$\beta \left(\sum_{p=1}^2 \frac{\partial^2 g^q}{\partial y_p^2} \right) + \alpha \left(\sum_{p=1}^2 \frac{\partial^2 \xi^q}{\partial y_p^2} \right) = 0. \quad (5.2.3)$$

Las ecuaciones (5.2.2) y (5.2.3) se pueden reescribir como:

$$\alpha \Delta g^q - \beta \Delta \xi^q = 0 \quad (5.2.4)$$

y

$$\beta \Delta g^q + \alpha \Delta \xi^q = 0, \quad (5.2.5)$$

donde $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$. Si además se tiene que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, entonces resolviendo el sistema (5.2.4) - (5.2.5) se obtiene:

$$\Delta g^q = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma \quad (5.2.6)$$

y

$$\Delta \xi^q = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma. \quad (5.2.7)$$

Sustituyendo (5.2.1) en la ecuación (5.1.32) tenemos

$$\left[\left(\beta \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} - \alpha \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = - [\beta] n_q, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (5.2.8)$$

De manera análoga, sustituyendo (5.2.1) en la ecuación (5.1.33) del problema L_2^q se tienen:

$$\left[\left(\alpha \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} + \beta \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_k \right] = - [\alpha] n_q, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (5.2.9)$$

Por lo tanto, bajo la condición (5.2.1) el problema L_2^q se transforma en el problema \mathbf{I}^q que se escribe como:

Problema \mathbf{I}^q : Hallar $g^q(y_1, y_2)$ y $\xi^q(y_1, y_2)$ tal que:

$$\Delta g^q = 0, \quad \Delta \xi^q = 0, \quad \text{en } Y \setminus \Gamma \quad (5.2.10)$$

$$[[g^q(\mathbf{y})]] = 0, \quad [[\xi^q(\mathbf{y})]] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.2.11)$$

$$\left[\left(\alpha \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} + \beta \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_p \right] = - [\alpha] n_q, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.2.12)$$

$$\left[\left(\beta \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} - \alpha \frac{\partial g^q}{\partial y_p} \right) n_p \right] = - \llbracket \beta \rrbracket n_q, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.2.13)$$

$$\langle g^q(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad \langle \xi^q(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (5.2.14)$$

Además, las relaciones de los coeficientes efectivos, ecuaciones (5.1.4) y (5.1.5) se pueden reescribir en la forma:

$$\widehat{\alpha}_{pq} = \left\langle \alpha \delta_{pq} + \beta \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \alpha \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right\rangle, \quad (5.2.15)$$

$$\widehat{\beta}_{pq} = \left\langle \beta \delta_{pq} - \alpha \frac{\partial g^q}{\partial y_p} + \beta \frac{\partial \xi^q}{\partial y_p} \right\rangle, \quad (5.2.16)$$

para $p = j$. Más aún, si $p \neq j$, entonces

$$\widehat{\alpha}_{pq} = \langle \alpha \rangle \delta_{pq} = 0,$$

para $p \neq q$. De forma análoga, $\widehat{\beta}_{pq} = 0$, para $p \neq j$ y $p \neq q$; por otro lado, si las hipótesis del teorema de *Green* se satisfacen, entonces se deducen las siguientes expresiones:

- Caso 1: $p = q = 1$.

De la ecuación (5.2.15) se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{11} &= \left\langle \alpha + \beta \frac{\partial g^1}{\partial y_1} + \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right\rangle = \langle \alpha \rangle + \left\langle \beta \frac{\partial g^1}{\partial y_1} \right\rangle + \left\langle \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right\rangle \\ &= \langle \alpha \rangle + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\beta \frac{\partial g^1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 \\ &= \langle \alpha \rangle + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_2} \beta g^1 dy_2 - \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \beta g^1 dy_2 + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \alpha \xi^1 dy_2 - \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_2} \alpha \xi^1 dy_2 \\ &= \langle \alpha \rangle - \frac{(\beta^{(1)} - \beta^{(2)})}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 - \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 \\ &= \langle \alpha \rangle - \frac{\llbracket \alpha \rrbracket}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 - \frac{\llbracket \beta \rrbracket}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2, \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

donde $\llbracket f \rrbracket = f^{(1)} - f^{(2)}$, $\langle f \rangle = \frac{1}{|Y|} (f^{(1)}|Y_1| + f^{(2)}|Y_2|)$ y $|Y| = |Y_1| + |Y_2|$.

- Caso 2: $p = q = 1$.

De la ecuación (5.2.16) se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{11} &= \left\langle \beta - \alpha \frac{\partial g^1}{\partial y_1} + \beta \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right\rangle = \langle \beta \rangle - \left\langle \alpha \frac{\partial g^1}{\partial y_1} \right\rangle + \left\langle \beta \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right\rangle \\
&= \langle \beta \rangle - \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\alpha \frac{\partial g^1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\beta \frac{\partial \xi^1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 \\
&= \langle \beta \rangle - \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_2} \alpha g^1 dy_2 + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \alpha g^1 dy_2 + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \beta \xi^1 dy_2 - \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_2} \beta \xi^1 dy_2 \\
&= \langle \beta \rangle + \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 - \frac{(\beta^{(1)} - \beta^{(2)})}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 \\
&= \langle \beta \rangle - \frac{[[\beta]]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 + \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2.
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

De forma análoga al caso 1 y 2 se pueden obtener expresiones para $\widehat{\alpha}_{22}$ y $\widehat{\beta}_{22}$ a partir de las ecuaciones (5.2.15) y (5.2.16), para obtener:

- Caso 3: $p = q = 2$.

De la ecuación (5.2.15) se obtiene

$$\widehat{\alpha}_{22} = \langle \alpha \rangle + \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 + \frac{[[\beta]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1, \tag{5.2.19}$$

- Caso 4: $p = q = 2$.

De la ecuación (5.2.16) se obtiene

$$\widehat{\beta}_{22} = \langle \beta \rangle + \frac{[[\beta]]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 - \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1. \tag{5.2.20}$$

5.3. Solución del problema local I^q para $q = 1$.

Con el objetivo de resolver el problema I^q , consideramos una red de hexágonos con inclusiones circulares de radio $R > 0$, tal como se observa en Figura 4.1.

Particularmente se buscan funciones doblemente periódicas de la variable compleja $z = y_1 + iy_2$ definidas en la celda periódica Y , armónicas, con condiciones en la interfaz y las condiciones de promedio nulo sobre la celda periódica Y . Para este caso, los periodos están dados por $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Con el objetivo de resolver el problema \mathbf{I}^1 se propone una solución como:

$$g_1^1(z) = \Re \left\{ a_o^1 z + \sum_{k=1}^{\infty o} a_k^1 \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.3.1)$$

$$\xi_1^1(z) = \Re \left\{ b_o^1 z + \sum_{k=1}^{\infty o} b_k^1 \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.3.2)$$

$$g_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} c_k^1 z^k \right\}, \quad (5.3.3)$$

y

$$\xi_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} d_k^1 z^k \right\}, \quad (5.3.4)$$

donde a_k^1, b_k^1, c_k^1 y d_k^1 son coeficientes indeterminados reales, $\Re \{z\}$ indica la parte real del número complejo z , ζ es la función quasi - periódica de *Weierstrass* (ver Apéndice B. Sección [B.2](#)), $\zeta^{(k)}$ denota la k -ésima derivada y el superíndice o denota que la suma corre sobre los números impares.

En la ecuaciones [\(5.3.1\)](#) y [\(5.3.2\)](#) los coeficientes a_o^1 y b_o^1 vienen dados por:

$$a_o^1 = -a_1^1 \frac{\eta_1}{\omega_1} \quad \text{y} \quad b_o^1 = -b_1^1 \frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad (5.3.5)$$

donde $\eta_j = \zeta(\omega_j)$ para $j = 1, 2$ (quasi - periodos básicos de ζ) y además satisface propiedad de *Legendre* (ver Apéndice B. Propiedad [B.2](#)). La expansión en serie de *Laurent* de g_1^1, ξ_1^1, g_2^1 y ξ_2^1 vienen dadas por:

$$g_1^1(z) = \Re \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (a_l^1 z^{-l} - A_l^1 z^l) \right\}, \quad (5.3.6)$$

$$\xi_1^1(z) = \Re \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (b_l^1 z^{-l} - B_l^1 z^l) \right\}, \quad (5.3.7)$$

$$g_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} c_k^1 z^k \right\}, \quad (5.3.8)$$

y

$$\xi_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} d_k^1 z^k \right\}, \quad (5.3.9)$$

donde

$$A_l^1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^1 \eta_{kl}^1 \quad \text{y} \quad B_l^1 = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k^1 \eta_{kl}^1, \quad (5.3.10)$$

con

$$\eta_{kl}^1 = \begin{cases} \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \text{si } k+l=2, \\ \frac{(k+l-1)!}{k!l!} S_{k+l}, & \text{si } k+l>2, \end{cases} \quad (5.3.11)$$

(ver Apéndice B. Sección [B.3](#)) y S_j es la suma reticular de periodos definida por

$$S_{k+l} = \sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{k+l}} \quad (5.3.12)$$

(ver Apéndice C. Sección [C.1](#)). Por otra parte, teniendo en cuenta la parametrización de la interfaz

$$\Gamma = R e^{i\theta}, \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (5.3.13)$$

y sustituyendo en las ecuaciones [\(5.3.6\)](#) y [\(5.3.8\)](#) se tiene:

$$g_1^1(z) = \Re \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^1 z^{-l} - A_l^1 z^l) \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l) \cos(\theta l) \quad (5.3.14)$$

y

$$g_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^1 z^k \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^1 R^l \cos(\theta l). \quad (5.3.15)$$

De manera análoga para las ecuaciones [\(5.3.7\)](#) y [\(5.3.9\)](#) se tiene:

$$\xi_1^1(z) = \Re \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (b_l^1 z^{-l} - B_l^1 z^l) \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} (b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l) \cos(\theta l) \quad (5.3.16)$$

y

$$\xi_2^1(z) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k^1 z^k \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} d_l^1 R^l \cos(\theta l). \quad (5.3.17)$$

Dado que

$$[[g]] = g_2^1 - g_1^1 = 0, \quad \text{en } \Gamma$$

entonces se cumple que

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^1 R^l \cos(\theta l) - \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l) \cos(\theta l) = 0, \quad (5.3.18)$$

de donde se tiene

$$\sum_{l=1}^{\infty} (c_l^1 R^l - a_l^1 R^{-l} + A_l^1 R^l) \cos(\theta l) = 0. \quad (5.3.19)$$

Por lo tanto, se tiene el sistema infinito

$$a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l = c_l^1 R^l, \quad \text{para cada } l = 1, 3, \dots \quad (5.3.20)$$

De manera análoga para ξ , dado que

$$[\xi] = \xi_2^1 - \xi_1^1 = 0, \quad \text{en } \Gamma$$

se tiene el sistema infinito:

$$b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l = d_l^1 R^l, \quad \text{para cada } l = 1, 3, \dots \quad (5.3.21)$$

De las ecuaciones (5.3.20) y (5.3.21) se tienen los sistemas:

$$\begin{cases} a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l = c_l^1 R^l, & \text{para cada } l, \\ b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l = d_l^1 R^l, & \text{para cada } l. \end{cases} \quad (5.3.22)$$

Por otra parte, las ecuaciones (5.2.12) y (5.2.13) del problema \mathbf{I}^q para $q = 1$ se pueden reescribir más explícitamente como:

$$\left(\alpha^{(1)} \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_p} + \beta^{(1)} \frac{\partial g_1^1}{\partial y_p} \right) n_p - \left(\alpha^{(2)} \frac{\partial \xi_2^1}{\partial y_p} + \beta^{(2)} \frac{\partial g_2^1}{\partial y_p} \right) n_p = - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) n_1 \quad (5.3.23)$$

y

$$\left(\beta^{(1)} \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_p} - \alpha^{(1)} \frac{\partial g_1^1}{\partial y_p} \right) n_p - \left(\beta^{(2)} \frac{\partial \xi_2^1}{\partial y_p} - \alpha^{(2)} \frac{\partial g_2^1}{\partial y_p} \right) n_p = - (\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) n_1. \quad (5.3.24)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{cases} \xi_1^1 = \Re \{ F_{01}^1 \} = n_o, & \text{donde } F_{01}^1 = n_o + i u_o, \\ \xi_2^1 = \Re \{ F_{01}^2 \} = U_o, & \text{donde } F_{01}^2 = U_o + i V_o \end{cases} \quad (5.3.25)$$

y

$$\begin{cases} g_1^1 = \Re \{ \tilde{F}_{01}^1 \} = \tilde{n}_o, & \text{donde } \tilde{F}_{01}^1 = \tilde{n}_o + i \tilde{u}_o, \\ g_2^1 = \Re \{ \tilde{F}_{01}^2 \} = \tilde{U}_o, & \text{donde } \tilde{F}_{01}^2 = \tilde{U}_o + i \tilde{V}_o, \end{cases} \quad (5.3.26)$$

donde F_{01}^1 , F_{01}^2 , \tilde{F}_{01}^1 y \tilde{F}_{01}^2 se suponen funciones de variable compleja y analíticas y por lo tanto se satisfacen las ecuaciones de *Cauchy - Riemann* dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_o}{\partial y_1} = \frac{\partial u_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial n_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial u_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial U_o}{\partial y_1} = \frac{\partial V_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial U_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial V_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad (5.3.27)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{V}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \tilde{U}_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{V}_o}{\partial y_1} \end{cases}. \quad (5.3.28)$$

Dado que

$$\begin{cases} y_1(\theta) = R \cos(\theta), \\ y_2(\theta) = R \sin(\theta), \end{cases} \quad (5.3.29)$$

y además n_o y u_o dependen de y_1 y y_2 , entonces derivando respecto a θ , teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} -n_2 \frac{\partial n_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial n_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dn_o}{d\theta}, \\ -n_2 \frac{\partial u_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial u_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{du_o}{d\theta}. \end{cases} \quad (5.3.30)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones en (5.3.27), el sistema (5.3.30) se reescribe como:

$$\begin{cases} -n_2 \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dn_o}{d\theta}, \\ n_1 \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{du_o}{d\theta}. \end{cases} \quad (5.3.31)$$

Resolviendo el sistema (5.3.31) para $\frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_1}$ y $\frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_2}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{du_o}{d\theta} - n_2 \frac{dn_o}{d\theta} \right) \quad (5.3.32)$$

y

$$\frac{\partial \xi_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{du_o}{d\theta} + n_1 \frac{dn_o}{d\theta} \right). \quad (5.3.33)$$

De forma análoga para \tilde{n}_o y \tilde{u}_o derivando respecto a θ , se tiene el sistema:

$$\begin{cases} -n_2 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dn_o}{d\theta}, \\ -n_2 \frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{u}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{du_o}{d\theta}. \end{cases} \quad (5.3.34)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de (5.3.28) en el sistema (5.3.34) se reescribe como:

$$\begin{cases} -n_2 \frac{\partial g_1^1}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial g_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta}, \\ n_1 \frac{\partial g_1^1}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial g_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{u}_o}{d\theta}. \end{cases} \quad (5.3.35)$$

Resolviendo el sistema (5.3.35) para $\frac{\partial g_1^1}{\partial y_1}$ y $\frac{\partial g_1^1}{\partial y_2}$ se obtiene:

$$\frac{\partial g_1^1}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{d\tilde{u}_o}{d\theta} - n_2 \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta} \right) \quad (5.3.36)$$

y

$$\frac{\partial g_1^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{d\tilde{u}_o}{d\theta} + n_1 \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta} \right). \quad (5.3.37)$$

De la misma forma, podemos obtener expresiones para las derivadas parciales de ξ_2^1 y g_2^1 respecto a y_1 y y_2 teniendo en cuenta la regla de la cadena y las ecuaciones de *Cauchy - Riemann* dadas en (5.3.27) y (5.3.28). De aquí se obtienen los grupos de soluciones:

$$\frac{\partial \xi_2^1}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{dV_o}{d\theta} - n_2 \frac{dU_o}{d\theta} \right), \quad (5.3.38)$$

$$\frac{\partial \xi_2^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{dV_o}{d\theta} + n_1 \frac{dU_o}{d\theta} \right), \quad (5.3.39)$$

y

$$\frac{\partial g_2^1}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{d\tilde{V}_o}{d\theta} - n_2 \frac{d\tilde{U}_o}{d\theta} \right), \quad (5.3.40)$$

$$\frac{\partial g_2^1}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{d\tilde{V}_o}{d\theta} + n_1 \frac{d\tilde{U}_o}{d\theta} \right). \quad (5.3.41)$$

Por otra parte, recordemos que en las ecuaciones (5.3.23) y (5.3.24) es suma sobre p (para $p = 1, 2$). Sustituyendo las ecuaciones (5.3.32), (5.3.33), (5.3.36), (5.3.37) y (5.3.38) - (5.3.41) en (5.3.23) y (5.3.24) se tiene:

$$\frac{\alpha^{(1)}}{R} \frac{du_o}{d\theta} + \frac{\beta^{(1)}}{R} \frac{d\tilde{u}_o}{d\theta} - \frac{\alpha^{(2)}}{R} \frac{dV_o}{d\theta} - \frac{\beta^{(2)}}{R} \frac{d\tilde{V}_o}{d\theta} = -(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) n_1 \quad (5.3.42)$$

y

$$\frac{\beta^{(1)}}{R} \frac{du_o}{d\theta} - \frac{\alpha^{(1)}}{R} \frac{d\tilde{u}_o}{d\theta} - \frac{\beta^{(2)}}{R} \frac{dV_o}{d\theta} + \frac{\alpha^{(2)}}{R} \frac{d\tilde{V}_o}{d\theta} = -(\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) n_1. \quad (5.3.43)$$

Multiplicando las ecuaciones (5.3.42) y (5.3.43) por R y posteriormente integrando respecto a θ , se obtiene:

$$\alpha^{(1)} u_o + \beta^{(1)} \tilde{u}_o - \alpha^{(2)} V_o - \beta^{(2)} \tilde{V}_o = -(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) \mathfrak{S}(z) \quad (5.3.44)$$

y

$$\beta^{(1)} u_o - \alpha^{(1)} \tilde{u}_o - \beta^{(2)} V_o + \alpha^{(2)} \tilde{V}_o = -(\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) \mathfrak{S}(z). \quad (5.3.45)$$

De las ecuaciones en (5.3.25), (5.3.26) y la expansión en serie de *Laurent* de g_1^1 , ξ_1^1 , g_2^1 y ξ_2^1 ecuaciones (5.3.6) - (5.3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} u_o = \mathfrak{S} \{ F_{01}^1 \} &= \mathfrak{S} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (b_l^1 z^{-l} - B_l^1 z^l) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty o} (-b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l) \text{sen}(\theta l), \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_o = \mathfrak{S} \{ \tilde{F}_{01}^1 \} &= \mathfrak{S} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (a_l^1 z^{-l} - A_l^1 z^l) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty o} (-a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l) \text{sen}(\theta l), \end{aligned} \quad (5.3.47)$$

$$V_o = \mathfrak{S} \{ F_{01}^2 \} = \mathfrak{S} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} d_l^1 z^l \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} d_l^1 R^l \text{sen}(\theta l) \quad (5.3.48)$$

y

$$\tilde{V}_o = \mathfrak{S} \{ \tilde{F}_{01}^2 \} = \mathfrak{S} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} c_l^1 z^l \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} c_l^1 R^l \text{sen}(\theta l). \quad (5.3.49)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (5.3.46) - (5.3.49) en las ecuaciones (5.3.44) y (5.3.45) e igualando los coeficientes de las series que multiplican a $\text{sen}(\theta l)$, se obtienen los sistemas infinitos:

$$(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) b_l^1 R^{-l} + [[\alpha]] B_l^1 R^l + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) a_l^1 R^{-l} + [[\beta]] A_l^1 R^l = [[\alpha]] R^l \delta_{1l} \quad (5.3.50)$$

y

$$(\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) b_l^1 R^{-l} + [[\beta]] B_l^1 R^l - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) a_l^1 R^{-l} - [[\alpha]] A_l^1 R^l = [[\beta]] R^l \delta_{1l}. \quad (5.3.51)$$

Multiplicando (5.3.50) y (5.3.51) por

$$\frac{1}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}$$

e introduciendo las siguientes notaciones

$$\chi_\alpha = \frac{[[\alpha]]}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}, \quad \chi_{\beta\alpha}^+ = \frac{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}} \quad y \quad \chi_{\beta\alpha}^- = \frac{[[\beta]]}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}, \quad (5.3.52)$$

se tiene:

$$b_l^1 R^{-l} + \chi_\alpha B_l^1 R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ a_l^1 R^{-l} + \chi_{\beta\alpha}^- A_l^1 R^l = \chi_\alpha R^l \delta_{1l} \quad (5.3.53)$$

y

$$\chi_{\beta\alpha}^+ b_l^1 R^{-l} + \chi_{\beta\alpha}^- B_l^1 R^l - a_l^1 R^{-l} - \chi_\alpha A_l^1 R^l = \chi_{\beta\alpha}^- R^l \delta_{1l}. \quad (5.3.54)$$

Si consideramos los cambios

$$a_l^1 = \frac{\hat{a}_l^1 R^l}{\sqrt{l}} \quad y \quad b_l^1 = \frac{\hat{b}_l^1 R^l}{\sqrt{l}} \quad (5.3.55)$$

en las ecuaciones (5.3.53) y (5.3.54) teniendo en cuenta los coeficientes A_l^1 y B_l^1 de la ecuación (5.3.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} & b_l^1 R^{-l} + \chi_\alpha B_l^1 R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ a_l^1 R^{-l} + \chi_{\beta\alpha}^- A_l^1 R^l \\ &= \hat{b}_l^1 + \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\hat{b}_k^1 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^1 \right) \sqrt{l} R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ \hat{a}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\hat{a}_k^1 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^1 \right) \sqrt{l} R^l \\ &= \hat{b}_l^1 + \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{k l} \hat{b}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) + \chi_{\beta\alpha}^+ \hat{a}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{k l} \hat{a}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) \\ &= \chi_\alpha \sqrt{l} R^l \delta_{1l}, \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

y

$$\begin{aligned}
& \chi_{\beta\alpha}^+ b_l^1 R^{-l} + \chi_{\beta\alpha}^- B_l^1 R^l - a_l^1 R^{-l} - \chi_\alpha A_l^1 R^l \\
&= \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\widehat{b}_k^1 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^1 \right) \sqrt{l} R^l - \widehat{a}_l^1 - \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\widehat{a}_k^1 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^1 \right) \sqrt{l} R^l \\
&= \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) - \widehat{a}_l^1 - \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) \\
&= \chi_{\beta\alpha}^- \sqrt{l} R^l \delta_{1l}.
\end{aligned} \tag{5.3.57}$$

Finalmente de (5.3.56) y (5.3.57) se obtienen los sistemas infinitos dados por:

$$\widehat{b}_l^1 + \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) + \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{a}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) \sqrt{l} R^l = \chi_\alpha \sqrt{l} R^l \delta_{1l}$$

y

$$\chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) - \widehat{a}_l^1 - \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^1 \eta_{kl}^1 R^{k+l} \right) = \chi_{\beta\alpha}^- \sqrt{l} R^l \delta_{1l}$$

que en conjunto son equivalentes al sistema infinito:

$$\begin{pmatrix} \chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I} + \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^1 & \mathbf{I} + \chi_\alpha \mathbf{W}^1 \\ -(\mathbf{I} + \chi_\alpha \mathbf{W}^1) & \chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I} + \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{B}}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{V}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.3.58}$$

donde \mathbf{I} denota la matriz identidad infinita,

$$\tilde{\mathbf{A}}^1 = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1^1 \\ \widehat{a}_3^1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^1 = \begin{pmatrix} \widehat{b}_1^1 \\ \widehat{b}_3^1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} \chi_\alpha R \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} \chi_{\beta\alpha}^- R \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

y \mathbf{W}^1 es la matriz infinita dada por:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{cases} \eta_{11}^1 R^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}, & k+l=2 \\ \sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \eta_{kl}^1 R^{k+l}, & k+l>2. \end{cases}$$

De los coeficientes η_{kl}^1 ecuación (5.3.11), se observa que

$$\eta_{kl}^1 = \eta_{lk}^1 \quad \text{para cada } k, l, \quad (5.3.59)$$

por lo tanto, la matriz infinita \mathbf{W}^1 es simétrica. Más explícitamente se escribe como:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3}\eta_{31}^1 R^4 & \sqrt{5}\eta_{51}^1 R^6 & \cdots \\ \sqrt{3}\eta_{13}^1 R^4 & 3\eta_{33}^1 R^6 & \sqrt{5}\sqrt{3}\eta_{53}^1 R^8 & \cdots \\ \sqrt{5}\eta_{15}^1 R^6 & \sqrt{3}\sqrt{5}\eta_{35}^1 R^8 & 5\eta_{55}^1 R^{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.3.60)$$

Observación 5.2 Note que si el sistema infinito (5.3.58) es truncado para el orden $k = l = 2n_o - 1$, con $n_o \in \mathbb{N}$. En este caso, se transforma en un sistema lineal cuadrado de $2n_o \times 2n_o$.

5.4. Cálculo de coeficientes efectivos para $q = 1$.

En esta sección se darán fórmulas explícitas de los coeficientes efectivos dados por las ecuaciones (5.2.17) y (5.2.18) como se muestra a continuación.

El primer sumando del lado derecho de la ecuación (5.2.17) es dado por:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= \frac{1}{|Y|} (\alpha^{(1)}|Y_1| + \alpha^{(2)}|Y_2|) = \frac{1}{|Y|} (\alpha^{(1)} (|Y| - \pi R^2) + \pi R^2 \alpha^{(2)}) \\ &= \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Por otro lado, el segundo y tercer sumando de (5.2.17) vienen dados por:

$$- \frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 \quad (5.4.2)$$

y

$$- \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2. \quad (5.4.3)$$

Con el objetivo de calcular las integrales (5.4.2) y (5.4.3) se sabe que:

$$\Gamma = (y_1(\theta), y_2(\theta)) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta)),$$

entonces

$$dy_1 = -R\sin(\theta)d\theta \quad (5.4.4)$$

y

$$dy_2 = R \cos(\theta) d\theta. \quad (5.4.5)$$

Sustituyendo (5.3.16) y (5.4.5) en (5.4.2) se obtiene:

$$-\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 = -\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l) \cos(\theta l) \right) \cos(\theta) R d\theta. \quad (5.4.6)$$

Ahora, dado que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta l) \cos(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & \text{si } l = 1 \\ 0, & \text{si } l \geq 2, \end{cases}$$

entonces, la integral (5.4.6) se transforma en

$$-\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 = -\frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (b_1^1 R^{-1} - B_1^1 R^1). \quad (5.4.7)$$

De forma análoga, sustituyendo (5.3.14) y (5.4.5) en (5.4.3) se obtiene

$$-\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 = -\frac{[\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l) \cos(\theta l) \right) \cos(\theta) R d\theta. \quad (5.4.8)$$

Entonces la segunda integral de (5.4.2) se reescribe como:

$$-\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 = -\frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (a_1^1 R^{-1} - A_1^1 R^1). \quad (5.4.9)$$

Ahora sumando las ecuaciones (5.4.1), (5.4.7) y (5.4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{11} &= \langle \alpha \rangle - \frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 - \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 \\ &= \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)} - \frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (b_1^1 R^{-1} - B_1^1 R^1) \\ &\quad - \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (a_1^1 R^{-1} - A_1^1 R^1) \\ &= \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)} - \frac{\pi}{|Y|} ([\alpha] b_1^1 + [\beta] a_1^1) \\ &\quad + \frac{\pi R}{|Y|} ([\alpha] B_1^1 R + [\beta] A_1^1 R). \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Por otro lado, de la ecuación (5.3.50) para $l = 1$ se tiene:

$$[[\alpha]] B_1^1 R + [[\beta]] A_1^1 R = [[\alpha]] R - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) b_1^1 R^{-1} - (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) a_1^1 R^{-1}. \quad (5.4.11)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (5.4.11) en el último sumando de la ecuación (5.4.10) y teniendo en cuenta que $[[\alpha]] = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$ se tiene que el coeficiente efectivo $\hat{\alpha}_{11}$ se escribe como:

$$\hat{\alpha}_{11} = \alpha^{(1)} - \frac{2\pi}{|Y|} (\alpha^{(1)} a_1^1 + \beta^{(1)} b_1^1). \quad (5.4.12)$$

Ahora de manera análoga al cálculo para el coeficiente $\hat{\alpha}_{11}$ se obtendrá la expresión para el coeficiente $\hat{\beta}_{11}$. El primer sumando del lado derecho de la ecuación (5.2.18) está dado por:

$$\begin{aligned} \langle \beta \rangle &= \frac{1}{|Y|} (\beta^{(1)} |Y_1| + \beta^{(2)} |Y_2|) = \frac{1}{|Y|} (\beta^{(1)} (|Y| - \pi R^2) + \pi R^2 \beta^{(2)}) \\ &= \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Por otro lado, el segundo y tercer sumando de (5.2.18) vienen dados por:

$$\frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 \quad (5.4.14)$$

y

$$- \frac{[[\beta]]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2. \quad (5.4.15)$$

Sustituyendo (5.3.14) y (5.4.5) en (5.4.14) se tiene:

$$\frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 = \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (a_l^1 R^{-l} - A_l^1 R^l) \cos(\theta l) \right) \cos(\theta) R d\theta, \quad (5.4.16)$$

y por lo tanto la ecuación (5.4.16) se reescribe como

$$\frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 = \frac{\pi R [[\alpha]]}{|Y|} (a_1^1 R^{-1} - A_1^1 R^1). \quad (5.4.17)$$

Análogamente, para la ecuación (5.4.15) se tiene

$$-\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 = -\frac{[\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (b_l^1 R^{-l} - B_l^1 R^l) \cos(\theta l) \right) \cos(\theta) R d\theta, \quad (5.4.18)$$

y así la ecuación (5.4.18) se reescribe como

$$-\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 = -\frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (b_1^1 R^{-1} - B_1^1 R^1). \quad (5.4.19)$$

Sumando las ecuaciones (5.4.13), (5.4.17) y (5.4.19) se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{11} &= \langle \beta \rangle + \frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^1 dy_2 - \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^1 dy_2 \\ &= \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)} + \frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (a_1^1 R^{-1} - A_1^1 R^1) \\ &\quad - \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (b_1^1 R^{-1} - B_1^1 R^1) \\ &= \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)} + \frac{\pi R}{|Y|} ([\alpha] a_1^1 R^{-1} - [\beta] b_1^1 R^{-1}) \\ &\quad + \frac{\pi R}{|Y|} ([\beta] B_1^1 R - [\alpha] A_1^1 R). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

De la ecuación (5.3.51) para $l = 1$ se tiene:

$$[\beta] B_1^1 R - [\alpha] A_1^1 R = [\beta] R - (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) b_1^1 R^{-1} + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) a_1^1 R^{-1}. \quad (5.4.21)$$

Sustituyendo la ecuación (5.4.21) en el último sumando de (5.4.20) y teniendo en cuenta $[\beta] = \beta^{(1)} - \beta^{(2)}$ se obtiene la expresión para el coeficiente efectivo $\widehat{\beta}_{11}$ por:

$$\widehat{\beta}_{11} = \beta^{(1)} - \frac{2\pi}{|Y|} (\beta^{(1)} a_1^1 - \alpha^{(1)} b_1^1). \quad (5.4.22)$$

Por lo tanto, los coeficientes efectivos para el problema \mathbf{I}^q para $q = 1$ vienen dados por:

$$\begin{cases} \widehat{\alpha}_{11} = \alpha^{(1)} - \frac{2\pi}{|Y|} (\alpha^{(1)} a_1^1 + \beta^{(1)} b_1^1) \\ \widehat{\beta}_{11} = \beta^{(1)} - \frac{2\pi}{|Y|} (\beta^{(1)} a_1^1 - \alpha^{(1)} b_1^1). \end{cases} \quad (5.4.23)$$

5.5. Solución del problema local I^q para $q = 2$.

De manera análoga a la sección (5.3) (problema I^q con $q = 1$), se buscan funciones doblemente periódicas de la variable compleja $z = y_1 + iy_2$ definidas en la celda periódica Y , armónicas que satisfagan las condiciones en la interfaz dada y las condiciones de promedio nulo sobre la celda periódica Y de periodos $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i}$.

La solución al problema (5.2.10) - (5.2.14) para $q = 2$ se propone como:

$$g_1^2(z) = \Im \left\{ a_o^2 z + \sum_{k=1}^{\infty o} a_k^2 \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.5.1)$$

$$\xi_1^2(z) = \Im \left\{ b_o^2 z + \sum_{k=1}^{\infty o} b_k^2 \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.5.2)$$

$$g_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} c_k^2 z^k \right\} \quad (5.5.3)$$

y

$$\xi_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} d_k^2 z^k \right\} \quad (5.5.4)$$

donde a_k^2, b_k^2, c_k^2 y d_k^2 son coeficientes indeterminados reales, $\Im \{z\}$ indica la parte imaginaria del número complejo z , ζ es la función quasi - periódica de *Weierstrass* (ver Apéndice B. Sección B.2), además $\zeta^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de periodos ω_1, ω_2 y el superíndice o denota que la suma corre sobre los números impares.

En las ecuaciones (5.5.1) y (5.5.2) los coeficientes a_o^2 y b_o^2 vienen dados por:

$$a_o^2 = -a_1^2 \frac{\eta_2}{\omega_2} \quad \text{y} \quad b_o^2 = -b_1^2 \frac{\eta_2}{\omega_2} \quad (5.5.5)$$

donde $\eta_j = \zeta(\omega_j)$ para $j = 1, 2$ (quasi - periodos básicos de ζ) y además satisface la propiedad de *Legendre* (ver Apéndice B. Propiedad B.2). La expansión en serie de *Laurent* de las funciones g_1^2 y ξ_1^2 vienen dadas por:

$$g_1^2(z) = \Im \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (a_l^2 z^{-l} - A_l^2 z^l) \right\}, \quad (5.5.6)$$

$$\xi_1^2(z) = \Im \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (b_l^2 z^{-l} - B_l^2 z^l) \right\}, \quad (5.5.7)$$

$$g_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} c_k^2 z^k \right\} \quad (5.5.8)$$

y

$$\xi_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} d_k^2 z^k \right\} \quad (5.5.9)$$

donde

$$A_l^2 = \sum_{k=1}^{\infty o} k a_k^2 \eta_{kl}^2 \quad \text{y} \quad B_l^2 = \sum_{k=1}^{\infty o} k b_k^2 \eta_{kl}^2 \quad (5.5.10)$$

con

$$\eta_{kl}^2 = \begin{cases} -\pi, & \text{si } k+l=2, \\ \frac{(k+l-1)!}{k!l!} S_{k+l}, & \text{si } k+l>2, \end{cases} \quad (5.5.11)$$

(ver Apéndice B. Sección [B.3](#)) y S_j es la suma reticular de periodos. Nuevamente, teniendo en cuenta la representación polar de la interfaz Γ en las ecuaciones [\(5.5.6\)](#)-[\(5.5.9\)](#) y posteriormente tomando la parte imaginaria, se tiene:

$$g_1^2(z) = \Im \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (a_l^2 z^{-l} - A_l^2 z^l) \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} (-a_l^2 R^{-l} - A_l^2 R^l) \text{sen}(\theta l), \quad (5.5.12)$$

$$\xi_1^2(z) = \Im \left\{ \sum_{l=1}^{\infty o} (b_l^2 z^{-l} - B_l^2 z^l) \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} (-b_l^2 R^{-l} - B_l^2 R^l) \text{sen}(\theta l), \quad (5.5.13)$$

$$g_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} c_k^2 z^k \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} c_l^2 R^l \text{sen}(\theta l) \quad (5.5.14)$$

y

$$\xi_2^2(z) = \Im \left\{ \sum_{k=1}^{\infty o} d_k^2 z^k \right\} = \sum_{l=1}^{\infty o} d_l^2 R^l \text{sen}(\theta l). \quad (5.5.15)$$

Por otra parte, de la ecuación [\(5.2.11\)](#) se tiene:

$$[[g]] = g_2^2 - g_1^2 = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (5.5.16)$$

y

$$[[\xi]] = \xi_2^2 - \xi_1^2 = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.5.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones [\(5.5.12\)](#) - [\(5.5.15\)](#) en [\(5.5.16\)](#) y [\(5.5.17\)](#), se tienen los sistemas:

$$\begin{cases} -a_l^2 R^{-l} - A_l^2 R^l = c_l^2 R^l, & \text{para cada } l, \\ -b_l^2 R^{-l} - B_l^2 R^l = d_l^2 R^l, & \text{para cada } l. \end{cases} \quad (5.5.18)$$

Las ecuaciones [\(5.2.12\)](#) y [\(5.2.13\)](#) para $q = 2$ se reescriben más explícitamente como:

$$\left(\alpha^{(1)} \frac{\partial \xi_1^2}{\partial y_p} + \beta^{(1)} \frac{\partial g_1^2}{\partial y_p} \right) n_p - \left(\alpha^{(2)} \frac{\partial \xi_2^2}{\partial y_p} + \beta^{(2)} \frac{\partial g_2^2}{\partial y_p} \right) n_p = - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) n_2 \quad (5.5.19)$$

y

$$\left(\beta^{(1)} \frac{\partial \xi_1^2}{\partial y_p} - \alpha^{(1)} \frac{\partial g_1^2}{\partial y_p} \right) n_p - \left(\beta^{(2)} \frac{\partial \xi_2^2}{\partial y_p} - \alpha^{(2)} \frac{\partial g_2^2}{\partial y_p} \right) n_p = - (\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) n_2. \quad (5.5.20)$$

Además se tienen:

$$\begin{cases} \xi_1^2 = \Im \{ F_{02}^1 \} = \tilde{n}_o, & \text{donde } F_{02}^1 = n_o + i\tilde{n}_o \\ \xi_2^2 = \Im \{ F_{02}^2 \} = \tilde{N}_o, & \text{donde } F_{02}^2 = N_o + i\tilde{N}_o \end{cases} \quad (5.5.21)$$

y

$$\begin{cases} g_1^2 = \Im \{ \tilde{F}_{02}^1 \} = \tilde{m}_o, & \text{donde } \tilde{F}_{02}^1 = m_o + i\tilde{m}_o \\ g_2^2 = \Im \{ \tilde{F}_{02}^2 \} = \tilde{M}_o, & \text{donde } \tilde{F}_{02}^2 = M_o + i\tilde{M}_o \end{cases} \quad (5.5.22)$$

donde F_{02}^1 , F_{02}^2 , \tilde{F}_{02}^1 y \tilde{F}_{02}^2 se suponen funciones analíticas de variable compleja y por consecuencia, satisfacen las ecuaciones de *Cauchy - Riemann* dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial n_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial N_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad (5.5.23)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial m_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial m_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial M_o}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_2} \\ \frac{\partial M_o}{\partial y_2} = -\frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_1} \end{cases}. \quad (5.5.24)$$

Dado que las funciones n_o , \tilde{n}_o , N_o , \tilde{N}_o , m_o , \tilde{m}_o , M_o y \tilde{M}_o dependen de las variables $y_1 = y_1(\theta)$ y $y_2 = y_2(\theta)$, entonces derivando respecto de θ (teniendo en cuenta la regla de la cadena) y posteriormente haciendo uso de las ecuaciones de *Cauchy - Riemann* (5.5.23) y (5.5.24), se obtienen los sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -n_1 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} - n_2 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dn_o}{d\theta} \\ -n_2 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -n_1 \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_1} - n_2 \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dN_o}{d\theta} \\ -n_2 \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{N}_o}{d\theta} \end{array} \right. \quad (5.5.25)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} -n_1 \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_1} - n_2 \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dm_o}{d\theta} \\ -n_2 \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{m}_o}{d\theta} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -n_1 \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_1} - n_2 \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{dM_o}{d\theta} \\ -n_2 \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_1} + n_1 \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_2} = \frac{1}{R} \frac{d\tilde{M}_o}{d\theta} \end{array} \right. \quad (5.5.26)$$

Resolviendo para las derivadas parciales de las funciones \tilde{n}_o , \tilde{m}_o , \tilde{N}_o y \tilde{M}_o respecto a y_1 y y_2 se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_1^2}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{dn_o}{d\theta} + n_2 \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta} \right) \\ \frac{\partial \xi_1^2}{\partial y_2} = \frac{\partial \tilde{n}_o}{\partial y_2} = -\frac{1}{R} \left(n_2 \frac{dn_o}{d\theta} - n_1 \frac{d\tilde{n}_o}{d\theta} \right) \end{array} \right. \quad (5.5.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_2^2}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{dN_o}{d\theta} + n_2 \frac{d\tilde{N}_o}{d\theta} \right) \\ \frac{\partial \xi_2^2}{\partial y_2} = \frac{\partial \tilde{N}_o}{\partial y_2} = -\frac{1}{R} \left(n_2 \frac{dN_o}{d\theta} - n_1 \frac{d\tilde{N}_o}{d\theta} \right) \end{array} \right. \quad (5.5.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_1^2}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{dm_o}{d\theta} + n_2 \frac{d\tilde{m}_o}{d\theta} \right) \\ \frac{\partial g_1^2}{\partial y_2} = \frac{\partial \tilde{m}_o}{\partial y_2} = -\frac{1}{R} \left(n_2 \frac{dm_o}{d\theta} - n_1 \frac{d\tilde{m}_o}{d\theta} \right) \end{array} \right. \quad (5.5.29)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial g_2^2}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_1} = -\frac{1}{R} \left(n_1 \frac{dM_o}{d\theta} + n_2 \frac{d\tilde{M}_o}{d\theta} \right) \\ \frac{\partial g_2^2}{\partial y_2} = \frac{\partial \tilde{M}_o}{\partial y_2} = -\frac{1}{R} \left(n_2 \frac{dM_o}{d\theta} - n_1 \frac{d\tilde{M}_o}{d\theta} \right). \end{cases} \quad (5.5.30)$$

Tomando la suma para $p = 1, 2$ en las ecuaciones (5.5.19) y (5.5.20) y posteriormente sustituyendo las ecuaciones (5.5.27) - (5.5.30), se obtienen las ecuaciones:

$$-\frac{\alpha^{(1)}}{R} \frac{dn_o}{d\theta} - \frac{\beta^{(1)}}{R} \frac{dm_o}{d\theta} + \frac{\alpha^{(2)}}{R} \frac{dN_o}{d\theta} + \frac{\beta^{(2)}}{R} \frac{dM_o}{d\theta} = -(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) n_2 \quad (5.5.31)$$

y

$$-\frac{\beta^{(1)}}{R} \frac{dn_o}{d\theta} + \frac{\alpha^{(1)}}{R} \frac{dm_o}{d\theta} + \frac{\beta^{(2)}}{R} \frac{dN_o}{d\theta} - \frac{\alpha^{(2)}}{R} \frac{dM_o}{d\theta} = -(\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) n_2. \quad (5.5.32)$$

Multiplicando las ecuaciones (5.5.31) y (5.5.32) por $-R$ e integrando respecto a θ se tiene:

$$\alpha^{(1)} n_o + \beta^{(1)} m_o - \alpha^{(2)} N_o - \beta^{(2)} M_o = -(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) \Re(z) \quad (5.5.33)$$

y

$$\beta^{(1)} n_o - \alpha^{(1)} m_o - \beta^{(2)} N_o + \alpha^{(2)} M_o = -(\beta^{(1)} - \beta^{(2)}) \Re(z). \quad (5.5.34)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (5.5.21) y (5.5.22) se tiene:

$$n_o = \Re \{ F_{02}^1 \} = \sum_{l=1}^{\infty} (b_l^2 R^{-l} - B_l^2 R^l) \cos(l\theta), \quad (5.5.35)$$

$$N_o = \Re \{ F_{02}^2 \} = \sum_{l=1}^{\infty} d_l^2 R^l \cos(l\theta), \quad (5.5.36)$$

$$m_o = \Re \{ \tilde{F}_{02}^1 \} = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^2 R^{-l} - A_l^2 R^l) \cos(l\theta) \quad (5.5.37)$$

y

$$M_o = \Re \{ \tilde{F}_{02}^2 \} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 R^l \cos(l\theta). \quad (5.5.38)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.5.35) - (5.5.38) en (5.5.33) y (5.5.34), se obtiene:

$$(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) b_l^2 R^{-l} - \llbracket \alpha \rrbracket B_l^2 R^l + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) a_l^2 R^{-l} - \llbracket \beta \rrbracket A_l^2 R^l = - \llbracket \alpha \rrbracket R^l \delta_{1l} \quad (5.5.39)$$

y

$$(\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) b_l^2 R^{-l} - \llbracket \beta \rrbracket B_l^2 R^l - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) a_l^2 R^{-l} + \llbracket \alpha \rrbracket A_l^2 R^l = - \llbracket \beta \rrbracket R^l \delta_{1l}. \quad (5.5.40)$$

Multiplicando las ecuaciones (5.5.39) y (5.5.40) por

$$\frac{1}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}$$

y tomando los cambios:

$$\chi_\alpha = \frac{\llbracket \alpha \rrbracket}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}, \quad \chi_{\beta\alpha}^+ = \frac{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}} \quad \text{y} \quad \chi_{\beta\alpha}^- = \frac{\llbracket \beta \rrbracket}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}},$$

se tiene:

$$b_l^2 R^{-l} - \chi_\alpha B_l^2 R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ a_l^2 R^{-l} - \chi_{\beta\alpha}^- A_l^2 R^l = -\chi_\alpha R^l \delta_{1l} \quad (5.5.41)$$

$$\chi_{\beta\alpha}^+ b_l^2 R^{-l} - \chi_{\beta\alpha}^- B_l^2 R^l - a_l^2 R^{-l} + \chi_\alpha A_l^2 R^l = -\chi_{\beta\alpha}^- R^l \delta_{1l}. \quad (5.5.42)$$

Haciendo

$$a_l^2 = \frac{\widehat{a}_l^2 R^l}{\sqrt{l}} \quad \text{y} \quad b_l^2 = \frac{\widehat{b}_l^2 R^l}{\sqrt{l}},$$

en las ecuaciones (5.5.41) y (5.5.42) y posteriormente sustituyendo los coeficientes A_l^2 y B_l^2 que vienen dados por la ecuación (5.5.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} & b_l^2 R^{-l} - \chi_\alpha B_l^2 R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ a_l^2 R^{-l} - \chi_{\beta\alpha}^- A_l^2 R^l \\ &= \widehat{b}_l^2 - \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\widehat{b}_k^2 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^2 \right) \sqrt{l} R^l + \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{a}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\widehat{a}_k^2 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^2 \right) \sqrt{l} R^l \\ &= \widehat{b}_l^2 - \chi_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) + \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{a}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) \\ &= -\chi_\alpha \sqrt{l} R^l \delta_{1l}, \end{aligned} \quad (5.5.43)$$

y

$$\begin{aligned}
& \chi_{\beta\alpha}^+ b_l^2 R^{-l} - \chi_{\beta\alpha}^- B_l^2 R^l - a_l^2 R^{-l} + \chi_{\alpha}^- A_l^2 R^l \\
&= \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\widehat{b}_k^2 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^2 \right) \sqrt{l} R^l - \widehat{a}_l^2 + \chi_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty o} k \frac{\widehat{a}_k^2 R^k}{\sqrt{k}} \eta_{kl}^2 \right) \sqrt{l} R^l \\
&= \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^1 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) - \widehat{a}_l^2 + \chi_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) \\
&= -\chi_{\beta\alpha}^- \sqrt{l} R^l \delta_{1l}.
\end{aligned} \tag{5.5.44}$$

Finalmente, de las ecuaciones (5.5.43) y (5.5.44) se tienen los sistemas infinitos dados por:

$$\widehat{b}_l^2 - \chi_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) + \chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{a}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) = -\chi_{\alpha} \sqrt{l} R^l \delta_{1l}$$

y

$$\chi_{\beta\alpha}^+ \widehat{b}_l^2 - \chi_{\beta\alpha}^- \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{b}_k^1 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) - \widehat{a}_l^2 + \chi_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \widehat{a}_k^2 \eta_{kl}^2 R^{k+l} \right) = -\chi_{\beta\alpha}^- \sqrt{l} R^l \delta_{1l}$$

que en conjunto son equivalentes al sistema lineal infinito

$$\begin{pmatrix} \chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I} - \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^2 & \mathbf{I} - \chi_{\alpha} \mathbf{W}^2 \\ -(\mathbf{I} - \chi_{\alpha} \mathbf{W}^2) & \chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I} - \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \tilde{\mathbf{B}}^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{V}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.5.45}$$

donde \mathbf{I} denota la matriz identidad infinita,

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1^2 \\ \widehat{a}_3^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^2 = \begin{pmatrix} \widehat{b}_1^2 \\ \widehat{b}_3^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} R \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} \chi_{\beta\alpha}^- R \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

y \mathbf{W}^2 es la matriz infinita dada por:

$$\mathbf{W}^2 = \begin{cases} \eta_{11}^2 R^2 = -\pi R^2, & k+l=2 \\ \sum_{k=1}^{\infty o} \sqrt{kl} \eta_{kl}^2 R^{k+l}, & k+l>2. \end{cases}$$

Dados los coeficientes η_{kl}^2 ecuación (5.5.11), se observa que

$$\eta_{kl}^2 = \eta_{lk}^2 \quad \text{para cada } k, l, \quad (5.5.46)$$

por lo tanto, la matriz infinita \mathbf{W}^2 es simétrica. Más explícitamente está dada por:

$$\mathbf{W}^2 = \begin{pmatrix} -\pi R^2 & \sqrt{3}\eta_{31}^2 R^4 & \sqrt{5}\eta_{51}^2 R^6 & \cdots \\ \sqrt{3}\eta_{13}^2 R^4 & 3\eta_{33}^2 R^6 & \sqrt{5}\sqrt{3}\eta_{53}^2 R^8 & \cdots \\ \sqrt{5}\eta_{15}^2 R^6 & \sqrt{3}\sqrt{5}\eta_{35}^2 R^8 & 5\eta_{55}^2 R^{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.5.47)$$

Por otro lado, el sistema infinito (5.5.45) puede ser truncado en el orden $k = l = 2n_o - 1$, con $n_o \in \mathbb{N}$. En este caso, tal sistema se transforma en un sistema lineal $2n_o \times 2n_o$.

5.6. Cálculo de coeficientes efectivos para $q = 2$.

En la presente sección se calcularán los correspondientes coeficientes efectivos asociados al problema \mathbf{I}^q para $q = 2$ de forma análoga a la sección (5.4) como a continuación se indica.

El primer sumando de la ecuación (5.2.19) corresponde a la ecuación (5.4.1) que viene dado por

$$\langle \alpha \rangle = \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)}. \quad (5.6.1)$$

Por otro lado, el segundo y tercer sumando del coeficiente efectivo \hat{a}_{22} vienen dados por

$$\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 \quad (5.6.2)$$

y

$$\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1. \quad (5.6.3)$$

Para calcular la primera integral en (5.6.2) se toma el desarrollo en serie de *Laurent* de ξ^2 que viene dado por (5.5.15) y posteriormente sustituyendo los coeficientes $d_l^2 R^l$ primera ecuación en (5.5.18), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 &= \frac{-R [\alpha]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} d_l^2 R^l \text{sen}(\theta l) \right) \text{sen}(\theta) d\theta \\
&= \frac{-R [\alpha]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-b_l^2 R^{-l} - B_l^2 R^l) \text{sen}(\theta l) \text{sen}(\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta l) \text{sen}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & \text{si } l = 1 \\ 0, & \text{si } l \geq 2. \end{cases} \tag{5.6.5}$$

Ahora, aplicando (5.6.5) en (5.6.4), se tiene

$$\frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 = \frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (b_1^2 R^{-1} + B_1^2 R^1). \tag{5.6.6}$$

Análogamente, para la segunda integral en (5.6.3), resulta

$$\begin{aligned}
\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 &= \frac{-R [\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 R^l \text{sen}(\theta l) \right) \text{sen}(\theta) d\theta \\
&= \frac{-R [\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-a_l^2 R^{-l} - A_l^2 R^l) \text{sen}(\theta l) \text{sen}(\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{5.6.7}$$

Aplicando (5.6.5) en (5.6.7), se tiene

$$\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 = \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (a_1^2 R^{-1} + A_1^2 R^1). \tag{5.6.8}$$

Sumando las ecuaciones (5.6.1), (5.6.6) y (5.6.8), se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{22} &= \langle \alpha \rangle + \frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 + \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 \\
&= \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)} + \frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (b_1^2 R^{-1} + B_1^2 R^1) \\
&\quad + \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (a_1^2 R^{-1} + A_1^2 R^1) \\
&= \alpha^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \alpha^{(2)} + \frac{\pi}{|Y|} ([\alpha] b_1^2 + [\beta] a_1^2) \\
&\quad + \frac{\pi R}{|Y|} ([\alpha] B_1^2 R + [\beta] A_1^2 R).
\end{aligned} \tag{5.6.9}$$

De la ecuación (5.5.41) para $l = 1$, resulta

$$[[\alpha]] B_1^2 R + [[\beta]] A_1^2 R = [[\alpha]] R + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)}) b_1^2 R^{-1} + (\beta^{(1)} + \beta^{(1)}) a_1^2 R^{-1}. \quad (5.6.10)$$

Sustituyendo (5.6.10) en el último sumando de la ecuación (5.6.9) y reduciendo, se tiene:

$$\hat{a}_{22} = \alpha^{(1)} + \frac{2\pi}{|Y|} (\alpha^{(1)} b_1^2 + \beta^{(1)} a_1^2). \quad (5.6.11)$$

Calculemos de manera análoga el coeficiente $\hat{\beta}_{22}$ ecuación (5.2.20) cuyo primer sumando viene dado por

$$\langle \beta \rangle = \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)}. \quad (5.6.12)$$

El segundo y tercer sumando de (5.2.20) están dados por:

$$- \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 \quad (5.6.13)$$

y

$$\frac{[[\beta]]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1. \quad (5.6.14)$$

Sustituyendo (5.5.14) en (5.6.13) y, teniendo en cuenta la primera ecuación en (5.5.18), se tiene

$$\begin{aligned} - \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 &= \frac{R [[\alpha]]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 R^l \text{sen}(\theta l) \right) \text{sen}(\theta) d\theta \\ &= \frac{-R [[\alpha]]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-a_l^2 R^{-l} - A_l^2 R^l) R^l \text{sen}(\theta l) \text{sen}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

Sustituyendo (5.6.5) en (5.6.15), se obtiene

$$- \frac{[[\alpha]]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 = \frac{-\pi R [[\alpha]]}{|Y|} (a_1^2 R^{-1} + A_1^2 R^1). \quad (5.6.16)$$

Análogamente para la integral (5.6.14), sustituyendo (5.5.15) en (5.6.14) y, teniendo en cuenta la segunda ecuación de (5.5.18), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 &= \frac{-R [\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} d_l^2 R^l \operatorname{sen}(\theta l) \right) \operatorname{sen}(\theta) d\theta \\ &= \frac{R [\beta]}{|Y|} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (b_l^2 R^{-l} + B_l^2 R^l) R^l \operatorname{sen}(\theta l) \operatorname{sen}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

Aplicando (5.6.5) a (5.6.17) se tiene

$$\frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 = \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (b_1^2 R^{-1} + B_1^2 R^1). \quad (5.6.18)$$

Sumando las ecuaciones (5.6.12), (5.6.16) y (5.6.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{22} &= \langle \beta \rangle - \frac{[\alpha]}{|Y|} \int_{\Gamma} g^2 dy_1 + \frac{[\beta]}{|Y|} \int_{\Gamma} \xi^2 dy_1 \\ &= \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)} - \frac{\pi R [\alpha]}{|Y|} (a_1^2 R^{-1} + A_1^2 R^1) \\ &\quad + \frac{\pi R [\beta]}{|Y|} (b_1^2 R^{-1} + B_1^2 R^1) \\ &= \beta^{(1)} - \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(1)} + \frac{\pi R^2}{|Y|} \beta^{(2)} + \frac{\pi}{|Y|} ([\beta] b_1^2 - [\alpha] a_1^2) \\ &\quad - \frac{\pi R}{|Y|} ([\alpha] A_1^2 R - [\beta] B_1^2 R). \end{aligned} \quad (5.6.19)$$

De la ecuación (5.5.40) para $l = 1$ se tiene

$$[\alpha] A_1^2 R^1 - [\beta] B_1^2 R^1 = -[\beta] R - (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) b_1^2 R^{-1} + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) a_1^2 R^{-1}. \quad (5.6.20)$$

Sustituyendo la ecuación (5.6.20) en el último sumando de la ecuación (5.6.19), se obtiene

$$\widehat{\beta}_{22} = \beta^{(1)} + \frac{2\pi}{|Y|} (\beta^{(1)} b_1^2 - \alpha^{(1)} a_1^2). \quad (5.6.21)$$

Por lo tanto, los coeficientes efectivos para el problema \mathbf{I}^q para $q = 2$ están dados por:

$$\begin{cases} \widehat{a}_{22} = \alpha^{(1)} + \frac{2\pi}{|Y|} (\alpha^{(1)}b_1^2 + \beta^{(1)}a_1^2), \\ \widehat{\beta}_{22} = \beta^{(1)} + \frac{2\pi}{|Y|} (\beta^{(1)}b_1^2 - \alpha^{(1)}a_1^2). \end{cases} \quad (5.6.22)$$

5.7. Derivación de expresiones de forma explícita.

El sistema infinito (5.3.58) se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I}\tilde{\mathbf{A}}^1 + \chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I}\tilde{\mathbf{B}}^1 \right) + \left(\chi_{\alpha} \mathbf{W}^1 \tilde{\mathbf{A}}^1 + \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^1 \tilde{\mathbf{B}}^1 \right) = \mathbf{V}^1, \\ \left(\chi_{\beta\alpha}^+ \mathbf{I}\tilde{\mathbf{A}}^1 - \mathbf{I}\tilde{\mathbf{B}}^1 \right) + \left(\chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{W}^1 \tilde{\mathbf{A}}^1 - \chi_{\alpha} \mathbf{W}^1 \tilde{\mathbf{B}}^1 \right) = \mathbf{V}^2, \end{cases} \quad (5.7.1)$$

que a la vez se puede escribir como:

$$\Phi^{(1)} \mathbf{A} + \Phi^{(2)} \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{V}, \quad (5.7.2)$$

donde

$$\Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \chi_{\beta\alpha}^+ \\ \chi_{\beta\alpha}^+ & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} & \chi_{\beta\alpha}^- \\ \chi_{\beta\alpha}^- & -\chi_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}^1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{B}}^1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{V}^2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la ecuación matricial (5.7.2) por $(\Phi^{(2)})^{-1}$, se tiene:

$$(\Phi^{(2)})^{-1} \Phi^{(1)} \mathbf{A} + \mathbf{W} \mathbf{A} = (\Phi^{(2)})^{-1} \mathbf{V}, \quad (5.7.3)$$

que se puede reescribir como

$$\Psi \mathbf{A} + \mathbf{W} \mathbf{A} = (\Psi + \mathbf{W}) \mathbf{A} = \mathbf{U}, \quad (5.7.4)$$

donde $\Psi = (\Phi^{(2)})^{-1} \Phi^{(1)}$ y $\mathbf{U} = (\Phi^{(2)})^{-1} \mathbf{V}$. Además tenemos que

$$(\Phi^{(2)})^{-1} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} -\chi_{\alpha} & -\chi_{\beta\alpha}^- \\ -\chi_{\beta\alpha}^- & \chi_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (5.7.5)$$

donde $\Lambda = -(\chi_{\alpha})^2 - (\chi_{\beta\alpha}^-)^2$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi &= (\Phi^{(2)})^{-1} \Phi^{(1)} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} -\chi_\alpha & -\chi_{\beta\alpha}^- \\ -\chi_{\beta\alpha}^- & \chi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi_{\beta\alpha}^+ \\ \chi_{\beta\alpha}^+ & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{\Lambda} \begin{pmatrix} \chi_\alpha + \chi_{\beta\alpha}^- \chi_{\beta\alpha}^+ & -(\chi_{\beta\alpha}^- - \chi_\alpha \chi_{\beta\alpha}^+) \\ \chi_{\beta\alpha}^- - \chi_\alpha \chi_{\beta\alpha}^+ & \chi_\alpha + \chi_{\beta\alpha}^- \chi_{\beta\alpha}^+ \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.7.6)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= (\Phi^{(2)})^{-1} \mathbf{V} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} -\chi_\alpha & -\chi_{\beta\alpha}^- \\ -\chi_{\beta\alpha}^- & \chi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^1 \\ \mathbf{V}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} -\chi_\alpha \mathbf{V}^1 - \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{V}^2 \\ -\chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{V}^1 + \chi_\alpha \mathbf{V}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.7.7)$$

De la ecuación (5.7.7) se tiene:

$$\frac{1}{\Lambda} (-\chi_\alpha \mathbf{V}^1 - \chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{V}^2) = (R, 0, 0, \dots) \quad (5.7.8)$$

y

$$\frac{1}{\Lambda} (-\chi_{\beta\alpha}^- \mathbf{V}^1 + \chi_\alpha \mathbf{V}^2) = (0, 0, 0, \dots). \quad (5.7.9)$$

Así se obtiene que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} R e_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7.10)$$

Por otro lado, observaremos algunos casos para los cuales podemos obtener los coeficientes \hat{a}_j^1 y \hat{b}_j^1 para $j = 1, 2$ de forma explícita, y por consecuencia obtener los coeficientes efectivos. A continuación se consideran los siguientes casos:

- Caso $n_o = 1$. Para este caso, la ecuación (5.7.4) resulta ser un sistema 2×2 cuya solución viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^1 \\ \hat{b}_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} + \omega_{11} & \psi_{12} \\ -\psi_{12} & \psi_{11} + \omega_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7.11)$$

donde ω_{ij} denota los elementos de \mathbf{W}^1 ,

$$\psi_{11} = \frac{\chi_\alpha + \chi_{\beta\alpha}^- \chi_{\beta\alpha}^+}{(\chi_\alpha)^2 + (\chi_{\beta\alpha}^-)^2} \quad \text{y} \quad \psi_{12} = \frac{\chi_\alpha \chi_{\beta\alpha}^+ - \chi_{\beta\alpha}^-}{(\chi_\alpha)^2 + (\chi_{\beta\alpha}^-)^2}. \quad (5.7.12)$$

Más explícitamente, los coeficientes \hat{a}_1^1 y \hat{b}_1^1 vienen dados por:

$$\widehat{a}_1^1 = \frac{(\psi_{11} + \omega_{11}) R}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2} \quad (5.7.13)$$

y

$$\widehat{b}_1^1 = \frac{\psi_{12} R}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2}. \quad (5.7.14)$$

- Caso $n_o = 2$. Para este caso, la ecuación (5.7.4) resulta ser un sistema 4×4 cuya solución viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_1^1 \\ \widehat{a}_3^1 \\ \widehat{b}_1^1 \\ \widehat{b}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} + \omega_{11} & \omega_{13} & \psi_{12} & 0 \\ \omega_{13} & \psi_{11} + \omega_{33} & 0 & \psi_{12} \\ -\psi_{12} & 0 & \psi_{11} + \omega_{11} & \omega_{13} \\ 0 & -\psi_{12} & \omega_{13} & \psi_{11} + \omega_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7.15)$$

Por otro lado, sabemos que si $k + l > 2$; entonces, de la ecuación (5.3.11) se tienen

$$\eta_{kl}^1 = \frac{(k + l - 1)!}{k!l!} S_{k+l},$$

y por lo tanto,

$$\eta_{kl}^1 \neq 0 \quad \text{si y solo si} \quad S_{k+l} \neq 0.$$

De donde se obtiene $\eta_{kl}^1 \neq 0$ si y solo si $k + l = 6t$ con $t \in \mathbb{N}$ (ver Apéndice C. Sección C.3). Por lo tanto, el sistema (5.7.15) toma una forma más simple dada por

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_1^1 \\ \widehat{a}_3^1 \\ \widehat{b}_1^1 \\ \widehat{b}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} + \omega_{11} & 0 & \psi_{12} & 0 \\ 0 & \psi_{11} + \omega_{33} & 0 & \psi_{12} \\ -\psi_{12} & 0 & \psi_{11} + \omega_{11} & 0 \\ 0 & -\psi_{12} & 0 & \psi_{11} + \omega_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7.16)$$

Los coeficientes \widehat{a}_1^1 , \widehat{a}_3^1 , \widehat{b}_1^1 y \widehat{b}_3^1 vienen dados por:

$$\widehat{a}_1^1 = \frac{R(\omega_{11} + \psi_{11}) [(\omega_{33} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]}{(\omega_{33} + \psi_{11})^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2] + \psi_{12}^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]}, \quad (5.7.17)$$

$$\widehat{a}_3^1 = 0, \quad (5.7.18)$$

$$\widehat{b}_1^1 = \frac{R\psi_{12} [(\omega_{33} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]}{(\omega_{33} + \psi_{11})^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2] + \psi_{12}^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]} \quad (5.7.19)$$

y

$$\widehat{b}_3^1 = 0. \quad (5.7.20)$$

- Caso $n_o \geq 3$. Para este caso general, la ecuación (5.7.4) resulta ser un sistema $2n_o \times 2n_o$ cuya solución matricial viene dada por

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{n_o}^1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{n_o}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11}\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{W}_{n_o}^1 & \psi_{12}\mathbf{I}_{n_o} \\ -\psi_{12}\mathbf{I}_{n_o} & \psi_{11}\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{W}_{n_o}^1 \end{pmatrix}^{-1} R\mathbf{e}_{n_o}, \quad (5.7.21)$$

donde el subíndice n_o denota el orden de truncamiento de los vectores infinitos $\tilde{\mathbf{A}}^1$ y $\tilde{\mathbf{B}}^1$, del mismo modo \mathbf{I}_{n_o} y $\mathbf{W}_{n_o}^1$ son las matrices cuadradas de tamaño $n_o \times n_o$ que resultan del truncamiento de las matrices infinitas \mathbf{I} y \mathbf{W}^1 . El vector \mathbf{e}_{n_o} denota el vector canónico en \mathbb{R}^{2n_o} .

Capítulo 6

Ejemplos numéricos

En el presente capítulo se calcularán los coeficientes efectivos usando las fórmulas (5.4.23) para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2$ y 3 . A continuación, se compararán estos coeficientes tomando:

$$\kappa^{(1)} = 1 - 5i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 30 - 0.3i. \quad (6.0.1)$$

Finalmente, los coeficientes efectivos determinados en las secciones (6.1), (6.2) y (6.3) se tomarán para compararlos con los resultados dados en [21].

6.1. Coeficientes efectivos para $n_o = 1$.

Para $n_o = 1$, se tiene un sistema lineal 2×2 , cuya solución viene dada por (5.7.13) y (5.7.14), es decir:

$$\widehat{a}_1^1 = \frac{(\psi_{11} + \omega_{11}) R}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2} \quad (6.1.1)$$

y

$$\widehat{b}_1^1 = \frac{\psi_{12} R}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2}, \quad (6.1.2)$$

donde

$$\psi_{11} = \frac{\chi_\alpha + \chi_{\beta\alpha}^- \chi_{\beta\alpha}^+}{(\chi_\alpha)^2 + (\chi_{\beta\alpha}^-)^2}, \quad \psi_{12} = \frac{\chi_\alpha \chi_{\beta\alpha}^+ - \chi_{\beta\alpha}^-}{(\chi_\alpha)^2 + (\chi_{\beta\alpha}^-)^2} \quad (6.1.3)$$

y $\omega_{11} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} R^2$ (entrada ω_{11} de la matriz \mathbf{W}^1 ecuación (5.5.47)). Por otra parte, dado que

$$a_l^1 = \frac{\widehat{a}_l^1 R^l}{\sqrt{l}} \quad \text{y} \quad b_l^1 = \frac{\widehat{b}_l^1 R^l}{\sqrt{l}},$$

para cada $l = 1, 3, 5, \dots$, en particular si $l = 1$, se tiene:

$$a_1^1 = \widehat{a}_1^1 R \quad y \quad b_1^1 = \widehat{b}_1^1 R. \quad (6.1.4)$$

Sustituyendo (6.1.4) en (6.1.1) y (6.1.2) se tienen:

$$a_1^1 = \frac{(\psi_{11} + \omega_{11}) R^2}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2} \quad (6.1.5)$$

y

$$b_1^1 = \frac{\psi_{12} R^2}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2}. \quad (6.1.6)$$

Sustituyendo (6.1.5) y (6.1.6) en los coeficientes efectivos de (5.4.23) y nombrando $V_o = \omega_{11} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} R^2$ se obtiene

$$\begin{cases} \widehat{\alpha}_{11} = \alpha^{(1)} - 2 \left\{ \frac{(\alpha^{(1)}\psi_{11} + \beta^{(1)}\psi_{12}) V_o + \alpha^{(1)} V_o^2}{(\psi_{11} + V_o)^2 + (\psi_{12})^2} \right\}, \\ \widehat{\beta}_{11} = \beta^{(1)} - 2 \left\{ \frac{(\beta^{(1)}\psi_{11} - \alpha^{(1)}\psi_{12}) V_o + \beta^{(1)} V_o^2}{(\psi_{11} + V_o)^2 + (\psi_{12})^2} \right\}. \end{cases} \quad (6.1.7)$$

6.2. Coeficientes efectivos para $n_o = 2$.

Para $n_o = 2$, la ecuación (5.7.4) resulta ser un sistema 4×4 dado por (5.7.16), donde ω_{33} representa la respectiva entrada de la matriz infinita \mathbf{W}^1 que está dada por

$$\omega_{33} = 3\eta_{33}^1 R^6, \quad (6.2.1)$$

donde η_{33}^1 está dado por

$$\eta_{33}^1 = \frac{(3+3-1)!}{3!3!} S_{3+3} = \frac{5!}{3!3!} S_6 = \frac{10}{3} \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(m + ne^{\frac{\pi}{3}i})^6}. \quad (6.2.2)$$

Para el caso $k = 1$, la serie $S_{6k} = S_6$ viene dada por:

$$\begin{aligned} S_6 = & \frac{31\pi^6}{4725} - \frac{32\pi^6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - (-1)^n ch(n\pi\sqrt{3})} \right\}^2 + \\ & + 16\pi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - (-1)^n ch(n\pi\sqrt{3})} \right\}^3, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

donde ch representa la función coseno hiperbólico. Para su justificación matemática ver [15], pág. 21.

A continuación, se dará una aproximación en términos de serie para los valores de $S_\lambda \neq 0$ (ver Apéndice C. Sección [C.3](#)) para $\lambda = 6k$ con $k = 1, 2, 3, \dots$. Ahora se supone $k \geq 2$. Entonces, dado que la serie S_λ es absolutamente convergente (ver Apéndice B. Lema [B.2](#)), uno puede reordenar la suma y siempre obtener el mismo valor.

Para lograr tal objetivo, se reordenará la suma de los términos de S_λ de tal forma que los primeros 6 términos correspondan a los períodos que se encuentran sobre la circunferencia de radio 1, los siguientes 6 términos correspondan a los períodos que se encuentran en la circunferencia de radio $\sqrt{3}$ (6 períodos sobre la circunferencia de radio 2, 12 períodos sobre la circunferencia de radio $\sqrt{7}$), así sucesivamente, tal como se observa en la Figura [\(6.5\)](#)

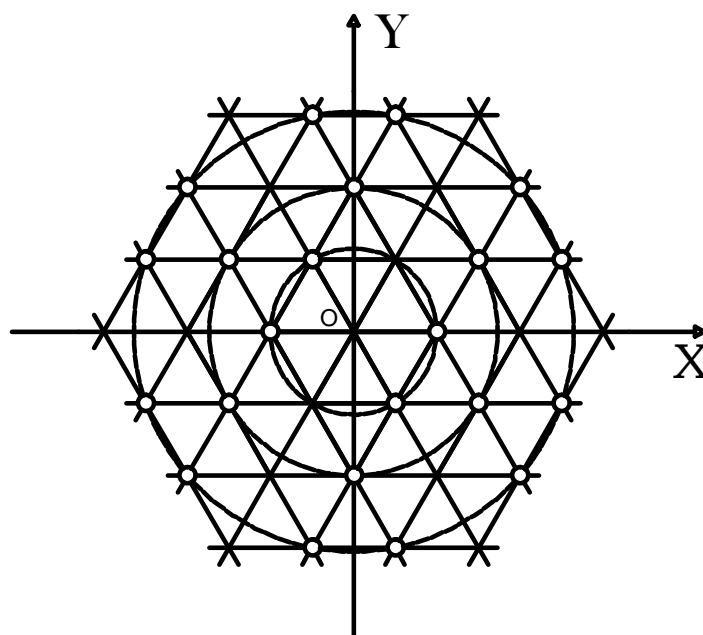


Figura 6.1

Con tal orden, y además, cambiando a la representación polar de cada período, se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(m + ne^{\frac{\pi}{3}j})^\lambda} \\
&= \sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{j}{3}\right)\pi\lambda i} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\lambda \sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{2j+1}{6}\right)\pi\lambda i} + \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda \sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{j}{3}\right)\pi\lambda i} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^\lambda \left(e^{-\varphi_1\lambda i} + e^{\varphi_1\lambda i} + \sum_{j=0}^4 \left\{ e^{-\left\{\left(\frac{j+1}{3}\right)\pi-\varphi_1\right\}\lambda i} + e^{-\left\{\left(\frac{j+1}{3}\right)\pi+\varphi_1\right\}\lambda i} \right\} \right) \\
&\quad + \dots,
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

donde φ_1 es el ángulo tal que

$$\tan(\varphi_1) = \frac{\sqrt{3}}{5}. \tag{6.2.5}$$

Dado que $\lambda = 6k$, con $k \geq 2$, entonces:

$$\sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{j}{3}\right)\pi\lambda i} = \sum_{j=0}^5 e^{-2jk\pi i} = 6, \tag{6.2.6}$$

$$\sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{2j+1}{6}\right)\pi\lambda i} = \sum_{j=0}^5 e^{-(2j+1)k\pi i} = \sum_{j=0}^5 \cos((2j+1)k) = (-1)^k 6, \tag{6.2.7}$$

$$\sum_{j=0}^5 e^{-\left(\frac{j}{3}\right)\pi\lambda i} = \sum_{j=0}^5 e^{-2jk\pi i} = \sum_{j=0}^5 \cos(2jk\pi) = 6, \tag{6.2.8}$$

y finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
&e^{-\varphi_1\lambda i} + e^{\varphi_1\lambda i} + \sum_{j=0}^4 \left\{ e^{-\left\{\left(\frac{j+1}{3}\right)\pi-\varphi_1\right\}\lambda i} + e^{-\left\{\left(\frac{j+1}{3}\right)\pi+\varphi_1\right\}\lambda i} \right\} \\
&= 2\cos(\varphi_1\lambda) + \sum_{j=0}^4 \left\{ e^{-\varphi_1\lambda i} + e^{\varphi_1\lambda i} \right\} = 12\cos(\varphi_1\lambda).
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Sustituyendo (6.2.6), (6.2.7), (6.2.8) y (6.2.9) en (6.2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= 6 + \frac{(-1)^k 6}{(\sqrt{6})^\lambda} + \frac{6}{(2)^\lambda} + \frac{12}{(\sqrt{7})^\lambda} \cos(\varphi_1 \lambda) + \dots \\
&= 6 \left\{ 1 + \frac{(-1)^k}{3^{3k}} + \frac{1}{2^{6k}} + \frac{2}{7^{3k}} \cos(\varphi_1 6k) \right\} + \dots,
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

para cada $k = 2, 3, \dots$. A partir de las ecuaciones (6.2.10) y (6.2.3) es posible aproximar los números reales distintos de cero S_λ con $\lambda = 6k$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, tal como se observa en la Tabla (6.1)

k	1	2	3	≥ 4
S_{6k}	5.863	6.0097	5.9998	6

Tabla 6.1: Aproximación de S_{6k} para $k = 1, 2, \dots$

Por otro lado, la ecuación (6.2.1) se reescribe como

$$\omega_{33} = 3\eta_{33}^1 R^6 = 10R^6 S_6, \tag{6.2.11}$$

donde S_6 corresponde a la suma de periodos para $k = 1$, (ver Tabla (6.1)). Ahora multiplicando los coeficientes (5.7.17) y (5.7.19) por R y haciendo uso de las ecuaciones en (6.1.4) se obtienen los coeficientes para a_1^1 y b_1^1 como:

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= \frac{R^2(\omega_{11} + \psi_{11}) [(\omega_{33} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]}{(\omega_{33} + \psi_{11})^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2] + \psi_{12}^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]} \\
&= \frac{(\psi_{11} + \omega_{11}) R^2}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2}
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

y

$$\begin{aligned}
b_1^1 &= \frac{R^2 \psi_{12} [(\omega_{33} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]}{(\omega_{33} + \psi_{11})^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2] + \psi_{12}^2 [(\omega_{11} + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2]} \\
&= \frac{\psi_{12} R^2}{(\psi_{11} + \omega_{11})^2 + (\psi_{12})^2}
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Se observa que los coeficientes (6.2.12) y (6.2.13) son los mismos que en el caso $n_o = 1$ ecuaciones (6.1.5) y (6.1.6). Por lo tanto se obtienen los mismos coeficientes efectivos que en el caso anterior. Es decir

$$\begin{cases} \widehat{\alpha}_{11} = \alpha^{(1)} - 2 \left\{ \frac{(\alpha^{(1)}\psi_{11} + \beta^{(1)}\psi_{12}) V_o + \alpha^{(1)}V_o^2}{(\psi_{11} + V_o)^2 + (\psi_{12})^2} \right\}, \\ \widehat{\beta}_{11} = \beta^{(1)} - 2 \left\{ \frac{(\beta^{(1)}\psi_{11} - \alpha^{(1)}\psi_{12}) V_o + \beta^{(1)}V_o^2}{(\psi_{11} + V_o)^2 + (\psi_{12})^2} \right\}. \end{cases} \quad (6.2.14)$$

6.3. Coeficientes efectivos para $n_o = 3$.

Finalmente si $n_o = 3$, entonces el sistema (5.7.21) se transforma en un sistema 6×6 , más explícitamente dado por:

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_1^1 \\ \widehat{a}_3^1 \\ \widehat{a}_5^1 \\ \widehat{b}_1^1 \\ \widehat{b}_3^1 \\ \widehat{b}_5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} + \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \omega_{21} & \psi_{11} + \omega_{22} & \omega_{23} & 0 & \psi_{12} & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \psi_{11} + \omega_{33} & 0 & 0 & \psi_{12} \\ -\psi_{12} & 0 & 0 & \psi_{11} + \omega_{11} & \psi_{12} & \omega_{13} \\ 0 & -\psi_{12} & 0 & \omega_{21} & \psi_{11} + \omega_{22} & \omega_{23} \\ 0 & 0 & -\psi_{12} & \omega_{31} & \omega_{32} & \psi_{11} + \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3.1)$$

donde ω_{ij} representan las respectivas entradas de la submatriz cuadrada 3×3 de la matriz infinita \mathbf{W}^1 . Por otro lado, sabemos que $S_\lambda \neq 0$ si y solo si $\lambda = 6k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ (ver Apéndice C. Sección C.3) y por la simetría ($\omega_{ij} = \omega_{ji}$) el sistema (6.3.1) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_1^1 \\ \widehat{a}_3^1 \\ \widehat{a}_5^1 \\ \widehat{b}_1^1 \\ \widehat{b}_3^1 \\ \widehat{b}_5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} + \omega_{11} & 0 & \omega_{13} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{11} + \omega_{22} & 0 & 0 & \psi_{12} & 0 \\ \omega_{13} & 0 & \psi_{11} & 0 & 0 & \psi_{12} \\ -\psi_{12} & 0 & 0 & \psi_{11} + \omega_{11} & 0 & \omega_{13} \\ 0 & -\psi_{12} & 0 & 0 & \psi_{11} + \omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{12} & \omega_{13} & 0 & \psi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.2)$$

Resolviendo el sistema (6.3.2) se obtienen expresiones para \widehat{a}_1^1 y \widehat{b}_1^1 , los cuales están relacionadas con a_1^1 y b_1^1 por:

$$a_1^1 = \widehat{a}_1^1 R \quad \text{y} \quad b_1^1 = \widehat{b}_1^1 R,$$

según la ecuación (5.3.55) para $l = 1$. De aquí se obtiene que:

$$a_1^1(V_o) = \frac{|Y|}{\pi} \frac{A_1(V_o)}{\Lambda(V_o)} \quad (6.3.3)$$

y

$$b_1^1(V_o) = \frac{|Y|}{\pi} \frac{B_1(V_o)}{\Lambda(V_o)}, \quad (6.3.4)$$

donde $A_1(V_o)$, $B_1(V_o)$ y $\Lambda(V_o)$ vienen dadas por:

$$A_1(V_o) = \left(-5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^6 S_6^2 \psi_{11} V_o^6 + (V_o + \psi_{11})(\psi_{11}^2 + \psi_{12}^2) \right) V_o,$$

$$B_1(V_o) = \psi_{12} \left(\psi_{11}^2 + \psi_{12}^2 + 5S_6^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^6 V_o^6 \right) V_o,$$

y

$$\Lambda(V_o) = 25 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{12} S_6^4 V_o^{12} - 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^6 S_6^2 V_o^6 (\psi_{11} V_o + \psi_{11}^2 - \psi_{12}^2) + (\psi_{11}^2 + \psi_{12}^2) ((V_o + \psi_{11})^2 + \psi_{12}^2).$$

Por lo tanto, los coeficientes efectivos, ecuación (5.4.23) vienen expresados en función de V_o por:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{11}(V_o) = \alpha^{(1)} - 2 \left(\frac{\alpha^{(1)} A_1(V_o) + \beta^{(1)} B_1(V_o)}{\Lambda(V_o)} \right), \\ \hat{\beta}_{11}(V_o) = \beta^{(1)} - 2 \left(\frac{\beta^{(1)} A_1(V_o) - \alpha^{(1)} B_1(V_o)}{\Lambda(V_o)} \right). \end{cases} \quad (6.3.5)$$

6.4. Comparación de los coeficientes efectivos usando truncamiento sucesivo

En la sección anterior se realizaron todos los controles posibles para verificar el procedimiento analítico desarrollado. En esta sección se estudian ejemplos para controlar la implementación numérica. Se hicieron los programas en *Wolfram Mathematica 2011*.

Se graficarán los coeficientes efectivos calculados, dados en la ecuación (5.4.23) para un truncamiento sucesivo de órdenes. En este caso, se fijará:

$$\kappa^{(1)} = 1 - 5i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 30 - 0.3i, \quad (6.4.1)$$

y los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2, 3$ y 4 son considerados, tal como se observa en Figura (6.2) y Figura (6.3).

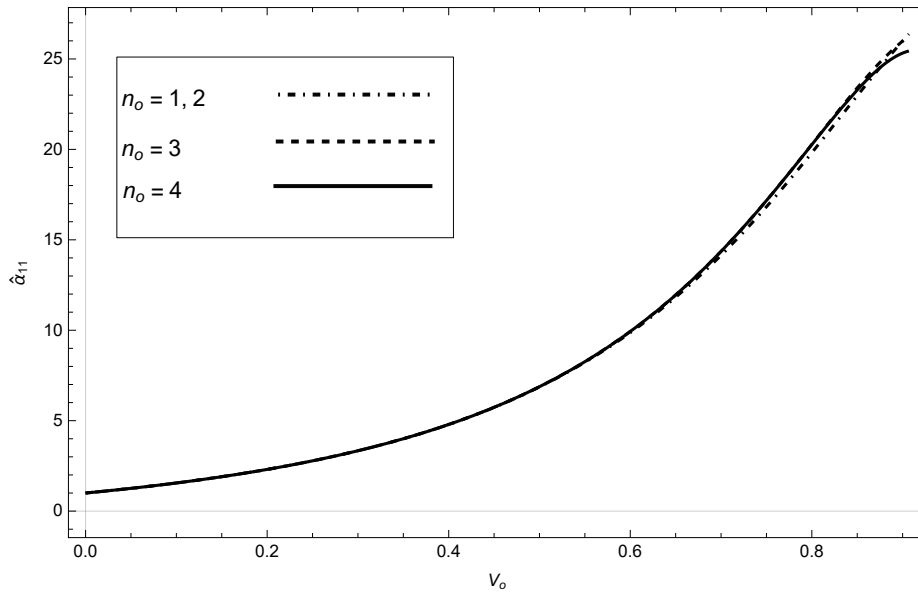


Figura 6.2: La parte real del coeficiente efectivo complejo $\hat{\kappa}$ como función del área de la fibra para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2, 3$ y 4.

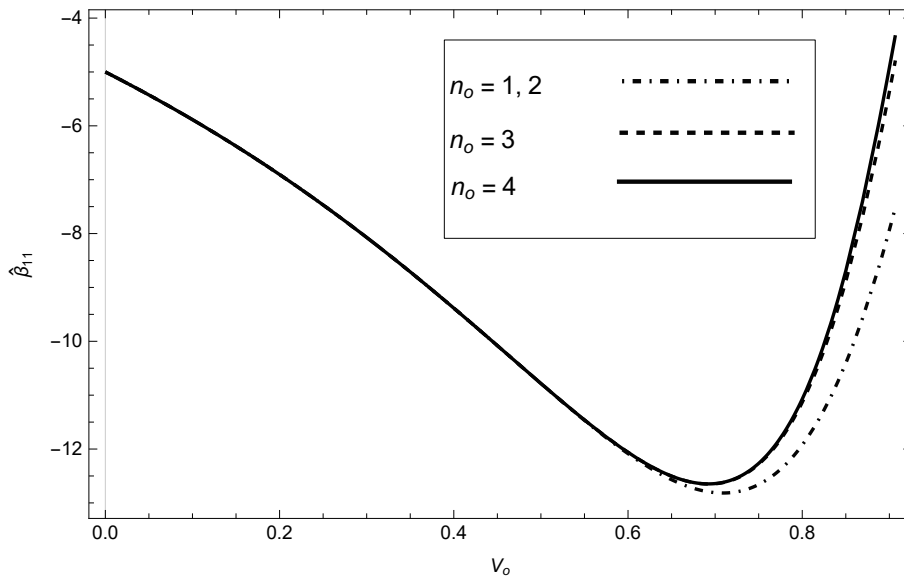


Figura 6.3: La parte imaginaria del coeficiente efectivo complejo $\hat{\kappa}$ como función del área de la fibra para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2, 3$ y 4.

En las gráficas de la figura (6.2) y (6.3) se muestran (parte real e imaginaria) del coeficiente efectivo complejo para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2, 3$ y 4, donde se observa la proximidad uno respecto al otro, teniendo en cuenta que límite de percolación ($V_p = V_o(R)$, donde R es el radio máximo de la fibra), para nuestro caso

$$V_p = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069.$$

6.5. Comparación con la fórmula de Godin YA

En esta sección, se compararán nuestros resultados con los obtenidos en [21] para

$$\kappa^{(1)} = 2 - 0.3i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 1 - 8i. \quad (6.5.1)$$

A continuación, se mostrarán las gráficas de la parte real $\hat{\alpha}_{11}$ e imaginaria $\hat{\beta}_{11}$ del coeficiente efectivo complejo $\hat{\kappa}$ para los ordenes de truncamiento $n_o = 1, 2$ y 3 tal como muestra en Figura (6.4) y Figura (6.5).

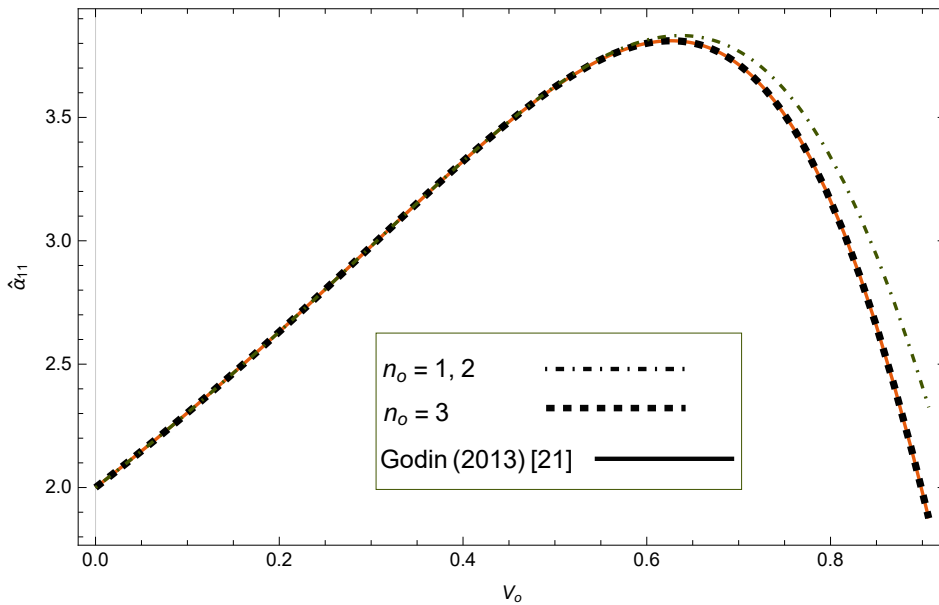


Figura 6.4: La parte real del coeficiente efectivo complejo $\hat{\kappa}$ como función del área de la fibra para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2$ y 3.

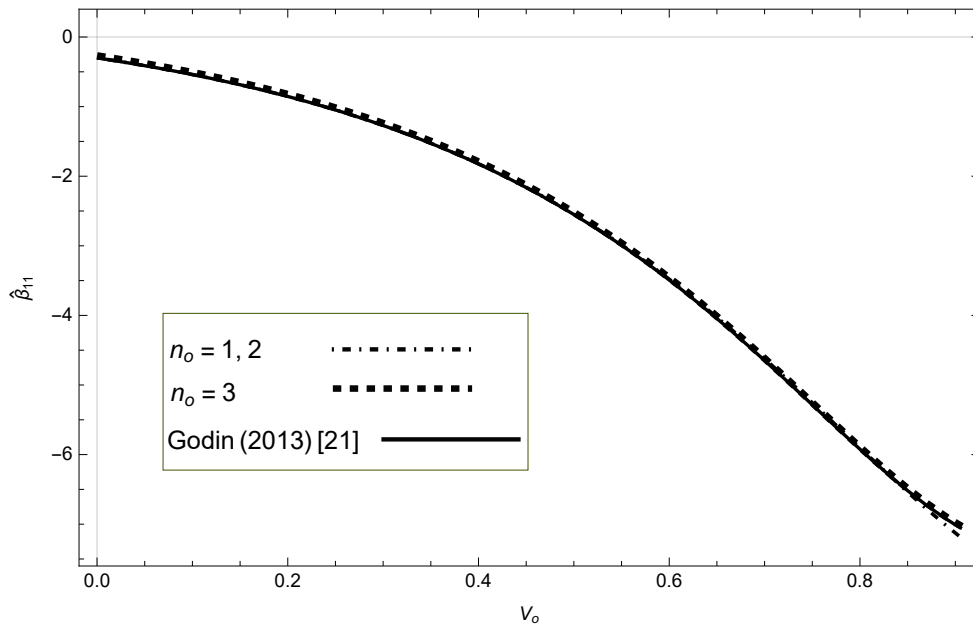


Figura 6.5: La parte imaginaria del coeficiente efectivo complejo $\hat{\kappa}$ como función del área de la fibra para los órdenes de truncamiento $n_o = 1, 2$ y 3.

Se puede observar que la primera aproximación es una muy buena estimación del coeficiente dieléctrico efectivo hasta el límite de percolación $V_o \leq V_p \approx 0.9069$. Además, el coeficiente efectivo para el orden de truncamiento $n_o = 3$ es bastante similar a los órdenes $n_o = 1$ y 2. Se observa que el tercer orden de aproximación es lo suficientemente próximo al coeficiente dieléctrico efectivo para obtener una excelente aproximación a los resultados obtenidos en [21].

Capítulo 7

Conclusiones

Esta investigación fue motivada con la finalidad de tratar el problema de la obtención de fórmulas analíticas de los coeficientes efectivos (propiedades efectivas) para un compuesto bifásico periódico con propiedades dieléctricas complejas, conformado por una matriz y un arreglo hexagonal de fibras cilíndricas transversales, mediante el método de homogeneización asintótica. Por tal motivo, se introdujeron conceptos y resultados estrechamente relacionados con teoría de la homogeneización asintótica, los cuales fueron utilizados a lo largo de este trabajo.

Las etapas y resultados fundamentales de este trabajo son:

- Se plantearon las ecuaciones y condiciones fundamentales que describen a un problema electrostático de contorno referente al estudio de compuestos periódicos bifásicos con propiedades dieléctricas reales y complejas.
- Se aplicó el método de separación de la parte real (imaginaria) al problema de contorno referente al estudio de compuestos periódicos bifásicos con propiedades dieléctricas complejas, por medio del cual se logró llevar tal problema a una formulación equivalente con coeficientes matriciales reales.
- Se aplicó el método de homogeneización asintótica al problema con coeficientes matriciales reales, donde se obtuvo el *problema homogeneizado* como condición necesaria y suficiente de existencia de la función Y -periódica U_2 y así obtener la **s.a.f** truncada al tercer término de la solución exacta del problema.
- A partir del *problema homogeneizado* y las condiciones de continuidad sobre la interfaz, se obtuvieron los problemas locales L_1^q y L_2^q donde se observó la equivalencia matemática entre ellos.
- Se determinaron fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos parte real (imaginaria) para el caso de un compuesto bifásico isótropo. Estas fórmulas muestran la similitud con las reportadas en [10] para el caso de la celda periódica cuadrada.

- Se propuso la solución al problema $L_1^q(L_2^q)$ para el caso isótropo, como la parte real(imaginaria) de una función armónica definida en la celda periódica Y , que bajo las condiciones de contacto sobre la interfaz nos permite pasar a un sistema lineal infinito cuyas soluciones de los truncamientos sucesivos de tal sistema son los coeficientes de la serie de *Laureny* de las soluciones propuestas. Se observó que para el orden de truncamiento n , el sistema lineal resultante es de orden $2n \times 2n$. Además, las fórmulas analíticas de los coeficientes efectivos dependen de las entradas 1 y $n + 1$ de la solución de estos sistemas lineales cuadráticos.
- Se resolvieron los 3 primeros truncamientos sucesivos del sistema infinito (5.7.1), para el caso, cuando

$$\kappa^{(1)} = 1 - 5i \quad \text{y} \quad \kappa^{(2)} = 30 - 0.3i,$$

por medio de la fórmula (5.7.21) (con orden apropiado $2n_o - 1$) para $n_o = 1, 2, 3$. Este trabajo se llevó a cabo con la ayuda del software *Wolfram Mathematica 2011*, obteniendo las primeras tres aproximaciones de la parte real (compleja) del coeficiente efectivo complejo. En las Figuras 6.2 y 6.3 se observa la proximidad de la sucesión consecutiva de los coeficientes efectivos de la parte real(imaginaria) en el intervalo $[0, V_p]$, donde V_p representa el límite de percolación.

- Para finalizar, se comparó la sucesión de coeficientes efectivos parte real(imaginaria) con la parte real(imaginaria) de la fórmula

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{ex} \frac{1 + \alpha \lambda f}{1 - \alpha \lambda f}, \quad (7.0.1)$$

(ver Figura 6.4) dada en el trabajo de *Godin YA(2013)* en [21]. Aquí

$$\varepsilon_{ex} = \kappa^{(1)} = 2 - 0.3i \quad \text{y} \quad \varepsilon_{in} = \kappa^{(2)} = 1 - 8i,$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in} + \varepsilon_{ex}},$$

$$\lambda = 1 + 5\alpha^2 S_3^2 h^{12} + \alpha^2 (25\alpha^2 S_3^4 + 11S_6^2) h^{24} + O(h^{36}),$$

y

$$f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} h^2,$$

donde S_6, S_{12} representan los valores aproximados de las series de lattices, ver Tabla 6.1 capítulo 6 para $k = 1, 2$. Esta comparación fue posible gracias a

Wolfram Mathematica 2011 que nos permitió separar parte real e imaginaria de ε^* ecuación (7.0.1), como función de f .

Por otro lado, las comparaciones reafirman el uso de las fórmulas cortas obtenidas para investigar los coeficientes efectivos complejos. Estos resultados también están reportados en [28].

Por otro lado, es posible dar continuidad a este trabajo aplicando el método de homogeneización asintótica a la mecánica de medios heterogéneos para el cálculo de propiedades efectivas. Se enuncian algunas vías:

1. Estudiar el problema de la caracterización de las propiedades efectivas de materiales compuestos periódicos bifásicos fibrosos, con propiedades dieléctricas complejas, cuando hay contacto perfecto sobre la interfaz.
2. Estudiar el problema de la caracterización de las propiedades efectivas de materiales compuestos periódicos bifásicos fibrosos, con propiedades dieléctricas complejas, cuando hay contacto imperfecto sobre la interfaz.
3. Estudiar el problema de la caracterización de las propiedades efectivas de materiales compuestos periódicos trifásicos fibrosos, con propiedades dieléctricas complejas, cuando hay contacto perfecto sobre la interfaz.
4. Estudiar el problema de la caracterización de las propiedades efectivas de materiales compuestos periódicos trifásicos fibrosos, con propiedades dieléctricas complejas, cuando hay contacto imperfecto sobre la interfaz.
5. Instrumentar, validar y aplicar el software correspondiente a cada uno de los problemas abordados en 1 - 4.

Conforme a lo abordado, se puede notar una vía mediante el método de homogeneización asintótica para el cálculo de coeficientes efectivos, parte real(imaginaria); a su vez, al tomar los órdenes de truncamiento del sistema infinito, se puede obtener la parte real(imaginaria) de (7.0.1) como caso límite de esta sucesión de coeficientes efectivos.

Apéndice A

Espacios de Sobolev

Este apéndice está dedicado al desarrollo de espacios de funciones que son usados en la formulación variacional de ecuaciones diferenciales. Iniciaremos con una revisión de la teoría de integración de *Lebesgue* sobre la cual descansa nuestra noción de derivada *Generalizada* o *Dbil*. Las funciones con tales derivadas *Generalizadas* componen los espacios denominados espacios de *Sobolev*.

A.1. Teoría de integración de Lebesgue.

Revisaremos los conceptos básicos de la teoría de integración de *Lebesgue* cuya información se puede encontrar en (*Halmos* – 1991), (*Royden* – 1988) o (*Rudin* – 1987). Por "Dominio" Ω queremos decir un subconjunto de \mathbb{R}^n *Lebesgue – medible* (abierto o cerrado) con interior no vacío. Si f es una función *Lebesgue – medible* definida en Ω entonces denotamos la integral de *Lebesgue* de f como:

$$\int_{\Omega} f(x) dx,$$

donde dx denota la medida de *Lebesgue*. Para $1 \leq p < \infty$ se define la función

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

y para el caso $p = \infty$ se define

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \text{ess sup} \{ |f(x)| : x \in \Omega \}.$$

Para cualquiera de los dos casos, se define el espacio de *Lebesgue* como:

$$L_p(\Omega) := \{f : \|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty\}.$$

En el espacio de *Lebesgue* $L_p(\Omega)$ se cumplen algunas desigualdades importantes

que son enunciadas por los siguientes teoremas. Para una demostración ver [18], pág. 120.

Teorema A.1 (Desigualdad de Minkowski) Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L_p(\Omega)$, entonces

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

Teorema A.2 (Desigualdad de Hölder) Si $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y si $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ entonces $fg \in L_1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

Teorema A.3 (Desigualdad de Schwarz) Si $f, g \in L_2(\Omega)$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

En vista de la desigualdad de **Minkowski** y la definición de $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$, el espacio $L_p(\Omega)$ es cerrado bajo combinaciones lineales y por lo tanto es un espacio vectorial. Además la función $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ tiene propiedades que es clasificada como norma.

Definición A.1 Dado un espacio vectorial V , una **norma**, $\|\cdot\|$ es una función real no negativa definida en V que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|u\| \geq 0$ para cada $u \in V$.
2. $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.
3. $\|cu\| = |c| \|u\|$ para cada $c \in \mathbb{R}$ y $u \in V$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para cada $u, v \in V$.

Sabemos que una norma $\|\cdot\|$ puede ser usada para definir la noción de distancia o métrica como:

$$d(u, v) := \|u - v\| \quad \text{para } u, v \in V.$$

Por otro lado, un espacio normado V es *completo* si cada sucesión de *Cauchy* $\{u_j\}$ de elementos de V tiene un límite $v \in V$. En un espacio normado, una sucesión de *Cauchy* es tal que $\|u_j - u_k\| \rightarrow 0$ cuando $j, k \rightarrow \infty$.

Definición A.2 Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ es llamado *espacio de Banach* si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Teorema A.4 (Riez - Fischer) Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio normado $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_{L_p(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

Para una demostración del teorema anterior ver [18], pág. 125.

A.2. Derivadas generalizadas

Hay varias definiciones de derivada que son útiles en diferentes situaciones. En cálculo, la definición

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

es *local* que da información sobre la función únicamente cerca del punto x . Es natural pensar, como extender la noción de derivada de una función en el espacio de *Lebesgue* $L_p(\Omega)$ donde las funciones podrían ser no-suaves y comparándolas con las funciones suaves localmente.

Para tal fin, se introducirá notación para *derivadas parciales*, el *multi – indice*. Un *multi – indice* α es una $n – tupla$ de números no negativos α_i . La longitud de α está dada por

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Para una función $\phi \in C^\infty(\Omega)$ se denota por

$$D^\alpha \phi, \quad D_x^\alpha \phi, \quad \phi^\alpha \quad \text{o} \quad \partial_x^\alpha \phi$$

la derivada parcial usual

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \phi.$$

Dado un vector (x_1, x_2, \dots, x_n) , definimos $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Note que el orden de la derivada está dado por $|\alpha|$.

Se introduce el concepto de *soporte* de una función u definida en algún dominio de \mathbb{R}^n como la cerradura del conjunto $\{x : u(x) \neq 0\}$. Si el *soporte* es compacto (es decir, es acotado) contenido en el interior de un dominio Ω , entonces decimos que u es de *soporte compacto* respecto a Ω . La función u fuera del soporte es cero, por lo tanto se puede extender a todo \mathbb{R}^n .

Definición A.3 Si Ω es un dominio en \mathbb{R}^n . Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones en $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .

Ahora usaremos el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ para extender la noción de derivada puntual a una clase de funciones más grande que $C^\infty(\Omega)$.

Definición A.4 Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Se define el conjunto de funciones *localmente integrables* como

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{f : f \in L_1(K) \text{ para cada compacto } K \subset \text{int}(\Omega)\}.$$

Definición A.5 Dada una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que tiene **derivada generalizada** $D_w^\alpha f$ si existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = (-1)^n \int_{\Omega} f(x)\phi^\alpha(x)dx \quad \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si tal función g existe, entonces definimos $D_w^\alpha f = g$.

Ejemplo A.1 Para $n = 1$ sea $\Omega = [-1, 1]$. Definamos $f(x) = 1 - |x|$. Afirmamos que tal $D_w^1 f$ existe y está dada por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 f(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 (+1)\phi(x)dx + f\phi|_{-1}^0 - \int_0^1 (-1)\phi(x)dx + f\phi|_0^1 \\ &= - \int_{-1}^1 g(x)\phi(x)dx + (f\phi)(0-) - (f\phi)(0+) \\ &= - \int_{-1}^1 g(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que la **derivada generalizada** y la **derivada en el sentido clásico** coinciden para el conjunto de funciones $\mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$. Tal demostración se puede obtener empleando el método de integración por partes $|\alpha|$ veces.

Proposición A.1 Sea α arbitrario y $\psi \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$. Entonces la derivada generalizada $D_w^\alpha \psi$ existe y está dada por $g = D^\alpha \psi$.

Como consecuencia de esta proposición, de ahora en adelante ignoramos la diferencia en la definición de D y D_w . Es decir, los símbolos de diferenciación son referidos a derivadas generalizadas en general.

A.3. Norma de Sobolev y espacio asociado.

Usando la notación de derivada generalizada, podemos generalizar la norma de Lebesgue a espacios más generales para incluir derivadas.

Definición A.6 Sea k un entero no negativo y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supongamos que la derivada generalizada $D_w^\alpha f$ existe para cada $|\alpha| \leq k$. Definimos la norma de **Sobolev** como:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$. En el caso $p = \infty$, se define como:

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max \|D_w^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

En cualquiera de los dos casos, se define el espacio de **Sobolev** como:

$$W_p^k(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Es fácil ver que

$$\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$$

es una norma. Es decir, cumple las propiedades de la definición (A.1) como consecuencia de que $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ es una norma. Entonces el espacio $W_p^k(\Omega)$ es un espacio normado. El siguiente teorema muestra que es completo.

Teorema A.5 El espacio de **Sobolev** $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Prueba: Sea $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset W_p^k(\Omega)$ sucesión de *Cauchy*. Entonces

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|v_i - v_j\|_{W_p^k(\Omega)} = 0.$$

Por otro lado, por definición se tiene que:

$$\begin{aligned} \|v_i - v_j\|_{W_p^k(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha (v_i - v_j)\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha v_i - D_w^\alpha v_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \|D_w^\alpha v_i - D_w^\alpha v_j\|_{L_p(\Omega)} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

para cada $|\alpha| \leq k$ y $i, j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{D_w^\alpha v_i\}$ es sucesión de *Cauchy* en $L_p(\Omega)$. Por otro lado, dado que el espacio de *Lebesgue* $L_p(\Omega)$ es completo, ver teorema (A.4), entonces existe $v^\alpha \in L_p(\Omega)$ tal que:

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \| D_w^\alpha v_i - v^\alpha \|_{L_p(\Omega)} = 0.$$

En particular se tiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v^{(0,0,\dots,0)} := v \quad \text{en } L_p(\Omega).$$

Por otro lado, note que si $w_j \rightarrow w$ en $L_p(\Omega)$ y $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_j \phi dx = \int_{\Omega} w \phi dx. \quad (\text{A.3.1})$$

Para demostrar que $D_w^\alpha v = v^\alpha$, debemos mostrar que

$$\int_{\Omega} v^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi^{(\alpha)} dx, \quad \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De la definición de derivada generalizada y aplicando el resultado de la ecuación (A.3.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^\alpha \phi dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D_w^\alpha v_j \phi dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_j \phi^{(\alpha)} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi^{(\alpha)} dx. \end{aligned}$$

□

A.4. Espacios producto interno y espacios de Hilbert

Esta sección es dedicada a herramientas del análisis funcional requeridas para desarrollar la formulación variacional de ecuaciones diferenciales. Iniciamos con una introducción a espacios de *Hilbert*, incluyendo solo material que es importante para justificar la existencia y unicidad de soluciones a problemas variacionales.

Definición A.7 Una **forma bilineal** $b(\cdot, \cdot)$ definida en un espacio vectorial V , es una función $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $v \in V$, se tiene que $b(v, \cdot)$ y $b(\cdot, v)$ es lineal en V . **Es simétrica** si $b(u, v) = b(v, u)$ para cada $u, v \in V$. Un **producto interno** (real), denotado por (\cdot, \cdot) es una forma bilineal simétrica sobre V tal que:

1. $(v, v) \geq 0$, para cada $v \in V$

2. $(v, v) = 0$ si y solo si $v = 0$.

Definición A.8 *Un espacio vectorial V junto con un producto interno definido en V es llamado **espacio producto interno** y es denotado por $(V, (\cdot, \cdot))$.*

Ejemplo A.2 *Los siguientes ejemplos son espacios producto interno:*

1. $V = \mathbb{R}^n$, $(x, y) := \sum_{j=1}^n x_j y_j$
2. $V = L_2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$
3. $V = W_2^k(\Omega,)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D_w^\alpha u, D_w^\alpha v)_{L_2(\Omega)}$

Notación A.1 *El espacio producto interno $(W_2^k(\Omega,), (\cdot, \cdot)_k)$ es a menudo denotado por $(H^k, (\cdot, \cdot)_k)$. Entonces*

$$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega).$$

La siguiente proposición afirma que si $(V, (\cdot, \cdot))$ es espacio producto interno, entonces (\cdot, \cdot) induce una norma en V . Para una demostración ver [19], pág. 50.

Proposición A.2 *Si $(V, (\cdot, \cdot))$ es espacio producto interno, entonces*

$$\| v \| := \sqrt{(v, v)}$$

es norma.

Definición A.9 (Espacio de Hilbert) *Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ espacio producto interno. Si $(V, \| \cdot \|)$ es completo ($\| \cdot \| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$), entonces $(V, (\cdot, \cdot))$ es llamado **espacio de Hilbert**.*

Se sabe que \mathbb{R}^n y $L_2(\Omega)$ son espacio completos bajo la norma euclideana y la norma del espacio $L_p(\Omega)$ para $p = 2$ respectivamente. Además los productos escalares definidos en el Ejemplo (A.2 - 1,2) inducen estas normas y por lo tanto $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ y $(L_2(\Omega), (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)})$ son espacios de *Hilbert*. Otro espacio importante es siguiente:

Ejemplo A.3 *El producto interno $(\cdot, \cdot)_k$ definido en $W_2^k(\Omega)$ induce la norma definida en $W_p^k(\Omega)$ para $p = 2$.*

Sea $u \in W_2^k(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \| u \|^2 &:= (u, u)_k \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (D_w^\alpha u, D_w^\alpha u)_{L_2(\Omega)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \| D_w^\alpha u \|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= \| u \|^2_{W_2^k(\Omega)} \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

Del teorema (A.5) y del hecho que el producto escalar $(\cdot, \cdot)_k$ induce la norma definida en $W_2^k(\Omega)$ ecuación (A.4.1), entonces se tiene que $(W_2^k(\Omega), (\cdot, \cdot)_k)$ es espacio de Hilbert.

Definición A.10 Sea H un espacio de Hilbert y $S \subseteq H$ un subespacio lineal de H (Si $u, v \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $u + \lambda v \in S$) cerrado en H , entonces se dice que S es un subespacio vectorial de H .

Proposición A.3 Si $S \subseteq H$ es un subespacio vectorial de H , entonces $(S, (\cdot, \cdot))$ es espacio de Hilbert.

Prueba: El subespacio vectorial $(S, (\cdot, \cdot))$ es completo porque S es cerrado en H bajo la norma de $\|\cdot\|$.

□

Un resultado importante en un espacio producto interno es la desigualdad de Cauchy – Schwarz cuya demostración se puede encontrar en [19], pág. 50.

Teorema A.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Si $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio producto interno, entonces

$$| (u, v) | \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}},$$

para cada $u, v \in V$.

Definición A.11 Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ espacio producto interno. Una función real L definida en V se dice que es un **funcional lineal** si:

1. $L(\lambda u) = \lambda L(u)$ para cada $u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para cada $u, v \in V$.

Definición A.12 Sea L un funcional lineal definido en un espacio producto interno V . Se dice que L es continuo si existe constante no negativa K tal que

$$| L(u) | \leq K \| u \|,$$

para cada $u \in V$.

Por otro lado, si $u \in H$ con H espacio de Hilbert, entonces un funcional lineal puede ser definido como

$$L_u(v) = (u, v), \tag{A.4.2}$$

con $v \in H$. El funcional L_u es continuo como consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz. El siguiente teorema afirma que si L es un funcional lineal continuo, entonces se puede escribir de la forma (A.4.2). Una demostración se puede encontrar [19], pág. 55.

Teorema A.7 (Teorema de Representación de Riesz) *Si L es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert H , entonces puede ser representado de forma única como*

$$L(v) = (u, v),$$

para algún $u \in H$. Además se tiene que

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H,$$

donde H' representa el espacio de funcionales lineales continuos en H .

A.5. Formulación de problemas variacionales simétricos

El propósito de esta sección es aplicar la teoría de espacios de *Hilbert* desarrollada en la sección previa para mostrar la existencia y unicidad de la formulación variacional de problemas de valores en frontera.

Definición A.13 *Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre un espacio vectorial normado H es **continua** si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H,$$

para cada $u, v \in H$. Además se dice que es **coersiva** sobre $V \subset H$ si existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2,$$

para cada $v \in V$.

Proposición A.4 *Sea H un espacio de Hilbert y suponga que $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica, continua y coersiva en un subespacio vectorial V de H . Entonces $(V, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.*

Prueba: Sea $u \in V$ tal que $a(u, u) = 0$. Entonces por coersividad se tiene que

$$0 = a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \geq 0,$$

lo que implica que $u = 0$. Entonces $(V, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio producto interno. Ahora defina la norma

$$\|\cdot\|_V := \sqrt{a(\cdot, \cdot)}.$$

Si $\{u_n\}$ es una sucesión de *Cauchy* en $(V, \|\cdot\|_V)$, entonces por coersividad

$$\|u_n - u_m\|_V^2 = a(u_n - u_m, u_n - u_m) \geq \alpha \|u_n - u_m\|_H^2,$$

lo que implica que $\{u_n\}$ es una sucesión de *Cauchy* en $(H, \|\cdot\|_H)$ y por lo tanto existe $u \in H$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_H = 0.$$

Por otro lado, como V es cerrado en H , entonces $u \in V$. Además, aplicando la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ se tiene que

$$\|u_n - u\|_V := \sqrt{a(u_n - u, u_n - u)} \leq \sqrt{C} \|u_n - u\|_H,$$

de donde se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_V = 0.$$

□

En general, en un problema variacional simétrico se suponen válidas las siguientes hipótesis:

1. $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de *Hilbert*.
2. $V \subseteq H$ es un subespacio vectorial (cerrado) de H .
3. $a(\cdot, \cdot)$ es forma bilineal simétrica, continua en H y coersiva en V .

Entonces el **problema variacional simétrico** es el siguiente: Dado L funcional continuo en V , entonces hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \tag{A.5.1}$$

para cada $v \in V$. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de un elemento $u \in V$ tal que se satisface (A.5.1).

Teorema A.8 *Suponga que son válidas las hipótesis (1 – 3) del problema variacional (A.5.1). Entonces existe única $u \in V$ tal que cumple (A.5.1)*

Prueba: La proposición (A.4) implica que $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en V y además $(V, a(\cdot, \cdot))$ es espacio de *Hilbert*. Aplicando el *Teorema de Representación de Riesz* (A.7) al funcional lineal continuo L se tiene que

$$L(v) = a(u, v),$$

para algún $u \in V$ y para cada $v \in V$.

□

A.6. Formulación de problemas variacionales no simétricos

En un problema variacional no simétrico se suponen válidas las siguientes hipótesis:

1. $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de *Hilbert*.
2. $V \subseteq H$ es un subespacio vectorial (cerrado) de H .
3. $a(\cdot, \cdot)$ es forma bilineal sobre V , no simétrica.
4. $a(\cdot, \cdot)$ es continua en V
5. $a(\cdot, \cdot)$ es coersiva en V

Entonces el **problema variacional no simétrico** es el siguiente: Dado L funcional continuo en V , entonces hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (\text{A.6.1})$$

para cada $v \in V$. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de un elemento $u \in V$ tal que se satisface (A.6.1). Una demostración de este resultado se puede encontrar en [19], pág. 62.

Teorema A.9 (Lax - Milgram) *Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua y coersiva y L un funcional lineal continuo en V . Entonces existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = L(v),$$

para cada $v \in V$.

Un ejemplo interesante de la aplicación del teorema de *Lax - Milgram* es el siguiente.

Ejemplo A.4 *Considere el problema de valores en frontera:*

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f & \text{en } [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6.2})$$

Para este problema tomemos $V = H^1(0, 1)$. Si $v \in V$, entonces al multiplicar la ecuación (A.6.2) por v y posteriormente integrando en $[0, 1]$ se tiene:

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u' v dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 f v dx. \quad (\text{A.6.3})$$

Aplicando el método de integración por partes al primer sumando del lado izquierdo de la ecuación (A.6.3) teniendo en cuenta las condiciones de frontera reescribe como:

$$\int_0^1 (u'v' + u'v + uv)dx = \int_0^1 f v dx. \quad (\text{A.6.4})$$

Si llamamos $a(u, v)$ al lado izquierdo de la ecuación (A.6.4) y $L(v)$ al lado derecho, entonces se tiene que

$$a(u, v) = L(v), \quad (\text{A.6.5})$$

para cada $v \in V$. Observe que L así definido es un funcional lineal continuo como consecuencia de la desigualdad de *Cauchy – Schwarz*, además $a(u, v)$ es una forma bilineal no simétrica por el término $u'v$. A continuación se demostrará que es continua y coersiva en $H^1(0, 1)$.

Para demostrar que $a(\cdot, \cdot)$ es continua, observe que:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq |(u, v)_{H^1}| + \left| \int_0^1 u'v dx \right| \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|u'\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \\ &\leq 2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (\text{A.6.6})$$

De donde se obtiene que $a(\cdot, \cdot)$ es continua en $H^1(0, 1)$. Para demostrar la coersividad, observe que

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 (v'v' + v'v + v^2)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (v' + v)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v'v' + v^2)dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.6.7})$$

Por lo tanto, $a(\cdot, \cdot)$ es coersiva en $H^1(0, 1)$.

A.7. Formulación variacional para ecuaciones elípticas

Sean $\Omega, \Omega_i (i = 1, \dots, N)$ dominios acotados en \mathbb{R}^s ; $\partial\Omega, \partial\Omega_i$ fronteras suaves por tramos; $A_{ij}(x), A_i(x), B_i(x), A(x), f(x)$ y $f_i(x)$ funciones infinitamente diferenciables excepto en $\cup_{i=1}^N \partial\Omega_i \cup \partial\Omega$. La ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x)u) + \\ + \sum_{i=1}^s B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.7.1})$$

es llamada **ecuación elíptica** para cada $x \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^s \partial\Omega_i$ y para cada $\xi \in \mathbb{R}^s$ se cumple la relación

$$\sum_{i,j=1}^s A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k \sum_{i=1}^s \xi_i^2, \quad A_{ij}(x) = A_{ji}(x), \quad (\text{A.7.2})$$

con $k > 0$ independiente de x .

Teniendo en cuenta el convenio de suma de *Einstein*, las ecuaciones (A.7.1) y (A.7.2) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x)u) + \\ + B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x)u = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.7.3})$$

y

$$A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k\xi_i^2, \quad A_{ij}(x) = A_{ji}(x). \quad (\text{A.7.4})$$

Por otro lado, si $A_i(x) = 0$ y $B_i(x) = 0$, entonces la ecuación (A.7.3) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}. \quad (\text{A.7.5})$$

La ecuación elíptica (A.7.5) a menudo describe un campo estacionario que podría ser un campo de temperatura en un medio con tensor de difusión $A_{ij}(x)$. La condición de *Dirichlet*

$$u \upharpoonright_{\partial\Omega} = 0, \quad (\text{A.7.6})$$

es impuesta en $\partial\Omega$.

A continuación se formulará el problema variacional de la ecuación elíptica (A.7.3) sujeta a (A.7.6). Se considera una función $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces al multiplicar la ecuación (A.7.3) por ϕ e integrando sobre Ω , se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \phi dx + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x)u) \phi dx + \int_{\Omega} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx + \int_{\Omega} A(x)u \phi dx = \int_{\Omega} f(x) \phi dx + \int_{\Omega} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \phi dx. \quad (\text{A.7.7})$$

Aplicando el método de integración por partes al los dos primeros sumandos del lado izquierdo de la ecuación (A.7.7) se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \phi dx = - \int_{\Omega} A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \quad (\text{A.7.8})$$

y

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x)u) \phi dx = - \int_{\Omega} A_i(x)u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx. \quad (\text{A.7.9})$$

De manera análoga para el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (A.7.7) se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \phi dx = - \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx. \quad (\text{A.7.10})$$

Sustituyendo (A.7.8) - (A.7.10) en (A.7.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + A_i(x)u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi - A(x)u \phi \right) dx \\ = \int_{\Omega} \left(-f(x)\phi + f_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.7.11})$$

Una función $u \in W_2^1(\Omega)$ tal que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y satisface (A.7.11) para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es llamada **solución generalizada** de (A.7.3) y (A.7.6) en $W_2^1(\Omega)$.

El siguiente resultado nos permitirá garantizar la existencia y unicidad de la solución generalizada del problema (A.7.3) y (A.7.6) en $W_2^1(\Omega)$ (ver [13], pág. 6).

Teorema A.10 *El problema (A.7.3) y (A.7.6) tiene única solución generalizada en $W_2^1(\Omega)$ y además se cumple*

$$\| u \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \left(\| f \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^s \| f_i \|_{L_2(\Omega)} \right), \quad (\text{A.7.12})$$

donde C es una constante positiva. En particular el problema (A.7.5) y (A.7.6) tiene única solución en $W_2^1(\Omega)$ y cumple (A.7.12).

A.8. Formulaci3n variacional para el sistema de ecuaciones en teor3a de elasticidad

Sea $R(x)$, $A_{ij}(x)$ funciones matriciales de $s \times s$ con elementos infinitamente diferenciables en Ω excepto en $\cup_{i=1}^N \partial\Omega_i \cup \partial\Omega$. Sean $f(x, t)$, $f_i(x, t)$ funciones vectoriales s -domeasionales infinitamente diferenciables en $\Omega \times (0, T)$ ($T > 0$) excepto en $\cup_{i=1}^N \partial\Omega_i \cup \partial\Omega$, adem3s $R(x)$, $A_{ij}(x) = (a_{ij}^{kl}(x))$ satisfacen las desigualdades:

$$R(x) \geq \rho_o E, \quad \sum_{i,j,k,l=1}^s a_{ij}^{kl} \xi_i^k \xi_j^l \geq k \sum_{ik}^s \xi_i^k \xi_i^k$$

para cada $\xi_i^k \in \mathbb{R}$, $\xi_i^k = \xi_k^i$, $x \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \partial\Omega_i$, adem3s

$$a_{ij}^{kl} = a_{kj}^{il} = a_{kj}^{lk} = a_{ji}^{kl},$$

donde ρ_o , k son constantes positivas y E matriz unitaria. El sistema de ecuaciones

$$R(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x, t) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x, t) \quad (\text{A.8.1})$$

es llamado **sistema no estacionario de ecuaciones en teor3a lineal de elasticidad**. Aqu3 $a_{ij}^{kl}(x)$ es el tensor de rigidez, $R(x) = \rho(x)E$, $\rho(x)$ es la densidad y u es el vector de desplazamiento.

Si f , f_i son independientes de t , el sistema (A.8.1) se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x). \quad (\text{A.8.2})$$

El sistema (A.8.2) es llamado **sistema estacionario de ecuaciones en teor3a lineal de elasticidad**. Se asume la condici3n de *Dirichlet*

$$u \upharpoonright_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{A.8.3})$$

Para formular el problema variacional (A.8.2) con condici3n (A.8.3) se procede de la siguiente manera. Sea ϕ funci3n vectorial en $\mathcal{D}(\Omega)$ y denotando (\cdot, \cdot) el producto escalar en \mathbb{R}^s , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right) = \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \phi \right). \quad (\text{A.8.4})$$

Sustituyendo (A.8.2) en (A.8.4) y aplicando la linealidad de la funci3n producto escalar, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right) &= \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + (f, \phi) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \phi \right) \\ &= \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + (f, \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i, \phi) - \left(f_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8.5})$$

Por lo tanto, (A.8.5) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i, \phi) = \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + (f, \phi) - \left(f_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.8.6})$$

Integrando (A.8.6) en ambos lados y aplicando el teorema de *Green* al lado izquierdo se obtiene:

$$\int_{\Omega} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dx = - \int_{\Omega} (f, \phi) dx + \int_{\Omega} \left(f_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx, \quad (\text{A.8.7})$$

para cada función vectorial $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Se entiende por solución **generalizada** del problema (A.8.2) - (A.8.3) a aquella función vectorial $u \in W_2^1(\Omega)$ que satisface (A.8.7) para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. El siguiente teorema justifica el buen planteamiento del problema (A.8.2) - (A.8.3).

Teorema A.11 *Existe una única solución generalizada en $W_2^1(\Omega)$ del problema (A.8.2) - (A.8.3). Para esta solución, se tiene el estimado:*

$$\| u \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \left(\| f \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^s \| f_i \|_{L_2(\Omega)} \right),$$

donde C es una constante positiva.

Apéndice B

La función Zeta de Weierstrass

El objetivo del presente apéndice es resumir nociones básicas relacionadas con la función \wp de *Weierstrass*, posteriormente, llegar a la función ζ de *Weierstrass*, ya que las soluciones de los problemas locales giran en torno a tal función.

B.1. La función \wp de Weierstrass.

Definición B.1 Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes en \mathbb{R} . Se define el *Lattice* generado por ω_1, ω_2 como

$$L[\omega_1, \omega_2] = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por simplicidad, usamos la notación $L = L[\omega_1, \omega_2]$.

Observación B.1 Si $\omega, \omega' \in L$, entonces:

1. $\omega + \omega' \in L$.
2. $n\omega \in L$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

De la observación anterior, tenemos que L es subgrupo de \mathbb{C} y además ω_1, ω_2 forman una base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Definimos la relación $z \equiv w \pmod{L}$ si y solo si $z - w \in L$. Es fácil observar:

Observación B.2 Si $y, z, w \in \mathbb{C}$, se cumple:

1. $y \equiv y \pmod{L}$ para cada $y \in \mathbb{C}$.
2. Si $y \equiv z \pmod{L}$, entonces $z \equiv y \pmod{L}$.
3. Si $y \equiv z \pmod{L}$ y $z \equiv w \pmod{L}$, entonces $y \equiv w \pmod{L}$.

De la observación anterior, se tiene que la relación de *Congruencia Módulo L* es relación de **equivalencia**.

Definición B.2 Sean $L = L[\omega_1, \omega_2]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se define el **Paralelogramo Fundamental** para el Lattice L como:

$$P = \{\alpha + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}.$$

De la definición anterior, se desprende el siguiente Lema:

Lema B.1 Si $z \in \mathbb{C}$, entonces existe un único $z_o \in P$ tal que $z \equiv z_o \pmod{L}$.

Prueba: Primeramente si $\alpha = 0$, entonces escribimos a $z \in \mathbb{C}$ como $z = a\omega_1 + b\omega_2$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Tomemos los siguientes enteros:

$$\begin{aligned} m &= \text{máx} \{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}, \\ n &= \text{máx} \{n \in \mathbb{Z} : n \leq b\}. \end{aligned}$$

Si $t_1 = a - m$ y $t_2 = b - n$, entonces:

$$z = m\omega_1 + n\omega_2 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \equiv t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \pmod{L}.$$

Observemos que $0 \leq t_i < 1$ para $i = 1, 2$. Así la clase de congruencia $z \pmod{L}$ tiene una representación en el paralelogramo fundamental P . Ahora, por otro lado, si se tiene que

$$t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \equiv s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \pmod{L} \quad \text{con } 0 \leq s_i < 1.$$

Entonces $|t_i - s_i| < 1$ para $i = 1, 2$, pero:

$$(t_1 - s_1)\omega_1 + (t_2 - s_2)\omega_2 \equiv 0 \pmod{L},$$

así $t_i = s_i$ para $i = 1, 2$. Ahora, si $\alpha \neq 0$, entonces se aplica lo anterior al elemento $z - \alpha$.

□

Definición B.3 Una función **elíptica** f (con respecto a L) es una función meromorfa en \mathbb{C} , la cual es L -periódica. Es decir;

$$f(z + \omega) = f(z)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ y $\omega \in L$.

Note que f es L -periódica si y solo si

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2).$$

Si $L = L[\omega_1, \omega_2]$, entonces se define $L^* = L \setminus \{0 + 0i\}$. Ahora se enunciará un lema fundamental que ayudará a construir funciones elípticas, cuya demostración se puede encontrar en [12], pág. 355.

Lema B.2 *La serie*

$$\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^\lambda}, \tag{B.1.1}$$

es absolutamente convergente para $\lambda > 2$.

Como aplicación del Lema (B.2) se tiene el siguiente teorema importante:

Teorema B.1 *La serie*

$$\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3}, \tag{B.1.2}$$

es absoluta y uniformemente convergente en cada recinto compacto de \mathbb{C} (donde cada vez se excluye una cantidad finita de términos de la serie que tiene polos en dicho recinto).

Prueba: Es suficiente suponer que z pertenece a un círculo fijado arbitrario con el centro en el origen de coordenadas $|z| \leq R$. Considere la serie

$$\sum_{|\omega| \geq 2R} \frac{1}{(z - \omega)^3}, \tag{B.1.3}$$

y así tenemos que $2|z| \leq |\omega|$, de donde se tiene que $|\frac{z}{\omega}| \leq \frac{1}{2}$. Entonces, del término principal de la serie se tiene:

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^3} \right| = \frac{1}{|z - \omega|^3} = \frac{1}{(1 - |\frac{z}{\omega}|)^3} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8}{|\omega|^3}.$$

Del Lema (B.2) se desprende la convergencia absoluta y uniforme de la serie (B.1.3) en el conjunto $|z| \leq R$.

Definamos para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq R$ la función

$$f(z) = \sum_{|\omega| \leq R} \frac{1}{(z - \omega)^3} + \sum_{|\omega| > R} \frac{1}{(z - \omega)^3}. \tag{B.1.4}$$

El segundo sumando de la serie (B.1.4) del lado derecho se diferencia sólo en una cantidad finita de términos de la serie (B.1.3), por tanto, la función así definida es analítica en cualquier círculo $|z| < R$, a excepción de polos de tercer orden en todos los periodos pertenecientes al círculo indicado.

□

Observación B.3 La función $f(z)$ definida por la serie (B.1.4) o (B.1.2) es L -periódica.

Prueba: Demostremos que $2\omega_1$ y $2\omega_2$ son periodos de la función $f(z)$. En efecto:

$$f(z + 2\omega_j) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - (\omega - 2\omega_j))^3}. \quad (\text{B.1.5})$$

Pero $\omega - 2\omega_j$ es también uno de los periodos dados:

$$\omega'_j = \omega - 2\omega_j, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Ahora, cuando ω recorre L , ω'_j también recorre L , para $j = 1, 2$, dado que sólo es una traslación. A partir de (B.1.5) tenemos que

$$f(z + 2\omega_j) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - (\omega - 2\omega_j))^3} = \sum_{\omega' \in L} \frac{1}{(z - \omega')^3}. \quad (\text{B.1.6})$$

Pero la serie (B.1.6) sólo se diferencia en el orden de los términos de la serie absolutamente convergente (B.1.2), es decir, su suma es $f(z)$.

□

Observación B.4 Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(-z) = -f(z)$.

Prueba: Si $z \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f(-z) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(-z - \omega)^3} = - \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - (-\omega))^3}. \quad (\text{B.1.7})$$

De forma análoga a la observación (B.3), se tiene que $\omega' = -\omega$ es otro de los periodos dados. Cuando ω recorra L , ω' también recorrerá L . Ahora de (B.1.7), se tiene

$$f(-z) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(-z - \omega)^3} = - \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - (-\omega))^3} = - \sum_{\omega' \in L} \frac{1}{(z - \omega')^3}. \quad (\text{B.1.8})$$

Así la ecuación (B.1.8) sólo se diferencia en el orden de los términos de la serie absolutamente convergente (B.1.2), y por lo tanto la suma es $-f(z)$.

□

Se concluye que la función definida por

$$f(z) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

es elíptica e impar. Por otra parte, se tiene que si $z_o \in \mathbb{C}$ tal que $z_o \notin L$ e integrando la función $f(z)$ término a término a lo largo de una curva rectificable γ que no pase por polos y que una a z_o con otro $z \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\Phi(z) = C + \int_{z_o}^z f(z)dz = C - \frac{1}{2} \sum_{\omega \in L} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_o - \omega)^2} \right\}.$$

Tomando C de la forma

$$C = -\frac{1}{2} \frac{1}{z_o} + \sum_{\omega \in L^*} \left\{ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_o - \omega)^2} \right\},$$

se obtiene:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right\}.$$

Definición B.4 (Función \wp de Weierstrass) *Se define la función \wp de Weierstrass mediante la fórmula*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{B.1.9}$$

A continuación enunciamos un teorema que garantiza la convergencia absoluta y uniforme de la función \wp de Weierstrass con excepción de polos en todo subconjunto compacto de \mathbb{C} . La demostración se puede consultar en [12], pág. 360.

Teorema B.2 *La función \wp de Weierstrass es absoluta y uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de \mathbb{C} (donde cada vez se excluye una cantidad finita de términos de la serie que tiene polos en dicho recinto).*

De manera análoga a la demostración de la Observación (B.4), se desprende que la función \wp de Weierstrass es par (es decir, $\wp(-z) = \wp(z)$).

Por otro lado, derivando la función \wp de Weierstrass tenemos:

$$\frac{d\wp}{dz} = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^3} = -2 \left\{ \frac{2}{z^3} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^3} \right\} = -2f(z).$$

Observación B.5 *La derivada de la función \wp de Weierstrass es solamente un factor numérico de la función elíptica $f(z)$ de periodos $2\omega_1, 2\omega_2$.*

De la Observación (B.5) se tiene que:

$$\frac{d\wp(z + 2\omega_j)}{dz} = -2f(z + 2\omega_j) = -2f(z) = \frac{d\wp(z)}{dz}, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (\text{B.1.10})$$

Integrando ambos lados de la ecuación (B.1.10) y posteriormente restando el término $\wp(z)$, se tiene:

$$\wp(z + 2\omega_j) - \wp(z) = C_j, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (\text{B.1.11})$$

Tomando $z = -\omega_j$ en la ecuación (B.1.11) y aplicando la paridad de la función \wp de Weierstrass, se tiene:

$$\wp(-\omega_j + 2\omega_j) - \wp(-\omega_j) = \wp(\omega_j) - \wp(-\omega_j) = C_j = 0, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

De donde

$$\wp(z + 2\omega_j) = \wp(z), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

De lo anterior tenemos que las funciones \wp y \wp' son funciones elípticas. Estas funciones son fundamentales en la teoría de las funciones elípticas y son llamadas funciones **elípticas de Weierstrass**.

B.2. La función ζ de Weierstrass.

Ahora estamos en condiciones de presentar la función Zeta de Weierstrass y enunciar algunas de sus propiedades que nos serán útiles en el presente trabajo. Para un conocimiento más profundo ver, por ejemplo, [11], [12].

Definición B.5 (Función ζ de Weierstrass) *La función ζ de Weierstrass es definida mediante las siguientes condiciones:*

1. $\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z)$.
2. $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) = 0$.

De las condiciones de la definición anterior, esta función también puede expresarse como:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz, \quad (\text{B.2.1})$$

donde la integral se efectúa a lo largo de cualquier curva rectificable que no pase por puntos de L^* y posteriormente, sustituyendo $\wp(z)$ por su desarrollo dado por la ecuación (B.1.9) e integrando término a término, se obtiene:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = - \int_0^z \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) dz = \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

de donde

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right). \quad (\text{B.2.2})$$

Se observa que la función $\zeta(z)$ es meromorfa y tiene polos simples en todos los elementos de L , además de ser una función impar, como se muestra continuación.

En efecto, se tiene:

$$(\zeta(z) + \zeta(-z))' = \zeta'(z) - \zeta'(-z) = -\wp(z) - \wp(-z) = 0,$$

de donde

$$\zeta(z) + \zeta(-z) = C,$$

o sea,

$$\left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) + \left(\zeta(-z) + \frac{1}{z} \right) = C. \quad (\text{B.2.3})$$

Ahora, tomando el límite en ambos lados de la ecuación (B.2.3) y de la propiedad 2 de la función $\zeta(z)$, se tiene que $C \equiv 0$. Así se concluye

$$\zeta(-z) = -\zeta(z).$$

Por otra parte, se tiene:

$$(\zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z))' = \zeta'(z + 2\omega_j) - \zeta'(z) = -\wp(z + 2\omega_j) + \wp(z) = -\wp(z) + \wp(z) = 0.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z) = 2\eta_j \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (\text{B.2.4})$$

A partir de la ecuación (B.2.4) podemos tomar la derivada en ambos lados y llegar a

$$\zeta''(z + 2\omega_j) - \zeta''(z) = 0, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Aplicando inducción tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\zeta^{(n)}(z + 2\omega_j) - \zeta^{(n)}(z) = 0, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (\text{B.2.5})$$

De lo anterior, se tienen las siguientes propiedades:

Propiedad B.1 (Casi periodicidad de ζ) *La función ζ de Weierstrass tiene las*

siguientes propiedades:

1. $\zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z) = 2\eta_j$ para $j = 1, 2$.
2. $\zeta^{(n)}(z + 2\omega_j) - \zeta^{(n)}(z) = 0$, para $j = 1, 2$, y $n \in \mathbb{N}$.

Si $z = -\omega_j$ entonces de la propiedad 1 y de la no paridad se tiene que:

$$\zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z) = \zeta(-\omega_j + 2\omega_j) - \zeta(-\omega_j) = \zeta(\omega_j) - \zeta(-\omega_j) = 2\zeta(\omega_j) = 2\eta_j,$$

de donde tenemos

$$\eta_j = \zeta(\omega_j) \text{ para } j = 1, 2. \quad (\text{B.2.6})$$

Los números de (B.2.6) son llamados **casi periodos básicos** de ζ . Además entre las cantidades

$$2\omega_j \text{ y } 2\eta_j \text{ para } j = 1, 2,$$

existe relación.

Propiedad B.2 (Relacion de Legendre) Se tiene que

$$2\omega_2\eta_1 - 2\omega_1\eta_2 = \pi i. \quad (\text{B.2.7})$$

Prueba: Sea P_o un paralelogramo fundamental que contenga el origen de coordenadas. Por el Lema (B.1), el paralelogramo fundamental no contiene otro polo distinto del origen de coordenadas. En particular, el paralelogramo P_o con vértices

$$\{-\omega_3, \omega_1 - \omega_2, \omega_3, \omega_2 - \omega_1\},$$

tal como se observa en siguiente Figura A.1

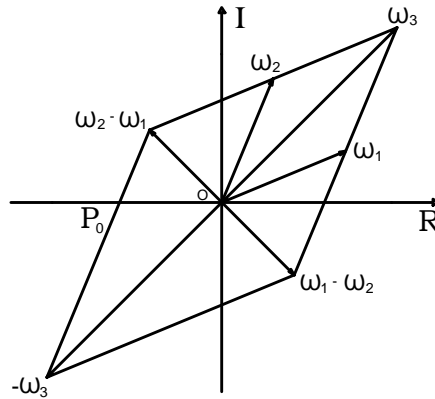


Figura B.1

donde $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$; además, tal paralelogramo es fundamental y contiene al origen de coordenadas. Por otra parte, de la propiedad 2 de la función ζ de Weierstrass

se tiene $z_o = 0$, es polo de orden 1 (polo simple), de donde:

$$Res(\zeta, z_o) = \lim_{z \rightarrow 0} z\zeta(z) = 1. \tag{B.2.8}$$

De la ecuación (B.2.8) y aplicando el teorema de los residuos (ver [14], pág. 449) sobre la curva $C = \partial P_o$ se tiene

$$\int_{\partial P_o} \zeta(z) dz = 2\pi i. \tag{B.2.9}$$

Ahora ocupémonos del lado izquierdo de la ecuación (B.2.9). Al parametrizar la curva ∂P_o e integrando lado por lado de P_o , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_o} \zeta(z) dz &= -2\omega_1 \int_0^1 [\zeta(2\omega_1 t - \omega_1 + \omega_2) - \zeta(2\omega_1 t - \omega_1 - \omega_2)] dt + \\ &+ 2\omega_2 \int_0^1 [\zeta(2\omega_2 t - \omega_2 + \omega_1) - \zeta(2\omega_2 t - \omega_2 - \omega_1)] dt. \end{aligned} \tag{B.2.10}$$

Aplicando a los integrandos, la propiedad 1 de la función ζ de *Weierstrass* (casi periodicidad) para $j = 1, 2$ se tiene

$$-4\omega_1\eta_2 + 4\omega_2\eta_1 = 2\pi i.$$

□

B.3. Desarrollo en serie de Laurent

En el presente apartado daremos el desarrollo en serie de *Laurent* de ciertas funciones meromorfas doblemente periódicas que nos serán de gran utilidad para buscar soluciones a ciertos problemas en forma de serie, donde el objetivo es hallar ciertos coeficientes indeterminados.

La solución de cierto problema de interés se propone como $\Re\{F(z)\}$, siendo

$$F(z) = a_o z + \sum_{k=1}^{\infty o} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \tag{B.3.1}$$

donde a_k son coeficientes indeterminados reales, $\zeta(z)$ es la función casi periódica de *Weierstrass*, definida por (B.2.2), y $\zeta^{(k)}(z)$ denota la k -ésima derivada de periodos ω_1 y ω_2 . El superíndice "o" denota que la suma corre sobre los números impares. ($\zeta^k(z)$ es analítica en todo $|z| < R$ para cada $k \in \mathbb{N}$; por lo tanto, la función $F(z)$ también lo es a excepción de polos).

Expresemos la función $F(z)$ en serie de *Laurent*. Se observa que las primeras 3 derivadas pares de $\zeta(z)$ para $k = 2, 4, 6$ están dadas por:

$$\zeta^{(2)}(z) = -\wp'(z) = 2! \left\{ \frac{1}{z^3} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^3} \right\}, \quad (\text{B.3.2})$$

$$\zeta^{(4)}(z) = 4! \left\{ \frac{1}{z^5} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^5} \right\}, \quad (\text{B.3.3})$$

$$\zeta^{(6)}(z) = 6! \left\{ \frac{1}{z^7} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^7} \right\}. \quad (\text{B.3.4})$$

En general, por inducción que para $k = 1, 2, 3, \dots$, se tiene

$$\zeta^{(2k)}(z) = 2k! \left\{ \frac{1}{z^{2k+1}} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^{2k+1}} \right\}. \quad (\text{B.3.5})$$

Ahora, sustituyendo (B.3.5) en (B.3.1) para $k \geq 3$ resulta

$$F(z) = a_0 z + a_1 \zeta(z) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{z^k} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^k} \right). \quad (\text{B.3.6})$$

Desarrollando en serie de *Laurent* el término principal de la suma sobre los Lattices de la ecuación (B.3.6)

$$\frac{1}{(z - \omega)^k} = \frac{-1}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(l+2) \cdots (l+k-1) \frac{z^l}{\omega^{k+l}}. \quad (\text{B.3.7})$$

Dado que

$$(l+k-1)! = (l+k-1)(l+k-2) \cdots (l+1)l!,$$

de donde se tiene

$$\frac{(l+k-1)!}{l!} = (l+1)(l+2) \cdots (l+k-1). \quad (\text{B.3.8})$$

El segundo término de la ecuación (B.3.6) es:

$$\begin{aligned} a_1 \zeta(z) &= a_1 \left\{ \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \right\} \\ &= \frac{a_1}{z} + a_1 \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3.9})$$

desarrollando el término

$$\frac{1}{z - \omega} = \frac{-1}{\omega} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} \right) = \frac{-1}{\omega} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega} \right)^l.$$

Se tiene que la ecuación (B.3.9) se puede expresar como:

$$a_1 \zeta(z) = a_1 \left\{ \frac{1}{z} - \sum_{\omega \in L^*} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{z^l}{\omega^{l+1}} \right\} = \frac{a_1}{z} - a_1 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{l+1}} z^l. \quad (\text{B.3.10})$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (B.3.8) en (B.3.7) y posteriormente en el último sumando de la ecuación (B.3.6), se tiene que:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=3}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{z^k} + \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{(z - \omega)^k} \right) = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{-1}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+k-1)!}{l!} \frac{z^l}{\omega^{l+k}} \right) \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{\omega \in L^*} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k(l+k-1)!}{k!l!} \frac{z^l}{\omega^{l+k}} \right) \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} \left(k \frac{(l+k-1)!}{k!l!} \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{l+k}} z^l \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3.11})$$

Ahora, suponiendo que la suma de los Lattices

$$S_{\lambda} = \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{\lambda}} = 0, \quad \text{para } \lambda = 2n + 1,$$

entonces, las ecuaciones (B.3.10) y (B.3.11) se transforman en:

$$a_1 \zeta(z) = \frac{a_1}{z} - a_1 \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{l+1}} z^l, \quad (\text{B.3.12})$$

y

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} \left(k \frac{(l+k-1)!}{k!l!} \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{l+k}} z^l \right). \quad (\text{B.3.13})$$

Por otro lado, para asegurar que la función (B.3.1) es doblemente periódica de periodos $2\omega_1$ y $2\omega_2$, se debe de tener que:

$$F(z + 2\omega_1) - F(z) = 0, \quad y \quad F(z + 2\omega_2) - F(z) = 0, \quad (\text{B.3.14})$$

de donde, a partir de ((B.3.1)), se tienen:

$$a_o(z + 2\omega_1) - a_o z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z + 2\omega_1) - \zeta^{(k)}(z)}{(k-1)!} = 0, \quad (\text{B.3.15})$$

y

$$a_o(z + 2\omega_2) - a_o z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z + 2\omega_2) - \zeta^{(k)}(z)}{(k-1)!} = 0. \quad (\text{B.3.16})$$

Ahora, partir de las propiedades de casi - periodicidad de la función ζ , propiedad (B.1), las ecuaciones (B.3.15) y (B.3.16) se reducen a:

$$2a_o\omega_1 + a_1 (\zeta(z + 2\omega_1) - \zeta(z)) = 0, \quad (\text{B.3.17})$$

y

$$2a_o\omega_2 + a_1 (\zeta(z + 2\omega_2) - \zeta(z)) = 0. \quad (\text{B.3.18})$$

que son equivalentes a las expresiones

$$a_o = -\frac{\eta_1}{\omega_1} \quad y \quad a_o = -\frac{\eta_2}{\omega_2}. \quad (\text{B.3.19})$$

Sumando las expresiones (B.3.12) y (B.3.13) y teniendo en cuenta el coeficiente a_o en términos de a_1 , ecuación (B.3.19), se tiene que la serie de *Laurent* de la función (B.3.1) viene dada por

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} k\eta_{kl} z^l, \quad (\text{B.3.20})$$

donde

$$\eta_{kl} = \frac{(l+k-1)!}{k!l!} \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{l+k}} = \frac{(l+k-1)!}{k!l!} S_{k+l}, \quad \text{para } k+l \neq 1,$$

y

$$\eta_{11} = \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\eta_2}{\omega_2}.$$

Apéndice C

Suma de Lattices

En el presente apéndice, presentaremos varios resultados, entre ellos demostrar la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{k+l}}. \quad (\text{C.0.1})$$

Además, se demostrará que el valor de la serie (C.0.1) es un elemento en el campo \mathbb{R} para ciertos periodos de gran importancia en el presente trabajo y para hallar valores de $k + l$ de tal forma que las series (C.0.1) sean distintas de cero.

C.1. Convergencia de la Serie

La convergencia de la serie

$$\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{k+l}},$$

donde $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ es de suma importancia para la existencia de funciones meromorfas doblemente periódicas (elípticas), las cuales serán de gran interés (funciones muy particulares de ellas) para dar solución a ciertos problemas que se tratan en el presente trabajo.

Lema C.1 *La serie*

$$\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{k+l}}, \quad (\text{C.1.1})$$

donde $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, es absolutamente convergente para cada $k + l > 2$.

Prueba: De la ecuación (C.1.1) tomamos $\lambda = k + l$. Ahora si $\lambda > 2$, la convergencia absoluta se da como caso particular del Lema (B.2) del Apéndice A.

□

Del Lema (B.2) se tiene que para cada $\lambda > 2$

$$S_\lambda = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^\lambda}, \quad (\text{C.1.2})$$

está bien definida.

C.2. Pertenencia de S_λ al cuerpo de los números \mathbb{R}

Sabemos que la serie (C.1.2) es convergente para $\lambda > 2$; sin embargo, es posible demostrar que $S_\lambda \in \mathbb{R}$ para algunos periodos ω_1 y ω_2 , como muestra el siguiente Lema:

Lema C.2 Para $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, entonces se tiene $S_\lambda \in \mathbb{R}$.

Prueba: De la ecuación (C.1.2) con $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, se tiene:

$$S_\lambda = \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda}. \quad (\text{C.2.1})$$

Tomando el conjugado en ambos lados de la ecuación (C.2.1) y utilizando propiedades elementales de conjugación, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{S_\lambda} &= \overline{\sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda}} = \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \overline{\frac{1}{(p + qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda}} \\ &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + qe^{-\frac{\pi}{3}i})^\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

De la ecuación (C.2.2) resulta que:

$$\begin{aligned} \overline{S_\lambda} &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + qe^{-\frac{\pi}{3}i})^\lambda} = \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + q + qe^{-\frac{\pi}{3}i} - q)^\lambda} \\ &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + q + q(e^{-\frac{\pi}{3}i} - 1))^\lambda} \\ &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + q - qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.3})$$

Tomando el cambio $m = p + q$ y $n = -q$ en la ecuación (C.2.3), tenemos:

$$\overline{S_\lambda} = \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p + q - qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda} = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(m + ne^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda}. \quad (\text{C.2.4})$$

La ecuación (C.2.4) se diferencia de la ecuación (C.2.1) en el orden de los términos. Por la convergencia absoluta de la serie (C.2.1), Lema (C.1), se tiene:

$$\overline{S}_\lambda = \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p+q-qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda} = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(m+ne^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda} = S_\lambda.$$

□

C.3. Valores de λ para que $S_\lambda \neq 0$.

El presente apartado se demostrará para que valores de $\lambda \in \mathbb{N}$ ($n \geq 3$) la serie $S_\lambda \neq 0$. Lo cual se muestra en el siguiente lema.

Lema C.3 *La serie $S_\lambda \neq 0$ si y solo si $\lambda = 6n$ para $n \geq 1$.*

Prueba: De la ecuación (C.1.2) para $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, se tiene:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p+qe^{\frac{\pi}{3}i})^\lambda} \\ &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{3}\lambda i} (pe^{-\frac{\pi}{3}i} + q)^\lambda} \\ &= \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i}}{(pe^{-\frac{\pi}{3}i} + q)^\lambda} \\ &= e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i} \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(q+pe^{-\frac{\pi}{3}i})^\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

Tomando el cambio de variable $p = q$ y $q = p$ en la ecuación (C.3.1) y aplicando el Lema (C.2) tenemos

$$S_\lambda = e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i} \sum_{p^2+q^2 \neq 0} \frac{1}{(p+qe^{-\frac{\pi}{3}i})^\lambda} = e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i} \overline{S}_\lambda = e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i} S_\lambda. \quad (\text{C.3.2})$$

Por lo tanto de la ecuación (C.3.2) se tiene

$$S_\lambda (1 - e^{-\frac{\pi}{3}\lambda i}) = 0, \quad (\text{C.3.3})$$

para cada $\lambda > 2$. Ahora de la ecuación (C.3.3) se tiene que si $\lambda > 2$, entonces:

$$S_\lambda \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\lambda\right)\right) = 0. \quad (\text{C.3.4})$$

Pero del término derecho de la ecuación (C.3.4) se sabe que:

$$\left(1 - \cos\left(\frac{\pi\lambda}{3}\right)\right) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\pi}{3}\lambda = 2\pi n,$$

para $n \geq 1$. De donde se tiene que

$$S_\lambda \neq 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lambda = 6n,$$

para $n \geq 1$.

□

Bibliografía

- [1] Eder M, Amini S, Fratzl P (2018) *Biological composites - complex structures for functional diversity*. Science 362, 543 - 547.
- [2] Kamal KK (Ed.) (2017) *Composite Materials*. Springer Berlin Heidelberg.
- [3] Kinloch I, Suhr J, Lou J, Young R, Ajayan P (2018) *Composites with carbon nanotubes and graphene*. Science 362, 547 - 553.
- [4] Bensoussan A, Lions J. L, Papanicolaou G (1978) *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, Amsterdam.
- [5] Bisegna P, Caselli F (2008) *A simple formula for the effective complex conductivity of periodic fibrous composites with interfacial impedance and applications to biological tissues*. J Phys D: Appl Phys 41:115506.
- [6] Bayford RH (2006) *Bioimpedance tomography (electrical impedance tomography)*. Ann Rev Biomed Eng 8, 63 - 91.
- [7] Nenchev N, Hatib F, Daskalov I (1998) *Monitoring relative fluid balance alterations in hemodialysis of diabetic patients by electrical impedance*. Physiol Meas 19, 35 - 52.
- [8] Ni Y, Mulier S, Miao Y, Michel L, Marshal G (2005) *A review of the general aspects of radiofrequency ablation*. Abdom Imaging 30, 381 - 400.
- [9] López R. JC, Rodríguez R. R, Guinovart D. R, Bravo C. J, Sabina J. F (2011) *Transport properties in fibrous elastic rhombic composite with imperfect contact condition*. Int J Mech Sci 53, 98 - 107.
- [10] Bravo C. J, Ramírez T. A, Sabina J. F, García R. C, Guinovart D. R, Rodríguez R. R (2020) *Analytical formulas for complex permittivity of periodic composites. Estimation of gain and loss enhancement in active and passive composites*. Waves in Random and Complex Media, 30:4, 593-613, <https://doi.org/10.1080/17455030.2018.1546063>.
- [11] Lang S (1993) *Complex Analysis*. Springer - Verlag, New York, 3rd edition.

- [12] Markushevich A (1970) *Teoría de Funciones Analíticas*. Editorial MIR, Moscú, Vol II.
- [13] Bakhvalov N, Panasenko G (1989) *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic Publishers, 1st edition.
- [14] Markushevich A (1970) *Teoría de Funciones Analíticas*. Editorial MIR, Moscú, Vol I.
- [15] Grigolyuk E. I (1970) *Perforated Plates and Shells*. Nauka, Moscú (En Ruso).
- [16] Sixto C. LM, Bravo C. J, Brenner R, Guinovart D. R, Mechkour H, Rodríguez R. R, Sabina J. F (2013) *Asymptotic homogenization of periodic thermo-magneto-electro-elastic heterogeneous media*. *Comput Math. Appl* 66, 2056-2074.
- [17] Kolmogorov A. N (1975) *Introductory Real Analysis*. Dover Publications.
- [18] Royden H. L (1988) *Real Analysis*. Oxford University Press, 3er edition.
- [19] Susanne C, L. Ridgway S (2007) *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 3er edition.
- [20] ArtKen G (1970) *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, New York, 7th edition.
- [21] Godin Y. A (2013) *Effective complex permittivity tensor of a periodic array of cylinders*. *J Math Phys*, 54:053505.
- [22] Xuanhe Z, Yugong W, Zhigang F and Fei L (2004) *Three-dimensional simulations of the complex dielectric properties of random composites by finite element method*. *J Appl. Phys*, 10.1063/1.1712017.
- [23] Kolpakov, A. A and Kolpakov, A. G. (2009) *Capacity and transport in contrast composite structures: asymptotic analysis and applications*. CRC Press.
- [24] Edward M. Purcell. (1985). *Berkeley Physics Course*, McGraw - Hill, Vol II.
- [25] Rothwell, E. J. (2001). Cloud MJ, *Electromagnetics*, CRC Press.
- [26] Córdula C. D (2012) *Technical Notes on Classical Electromagnetism*. arXiv:1209.3257v1 [physics.class-ph] 14 Sep 2012.
- [27] Peter M (2003) *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press.
- [28] Yañez O. D, Bravo C. J, Ramírez T. A, Rodríguez R. R, Sabina J. F (2019) *Effective Coefficients of Isotropic Complex Dielectric Composites in a Hexagonal Array*. *Tech. Mech.*, Vol 39, 10.25352/UB.OVGU-2019-020.

-
- [29] Larsson S, Thomée V (2003) *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer Berlin Heidelberg.
- [30] Jackson J. D (1998) *Classical and Electrodynamics*. John Wiley, 3rd edition.
- [31] Crank J (1975) *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, 2nd edition.