**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# GEOMETRÍA EXTRÍNSECA DE VARIEDADES CASI HERMITIANAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
RODRIGO AGUILAR SUÁREZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, JURIQUILLA.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. LUIS HERNÁNDEZ LAMONEDA
CIMAT.

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS, CU.

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO 2022.

# Introducción

A lo largo de esta tesis trabajamos sobre subvariedades Lagrangianas en una variedad Nearly Kaehler, comenzamos dando una pequeña introducción a estos conceptos básicos.
En el año 1949, C. Ehresmann introdujo en [13], el concepto de estructura casi compleja, esto es, un tensor $J$ de tipo (1,1) que satisface, $J^2 = -Id$. En el año 1980, A. Gray y L. M. Hervella en [18], clasificaron las dieciséis clases de variedades casi Hermitianas, es decir, una variedad Riemanniana $(N, g)$ y una estructura casi compleja $J$ de $N$ compatible con la métrica $g$, en el siguiente sentido; para cualesquiera campos $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$

$$g(X, Y) = g(JX, JY).$$

En esta clasificación destacamos la siguiente. Si $(N, g, J)$ es una variedad casi Hermitiana, $D$ es su conexión de Levi-Civita y para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(N)$ se satisface la propiedad

$$(D_X J)X = D_X JX - JD_X X = 0,$$

entonces decimos que $(N, g, J)$ es una subvariedad nearly Kaehler. A continuación explicamos el contenido y la motivación de los cuatro capítulos de los que esta conformada esta Tesis.
En el Capítulo 1, se explica con mayor profundidad los conceptos mencionados arriba. Este capítulo esta separado en tres secciones. En la primera sección, exponemos sobre la Geometría intrínseca de una variedad nearly Kaehler. En particular, nos concentramos en la derivada covariante de la estructura casi compleja y sus propiedades, que denotamos por,

$$\mathcal{G}(X, Y) = D_X JY - JD_X Y.$$

Se prueba que el tensor $\mathcal{G}$ en una variedad nearly Kaehler, es antisimétrico y que para cualesquiera campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$,

1. $\mathcal{G}(X, JY) + J\mathcal{G}(X, Y) = 0,$

2. $\langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle + \langle Y, \mathcal{G}(X,Z)\rangle = 0$.

En la segunda sección, nos concentramos en las propiedades básicas de las subvariedades Lagrangianas. Intuitivamente, es una subvariedad $M$ de una variedad casi Hermitiana $(N,g,J)$, que tiene la mitad de la dimensión que $N$, y si $X$ es un campo tangente de $M$, entonces $J(X)$ es un campo normal a $M$. En la Definición 1.2.3, se formaliza este concepto. Probamos uno de los resultados clásicos sobre subvariedades Lagrangianas en variedades nearly Kaehler, se afirma que, si $M$ es una subvariedad Lagrangiana de una variedad nearly Kaehler $(N,g,J)$, y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces el campo $G(X,Y)$ es un campo normal $M$. Como puede verificarse en la Proposición 1.2.4.

En la tercera y última sección del primer capítulo, abordamos el concepto de grupo de Lie, esto es, un grupo abstracto $G$, que cuenta con una estructura de variedad diferenciable, con la propiedad que, las funciones producto $\mu(g,h) = gh$ e inversa $i(g) = g^{-1}$ son funciones $\mathcal{C}^\infty$. Entre los conceptos más usados a lo largo de la tesis son la translación a la izquierda por $\sigma \in G$, la translación a la derecha por $\sigma \in G$ y la representación adjunta por $\sigma \in G$, las cuales están definidas respectivamente por

$$L_\sigma(g) = \sigma g,$$

$$R_\sigma(g) = g\sigma,$$

$$Ad_\sigma(X) = dL_\sigma(dR_{\sigma^{-1}}(X)).$$

Donde $dL_\sigma$ y $dR_\sigma$ representan las derivadas de las translaciones $L_\sigma$ y $R_\sigma$. Como un ejemplo importante del uso de las derivadas de funcines en grupos de Lie probamos de manera explicita las derivadas de las funciones producto e inversa del grupo, estas son,

$$d\mu|_{(p,q)}(X_p, Y_q) = dR_q|_p(X_p) + dL_p|_q(Y_q)$$

$$di|_p(X_p) = -dR_{p^{-1}}|_e dL_{p^{-1}}|_p X(p).$$

Se pueden consultar en la Proposición 1.3.12 y en el Corolario 1.3.13. Lo que concluye con los preliminares.

Para el Capítulo 2 nos enfocamos en la variedad $\mathbb{C}^2$ con la métrica usual de $\mathbb{R}^4$ y la estructura casi compleja $J$ definida por: si $X = (x,y,z,w) \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2)$,

$$J(X) = J(x,y,z,w) = (-y, x, -w, z).$$

Un problema en esta variedad Kaehler $\mathbb{C}^2$, es la clasificación o caracterización de superficies Lagrangianas. Hay avances en este sentido con alguna condición adicional, como se puede verificar en [9, 8, 10]. El propósito del Capítulo 2, que cuenta con cuatro secciones, es contribuir en esta dirección, al intentar resolver el siguiente problema. ¿Cuáles son las superficies Lagrangianas de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z$ en $\mathbb{C}^2$? Una superficie $M$ es de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z$ de $\mathbb{C}^2$, si el ángulo formado entre el espacio tangente de $N$ y el campo paralelo $Z$ no depende del punto donde se calcula, esto se formaliza en la Definición 2.1.1. El hecho de que este sea un problema que aún no esta explorado anteriormente en la literatura hace que los resultados sean originales. En la primera sección, se prueban las propiedades generales de una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z$ en $\mathbb{C}^2$. Por ejemplo, en el Lema 2.1.4, vemos que si $M$ es una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z$, entonces también es de ángulo constante respecto al campo paralelo $JZ$. Por otro lado en los casos particulares en que la superficie Lagrangiana $M$, es tangente o normal al campo paralelo $Z$, entonces $M$ es un cilindro sobre una curva plana contenido en un plano complejo del espacio $\mathbb{C}^2$, lo que se puede cotejar en la Proposición 2.1.7. El Corolario 2.1.8 muestra que si la superficie Lagrangiana esta contenida en un hiperplano de $\mathbb{C}^2$, entonces también es un cilindro. Es conveniente decir que hasta el momento no se han encontrado ejemplos explícitos de una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z$ en $\mathbb{C}^2$ que no sean cilindros.

Para tener un mejor panorama del problema observamos que si $M$ es una superficie Lagrangiana de $\mathbb{C}^2$ de ángulo constante respecto al campo paralelo $Z$, entonces $Z = Z^T + Z^\perp$, donde $Z^T$ es la parte tangente de $Z$ a $M$, y $Z^\perp$ es la parte normal de $Z$ a $M$. Ya que la superficie considerada es Lagrangiana se tiene que el campo $JZ^\perp$ es un campo tangente, así tenemos de manera natural dos casos. El primer caso lo tratamos en la Sección 2.2, esto es, si suponemos que los campos tangentes $Z^T$ y $JZ^\perp$ son linealmente dependientes podemos probar que la superficie es un cilindro, Teorema 2.2.3 lo que finaliza este caso.
El segundo caso, se aborda en la Sección 2.3, aquí suponemos que los campos $Z^T$ y $JZ^\perp$ son linealmente independientes. Definimos la función auxiliar $f = \langle Z^T, JZ^\perp \rangle$, si esta función es cero entonces los campos son linealmente dependientes por lo que en este caso la función siempre será distinta de cero. Gracias a $f$ es posible escribir la curvatura Gaussiana de $M$ denotada por $K$ y la curvatura media de la superficie $M$ denotada por $H$, como se muestra a continuación y

se prueban en el Corolario 2.3.7,

$$K = \frac{f}{\Delta^2}\left(Z^T \cdot f\right)\left(JZ^\perp \cdot f\right),$$

$$2H = \left(\frac{|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|\Delta}\right)Je_1 + \left(\frac{-f|Z^T|^2|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f) + 2f^3(Z^T\cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}}\right)Je_2.$$

En la última sección se hace un análisis con condiciones más explicitas. Consideramos que $M$ es una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto al campo $e_4 = (0,0,0,1)$ y admite una parametrización como gráfica de una función. En el Corolario 2.4.10 se prueba que existen sólo tres posibilidades distintas de parametrizaciones salvo isometrías, que enunciamos abajo,

$$\phi_1(x,y) = (x, y, f(x,y), g(x,y)),$$

$$\phi_2(x,y) = (x, f(x,y), y, g(x,y)),$$

$$\phi_3(x,y) = (f(x,y), x, y, g(x,y)).$$

Enunciamos condiciones necesarias para que una superficie sea Lagrangiana que resumimos en la siguiente tabla

| Parametrización | Condición para ser Lagrangiana |
|---|---|
| $\phi_1(x,y) = (x,y,f(x,y),g(x,y))$ | $f_xg_y - f_yg_x = -1$ |
| $\phi_2(x,y) = (x,f(x,y),y,g(x,y))$ | $f_y = g_x$ |
| $\phi_3(x,y) = (f(x,y),x,y,g(x,y))$ | $f_y = -g_x$ |

y cuya demostración se puede consultar en la Proposición 2.4.8. De manera similar si una superficie Lagrangiana admite una parametrización por medio $\phi_1$, $\phi_2$ o $\phi_3$ en la Proposición 2.4.13 se exhibe la magnitud del campo $e_4 = (0,0,0,1)$ sobre el espacio tangente de $M$.

| Parametrización | $\lvert e_4^T\rvert^2$ | $\lvert e_3^T\rvert^2$ |
|---|---|---|
| $\phi_1$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ |
| $\phi_2$ | $\frac{\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ |
| $\phi_3$ | $\frac{\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ |

En el resto de la sección analizamos condiciones especificas sobre una superficie, estas son si admite una de las parametrizaciones sobre el tipo de parametrización que admite, $\phi_1$, $\phi_2$ o $\phi_3$ junto a alguna condición extra en dicha parametrización. Véase por ejemplo, el Corolario

2.4.16, que dice que cualquier superficie Lagrangiana $M \subset \mathbb{C}^2$ que admite parametrización $\phi_1(x,y) = (x,y,f(x,y),g(x,y))$, tal que, $f$ y $g$ son funciones eikonales o $|\nabla_0 f|^2 = |\nabla_0 g|^2$, entonces $M$ es de ángulo constante respecto a $e_4$. Con lo que concluimos el resumen del Capítulo 2.

Una de las variedades nearly Kaehler más estudiada en los últimos años, es la variedad nearly Kaehler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, con la estructura casi compleja $J$ definida como sigue: si $\overline{X} = (X,Y) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$, donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$, entonces en el punto $(p,q) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, se define

$$J_{(p,q)}\overline{X} = J_{(p,q)}(X_p, Y_q) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2pq^{-1}(Y_q) - X_p, -2qp^{-1}(X_p) + Y_q\right)$$

donde $pq^{-1}(Y_q)$ representa el producto cuaterniónico de los cuaterniones $p$, $q$ y $Y_q$, similarmente con $qp^{-1}(X_p)$. Y se considera una métrica $s$ compatible con esta estructura casi compleja.

El Capítulo 3, se compone de tres secciones. En la primera sección se hace una construcción formal de la variedad de Sekigawa, esta es una variedad que propone en el año 1993 K. Sekigawa a E. Abbena y S. Garbiero en [12], como un ejemplo de una variedad nearly Kaehler. Grosso modo esta construcción se hace de la siguiente manera. Consideramos un grupo de Lie $G$ con métrica bi-invariante $g$. Consideramos el grupo de Lie producto $G \times G$. Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, se construyen los campos horizontales y verticales $X^h, X^v \in \mathfrak{X}(G \times G)$ definidos por,

$$X^v := (0, X), \quad X^h := \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right).$$

Con los que se construyen la estructura casi compleja $J$ por medio de las siguientes fórmulas,

$$JX^h = -X^v, \; JX^v = X^h,$$

y la mética $\langle , \rangle$ como,

$$\left\langle X^h, Y^h \right\rangle := g(X,Y), \; \left\langle X^v, Y^h \right\rangle = \left\langle X^h, Y^v \right\rangle := 0, \; \left\langle X^v, Y^v \right\rangle := g(X,Y).$$

En la Proposición 3.1.12 se prueba que $(G \times G, \langle , \rangle, J)$ es una variedad casi Hermitiana. En la segunda sección probamos que $(G \times G, \langle , \rangle, J)$ es una variedad nearly Kaehler veáse el Teorema 3.2.2. Para esto es importante conocer el comportamiento de la estructura casi compleja $J$ en la estructura producto, esto es, como se aplica a campos de la forma $(X,Y) \in \mathfrak{X}(G \times G)$ donde $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$. Se prueba en la Proposición 3.1.9 que

$$J_{(p,q)}(X_p, Y_q) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}Y_q - X_p, -2dL_{qp^{-1}}X_p + Y_q\right).$$

Hacemos los cálculos de la conexión que denotamos por $D$, la curvatura denotada por $R$, así como del tensor $\mathcal{G}$ de la variedad casi Hermitiana $(G \times G, \langle , \rangle , J)$. Como consecuencia de lo anterior se prueba en el Corolario 3.2.6, que si el grupo de Lie $G$ es de Einstein, es decir, la curvatura de Ricci es un múltiplo de la métrica, entonces la variedad de Sekigawa también es de Einstein.

Un hecho sorprendente es que si se considera la construcción de Sekigawa con el grupo de Lie $G = \mathbb{S}^3$ y la métrica bi-invariante usual de $\mathbb{S}^3$ la variedad de Sekigawa es prácticamente la misma variedad nearly Kaehler usual que se menciono arriba, concretamente son la misma variedad diferenciable, las estructuras casi complejas coinciden, y sólo se diferencian por un múltiplo constante en la métrica. Por ello resulta interesante extender las técnicas utilizadas en el estudio de la variedad nearly Kaehler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ a la variedad de Sekigawa $G \times G$.
Así, en la tercera sección generalizamos la estructura casi producto $P$, que se introduce en [6] para la variedad $\mathbb{S}^3$ a la variedad $G \times G$ de la siguiente manera,

$$P_{(p,q)}(X(p), Y(q)) = (dL_{pq^{-1}}Y(q), dL_{qp^{-1}}X(p)).$$

Con esta nueva herramienta podemos describir relaciones entre las métrica de la variedad de Sekigawa y la métrica de la variedad producto $(G \times G, h, D^E)$, donde $h$ denota la métrica producto y $D^E$ la conexión producto. La relación es,

$$\left\langle \overline{X}, \overline{U} \right\rangle = h\left(\overline{X}, \overline{U}\right) - \frac{1}{2} h\left(\overline{X}, P\overline{U}\right), \tag{1}$$

donde $\overline{X}, \overline{U} \in \mathfrak{X}(G \times G)$ son campos invariantes izquierdos. Lo anterior se puede consultar en el Corolario 3.3.2. De manera similar en el Lema 3.3.4 muestra la relación que guardan las conexiones $D$ y $D^E$,

$$D_{\overline{X}}(\overline{U}) = D^E_{\overline{X}}(\overline{U}) - \frac{1}{3}\left(D^E_{\overline{X}} P\overline{U} - D^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right).$$

El último resultado que reslta de esta sección es el Corolario 3.3.6, donde se muestra que la relación que obtienen B. Bektas, M. Moruz, J. Van der Veken y L. Vrancken, en [3] se puede generalizar a la variedad de sekigawa, esto es,

$$D^E_{\overline{X}}\overline{U} = D_{\overline{X}}\overline{U} + \frac{1}{2}\left(J\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + J\mathcal{G}(\overline{U}, P\overline{X})\right).$$

El Capítulo 4, se compone de dos secciones. En la primera sección, generalizamos a la variedad de Sekigawa, el concepto de funciones ángulos que aparece en el estudio de la variedad nearly Kaehler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, veáse por ejemplo [3, 4, 12]. Grosso modo la construcción es como sigue. Sea $M$ es una subvariedad Lagrangiana de la variedad Sekigawa $G \times G$. El espacio tangente de $G \times G$ restringido a $M$ se descompone como,

$$T(G \times G)|_M = TM \oplus JTM.$$

A cualquier campo $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$ le podemos aplicar el operador $P$ definido arriba, para facilitar la notación lo aplicamos en la identidad de $G \times G$,

$$P(X, Y) = (Y, X)$$

este campo que en principio no es tangente ni normal a $M$ pero si es un campo de $G \times G$ restringido a $M$ por lo que se puede descomponer como una suma de una parte tangente y una normal, de manera que podemos definir operadores $A, B : TM \to TM$ como aquellos que satisfacen la igualdad,

$$P(X, Y) = A(X, Y) + J(B(X, Y)).$$

Estos operadores resultan ser simultáneamente diagonalizables como lo garantiza el Corolario 4.1.3, por lo tanto, existe un marco ortonormal de campos $E_1, E_2, \ldots, E_{dim(M)}$ y funciones $\theta_i : M \to [0, \pi)$, tales que,

$$PE_i = cos(2\theta_i)E_i + sen(2\theta_i)JE_i.$$

Estas funciones $\theta_i$ son las funciones ángulo. Con ellas probamos el resultado principal del capítulo, el Teorema 4.1.5 que garantiza que $M$ es una subvariedad Lagrangiana mínima de la variedad de Sekigawa $G \times G$ si y sólo si la suma de sus funciones ángulo es una función constante.

En la segunda sección, mostramos 5 ejemplos de inmersiones de $G$ en la variedad de Sekigawa $G \times G$. Estas inmersiones están inspiradas en [25], de Y. Zhang, B. Dioos, L. Vrancken y X. Wang.

1. $\phi_1 : G \to G \times G$, definida como, $\phi_1(p) = (p, e)$, donde $e$ es la identidad en $G$, es una inmersión isométrica Lagrangiana y totalmente geodésica.

2. $\phi_2 : G \to G \times G$, definida como, $\phi_2(p) = (e, p)$, es una inmersión isométrica Lagrangiana y totalmente geodésica.

3. $\Delta : G \to G \times G$, definida como $\Delta(p) = (p, p)$, es una inmersión isométrica Lagrangiana y totalmente geodésica.

4. Sean $\sigma \in G$ y $\nu : G \to G \times G$ la función dada por $\nu(g) = (g, R_\sigma(g))$. La condición general para que la inmersión $\nu$ sea inmersión isométrica, Lagrangiana y totalmente geodésica es $\sigma \in Z(G)$. Mientras por separado tenemos,

   *a*) $Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id$ si y sólo si $\nu$ es inmersión isométrica.

   *b*) $Ad_{\sigma^2} = Id$ si y sólo si $\nu$ es inmersión Lagrangiana.

   *c*) $ad_X(Ad_\sigma(Y)) = -ad_Y(Ad_\sigma(X))$ para cada campo invariante izquierdo $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ si y sólo si $\nu$ es inmersión totalmente geodésica.

5. Sea $\sigma \in G$. La función $\vartheta : G \to G \times G$ definida como

$$\vartheta(p) = (p^{-1}, p\sigma p^{-1}) = (i(p), \mu(R_\sigma(p), i(p))).$$

   La condición general para que la inmersión $\vartheta$ sea inmersión isométrica y Lagrangiana es $\sigma \in Z(G)$. Mientras por separado tenemos,

   *a*) $Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id$ si y sólo si $\vartheta$ es inmersión isométrica.

   *b*) $Ad_{\sigma^2} = Id$ si y sólo si $\vartheta$ es inmersión Lagrangiana.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

Dentro de este primer capítulo enunciamos la teoría general que se considera suficiente para poder comprender el resto de la tesis. En su gran mayoría las proposiciones contienen sus demostraciones o en su defecto una referencia donde se puede consultar.

## 1.1. Geometría intrínseca de una variedad nearly Kaehler

En el año 1949 C. Ehresmann introduce en [13] el concepto de estructura casi compleja. Tiempo después A. Gray y L. M. Hervella en [18] clasificarón las dieciséis clases de variedades casi Hermitianas. Comenzamos este capítulo introductorio estudiando de manera intrínseca a las variedades nearly Kaehler.

**Definición 1.1.1.** *Sea $N$ una variedad diferenciable de dimensión $n$. Una estructura casi compleja, es un (1,1)-tensor, $J : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(N)$, que satisface,*

$$J^2 = -Id.$$

*En tal caso a la pareja $(N, J)$, se le llama, variedad casi compleja.*

**Proposición 1.1.2.** *Toda variedad casi compleja $(N^n, J)$ tiene dimensión real par.*

*Demostración.* Ya que, $J$ es una estructura casi compleja, se sigue que,

$$0 \leq (detJ)^2 = detJ^2 = det(-Id) = (-1)^n.$$

Por lo que la única posibilidad para $n$, es que sea un número par. $\square$

**Definición 1.1.3.** *Sea $(N, J)$ una variedad casi compleja con métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A $(N, J, \langle , \rangle)$, se la llama una variedad casi Hermitiana, si para cada $p \in N$, $J_p$ preserva el producto interior $\langle , \rangle_p$ de $T_pN$, esto es, para cualesquiera $X_p, Y_p \in T_pN$,*

$$\langle J_pX_p, J_pY_p \rangle = \langle X_p, Y_p \rangle .$$

*Notación* 1. Sea $(N, J, \langle , \rangle)$ una variedad casi Hermitiana. La derivada covariante de la estructura casi compleja $J$ se denota por,

$$\mathcal{G}(X, Y) := (D_X J)Y = D_X JY - JD_X Y, \tag{1.1}$$

para cada campo $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

**Definición 1.1.4.** *Una variedad casi Hermitiana $(N, J, \langle , \rangle)$, con conexión de Levi-Civita $D$ es nearly Kaehler si, para cada $X \in \mathfrak{X}(N)$,*

$$\mathcal{G}(X, X) = 0.$$

**Lema 1.1.5.** *Una variedad casi Hermitiana $(N, J, \langle , \rangle)$, es una variedad nearly Kaehler si y sólo si para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$,*

$$\mathcal{G}(X, Y) = -\mathcal{G}(Y, X).$$

*Demostración.* Supongamos primero que $N$ es nearly Kaehler, esto implica que,

$$0 = (D_{(X+Y)}J)(X + Y).$$

Utilizando la bilinealidad desarrollamos el lado derecho,

$$(D_{(X+Y)}J)(X + Y) = (D_X J)X + (D_X J)Y + (D_Y J)X + (D_Y J)Y.$$

Nuevamente del hecho que $N$ es nearly Kaehler, $(D_X J)X = 0 = (D_Y J)Y$ y por lo tanto,

$$0 = (D_{(X+Y)}J)(X + Y) = (D_X J)Y + (D_Y J)X = \mathcal{G}(X, Y) + \mathcal{G}(Y, X).$$

Lo cual, es equivalente a $\mathcal{G}(X, Y) = -\mathcal{G}(Y, X)$. Por otro lado, si suponemos que $\mathcal{G}$ es antisimétrico, esto es, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ $\mathcal{G}(X, Y) = -\mathcal{G}(Y, X)$, en particular si $X = Y$, se sigue $\mathcal{G}(X, X) = -\mathcal{G}(X, X)$, lo cual es posible sólo en el caso que $\mathcal{G}(X, X) = 0$. $\square$

**Proposición 1.1.6.** *Sea* $(N, J, \langle,\rangle)$ *una variedad nearly Kaehler. Entonces el tensor* $\mathcal{G}$ *satisface que para cada* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$,

1. $\mathcal{G}(X, JY) + J\mathcal{G}(X, Y) = 0$,
2. $\langle \mathcal{G}(X, Y), Z\rangle + \langle Y, \mathcal{G}(X, Z)\rangle = 0$.

*Demostración.* La primer ecuación, se sigue del cálculo directo,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X, JY) &= D_X J(JY) - JD_X JY = -D_X Y - JD_X JY = J(JD_X Y - D_X JY)\\ &= -J((D_X J)Y) = -J\mathcal{G}(X, Y).\end{aligned}$$

Por último, el siguiente cálculo demuestra la segunda ecuación,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}(X, Y), Z\rangle &= \langle D_X JY, Z\rangle - \langle JD_X Y, Z\rangle = X\langle JY, Z\rangle - \langle JY, D_X Z\rangle + \langle D_X Y, JZ\rangle\\ &= X\langle JY, Z\rangle - \langle JY, D_X Z\rangle + X\langle Y, JZ\rangle - \langle Y, D_X JZ\rangle\\ &= -X\langle Y, JZ\rangle + \langle Y, JD_X Z\rangle + X\langle Y, JZ\rangle - \langle Y, D_X JZ\rangle\\ &= \langle Y, JD_X Z\rangle - \langle Y, D_X JZ\rangle = -\langle Y, \mathcal{G}(X, Z)\rangle.\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos la prueba. □

**Definición 1.1.7.** *Una variedad nearly Kaehler* $(N, J, \langle,\rangle)$*, se llama Kaehler, si el tensor* $\mathcal{G}$*, es idénticamente cero.*

**Corolario 1.1.8.** *Sea* $(N, J, \langle,\rangle)$ *una variedad nearly Kaehler, entonces el tensor* $\langle \mathcal{G}(X, Y), Z\rangle$*, satisface las siguientes simetrías,*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}(X, Y), Z\rangle &= \langle \mathcal{G}(Z, X), Y\rangle = \langle \mathcal{G}(Y, Z), X\rangle = -\langle \mathcal{G}(Y, X), Z\rangle = \langle \mathcal{G}(X, Z), Y\rangle\\ &= \langle \mathcal{G}(Z, Y), X\rangle.\end{aligned}$$

*Demostración.* La prueba se sigue del uso iterativo de la Proposición 1.1.6 y del Lema 1.1.5, como sigue,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}(X, Y), Z\rangle &= -\langle \mathcal{G}(Y, X), Z\rangle = \langle \mathcal{G}(Y, Z), X\rangle = -\langle \mathcal{G}(Z, Y), X\rangle\\ &= \langle \mathcal{G}(Y, Z), X\rangle = -\langle \mathcal{G}(Z, Y), X\rangle,\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

**Teorema 1.1.9.** *[16, Teorema 3.6] Si $(N, g)$ es una variedad Riemanniana, entonces la conexión de Levi-Civita, denotada por $D$, esta determinada por la fórmula de Koszul,*

$$2g(D_XY, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) - g([Y, X], Z) - g([Y, X], Z) - g([X, Z], Y).$$

**Definición 1.1.10.** *Sea $(N, \langle , \rangle)$ una variedad Riemannina. El tensor de curvatura se define como,*

$$R_{X,Y}Z = D_{[X,Y]}Z - D_XD_YZ + D_YD_XZ.$$

**Proposición 1.1.11.** *[17, Lema 4] Sea $(N, \langle , \rangle, J)$ una variedad nearly Kaehler, entonces para cualesquiera $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(N)$, se satisface,*

1. $|\mathcal{G}(X, Y)|^2 = \langle R_{XY}X, Y \rangle - \langle R_{XY}JX, JY \rangle$,
2. $\langle R_{XY}X, Y \rangle = \langle R_{JXJY}JX, JY \rangle$.

## 1.2. Geometría extrínseca de una Subvariedad Lagrangiana

En esta sección abordamos el concepto de una subvariedad Lagrangiana, y la interacción que tiene con el ambiente al cual pertenece.

**Definición 1.2.1.** *Sea $(N, \langle , \rangle, D)$ una variedad Riemanniana con métrica $\langle , \rangle$ y conexión de Levi-Civita $D$. Si $(M, g, \nabla)$, es una subvariedad Riemanniana de $N$. Entonces para cualesquiera campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ las fórmulas de Gauss y Weingarten son respectivamente,*

$$D_XY = (D_XY)^T + (D_XY)^{\perp} = \nabla_XY + h(X, Y),$$

$$D_X\eta = (D_X\eta)^T + (D_X\eta)^{\perp} = -A_{\eta}X + \nabla^{\perp}_X\eta,$$

*donde $\nabla$ es la conexión de Levi-Civita de $M$, $h$ es la segunda forma fundamental de $M$ en $N$, $A$ es el operador de forma y $\nabla^{\perp}$ es la conexión normal de $M$ en $N$.*

**Proposición 1.2.2.** *[16, Prop. 3.1] Sean $(N, \langle , \rangle)$ una variedad Riemanniana y $M$ una subvariedad de $N$. Las ecuaciones de Gauss y Codazzi son respectivamente, para cualesquiera campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\left\langle \overline{R}_{X,Y}Z, W \right\rangle = \langle R_{X,Y}Z, W \rangle + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle,$$

$$(R_{X,Y}Z)^{\perp} = (D_X h)(Y,Z) - (D_Y h)(X,Z),$$

*donde,* $(D_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$.

**Definición 1.2.3.** *Sea $(N, J, \langle,\rangle)$ una variedad nearly Kaehler. A una subvariedad $M$ de $N$, se le llama Lagrangiana, si la dimensión de $M$, es la mitad de la de $N$, y $J(TM) = TM^{\perp}$.*

**Ejemplo 1.** *Consideramos la variedad Kaehler $(\mathbb{C}^2, J, \langle,\rangle, D)$, con la métrica usual de $\mathbb{R}^4$ la estructura casi compleja $J$ definida de la siguiente manera, si $(x,y,z,w) \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2)$,*

$$J(x,y,z,w) = (-y, x, -w, z),$$

*y conexión de Levi-Civita $D$. Sean $\gamma : I \to X \subset \mathbb{C}^2$ y $\beta : I \to Y \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas regulares, donde $X$ es el plano generado por los vectores $\{e_1 = (1,0,0,0), Je_1 = e_2 = (0,1,0,0)\}$ y $Y$ es plano complemento ortogonal de $X$. La superficie $\gamma \times \beta : I \times I \to \mathbb{C}^2$ es una superficie Lagrangiana.*

**Proposición 1.2.4.** *Sea $M$ una subvariedad Lagrangiana de una variedad nearly Kaehler $(N, J, \langle,\rangle)$. Entonces, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el campo $\mathcal{G}(X,Y)$, es normal a $M$.*

*Demostración.* Para cualquier campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos, por un lado, haciendo uso del Corolario 1.1.8 que,

$$\langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle = \langle \mathcal{G}(Z,X), Y\rangle = \langle \mathcal{G}(Y,Z), X\rangle.$$

Por otro lado, al desarrollar $\langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle &= \langle D_X JY, Z\rangle - \langle JD_X Y, Z\rangle = \langle -A_{JY}X, Z\rangle + \langle h(X,Y), JZ\rangle \\ &= -\langle h(X,Z), JY\rangle + \langle h(X,Y), JZ\rangle, \end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene,

$$\langle \mathcal{G}(Z,X), Y\rangle = -\langle h(Z,Y), JX\rangle + \langle h(Z,X), JY\rangle,$$

$$\langle \mathcal{G}(Y,Z), X\rangle = -\langle h(Y,X), JZ\rangle + \langle h(Y,Z), JX\rangle,$$

por lo que obtenemos que,

$$\begin{aligned} 3\langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle &= \langle \mathcal{G}(X,Y), Z\rangle + \langle \mathcal{G}(Z,X), Y\rangle + \langle \mathcal{G}(Y,Z), X\rangle \\ &= -\langle h(X,Z), JY\rangle + \langle h(X,Y), JZ\rangle \\ &\quad -\langle h(Z,Y), JX\rangle + \langle h(Z,X), JY\rangle \\ &\quad -\langle h(Y,X), JZ\rangle + \langle h(Y,Z), JX\rangle = 0. \end{aligned}$$

Dado que esto es válido para todo campo tangente $Z$, es claro ahora que, la única posibilidad es que, $\mathcal{G}(X,Y)=0$. □

**Proposición 1.2.5.** *Sean $(N, J, \langle,\rangle)$ una variedad nearly Kaehler y $M$ una subvariedad Lagrangiana de $N$. Entonces para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, son válidas las siguientes ecuaciones,*

1. $A_{JY}X = -Jh(X,Y)$,

2. $\mathcal{G}(X,Y) = \nabla^{\perp}_X JY - J\nabla_X Y$.

*Demostración.* De la definición de $\mathcal{G}$ se sigue,

$$\mathcal{G}(X,Y) = D_X JY - JD_X Y = -A_{JY}X + \nabla^{\perp}_X JY - J\nabla_X Y - Jh(X,Y),$$

sabemos de la Proposición 1.2.4, que el campo $\mathcal{G}(X,Y)$ es normal, lo que garantiza $\mathcal{G}(X,Y)$ es igual sólo a la parte normal de la derecha en la igualdad anterior, esto es,

$$\mathcal{G}(X,Y) = \nabla^{\perp}_X JY - J\nabla_X Y.$$

Por lo que la parte tangente, es decir, la parte restante de la igualdad derecha, es identicamente cero, con lo que podemos concluir que,

$$A_{JY}X = -Jh(X,Y).$$

Tal como queríamos demostrar. □

**Corolario 1.2.6.** *Sean $(N, J, \langle,\rangle)$ una variedad Kaehler y $M$ una subvariedad Lagrangiana de N. Entonces, para cualesquiera campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, son válidas las siguientes ecuaciones,*

1. $A_{JY}X = -Jh(X,Y)$,

2. $\nabla^{\perp}_X JY = J\nabla_X Y$.

*Demostración.* Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 1.2.5, y del hecho que la variedad $N$ es Kaehler, es decir, $\mathcal{G}(X,Y)=0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

**Lema 1.2.7.** *Sea $M$ una subvariedad Lagrangiana de $\mathbb{C}^2$. Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, las siguientes ecuaciones son válidas,*

$$-A_{JY}X = Jh(X,Y), \tag{1.2}$$

$$\nabla^{\perp}_X JY = J\nabla_X Y, \tag{1.3}$$

$$\nabla_X J\xi = J\nabla^{\perp}_X \xi, \tag{1.4}$$

$$h(X, J\xi) = -JA_\xi X. \tag{1.5}$$

*Demostración.* Como $\mathbb{C}^2$ es Kaehler,

$$D_X JY = JD_X Y,$$

de las ecuaciones de Gauss y Weingarten presentadas en la Definición 1.2.1, la ecuación anterior es equivalente a,

$$-A_{JY}X + \nabla^{\perp}_X JY = J\nabla_X Y + Jh(X,Y).$$

Al comparar las partes tangentes y partes normales, tenemos las ecuaciones 1.2 y 1.3. Ahora, en la ecuación,

$$D_X J\xi = JD_X\xi,$$

aplicamos nuevamente las ecuaciones de Gauss y Weingarten, y obtenemos la expresión equivalente,

$$\nabla_X J\xi + h(X, J\xi) = -JA_\xi X + J\nabla^{\perp}_X\xi,$$

enseguida, al comparar partes normales y partes tangentes obtenemos las ecuaciones 1.4 y 1.5, con lo que se concluye la demostración. □

**Definición 1.2.8.** *Sea $M$ una subvariedad Riemanniana de una variedad Riemanniana $N$, la curvatura normal de $M$ en $N$ esta definida por,*

$$R^{\perp}(X,Y)\xi \quad = \quad \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi + \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi,$$

*donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$.*

**Proposición 1.2.9.** *Sea $M$ una superficie Lagrangiana en una variedad Kaehler $N$. Entonces si $R$ denota el tensor de curvatura de $M$, y $R^{\perp}$ el tensor de curvatura normal de $M$. La relación entre ellos para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ queda de manifiesto en la siguiente ecuación,*

$$R^{\perp}(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z. \tag{1.6}$$

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 1.2.6, que $\nabla^{\perp}_X JY = J\nabla_X Y$, con lo cual

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y)JZ &= \nabla^{\perp}_{[X,Y]}JZ - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y JZ + \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X JZ \\ &= J\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla^{\perp}_X J\nabla_Y Z + \nabla^{\perp}_Y J\nabla_X Z \\ &= J\nabla_{[X,Y]}Z - J\nabla_X\nabla_Y Z + J\nabla_Y\nabla_X Z = JR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Lo que termina la prueba. □

**Proposición 1.2.10.** *Sean $(N, J, \langle , \rangle)$ una variedad nearly Kaehler y $M$ una subvariedad Lagrangiana de $N$. Para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, el (0,3)-tensor $\langle h(X,Y), JZ\rangle$ es simétrico.*

*Demostración.* Es claro, ya que la segunda forma fundamental $h$ es simétrica que,

$$\langle h(X,Y), JZ\rangle = \langle h(Y,X), JZ\rangle \,.$$

Para probar la simetría entre la primera y tercera entrada, procederemos de manera directa con los siguientes cálculos, utilizando la Proposición 1.2.5,

$$\begin{aligned} \langle h(X,Y), JZ\rangle &= -\langle Jh(X,Y), Z\rangle = \langle A_{JY}X, Z\rangle = \langle D_X JY, Z\rangle = X\cdot\langle JY, Z\rangle - \langle JY, D_X Z\rangle \\ &= \langle JY, h(X,Z)\rangle \,. \end{aligned}$$

La simetría para la segunda y tercera entrada, es consecuencia de las dos simetrías anteriores, como se muestra enseguida,

$$\langle h(X,Y), JZ\rangle = \langle h(Y,X), Z\rangle = \langle h(Z,X), Y\rangle = \langle h(X,Z), Y\rangle \,.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Definición 1.2.11.** *Sean $(N, J, \langle , \rangle)$ una variedad nearly Kaehler y una función $\Phi : N \to N$. Decimos que $\Phi$ es holomorfa si $d\Phi$ conmuta con la estructura casi compleja $J$ de $N$, esto es,*

$$d\Phi J = J(d\Phi).$$

*Diremos que es antiholomorfa si $d\Phi$ anticonmuta con la estructura casi compleja $J$ de $N$, es decir,*

$$d\Phi J = -J(d\Phi).$$

**Lema 1.2.12.** *Sean $M^n$ una subvariedad lagrangiana de una variedad nearly Kaehler $(N, J, \langle , \rangle)$, y $\Phi : N \to N$ una isometría holomorfa o antiholomorfa, entonces $\Phi(M)$ es una subvariedad lagrangiana de $N$.*

*Demostración.* Vamos a probar que, si $d\Phi$ es antiholomorfa, entonces $\Phi(M)$ es una subvariedad lagrangiana de $N$. Primero, es claro que $\Phi(M)$ es una subvariedad de $N$, ya que, $\Phi$ es en particular un difeomorfismo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ un marco ortonormal de $M$, se sigue, de la hipótesis, $M$ lagrangiana que,

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n, JX_1, JX_2, \ldots, JX_n\},$$

es una marco local ortonormal de $N$ a lo largo de $M$. Del hecho que $\Phi$ es una isometría, podemos deducir que,

$$\{d\Phi(X_1), d\Phi(X_2), \ldots, d\Phi(X_n), d\Phi(JX_1), d\Phi(JX_2), \ldots, d\Phi(JX_n)\},$$

es una marco local ortonormal de $N$ a lo largo de $\Phi(M)$, más aún, es una marco ortonormal local $N$ a lo largo de $\Phi(M)$. Ahora, ya que $\Phi$ es antiholomorfa, es decir, $d\Phi \circ J = -J \circ d\Phi$, para cada $i \neq j$,

$$\langle d\Phi(X_i), Jd\Phi(X_j)\rangle = -\langle d\Phi(X_i), d\Phi(JX_j)\rangle = \langle X_i, JX_j\rangle = 0.$$

Lo cual implica que $\Phi(M)$ es una subvariedad Lagrangiana. La prueba del caso, en el que $\Phi$ es holomorfa, se hace de manera análoga. $\square$

**Ejemplo 2.** *En la variedad Riemanniana de los cuaterniones $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, con la métrica usual de $\mathbb{R}^4$ consideramos la tres esfera,*

$$\mathbb{S}^3 = \{x + iy + jz + kw \in \mathbb{H} \,|x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

*Esto es, los cuaterniones unitarios. En la variedad producto, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^8$, definimos la estructura casi compleja como sigue, para cada $(U, V) \in T_{(p,q)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \approx T_p\mathbb{S}^3 \times T_q\mathbb{S}^3$,*

$$J|_{(p,q)}(U, V) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2pq^{-1}V - U, -2qp^{-1}U + V\right).$$

*Además definimos la métrica compatible con la estructura casi compleja como,*

$$\langle (U, V), (X, Y)\rangle = \frac{1}{2} \left(h((U, V), (X, Y)) + h(J(U, V), J(X, Y))\right),$$

*donde $h$ es la métrica producto de la variedad producto $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ inducida por la métrica estándar de $\mathbb{S}^3$. Entonces $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, J, \langle , \rangle)$ es una variedad nearly Kaehler, este resultado se probará, salvo un múltiplo de la métrica, en el Teorema 3.2.2.*

## 1.3. Grupos de Lie

Esta última sección del capítulo introductorio abordamos el concepto de grupo de Lie. Nos enfocamos principalmente en grupos de Lie con métrica bi-invariante, es importante mencionar que un grupo admite una métrica bi-invariante si y sólo si es el producto de un grupo compacto con un grupo abeliano.

**Definición 1.3.1.** *Sea $G$ un grupo con una estructura de variedad diferenciable. Al grupo $G$, se le llama Grupo de Lie, si las operaciones producto e inversa denotadas por, $\mu : G \times G \to G$, $i : G \to G$, son funciones $C^\infty$, definidas por,*

$$\mu(g,h) = gh, \ \ i(g) = g^{-1}.$$

En esta sección utilizaremos siempre a $G$ como un grupo de Lie por lo que se omitirá en las hipótesis.

**Definición 1.3.2.** *Sean $G$ un grupo de Lie y $\sigma \in G$. Definimos la operación multiplicación a la izquierda (multiplicación a la derecha) por $\sigma$, denotada por $L_\sigma : G \to G$, ($R_\sigma : G \to G$), y definida por,*

$$L_\sigma(h) = \sigma h, \ (R_\sigma(h) = h\sigma).$$

**Proposición 1.3.3.** *Sea $\sigma \in G$. Las operaciones $L_\sigma : G \to G$ y $R_\sigma : G \to G$ son difeomorfismos.*

*Demostración.* Primero, es importante notar, que estas funciones son restricciones de la función producto $\mu : G \times G \to G$, en efecto,

$$\mu|_{\sigma \times G}(\sigma, g) = \sigma g = L_\sigma(g),$$

$$\mu|_{G \times \sigma}(g, \sigma) = g\sigma = R_\sigma(g).$$

Esto garantiza que las funciones $L_\sigma$ y $R_\sigma$ son $C^\infty$. Ahora, estas funciones tienen por funciones inversas, respectivamente, a las funciones $C^\infty$, $L_{\sigma^{-1}}$ y $R_{\sigma^{-1}}$, lo que concluye la prueba. □

**Definición 1.3.4.** *Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se llama, campo invariante izquierdo (campo invariante derecho), si para cualquier $\sigma \in G$,*

$$dL_\sigma|_h(X_h) = X_{L_\sigma(h)}, \ \ (dR_\sigma|_h(X_h) = X_{R_\sigma(h)}).$$

*Si un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, es a la vez, invariante izquierdo e invariante derecho, se le llama campo bi-invariante.*

**Definición 1.3.5.** *Al conjunto de campos invariantes izquierdos se le llama Álgebra de Lie de $G$, el cual es denotada por $\mathfrak{g}$.*

**Proposición 1.3.6.** *[24, Prop. 3.7] El álgebra de Lie del grupo de Lie $G$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

**Proposición 1.3.7.** *[24, Prop. 3.7] Existe una relación biunívoca entre el álgebra de Lie de $G$, y el espacio tangente a la identidad del grupo $e \in G$, más aún $\mathfrak{g}$ y $T_eG$ son isomorfos como espacios vectoriales.*

**Definición 1.3.8.** *Una métrica $\langle , \rangle$ en $G$, se llama métrica invariante izquierda (métrica invariante derecha), si para cualesquiera $\sigma \in G$, y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\langle X, Y \rangle = \langle dL_\sigma X, dL_\sigma Y \rangle\,, \quad (\langle X, Y \rangle = \langle dR_\sigma X, dR_\sigma Y \rangle).$$

*En el caso, de que una métrica, sea a la vez, invariante izquierda e invariante derecha, se le llama métrica bi-invariante.*

**Lema 1.3.9.** *Si $X \in \mathfrak{X}(G)$, es un campo invariante izquierdo y $Y \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariante derecho, entonces $[X, Y] = 0$.*

*Demostración.* Sea $f$ una función $C^\infty$. Vamos a comenzar analizando la derivada de la función $Y \cdot f$, en la dirección $X_g$,

$$X_g(Y \cdot f) \quad = \quad dL_gX(e)(Y \cdot f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Y \cdot f(L_g(exp(tX(e)))) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Y(L_g(exp(tX(e)))) \cdot f$$

del hecho que $Y$ es invariante derecho,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} Y(L_g(exp(tX(e)))) \cdot f \quad = \quad \frac{d}{dt}|_{t=0} dR_{L_g(exp(tX(e)))} \cdot Y(e)f.$$

Hacemos uso del siguiente hecho general para cualesquiera $h, \sigma, g, \in G$,

$$R_{L_\sigma(h)}(g) = gL_\sigma(h) = g\sigma h = R_h(g\sigma) = R_h(R_\sigma(g)).$$

por lo que garantizamos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0} dR_{L_g(exp(tX(e)))} \cdot Y(e)f &= \frac{d}{dt}|_{t=0} dR_{exp(tX(e))}(dR_g Y(e)) \cdot f \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} dR_{exp(tX(e))} Y(g) \cdot f = \frac{d}{dt}|_{t=0} Y(g) \cdot (f \circ R_{exp(tX(e))}) \\
&= Y(g) \cdot \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ R_{exp(tX(e))} = Y(g) \cdot (Xf).
\end{aligned}$$

Esto último, se sigue del hecho que, $R_{exp(tX(e))}(e)$ es una curva que en $t = 0$, es la identidad del grupo $G$ y cuya derivada en $t = 0$, es el vector $X(e)$, es decir, es una curva integral del campo $X$. Por lo que $[X, Y] = XY - YX = 0$. □

**Definición 1.3.10.** *Un grupo de Lie $G$ se llama abeliano, si para cualesquiera campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{g}$, el corchete $[X, Y] = 0$.*

**Proposición 1.3.11.** *Si existe una base de campos bi-invariantes, entonces el grupo de Lie $G$ es abeliano.*

*Demostración.* Supongamos que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, es una base de campos bi-invariantes de $G$. Entonces el Lema 1.3.9, garantiza que, $[X_i, X_j] = 0$, ya que en particular $X_i$ es un campo invariante izquierdo, y $X_j$ es un campo invariante derecho. Ya que esto es válido en una base, concluimos que $G$ es abeliano. □

**Proposición 1.3.12.** *La derivada del producto del grupo $\mu : G \times G \to G$, tiene por fórmula,*

$$d\mu|_{(p,q)}(X_p, Y_q) = dR_q|_p(X_p) + dL_p|_q(Y_q)$$

*Demostración.* Sabemos que, $T_{(p,q)}G \times G \approx T_pG \times T_qG$, lo cual nos da la libertad de pensar que, $(X_p, Y_q) = (X_p, 0) + (0, Y_q)$, utilizando el hecho conocido que la derivada es una transformación lineal, calculamos por separado la regla de correspondencia a cada sumando. Por un lado, para calcular $d\mu|_{(p,q)}(X_p, 0)$. Consideramos $\gamma$ una curva tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = X_p$, de manera que la curva $(\gamma(t), q)$ es una curva que en $t = 0$ es $(p, q)$ y cuya derivada en $t = 0$ es $(X_p, 0)$, se sigue ahora que,

$$d\mu|_{(p,q)}(X_p, 0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \mu(\gamma(t), q) = \frac{d}{dt}|_{t=0} R_q(\gamma(t)) = dR_q|_p(X_p).$$

El último paso se justifica dado que $R_q(\gamma(t))$ es una curva, tal que, en $t = 0$ pasa por $pq$, y cuya derivada es $dR_q|_p(X_p)$. Por otro lado, para $d\mu|_{(p,q)}(0, Y_q)$, sea $\eta$ una curva, tal que, $\eta(0) = q$ y

$\dot{\eta}(t) = Y_q$. Entonces la curva $(p, \eta(t))$, es tal que, en $t = 0$ es el punto $(p, q)$, y cuya derivada en $t = 0$, es $(0, Y_q)$ con lo que,

$$d\mu|_{(p,q)}(0, Y_q) \quad = \quad \frac{d}{dt}|_{t=0}\mu(p, \eta(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}L_p(\eta(t)) = dL_p|_q(Y_q),$$

sumando las dos ecuaciones obtenemos la ecuación deseada. □

**Corolario 1.3.13.** *La derivada de la función inversa $i : G \to G$ en el grupo es,*

$$di|_p(X_p) = -dR_{p^{-1}}|_e dL_{p^{-1}}|_p X(p).$$

*Demostración.* Primero calculamos la derivada de la función $i$ en la identidad del grupo $e$. Para este propósito, elegimos $\gamma$ una curva, tal que, $\gamma(0) = e$ y $\dot{\gamma}(t) = X_e \in T_eG$ arbitrario, de la Proposición 1.3.12, se sigue,

$$d\mu(X(e), di|_e(X_e)) \quad = \quad dR_eX_e + dL_e di|_e(X_e) = X_e + di|_e(X_e),$$

Pero además,

$$d\mu(X(e), di|_e(X_e)) \quad = \quad \frac{d}{dt}|_{t=0}\mu(\gamma(t), i(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}|_{t=0}e = 0,$$

lo que implica que, $X_e + di|_e(X_e) = 0$, en otras palabras, $di|_e(X_e) = -X_e$. Como segundo paso, notemos que la función $i$ se puede reescribir como, $R_{p^{-1}} \circ i \circ L_{p^{-1}}$, en efecto, ya que,

$$R_{p^{-1}} \circ i \circ L_{p^{-1}}(q) = R_{p^{-1}} \circ i(p^{-1}q) = R_{p^{-1}}(q^{-1}p) = q^{-1}pp^{-1} = i(q),$$

al diferenciar,

$$\begin{aligned} di(X_p) &= d(R_{p^{-1}} \circ i \circ L_{p^{-1}})(X_p) = dR_{p^{-1}}|_e di|_e \circ dL_{p^{-1}}|_p(X_p) \\ &= dR_{p^{-1}}|_e di|_e(dL_{p^{-1}}|_p(X_p)) = dR_{p^{-1}}|_e(-dL_{p^{-1}}|_p(X_p)) \\ &= -dR_{p^{-1}}|_e dL_{p^{-1}}|_p X(p), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

**Corolario 1.3.14.** *Sea $\sigma \in G$. Definimos la función $f : G \to G$ definida por*

$$f(p) = p\sigma p^{-1},$$

*entonces la derivada de la función queda determinada para cada campo invariante izquierdo $X \in \mathfrak{X}(G)$*

$$df|_e(X(e)) = dR_\sigma|_e(X(e)) - dL_\sigma|_e(X(e))$$

*Demostración.* Primero, hay que notar que $f(p) = \mu(R_\sigma(p), i(p))$, por lo tanto, por la regla de la cadena tenemos que,

$$\begin{aligned} d\mu(R_\sigma, i)(X(e)) &= d\mu|_{(\sigma,e)} \circ (dR_\sigma|_e(X(e), di|_e(X(e))) \\ &= dR_e|_\sigma(dR_\sigma|_e(X(e)) + dL_\sigma|_e(di|_e(X(e))) \\ &= dR_\sigma|_e(X(e)) - dL_\sigma|_e(X(e)), \end{aligned}$$

lo cual es lo que queríamos probar. □

**Definición 1.3.15.** *El centro del grupo de Lie $G$ se define y denota como,*

$$Z(G) = \{\sigma \in G : \sigma\tau = \tau\sigma, \ \textit{para cada } \tau \in G\}. \tag{1.7}$$

**Ejemplo 3.** *Cualquier grupo de Lie $G$ conmutativo $Z(G) = G$.*

**Ejemplo 4.** *En $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ con la operación de los cuaterniones se tiene,*

$$Z(\mathbb{S}^3) = \{1, -1\}.$$

**Ejemplo 5.** *El centro de la variedad $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ es,*

$$Z(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\},$$

*esto es consecuencia que tiene la estructura producto.*

**Ejemplo 6.** *El grupo $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = I = A^tA\}$ tiene como centro,*

$$Z(O(n)) = \{Id, -Id\}.$$

**Ejemplo 7.** *El grupo $SO(n) = \{A \in O(n) : det(A) = 1\}$ podemos dividirlo en dos casos como sigue, si $n = 2$ entonces,*

$$Z(SO(2)) = SO(2).$$

*Por otro lado, si $n > 2$ se divide en dos posibilidades, si $n$ es impar entonces,*

$$Z(SO(n)) = \{Id\},$$

*y si $n$ es par entonces su centro es,*

$$Z(SO(n)) = \{Id, -Id\}.$$

**Ejemplo 8.** *El grupo* $U(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A\overline{A}^t = Id = \overline{A}^t A\}$*, donde* $\overline{A}^t$ *significa la transpuesta de la matriz conjugada. El centro de este grupo es,*

$$Z(U(n)) = \{\lambda Id : \lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}\}.$$

**Ejemplo 9.** *El grupo* $SU(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : detA = 1\}$ *tiene por centro,*

$$Z(SU(n)) = \{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{S}^1,\ \lambda^n = 1\} = \mathbb{Z}_n.$$

**Definición 1.3.16.** *Sean* $G$ *un grupo de Lie y* $\sigma \in G$ *entonces la representación adjunta en* $\sigma$ *es la función* $Ad_\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *se define por,*

$$Ad_\sigma(X) = dL_\sigma dR_{\sigma^{-1}}(X),$$

*para cada* $X \in \mathfrak{g}$.

**Ejemplo 10.** *En* $\mathbb{S}^3$ *determinamos la representación adjunta en* $i \in \mathbb{S}^3$ *como sigue. El espacio tangente en la identidad esta generado por,* $i, j, k \in \mathbb{H}$*, ya que estos vectores son ortogonales a la identidad* $1 \in \mathbb{H}$*, entonces tenemos,*

$$Ad_i(i) = dL_i \circ dR_{i^{-1}}(i) = i(ii^{-1}) = -i(1) = -i,$$

$$Ad_i(j) = dL_i \circ dR_{i^{-1}}(j) = i(ji^{-1}) = -i(-k) = -j,$$

$$Ad_i(k) = dL_i \circ dR_{i^{-1}}(k) = i(ki^{-1}) = -i(j) = -k.$$

*Por lo que podemos concluir que si* $X(e) = ai + bj + ck \in \mathfrak{g}$*, entonces* $Ad_i(X) = -X$.

**Proposición 1.3.17.** *Sean* $\sigma \in G$*,* $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ *campos invariantes izquierdos entonces,*

$$\nabla_{dR_\sigma(X)} Y(e) = \nabla_{Ad_{\sigma^{-1}}(X)} Y(e),$$

$$\nabla_{dL_\sigma(X)} Y(e) = \nabla_X Y(e).$$

*Demostración.* Hay que notar que $\nabla_{dR_\sigma(X)} Y(e)$ es evaluar el campo $dR_\sigma(X)$ en un elemento tal que este campo este evaluado en la identidad esto es, hay que evaluarlo en $\sigma^{-1}$, es decir,

$$\nabla_{dR_\sigma(X)} Y(e) = \nabla_{dR_\sigma(X(\sigma^{-1}))} Y = \nabla_{dR_\sigma(X(L_{\sigma^{-1}}(e)))} Y = \nabla_{dR_\sigma(dL_{\sigma^{-1}}(X(e))} Y = \nabla_{Ad_{\sigma^{-1}} X} Y(e).$$

Para la afirmación siguiente la prueba es análoga, lo cual concluye la prueba. □

**Proposición 1.3.18.** *[24, Teorema 3.50] Sea G un grupo de Lie conexo. Entonces el centro de G es el kernel de la representación adjunta, en otras palabras,*

$$Z(G) = \{\sigma \in G : Ad_\sigma = Id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\}$$

**Ejemplo 11.** *En particular en el grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ tenemos el siguiente caso que será de interés en capítulos posteriores. Sabemos por la Proposición 1.3.18, que $i \in \mathbb{S}^3$ no pertenece al centro de $\mathbb{S}^3$, pero $i^2$ si lo esta.*

**Proposición 1.3.19.** *Si $(G, \langle , \rangle)$ es un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Entonces la métrica es invariante por representación adjunta. Esto es, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ invariantes izquierdos y cada $\sigma \in G$*

$$\langle Ad_\sigma(X), Ad_\sigma(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle .$$

*Demostración.* Utilizamos el hecho que la representación adjunta es, $Ad_\sigma(X) = dL_\sigma(dR_{\sigma^{-1}}(X))$ y así, tenemos que,

$$\begin{aligned}\langle Ad_\sigma(X), Ad_\sigma(Y)\rangle &= \langle dL_\sigma(dR_{\sigma^{-1}}(X)), dL_\sigma(dR_{\sigma^{-1}}(Y))\rangle = \langle dR_{\sigma^{-1}}(X), dR_{\sigma^{-1}}(Y)\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle .\end{aligned}$$

Lo que finaliza la prueba. □

**Proposición 1.3.20.** *[20, página 323] Sea $(G, g)$ un grupo de Lie con métrica bi-invariante. La conexión de Levi-Civita $\nabla$ para campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ esta dada por,*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

**Teorema 1.3.21.** *[20, Lema 7.5] Un grupo de Lie G admite una métrica bi-invariante si y sólo si, G es isomorfo al producto de un grupo compacto y un grupo abeliano.*

**Lema 1.3.22.** *Sean G un grupo de Lie con métrica bi-invariante g y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos, entonces,*

$$(\nabla_X (\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y (\nabla_X Z)) = \frac{1}{4}\left[[X, Y], Z\right].$$

*Demostración.* Se sabe de la Proposición 1.3.20, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ para campos invariantes izquierdos, de aquí,

$$\begin{aligned}(\nabla_X (\nabla_Y Z)) &= \frac{1}{2}[X, (\nabla_Y Z)] \\ &= \frac{1}{4}\left[X, [Y, Z]\right].\end{aligned}$$

Por otro lado, por primera identidad de Bianchi,

$$\begin{aligned}(\nabla_Y(\nabla_X Z)) &= \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] \\ &= \frac{1}{4}(-[X,[Z,Y]]-[Z,[Y,X]]).\end{aligned}$$

De estas dos ecuaciones podemos calcular

$$\begin{aligned}(\nabla_X(\nabla_Y Z))-(\nabla_Y(\nabla_X Z)) &= \frac{1}{4}([X,[Y,Z]]+[X,[Z,Y]]+[Z,[Y,X]])) \\ &= \frac{1}{4}([X,[Y,Z]]-[X,[Y,Z]]-[Z,[X,Y]])) \\ &= -\frac{1}{4}[Z,[X,Y]]=\frac{1}{4}[[X,Y],Z].\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

# Capítulo 2

# Superficies Lagrangianas en $\mathbb{C}^2$

## 2.1. Superficies Lagrangianas de ángulo constante en $\mathbb{C}^2$

En este capítulo $(\mathbb{C}^2, J, \langle , \rangle, D)$ representa a la variedad Kaehler $\mathbb{C}^2$, con estructura casi compleja $J$ definida de la siguiente manera. Para cada campo $(x, y, z, w) \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2)$,

$$J(x, y, z, w) = (-y, x, -w, z).$$

La métrica $\langle , \rangle$ es la usual de $\mathbb{R}^4$ y $D$ es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica.

**Definición 2.1.1.** *Sean $M$ una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo constante de magnitud* 1*. Entonces, $M$ es llamada de ángulo constante respecto a $Z$, si el ángulo formado entre $T_pM$ y $Z(p)$ es independiente de $p$.*

*Notación* 2. Notemos que

$$T_p\mathbb{C}^2 = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

esto nos garantiza que existe una descomposición única para el campo $Z$ como

$$Z = Z^T + Z^{\perp},$$

donde, $Z^T$ representa la parte tangente a $M$, esto es, la proyección ortogonal de $Z$ sobre $TM$ y $Z^{\perp}$ la parte normal a $M$, es decir, la proyección ortogonal de $Z$ sobre $TM^{\perp}$.

**Proposición 2.1.2.** *Sean $M$ una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo constante. Los siguientes enunciados son equivalentes,* *1. La subvariedad $M$ es de ángulo constante respecto a $Z$,*

*2. $|Z^T|$ es constante,*

*3. $|Z^\perp|$ es constante.*

*Demostración.* El ángulo formado por el campo $Z$ y los espacios tangentes, es justamente el ángulo formado entre los vectores $Z$ y su proyección sobre el espacio tangente, en este caso $Z^T$, por lo que el ángulo satisface,

$$cos(\theta) = \frac{\langle Z, Z^T \rangle}{|Z||Z^T|} = \frac{\langle Z^T, Z^T \rangle}{|Z||Z^T|} = \frac{|Z^T|^2}{|Z||Z^T|} = \frac{|Z^T|}{|Z|},$$

de aquí, si suponemos que el ángulo es constante, tenemos que,

$$|Z^T| = cos(\theta)|Z|,$$

es constante. Ahora, si suponemos que $|Z^T|$ es constante, entonces,

$$|Z^\perp|^2 = |Z|^2 - |Z^T|^2$$

garantizando que $|Z^\perp|$ es constante. Por último, si $|Z^\perp|$ es constante, tenemos que $|Z^T|$ es constante, por lo que el ángulo entre $Z$ y el espacio tangente satisface,

$$cos(\theta) = \frac{|Z^T|}{|Z|},$$

es decir, $\theta$ es constante. $\square$

**Proposición 2.1.3.** *Sea $M$ una subvariedad de ángulo constante respecto al campo constante $Z$ de $\mathbb{C}^2$, entonces, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ las ecuaciones siguientes se satisfacen,*

$$\nabla_X Z^T = A_{Z^\perp} X,$$

$$\nabla^\perp_X Z^\perp = -h(X, Z^T),$$

$$A_{Z^\perp} Z^T = 0,$$

$$\nabla_{Z^T} Z^T = 0.$$

*Demostración.* Por un lado, como $Z$ es un campo constante, es decir, un campo paralelo en $\mathbb{C}^2$, tenemos

$$0 = D_X Z = D_X Z^\perp + D_X Z^T,$$

ahora, se sigue de las ecuaciones de Gauss, Weingarten proporcionadas en la Definición 1.2.1

$$0 = -A_{Z^\perp}X + \nabla^\perp_X Z^\perp + \nabla_X Z^T + h(X, Z^\perp),$$

al comparar las partes normales y partes tangentes obtenemos las ecuaciones,

$$\nabla_X Z^T = A_{Z^\perp}X,$$

$$\nabla^\perp_X Z^\perp = -h(X, Z^T).$$

Por otro lado, utilizando el hecho que, $|Z^T|$ es constante, también lo es $\langle Z^T, Z^T\rangle$, esto implica que,

$$0 = X\langle Z^T, Z^T\rangle = 2\langle \nabla_X Z^T, Z^T\rangle = 2\langle A_{Z^\perp}X, Z^T\rangle = 2\langle A_{Z^\perp}Z^T, X\rangle.$$

Es decir, $A_{Z^\perp}Z^T = 0$. Por último, ya que, $\nabla_X Z^T = A_{Z^\perp}X$, tenemos $\nabla_{Z^T}Z^T = 0$. □

A partir de este momento supondremos siempre a $M$ como una superficie Lagrangiana de $\mathbb{C}^2$ y de ángulo constante respecto a un campo paralelo $Z \in \mathbb{C}^2$.

**Lema 2.1.4.** *Si $M$ es una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a $Z$ en $\mathbb{C}^2$. Entonces $M$ es de ángulo constante respecto a $JZ$.*

*Demostración.* Primero, como $\mathbb{C}^2$ es una variedad Kaehler, para cada campo $X \in \mathbb{C}^2$,

$$D_X JZ = JD_X Z = 0,$$

es decir, $JZ$ es un campo paralelo. Ahora,

$$JZ = J(Z^T + Z^\perp) = J(Z^T) + J(Z^\perp),$$

del hecho que $M$ es una variedad Lagrangiana al igualar partes normales y partes tangentes, se sigue,

$$(JZ)^T = JZ^\perp, \tag{2.1}$$

$$(JZ)^\perp = JZ^T. \tag{2.2}$$

A continuación se sigue de la ecuación 2.1 que,

$$\langle (JZ)^T, (JZ)^T\rangle = \langle JZ^\perp, JZ^\perp\rangle = \langle Z^\perp, Z^\perp\rangle = \sqrt{1 - |Z^T|^2} = cte,$$

esto es, por la Proposición 2.1.2, se puede concluir que, $M$ es de ángulo constante respecto a $JZ$ en $\mathbb{C}^2$. □

**Corolario 2.1.5.** *Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, las siguientes ecuaciones son verdaderas,*

$$\nabla_X JZ^\perp = A_{JZ^T} X, \tag{2.3}$$

$$\nabla_X^\perp JZ^T = -h(X, JZ^\perp), \tag{2.4}$$

$$A_{JZ^T} JZ^\perp = 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla_{JZ^\perp} JZ^\perp = 0. \tag{2.6}$$

*Demostración.* Del Lema 2.1.4, sabemos que $M$ es de ángulo constante respecto a JZ, ahora estamos bajo las hipótesis de la Proposición 2.1.3, por lo que las ecuaciones se siguen bajo una simple sustitución. □

**Definición 2.1.6.** *Sean $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ una curva, y $Z$ un campo constante. En $\mathbb{R}^n$ definimos el cilindro sobre $\gamma$ por $Z$ como, la superficie $x : I \times J \to \mathbb{R}^n$ como, $x(s,t) = \gamma(t) + sZ$ donde $J = (-\epsilon, \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$.*

**Lema 2.1.7.** *Si $Z$ es un campo normal (tangente) a la superficie $M$, entonces la superficie $M$ localmente es un cilindro sobre una curva plana $\gamma$. Más aún, $\gamma$ está contenida en un plano complejo.*

*Demostración.* Ya que $M$ es una superficie Lagrangiana, y $Z$ un campo normal entonces $JZ$ es tangente a $M$. Por la Proposición 2.1.4, $M$ es de ángulo constante respecto a $JZ$, en este caso, el ángulo es cero.
Sean $p \in M$, $W$ un campo unitario tangente a $M$ y ortogonal a $JZ$, y $\gamma : I \to M$ la curva integral de $W$, tal que, $\gamma(0) = p$ y $\dot\gamma(0) = W$. Observemos que, como $\gamma$ esta en la superficie, $\dot\gamma$ es ortogonal a $Z$, y ortogonal a $JZ$. Al considerar $\Pi$ como el plano que pasa por $p$ y es ortogonal a los vectores $Z$ y $JZ$ resulta que la curva $\gamma$ esta contenida en $\Pi$. Ahora, las curvas integrales de $JZ$, son rectas paralelas, esto es, por cada punto $\gamma(t)$ existe un segmento de recta en la dirección $JZ$, pues $JZ$ es paralelo, y la cual se queda contenida en $M$. Por lo anterior garantizamos que en una vecindad de $p$, la superficie $M$ es un producto de la curva $\gamma$ con segmentos de recta en dirección $JZ$, es decir, $M$ localmente es un cilindro. Además si $Z$ es tangente, por el Lema 2.1.4 sabemos que $M$ es de ángulo constante respecto a $JZ$, el cual es normal, por lo anterior se concluye que $M$ es un cilindro. □

**Corolario 2.1.8.** *Sea $M$ es una superficie Lagrangiana de $\mathbb{C}^2$. Si $M$ esta contenida en un hiperplano, entonces $M$ localmente es un cilindro sobre una curva plana $\gamma$ contenida en un plano complejo.*

*Demostración.* Consideramos a $Z$ el campo ortogonal unitario constante al hiperplano en el que se encuentra contenida la superficie $M$. Es sencillo percatarse que $Z$ es ortogonal a $M$, lo cual quiere decir que, el ángulo entre $Z$ y cualquier plano tangente de $M$ es siempre igual a $\frac{\pi}{2}$, esto es, $M$ es de ángulo constante respecto a $Z$. Estamos pues, dentro de las hipótesis del Lema 2.1.7, con lo que concluimos la prueba. □

## 2.2. Caso $Z^T$ y $JZ^\perp$ linealmente dependientes

En esta sección además de suponer que $M$ es una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto al campo paralelo $Z$, supondremos el caso particular en el que los campos $Z^T$ y $JZ^\perp$ son linealmente dependientes, en otras palabras existe una función $\lambda$, tal que, $Z^T = \lambda J Z^\perp$.

**Proposición 2.2.1.** *La función $\lambda$ es constante.*

*Demostración.* De la hipótesis,

$$Z^T = \lambda J Z^\perp,$$

tenemos $|Z^T| = |\lambda J Z^\perp| = |\lambda Z^\perp|$ o equivalentemente,

$$|\lambda| = \frac{|Z^T|}{|Z^\perp|} = \cot(\theta),$$

en donde $\theta$, es el ángulo formado entre $Z^T$ y $Z$, en otras palabras, $\theta$ es el ángulo entre $Z$ y $TM$. Como $M$ es de ángulo constante, $\lambda$ es constante. □

**Lema 2.2.2.** *El plano complejo $\Omega$ generado por $Z$ y $JZ$ contiene a los campos $Z^T$, $Z^\perp$, $JZ^\perp$ y $JZ^T$. Más aún, si $W \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonal a $Z^T$ y de magnitud 1, entonces $\Omega$ es ortogonal al plano complejo generado $W$ y $JW$.*

*Demostración.* Sea $W$ un campo tangente a $M$, ortogonal a $Z^T$ y de magnitud 1. Como $W$ es tangente a $M$, se garantiza que,

$$\langle W, JZ^T\rangle = 0, \quad \langle W, Z^\perp\rangle = 0,$$

ya que $JZ^T$ y $Z^\perp$ son normales a $M$. De la hipótesis, tenemos $Z^T = \lambda JZ^\perp$ para alguna constante $\lambda$, esto se sigue de la Proposición 2.2.1, sustituyendo, esto en las igualdades anteriores tenemos,

$$0 = \langle W, JZ^T \rangle = \langle W, J\lambda JZ^\perp \rangle = -\langle W, \lambda Z^\perp \rangle,$$

$$0 = \langle W, Z^\perp \rangle = \langle W, -\frac{1}{\lambda} JZ^T \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle W, Z^T \rangle.$$

Aplicando que $J$ preserva la métrica, las ecuaciones anteriores, garantizan,

$$\langle JW, Z^T \rangle = 0, \quad \langle JW, Z^\perp \rangle = 0, \quad \langle JW, JZ^T \rangle = 0,$$

$$\langle JW, JZ^\perp \rangle = 0.$$

Sea $\Omega$ el plano complejo generado por $Z$ y $JZ$, así es claro que $Z^T$, $Z^\perp$, $JZ^\perp$ y $JZ^T$ se quedan contenidos en el plano $\Omega$. Más aún, las mismas ecuaciones garantizan que, $\Omega$ es ortogonal al plano generado por $W$ y $JW$. □

**Teorema 2.2.3.** *El campo $Z^T$ es un campo paralelo en $\mathbb{C}^2$ a lo largo de $M$, y por tanto, $M$ es un cilindro.*

*Demostración.* Sabemos de la Proposición 2.1.3 que $\nabla_{Z^T} Z^T = 0$, entonces de la fórmula de Gauss presentada en la Definición 1.2.1 se reduce a,

$$D_{Z^T} Z^T = h(Z^T, Z^T),$$

como $Z^T$ y $JZ^\perp$ son linealmente dependientes se sigue de la Proposición 2.2.1, que existe una constante $\lambda$, tal que, $Z^T = \lambda JZ^\perp$, por lo cual se sigue,

$$D_{Z^T} Z^T = D_{Z^T} \lambda JZ^\perp = \lambda J(D_{Z^T} Z^\perp) = \lambda J(-A_{Z^\perp} Z^T + \nabla^\perp_{Z^T} Z^\perp) = \lambda J(\nabla^\perp_{Z^T} Z^\perp),$$

la última igualdad es cierta ya que, se sabe que $A_{Z^\perp} Z^T = 0$ por la Proposición 2.1.3. Al comparar partes tangentes y partes normales, se sigue, $D_{Z^T} Z^T = h(Z^T, Z^T) = \lambda J(\nabla^\perp_{Z^T} Z^\perp) = 0$.
Por otro lado, sea $W \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonal a $Z^T$ de magnitud 1, como $\mathbb{C}^2$ es Kaehler,

$$D_W \lambda JZ^\perp = \lambda J D_W Z^\perp = \lambda J(-A_{Z^\perp} W + \nabla^\perp_W Z^\perp),$$

y además,

$$D_W Z^T = \nabla_W Z^T + h(Z^T, W) = A_{Z^\perp} W - \nabla^\perp_W Z^\perp.$$

Comparando partes normales y partes tangentes tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\lambda J \nabla^{\perp}_{W} Z^{\perp} = A_{Z^{\perp}} W,$$

$$\lambda J A_{Z^{\perp}} W = \nabla^{\perp}_{W} Z^{\perp}.$$

Al resolver el sistema se deduce que, $(1+\lambda^2)\nabla^{\perp}_{W} Z^{\perp} = 0$, la única opción, es por tanto que, $\nabla^{\perp}_{W} Z^{\perp} = 0$. Como consecuencia, $A_{Z^{\perp}} W = 0$ y por lo tanto, $D_W Z^T = 0$. En resumen, se ha probado que,

$$D_{Z^T} Z^T = 0,$$

$$D_W Z^T = 0.$$

Esto quiere decir que, $Z^T$ es paralelo en $\mathbb{C}^2$ a lo largo de $M$.
Además notemos que, por el Lema 1.2.7

$$h(Z^T, W) = h(\lambda J Z^{\perp}, W) = -J A_{\lambda Z^{\perp}} W = -J A_{Z^{\perp}} W = 0.$$

Sea $\gamma$ la curva integral de $W$. Como $W$ es ortogonal a $Z$ y a $JZ$ entonces automáticamente $\gamma$ es ortogonal a $Z$ y $JZ$, lo cual garantiza que $\gamma$ está contenida en el plano generado por $W$ y $JW$, y por lo tanto, $M$ es un cilindro sobre $\gamma$ con segmentos de recta en dirección del campo paralelo $Z^T$. $\square$

## 2.3. Caso $Z^T$ y $JZ^{\perp}$ linealmente independientes

En esta sección supondremos que los campos $Z^T$ y $JZ^{\perp}$, son campos linealmente independientes, en otras palabras, $\{Z^T, JZ^{\perp}\}$, son un marco local del haz tangente de $M$.

**Definición 2.3.1.** *Sean $M$ una superficie Lagrangiana en $\mathbb{C}^2$ y $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2)$. Definimos la función $f : M \to \mathbb{R}$, definida por,*

$$f(p) = \left\langle Z^T(p), JZ^{\perp}(p) \right\rangle.$$

**Observación 1.** Sea $M$ una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a $Z$ en $\mathbb{C}^2$, si $Z^T$ y $JZ^{\perp}$ son campos linealmente independientes. Entonces la función $f$ depende del ángulo entre los campos tangentes $Z^T$ y $JZ^{\perp}$.
En efecto, partiendo de la definición de la función $f$, tenemos,

$$f(p) = \left\langle Z^T(p), JZ^{\perp}(p) \right\rangle = |Z|^T |Z^{\perp}| \cos(\beta(p)),$$

donde, $\beta(p)$ es el ángulo formado entre $Z^T(p)$ y $JZ^\perp(p)$ en el plano tangente de $p$.

**Lema 2.3.2.** *Un marco ortonormal para el espacio tangente de la superficie $M$ viene dado por,*

$$e_1 = \frac{Z^T}{|Z^T|},$$

$$e_2 = \frac{|Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}},$$

*donde,* $\Delta = \mid Z^T \mid^2 \mid Z^\perp \mid^2 - f^2$.

*Demostración.* Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, se obtiene que el primer campo del marco es,

$$e_1 = \frac{Z^T}{|Z^T|}.$$

Ahora, para obtener el segundo campo, el cual es ortogonal a $e_1$, realizamos los siguientes cálculos,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{JZ^\perp - \left\langle JZ^\perp, e_1 \right\rangle e_1}{|JZ^\perp - \langle JZ^\perp, e_1\rangle e_1|} = \frac{JZ^\perp - \left\langle JZ^\perp, \dfrac{Z^T}{|Z^T|} \right\rangle \dfrac{Z^T}{|Z^T|}}{|JZ^\perp - \left\langle JZ^\perp, \dfrac{Z^T}{|Z^T|} \right\rangle \dfrac{Z^T}{|Z^T|}|} \\ &= \frac{JZ^\perp - \left\langle JZ^\perp, Z^T \right\rangle \dfrac{Z^T}{|Z^T|^2}}{|JZ^\perp - \langle JZ^\perp, Z^T\rangle \dfrac{Z^T}{|Z^T|^2}|} = \frac{|Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T}{||Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T|}. \end{aligned}$$

Por último, calculamos,

$$\begin{aligned} ||Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T|^2 &= \langle |Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T, |Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T \rangle \\ &= -2|Z^T|^2 f^2 + |Z^T|^4 |Z^\perp|^2 + f^2 |Z^T|^2 \\ &= |Z^T|^2 (|Z^T|^2 |Z^\perp|^2 - f^2) = |Z^T|^2 \Delta. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la demostración. □

**Proposición 2.3.3.** *El operador de forma de la superficie $M$, queda determinado por,*

$$A_{Z^\perp} Z^T = 0 = A_{JZ^T} JZ^\perp,$$

$$A_{Z^\perp} JZ^\perp = \frac{JZ^\perp \cdot f}{\Delta} \left( -fZ^T + \mid Z^T \mid^2 JZ^\perp \right),$$

$$A_{JZ^T} Z^T = \frac{Z^T \cdot f}{\Delta} \left( \mid Z^\perp \mid^2 Z^T - fJZ^\perp \right),$$

*donde,* $\Delta = \mid Z^T \mid^2 \mid Z^\perp \mid^2 - f^2$.

*Demostración.* Las ecuaciones, $A_{Z^\perp}Z^T = 0$ y $A_{JZ^T}JZ^\perp = 0$, se probarón en la Proposición 2.1.3 y Corolario 2.1.5 respectivamente. Dado que, $A_{Z^\perp}JZ^\perp$ es tangente y $\{Z^T, JZ^\perp\}$ es una base, existen funciones $a$ y $b$, tales que,

$$A_{Z^\perp}JZ^\perp = aZ^T + bJZ^\perp,$$

para determinar $a$ y $b$, resolvemos la siguiente ecuación matricial,

$$\begin{pmatrix} \mid Z^T \mid^2 & f \\ f & \mid Z^\perp \mid^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ JZ^\perp \cdot f \end{pmatrix},$$

las soluciones para $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ son,

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mid Z^\perp \mid^2 & -f \\ -f & \mid Z^T \mid^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ JZ^\perp \cdot f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

donde, $\Delta =\mid Z^T \mid^2\mid Z^\perp \mid^2 -f^2$. En otras palabras,

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(-f(JZ^\perp \cdot f)\right), \quad b = \frac{1}{\Delta}\left(|Z^T|^2(JZ^\perp \cdot f)\right),$$

es decir,

$$A_{Z^\perp}JZ^\perp = \frac{JZ^\perp \cdot f}{\Delta}\left(-fZ^T + \mid Z^T \mid^2 JZ^\perp\right).$$

De manera análoga, si suponemos que $A_{JZ^T}Z^T = aZ^T + bJZ^\perp$, para algunas funciones $a$ y $b$, para encontrar dichas funciones se resuelve la ecuación matricial,

$$\begin{pmatrix} \mid Z^T \mid^2 & f \\ f & \mid Z^\perp \mid^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^T \cdot f \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolver se tiene al igualdad deseada. $\square$

**Proposición 2.3.4.** *La segunda forma fundamental de la superficie $M$ esta determinada por,*

$$h\left(Z^T, JZ^\perp\right) = 0,$$

$$h\left(Z^T, Z^T\right) = \frac{Z^T \cdot f}{\Delta}\left(fZ^\perp + \mid Z^\perp \mid^2 JZ^T\right),$$

$$h\left(JZ^\perp, JZ^\perp\right) = \frac{JZ^\perp \cdot f}{\Delta}\left(\mid Z^T \mid^2 Z^\perp + fJZ^T\right).$$

*Donde,* $\Delta =\mid Z^T \mid^2\mid Z^\perp \mid^2 -f^2$.

*Demostración.* Del hecho, que $Z^T$ y $JZ^\perp$ son campos linealmente independientes entonces $JZ^T$ y $Z^\perp$ también lo son, en otras palabras, son un marco local del espacio normal a $M$. En particular, cualquier campo normal se puede representar como una combinación lineal de $JZ^T$ y $Z^\perp$. Sabemos del Corolario 2.1.5, y de la relación entre la segunda forma fundamental y el operador de forma que

$$\left\langle h(Z^T, JZ^\perp), Z^\perp \right\rangle = \left\langle Z^T, A_{Z^\perp} JZ^T \right\rangle = 0,$$

más aún,

$$\left\langle h(Z^T, JZ^\perp), JZ^T \right\rangle = \left\langle JZ^\perp, A^{JZ^T} Z^T \right\rangle = 0,$$

es decir, $h(Z^T, JZ^\perp) = 0$. Para probar las otras igualdades aplicamos el Lema 1.2.7,

$$h(Z^T, Z^T) = JA_{JZ^T} Z^T = J\left(\frac{Z^T \cdot f}{\Delta}\left(\mid Z^\perp \mid^2 Z^T - fJZ^\perp\right)\right) = \frac{Z^T \cdot f}{\Delta}\left(\mid Z^\perp \mid^2 JZ^T + fZ^\perp\right),$$

y también,

$$h(JZ^\perp, JZ^\perp) = -JA_{Z^\perp} JZ^\perp = \frac{JZ^\perp \cdot f}{\Delta}\left(|Z^T|^2 Z^\perp + fJZ^T\right).$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

**Proposición 2.3.5.** *La conexión de la superficie $M$ queda determinada por,*

$$\nabla_{Z^T} Z^T = 0 = \nabla_{JZ^\perp} JZ^\perp,$$

$$\nabla_{JZ^\perp} Z^T = \frac{JZ^\perp \cdot f}{\Delta}\left(-fZ^T + \mid Z^T \mid^2 JZ^\perp\right),$$

$$\nabla_{Z^T} JZ^\perp = \frac{Z^T \cdot f}{\Delta}\left(\mid Z^\perp \mid^2 Z^T - fJZ^\perp\right),$$

*donde,* $\Delta = \mid Z^T \mid^2 \mid Z^\perp \mid^2 - f^2$.

**Proposición 2.3.6.** *En el marco ortonormal dado en el Lema 2.3.2 la conexión, la segunda forma fundamental y el operador de forma de la superficie $M$, están dadas por,*

| $\nabla_X Y$ | $Y = e_1$ | $Y = e_2$ |
|---|---|---|
| $X = e_1$ | 0 | 0 |
| $X = e_2$ | $\frac{\lvert Z^T\rvert(JZ^\perp \cdot f)}{\Delta} e_2$ | $-\frac{\lvert Z^T\rvert(JZ^\perp \cdot f)}{\Delta} e_1$ |

| $h(X,Y)$ | $Y=e_1$ | $Y=e_2$ |
|---|---|---|
| $X=e_1$ | $\frac{Z^T\cdot f}{\lvert Z^T\rvert^3}Je_1-\frac{f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}Je_2$ | $\frac{-f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}Je_1+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}Je_2$ |
| $X=e_2$ | $\frac{-f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}Je_1+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}Je_2$ | $\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}Je_1+\frac{f^3(Z^T\cdot f)-\lvert Z^T\rvert^6(JZ^\perp\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta^{3/2}}Je_2$ |

| $A_{JX}Y$ | $Y=e_1$ | $Y=e_2$ |
|---|---|---|
| $X=e_1$ | $\frac{(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3}e_1-\frac{f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}e_2$ | $\frac{-f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}e_1+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}e_2$ |
| $X=e_2$ | $\frac{-f(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\sqrt{\Delta}}e_1+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}e_2$ | $\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta}e_1+\frac{f^3(Z^T\cdot f)-\lvert Z^T\rvert^6(JZ^\perp\cdot f)}{\lvert Z^T\rvert^3\Delta^{3/2}}e_2$ |

*Demostración.* Del hecho que $e_1$, $e_2$ es un marco ortonormal para la superficie $M$,

$$\nabla_{e_1}e_2=be_1 \text{ y } \nabla_{e_1}e_1=-be_1.$$

Para calcular $b$, notemos primero,

$$\nabla_{e_1}e_1 \;=\; \nabla_{\frac{Z^T}{|Z^T|}}\frac{Z^T}{|Z^T|}=\frac{1}{|Z^T|}\nabla_{Z^T}Z^T=0.$$

Esta última igualdad es consecuencia de la Proposición 2.1.3. Por lo que también, como ya se había mencionado, $\nabla_{e_1}e_2=0$.

De manera similar, sabemos que,

$$\nabla_{e_2}e_1=ae_2,\ \nabla_{e_2}e_2=-ae_1.$$

Con lo cual será suficiente encontrar el valor de $a$, para ello, optamos por calcular $\nabla_{e_2}e_1$, como sigue,

$$\begin{aligned}\nabla_{e_2}e_1 &= \nabla_{\frac{|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}}\frac{Z^T}{|Z^T|}=\frac{1}{|Z^T|^2\sqrt{\Delta}}(|Z^T|^2\nabla_{JZ^\perp}Z^T-f\nabla_{Z^T}Z^T)\\ &= \frac{JZ^\perp\cdot f}{\Delta^{3/2}}(-fZ^T+|Z^T|^2JZ^\perp)=\frac{JZ^\perp\cdot f}{\Delta^{3/2}}(|Z^T|\sqrt{\Delta})e_2=\frac{|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}e_2.\end{aligned}$$

En consecuencia $a=\dfrac{|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}$, y por lo tanto también tenemos $\nabla_{e_2}e_2=\dfrac{-|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}e_1$, completando los cálculos para la conexi´on.

Ahora, para realizar cálculos de la segunda forma fundamental, comenzamos por $h(e_1,e_1)$, como sigue,

$$h(e_1,e_1) \;=\; h\left(\frac{Z^T}{|Z^T|},\frac{Z^T}{|Z^T|}\right)=\frac{1}{|Z^T|^2}h(Z^T,Z^T)=\frac{Z^T\cdot f}{\Delta|Z^T|^2}(fZ^\perp+|Z^\perp|^2JZ^\perp),$$

esta última igualdad se sigue de la Proposición 2.3.4. Luego, para escribirlo como combinación lineal de $e_1$, y $e_2$, resolvemos la siguiente ecuación, para ciertas funciones $c$ y $d$,

$$\frac{Z^T\cdot f}{\Delta|Z^T|^2}(fZ^\perp+|Z^\perp|^2JZ^\perp) \;=\; cJe_1+dJe_2=\left(\frac{c}{|Z^T|}-\frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)JZ^T-\frac{d|Z^T|}{\sqrt{\Delta}}Z^\perp,$$

al resolver el sistema podemos concluir que

$$c=\frac{Z^T\cdot f}{|Z^T|^3},\quad d=\frac{-f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}},$$

se sigue que,

$$h(e_1,e_1)=\frac{Z^T\cdot f}{|Z^T|^3}Je_1-\frac{f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}}Je_2.$$

Luego, por la simetría de la segunda forma fundamental, es suficiente calcular $h(e_1,e_2)$ o $h(e_2,e_1)$, por lo que calculamos sólamente $h(e_1,e_2)$, como se muestra enseguida,

$$\begin{aligned}
h(e_1,e_2) &= h\left(\frac{Z^T}{|Z^T|},\frac{|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}h(Z^T,JZ^\perp)-\frac{f}{|Z^T|^2\sqrt{\Delta}}h(Z^T,Z^T)\\
&= -\frac{f}{|Z^T|^2\sqrt{\Delta}}\frac{Z^T\cdot f}{\Delta}(fZ^\perp+|Z^\perp|^2JZ^T).
\end{aligned}$$

Necesitamos escribir este resultado como combinación lineal de $Je_1$ y $Je_2$, es decir,

$$\begin{aligned}
h(e_1,e_2) &= aJe_1+bJe_2=a\frac{Z^T}{|Z^T|}+b\frac{|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\\
&= \left(\frac{a}{|Z^T|}-\frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)JZ^T-\frac{b|Z^T|}{\sqrt{\Delta}}Z^\perp,
\end{aligned}$$

de aquí, al comparar coeficientes tenemos,

$$h(e_1,e_2)=\frac{-f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^4\sqrt{\Delta}}Je_1+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}Je_2.$$

El último cálculo para la segunda forma fundamental es, $h(e_2,e_2)$ y lo hacemos como sigue,

$$\begin{aligned}
h(e_2,e_2) &= h\left(\frac{|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}},\frac{|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}h\left(|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T,|Z^T|^2JZ^\perp-fZ^T\right)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}\left(|Z^T|^4h(JZ^\perp,JZ^\perp)+f^2h(Z^T,Z^T)\right)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}\left(\frac{|Z^T|^4JZ^\perp\cdot f}{\Delta}(|Z^T|^2Z^\perp+fJZ^T)+\frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\Delta}(fZ^\perp+|Z^\perp|^2JZ^T)\right)\\
&= \frac{(|(Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f)+f^3(Z^T\cdot f))Z^\perp+(|(Z^T|^4f(JZ^\perp\cdot f)+f^2|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f))JZ^T}{|Z^T|^2\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Como en el caso anterior, para escribir este resultado como combinación lineal de $Je_1$ y $Je_2$, igualamos con,

$$h(e_2,e_2) = aJe_1 + bJe_2 = \left(\frac{a}{|Z^T|} - \frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right) JZ^T - \frac{b|Z^T|}{\sqrt{\Delta}} Z^\perp,$$

por lo que, al resolver esta ecuación vectorial se obtiene,

$$a = \frac{f^2(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}, \quad b = \frac{f^3(Z^T \cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}},$$

es decir,

$$h(e_2,e_2) = \frac{f^2(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3\Delta} Je_1 + \frac{f^3(Z^T \cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}} Je_2,$$

con lo que completamos los cálculos para la segunda forma fundamental. Procedemos ahora, a calcular el operador de forma. Comenzamos con $A_{Je_1}e_1$, haciendo uso de la Proposición 2.3.3, como se muestra enseguida,

$$A_{Je_1}e_1 = A_{\frac{JZ^T}{|Z^T|}} \frac{Z^T}{|Z^T|} = \frac{1}{|Z^T|^2} A_{JZ^T} Z^T = \frac{Z^T \cdot f}{|Z^T|^2\Delta}(|Z^\perp|^2 Z^T - fJZ^\perp).$$

Para escribirlo como combinación lineal de $e_1$ y $e_2$, igualamos con,

$$A_{Je_1}e_1 = ae_1 + be_2 = a\frac{Z^T}{|Z^T|} + b\frac{|Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}} = \left(\frac{a}{|Z^T|} - \frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right) Z^T + \left(\frac{b|Z^T|}{\sqrt{\Delta}}\right) JZ^\perp,$$

al igualar estas dos ecuaciones y resolverla tenemos que,

$$A_{Je_1}e_1 = \frac{Z^T \cdot f}{|Z^T|^3} e_1 - \frac{f(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}} e_2.$$

Continuamos con $A_{Je_1}e_2$ realizando las siguientes operaciones,

$$\begin{aligned} A_{Je_1}e_2 &= A_{\frac{JZ^T}{|Z^T|}} \left(\frac{|Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} A_{JZ^T} JZ^\perp - \frac{f}{|Z^T|\sqrt{\Delta}} A_{JZ^T} Z^T \\ &= -\frac{f}{|Z^T|\sqrt{\Delta}} \left(\frac{Z^T \cdot f}{\Delta}(|Z^\perp|^2 Z^T - fJZ^\perp)\right). \end{aligned}$$

Para escribir esto en combinación lineal de $e_1$ y $e_2$ igualamos con,

$$A_{Je_1}e_2 = ae_1 + be_2 = a\frac{Z^T}{|Z^T|} + b\frac{|Z^T|^2 JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}} = \left(\frac{a}{|Z^T|} - \frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right) Z^T + \left(\frac{b|Z^T|}{\sqrt{\Delta}}\right) JZ^\perp,$$

igualando estas combinaciones tenemos lo que buscábamos, esto es,

$$A_{Je_1}e_2 = \frac{-f(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}} e_1 + \frac{f^2(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3\Delta} e_2.$$

En este caso, como estamos trabajando en una base ortonormal, se tiene la siguiente igualdad,

$$A_{Je_1}e_2 = A_{Je_2}e_1.$$

Por último para completar la prueba calculamos $A_{Je_2}e_2$,

$$\begin{aligned}
A_{Je_2}e_2 &= A_{J\left(\frac{|Z^T|^2JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)}\left(\frac{|Z^T|^2JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}A_{(-|Z^T|^2Z^\perp - fJZ^T)}(|Z^T|^2JZ^\perp - fZ^T)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}\left(-|Z^T|^4A_{Z^\perp}JZ^\perp - f^2A_{JZ^T}Z^T\right)\\
&= \frac{1}{|Z^T|^2\Delta}\left(-\frac{|Z^T|^4(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}(-fZ^T + |Z^T|^2JZ^\perp) - \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{\Delta}(|Z^\perp|^2Z^T - fJZ^T)\right)\\
&= \frac{|Z^T|^4f(JZ^\perp\cdot f) - f^2|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^2\Delta^2}Z^T + \frac{-|Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f) + f^3(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^2\Delta^2}JZ^\perp.
\end{aligned}$$

Al comparar con,

$$A_{Je_2}e_2 = ae_1 + be_2 = a\frac{Z^T}{|Z^T|} + b\frac{|Z^T|^2JZ^\perp - fZ^T}{|Z^T|\sqrt{\Delta}} = \left(\frac{a}{|Z^T|} - \frac{bf}{|Z^T|\sqrt{\Delta}}\right)Z^T + \left(\frac{b|Z^T|}{\sqrt{\Delta}}\right)JZ^\perp,$$

y resolver se obtiene,

$$A_{Je_2}e_2 = \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}e_1 + \frac{f^3(Z^T\cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}}e_2.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Corolario 2.3.7.** *La curvatura Gaussiana y la curvatura media son,*

$$K = \frac{f}{\Delta^2}\left(Z^T\cdot f\right)\left(JZ^\perp\cdot f\right),$$

$$2H = \left(\frac{|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|\Delta}\right)Je_1 + \left(\frac{-f|Z^T|^2|Z^\perp|^2(Z^T\cdot f) + 2f^3(Z^T\cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}}\right)Je_2.$$

*Más aún, se tiene la relación,*

$$Z^T\cdot(JZ^\perp\cdot f) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2 = -3f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f).$$

*Demostración.* En los cálculos siguientes se aplicarán la Proposición 1.2.2 y el Lema 2.3.2, así como la Proposición 2.3.6,

$$\begin{aligned}
\langle R_{e_1,e_2}e_1, e_2\rangle &= \langle h(e_1,e_1), h(e_2,e_2)\rangle - \langle h(e_1,e_2), h(e_1,e_2)\rangle \\
&= \left\langle \frac{Z^T\cdot f}{|Z^T|^3}Je_1 - \frac{f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}}Je_2, \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}Je_1\right\rangle \\
&\quad \left\langle \frac{Z^T\cdot f}{|Z^T|^3}Je_1 - \frac{f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}}Je_2, \frac{f^3(Z^T\cdot f) - |Z^T|^6(JZ^\perp\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta^{3/2}}Je_2\right\rangle \\
&\quad -\left\langle -\frac{f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}}Je_1 + \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}Je_2, -\frac{f(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\sqrt{\Delta}}Je_1 + \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^3\Delta}Je_2\right\rangle \\
&= \frac{f^2(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^6\Delta} - \frac{f^4(Z^T\cdot f)^2 - |Z^T|^6 f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f)}{|Z^T|^6\Delta^2} \\
&\quad -\frac{f^2(Z^T\cdot f^2)}{|Z^T|^6\Delta} - \frac{f^4(Z^T\cdot f)^2}{|Z^T|^6\Delta^2} \\
&= \frac{f}{\Delta^2}(Z^T\cdot f)(JZ^\perp\cdot f).
\end{aligned}$$

Podemos calcular la curvatura directamente sin utilizar la ecuación de Gauss, como sigue,

$$\begin{aligned}
R_{e_1,e_2}e_1 &= \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 \\
&= \frac{-|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_1}\left(\frac{|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}e_2\right) \\
&= -e_1\cdot\left(\frac{|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}e_2\right)e_2 - \frac{|Z^T|(JZ^\perp\cdot f)}{\Delta}\nabla_{e_2}e_1 \\
&= -\left(\frac{|Z^T|e_1\cdot(JZ^\perp\cdot f) - |Z^T|(JZ^\perp\cdot f)(e_1\cdot\Delta)}{\Delta^2}\right)e_2 - \frac{|Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2}{\Delta^2}e_2 \\
&= -\left(\frac{|Z^T|\dfrac{Z^T}{|Z^T|}\cdot(JZ^\perp\cdot f) - |Z^T|(JZ^\perp\cdot f)(\dfrac{Z^T}{|Z^T|}\cdot\Delta) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2}{\Delta^2}\right)e_2 \\
&= -\left(\frac{Z^T\cdot(JZ^\perp\cdot f) + 2f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2}{\Delta^2}\right)e_2.
\end{aligned}$$

De manera que también,

$$\langle R_{e_1,e_2}e_1, e_2\rangle = -\frac{Z^T\cdot(JZ^\perp\cdot f) + 2f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2}{\Delta^2},$$

es decir, tenemos la ecuación,

$$-(\frac{Z^T\cdot(JZ^\perp\cdot f) + 2f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2}{\Delta^2}) = \frac{f}{\Delta^2}(Z^T\cdot f)(JZ^\perp\cdot f),$$

equivalentemente,

$$Z^T\cdot(JZ^\perp\cdot f) + |Z^T|^2(JZ^\perp\cdot f)^2 = -3f(JZ^\perp\cdot f)(Z^T\cdot f), \tag{2.7}$$

luego como,

$$\begin{aligned}
Z^T \cdot (JZ^\perp \cdot f) &= Hessf(Z^T, JZ^\perp) + \nabla_{Z^T} JZ^\perp \cdot f \\
&= Hessf(Z^T, JZ^\perp) + \frac{Z^T \cdot f}{\Delta}(|Z^\perp|^2 Z^T - fJZ^\perp) \cdot f \\
&= Hessf(Z^T, JZ^\perp) + \frac{|Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f)^2}{\Delta} - \frac{f(Z^T \cdot f)(JZ^\perp \cdot f)}{\Delta},
\end{aligned}$$

sustituyendo tenemos,

$$Hessf(Z^T, JZ^\perp) + \frac{|Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f)^2}{\Delta} - \frac{f(Z^T \cdot f)(JZ^\perp \cdot f)}{\Delta} + |Z^T|^2 (JZ^\perp \cdot f)^2 = -3f(JZ^\perp \cdot f)(Z^T \cdot f),$$

con lo que obtenemos la fórmula para el Hessiano de $f$ evaluado en $(Z^T, JZ^\perp)$,

$$Hessf(Z^T, JZ^\perp) = -\frac{|Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f)^2}{\Delta} - |Z^T|^2 (JZ^\perp \cdot f)^2 - 3f(JZ^\perp \cdot f)(Z^T \cdot f) + \frac{f(Z^T \cdot f)(JZ^\perp \cdot f)}{\Delta}.$$

Para la curvatura media un cálculo directo lleva al resultado,

$$\begin{aligned}
2H &= h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) \\
&= \frac{Z^T \cdot f}{|Z^T|^3} Je_1 - \frac{f(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \sqrt{\Delta}} Je_2 + \frac{f^2 (Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta} Je_1 + \frac{f^3 (Z^T \cdot f) - |Z^T|^6 (JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta^{3/2}} Je_2 \\
&= \left( \frac{Z^T \cdot f}{|Z^T|^3} + \frac{f^2 (Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta} \right) Je_1 + \left( -\frac{f(Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \sqrt{\Delta}} + \frac{f^3 (Z^T \cdot f) - |Z^T|^6 (JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta^{3/2}} \right) Je_2 \\
&= \left( \frac{(Z^T \cdot f)\Delta + f^2 (Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta} \right) Je_1 + \left( \frac{-f(Z^T \cdot f)\Delta + f^3 (Z^T \cdot f) - |Z^T|^6 (JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta^{3/2}} \right) Je_2 \\
&= \left( \frac{|Z^T|^2 |Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta} \right) Je_1 \\
&\quad + \left( \frac{-f|Z^T|^2 |Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f) + 2f^3 (Z^T \cdot f) - |Z^T|^6 (JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta^{3/2}} \right) Je_2 \\
&= \left( \frac{|Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f)}{|Z^T| \Delta} \right) Je_1 + \left( \frac{-f|Z^T|^2 |Z^\perp|^2 (Z^T \cdot f) + 2f^3 (Z^T \cdot f) - |Z^T|^6 (JZ^\perp \cdot f)}{|Z^T|^3 \Delta^{3/2}} \right) Je_2.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

## 2.4. Parametrizaciones en $\mathbb{C}^2$

### 2.4.1. Familia de superficies de ángulo constante en $\mathbb{C}^2$

**Definición 2.4.1.** *Sean $S$ una superficie Riemanniana y $g : S \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty$. Definimos y denotamos el gradiente de $g$, como el único campo $\nabla g \in \mathfrak{X}(S)$, que satisface, para todo campo, $X \in \mathfrak{X}(S)$,*

$$\langle \nabla g, X \rangle = X \cdot g = dg(X).$$

**Definición 2.4.2.** *Sean $S$ una variedad Riemanniana, y $g$ función $g : S \to \mathbb{R}$. La función $g$ es llamada eikonal si, $|\nabla g|$ es constante.*

**Proposición 2.4.3.** *[22, Prop. 4.1] Sean $S$ una superficie en $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$, tal que, $\mathbb{R}^3$ es el hiperplano ortogonal a $e_4 = (0,0,0,1)$, y $g : S \to \mathbb{R}$ una función eikonal. Entonces, la gráfica de la función,*

$$M = \{(p, g(p)) : p \in S\},$$

*es una variedad de ángulo constante respecto al campo $e_4$.*

*Demostración.* Sea $\phi : U \subset S \to M$ la función definida por $\phi(p) = (i(p), g(p)) = (p, g(p))$, donde la función $i : S \to \mathbb{R}^3$. Sea $X = \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}$, y $Y \in \mathfrak{X}(S)$ un campo unitario ortogonal a $X$, es claro, por la elección de $Y$ que,

$$dg(Y) = \langle \nabla g, Y \rangle = |\nabla g| \left\langle \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, Y \right\rangle = 0.$$

En otras palabras, $\{X, Y\}$ forman un marco ortonormal del espacio tangente a $M$.
Denotamos los campos canónicos de $\mathbb{R}^4$, como $\partial_a, \partial_b, \partial_x$ y $\partial_y$, se sigue que, $dg(X) = \left\langle \nabla, \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|} \right\rangle = |\nabla g|$, con lo que podemos calcular los campos asociados a $X$ y $Y$ en $M$, es decir,

$$\overline{X} = d\phi(X) = dX + dg(X) = di(X) + |\nabla g|\partial_y,$$

$$\overline{Y} = d\phi(Y) = di(Y) + dg(Y) = di(Y).$$

Afirmamos que $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ son campos ortogonales y de magnitud constante, en efecto,

$$\left\langle \overline{X}, \overline{Y} \right\rangle = \langle di(X) + |\nabla g|\partial_y, di(Y) \rangle = \langle di(X), di(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle = 0,$$

$$\left\langle \overline{X}, \overline{X} \right\rangle = \langle di(X) + |\nabla g|\partial_y, di(X) + |\nabla g|\partial_y \rangle = |X|^2 + |\nabla g| = 1 + |\nabla g|,$$

$$\left\langle \overline{Y}, \overline{Y} \right\rangle = \langle di(Y), di(Y) \rangle = |Y|^2 = 1.$$

Para probar que $M$, es de ángulo constante respecto a $e_4 = \partial_y$, hay que probar que la parte tangente $\partial_y^T$ es de magnitud constante, esto es suficiente por la Proposición 2.1.2. Entonces al escribir,

$$\partial_y^T = a\overline{X} + b\overline{Y},$$

y por el hecho de estar escrita en un marco ortonormal de $M$ podemos calcular fácilmente las funciones $a$ y $b$ como sigue,

$$a = \left\langle \partial_y^T, \overline{X} \right\rangle = \langle \partial_y, di(X) + |\nabla g| \partial_y \rangle = |\nabla g|,$$

y también,

$$b = \left\langle \partial_y^T, di(Y) \right\rangle = 0.$$

Así el cuadrado de la magnitud del campo $\partial_y^T$ es,

$$|\partial_y^T|^2 = \left\langle |\nabla g| \overline{X}, |\nabla g| \overline{X} \right\rangle = |\nabla g|^2 |\overline{X}|^2 = |\nabla g|^2 (1 + |\nabla g|).$$

Lo que concluye la prueba. □

De manera más general tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.4.** *Consideramos una superficie totalmente real $M$ inmersa en $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y una función real eikonal $g : M \to \mathbb{R}$. Entonces la inmersión $\phi = (i, 0, g)$ donde $i : M \to \mathbb{C}^n$ es la inclusión, es una inmersión totalmente real y de ángulo constante respecto a $e_{2n} = (0, \ldots, 0, 1)$.*

*Demostración.* Notemos que un campo $X$ de $M$ es levantado por $\phi$ a $\tilde{X} = X + (X \cdot g) e_{2n}$. Para probar que esta superficie es totalmente real, observemos que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\phi(M))$ son linealmente independientes, es decir, son una base de $\phi(M)$, además,

$$\langle \tilde{X}, J\tilde{Y} \rangle = \langle X + (X \cdot g) e_{2n}, JY + (Y \cdot g) J e_{2n} \rangle = 0,$$

lo que implica que $\phi(M)$ es una superficie totalmente real. Ahora, la prueba de que $\phi(M)$ es de ángulo constante es análoga a la prueba de la Proposición 2.4.3. □

### 2.4.2. Superficies como gráficas de funciones.

**Teorema 2.4.5.** *[11, Teor. 2.2] Sean $L_1, L_2 : M \to \mathbb{C}^2$, dos inmersiones Lagrangianas con segunda forma fundamental $h^1$ y $h^2$ respectivamente. Si*

$$\left\langle h^1(X, Y), J(dL_1 Z) \right\rangle = \left\langle h^2(X, Y), J(dL_2 Z) \right\rangle,$$

*para cualesquiera campos, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces existe una isometría $\Phi$ de $\mathbb{C}^2$, tal que, $L_1 = L_2 \circ \Phi$.*

**Definición 2.4.6.** *Sean $M$ una superficie de $\mathbb{C}^2$ y $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{C}^2$ una carta. Los coeficientes de la primer forma fundamental los denotamos por,*

$$E = \langle \phi_x, \phi_x \rangle \, , \; G = \langle \phi_y, \phi_y \rangle \, , \; F = \langle \phi_x, \phi_y \rangle \, .$$

**Observación 2.** Sea $M$ una superficie de $\mathbb{R}^4$, es posible escribirla, localmente como la gráfica de una función $(f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de manera que existen veinticuatro posibilidades, las cuales, podemos reducir a doce, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que las funciones $f$ y $g$ se pueden renombrar. Podemos reducir a seis posibilidades, ya que, podemos suponer lo mismo con las variables del conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$.

**Lema 2.4.7.** *Sea $\phi : M \to \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana, entonces la segunda forma fundamental en la base $\{\phi_x, \phi_y\}$, es para cada $i, j \in \{x, y\}$,*

$$(EG - F^2)h(\phi_i, \phi_j) = (\langle \phi_{ij}, J\phi_x \rangle G - \langle \phi_{ij}, J\phi_y \rangle F)J\phi_x + (- \langle \phi_{ij}, J\phi_x \rangle F + \langle \phi_{ij}, J\phi_y \rangle E)J\phi_y.$$

*Demostración.* La segunda forma fundamental $h(\phi_i, \phi_j)$, es la parte normal de $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \phi_{ij}$, para cada $i, j \in \{x, y\}$. Por lo tanto, es posible expresarla en el marco local $\{J\phi_x, J\phi_y\}$ como sigue,

$$h(\phi_i, \phi_j) = aJ\phi_x + bJ\phi_y,$$

para ciertas funciones $a, b$. Para descubrir a estas funciones, es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones, el que se presenta en su forma matricial,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_{ij}, J\phi_x \rangle \\ \langle \phi_{ij}, J\phi_y \rangle \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema tenemos que,

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi_{ij}, J\phi_x \rangle \\ \langle \phi_{ij}, J\phi_y \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

con lo que finalizamos la prueba. □

De aquí en adelante supondremos que supondremos que la superficie $M$ es Lagrangiana.

**Proposición 2.4.8.** *Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Entonces las parametrizaciones siguientes son lagrangianas, si satisfacen la condición respectiva.*

| *Parametrización* | *Condición para ser Lagrangiana* |
|---|---|
| $\phi_1(x,y) = (x, y, f(x,y), g(x,y))$ | $f_x g_y - f_y g_x = -1$ |
| $\phi_2(x,y) = (x, f(x,y), y, g(x,y))$ | $f_y = g_x$ |
| $\phi_3(x,y) = (f(x,y), x, y, g(x,y))$ | $f_y = -g_x$ |
| $\phi_4(x,y) = (f(x,y), x, g(x,y), y)$ | $f_y = g_x$ |
| $\phi_5(x,y) = (f(x,y), g(x,y), x, y)$ | $f_x g_y - f_y g_x = -1$ |
| $\phi_6(x,y) = (x, f(x,y), g(x,y), y)$ | $f_y = -g_x$ |

*Demostración.* En cualquier parametrización la condición para ser una superficie Lagrangiana, es proporcionada por la ecuación $\langle \partial_x, J\partial_y \rangle = 0$. Entonces para la parametrización $\phi_1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (1,0,f_x,g_x), J(0,1,f_y,g_y) \rangle \\ &= \langle (1,0,f_x,g_x), (-1,0,-g_y,f_y) \rangle = -1 - f_x g_y + g_x f_y. \end{aligned}$$

Ahora para la parametrización $\phi_2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (1,f_x,0,g_x), J(0,f_y,1,g_y) \rangle \\ &= \langle (1,f_x,0,g_x), (-f_y,0,-g_y,1) \rangle = -f_y + g_x. \end{aligned}$$

En el caso de la parametrización $\phi_3$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (f_x,1,0,g_x), J(f_y,0,1,g_y) \rangle \\ &= \langle (f_x,1,0,g_x), (0,f_y,-g_y,1) \rangle = f_y + g_x. \end{aligned}$$

Para la parametrización $\phi_4$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (f_x,1,g_x,0), J(f_y,0,g_y,1) \rangle \\ &= \langle (f_x,1,g_x,0), (0,f_y,-1,g_y) \rangle = f_y - g_x. \end{aligned}$$

Ahora para la parametrización $\phi_5$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (f_x,g_x,1,0), J(f_y,g_y,0,1) \rangle \\ &= \langle (f_x,g_x,1,0), (-g_y,f_y,-1,0) \rangle = -f_x g_y + g_x f_y - 1. \end{aligned}$$

Por último para la parametrización $\phi_6$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_x, J\partial_y \rangle = \langle (1,f_x,g_x,0), J(0,f_y,g_y,1) \rangle \\ &= \langle (1,f_x,g_x,0), (-f_y,0,-1,g_y) \rangle = -f_y - g_x. \end{aligned}$$

Con lo que finalizamos la prueba. $\square$

**Lema 2.4.9.** *Consideramos las isometrías* $\Phi_i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $i = 1, 2$ *definidas por,*

$$\Phi_1(x, y, z, w) = (z, w, x, y), \ \Phi_2(x, y, z, w) = (y, x, w, z).$$

*Entonces* $\Phi_1$ *es holomorfa y* $\Phi_2$ *es antiholomorfa.*

*Demostración.* Vamos a probar que $d\Phi_1 = \Phi_1$ (pues $\Phi_1$ es una transformación lineal), es holomorfa. Para ello consideramos $(x, y, z, w) = X \in \mathfrak{X}(M)$ procederemos calculando,

$$\Phi_1(J(x, y, z, w)) = \Phi_1(-y, x, -w, z) = (-w, z, -y, x),$$

por otro lado,

$$J\Phi_1((x, y, z, w)) = J(z, w, x, y) = (-w, z, -y, x),$$

por lo que concluimos que $\Phi_1$ es holomorfa. Por otro lado, hacemos los mismos cálculos para $d\Phi_2 = \Phi_2$ en $X = (x, y, z, w)$,

$$\Phi_2 J(x, y, z, w) = \Phi_2(-y, x, -w, z) = (x, -y, z, -w),$$

y además,

$$J\Phi_2(x, y, z, w) = J(y, x, w, z) = (-x, y, -z, w).$$

Es decir, $\Phi_2$ es antiholomorfa, lo cual concluye la prueba. □

**Corolario 2.4.10.** *Las posibles parametrizaciones como gráficas de funciones* $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, salvo isometrías son* $\phi_1$*,* $\phi_2$ *y* $\phi_3$*.*

*Demostración.* Ya se mencionó que la tabla de la Proposición 2.4.8 enumera las posibilidades salvo el nombre de las funciones $f$ y $g$ y las variables independientes $x$ y $y$. Del hecho de sus condiciones para ser variedades lagrangianas, las únicas opciones que se pueden comparar son, $\phi_1$ con $\phi_5$, $\phi_2$ con $\phi_4$, y $\phi_3$ con $\phi_6$. La relación que existe entre ellas claramente es,

$$\phi_1 = \Phi_1 \circ \phi_5, \ \phi_2 = \Phi_2 \circ \phi_4, \ \phi_3 = \Phi_1 \circ \phi_6.$$

Se sigue del Lema 2.4.9 y del Lema 1.2.12, que las parametrizaciones $\phi_1$ con $\phi_5$, $\phi_2$ con $\phi_4$, y $\phi_3$ con $\phi_6$ son, en efecto, equivalentes. Por lo que, es posible considerar $\phi_1$, $\phi_2$ y $\phi_3$ las tres posibilidades salvo isometrías. □

**Corolario 2.4.11.** *Los coeficientes de la primera forma fundamental son,*

$$E = 1 + f_x^2 + g_x^2, \ G = 1 + f_y^2 + g_y^2, \ F = f_x f_y + g_x g_y.$$

*Demostración.* Un cálculo directo sobre las posibles 6 parametrizaciones, deja en evidencia que, el orden de aparición de las variables $x$ y $y$, así, como de las funciones es independiente, al momento de realizar el producto interno $\langle , \rangle$ el orden es irrelevante. $\square$

**Corolario 2.4.12.** *Sea $\phi_i : M \to \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana con $i = 1,2,3,4,5,6$. El determinante de la métrica viene dado por*

$$EG - F^2 = 1 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2 + (f_x g_y - f_y g_x)^2.$$

*Demostración.* Un cálculo directo lleva a

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (1 + f_x^2 + g_x^2)(1 + f_y^2 + g_y^2) - (f_x f_y + g_x g_y)^2 \\
&= 1 + f_y^2 + g_y^2 + f_x^2 + f_x^2 f_y^2 + f_x^2 g_y^2 + g_x^2 + g_x^2 f_y^2 + g_x^2 g_y^2 - f_x^2 f_y^2 - 2 f_x f_y g_x g_y - g_x^2 g_y^2 \\
&= 1 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2 + (f_x^2 g_y^2 - 2 f_x f_y g_x g_y + f_x^2 g_y^2) \\
&= 1 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2 + (f_x g_y - f_y g_x)^2.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

**Observación 3.** Sea $M$ una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a $Z$ en $\mathbb{C}^2$, entonces bajo un movimiento por una isometría se puede considerar que $M$ es una superficie lagrangiana de ángulo constante respecto al campo $e_4$.

*Demostración.* Sean $p \in M$, y la base ortonormal $e_1$, $e_2$ para el espacio tangente a $M$ en $p$. Por la condición de ser lagrangiana, se tiene $Je_1$, $Je_2$ una base ortonormal para el espacio normal, es decir, $e_1$, $e_2$, $Je_1$ y $Je_2$ es una base para el espacio tangente a $p$ en $\mathbb{C}^2$. Consideremos la transfromación $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definida por, $\Phi(X) = \begin{cases} e_4, & X = Z, \\ -e_3, & X = JZ, \end{cases}$ $\square$

**Proposición 2.4.13.** *Sea $M \subset \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana con parametrización $\phi_i$, ( veáse la tabla de la Proposición 2.4.8). Entonces la magnitud de la parte tangente de los campos paralelos $e_4$ y $e_3$ es,*

| *Parametrización* | $\lvert e_4^T\rvert^2$ | $\lvert e_3^T\rvert^2$ |
|---|---|---|
| $\phi_1$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ |
| $\phi_2$ | $\frac{\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ |
| $\phi_3$ | $\frac{\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ |
| $\phi_4$ | $\frac{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ | $\frac{\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y-g_x^2)^2}$ |
| $\phi_5$ | $\frac{1+f_x^2+g_x^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ | $\frac{1+f_y^2+g_y^2}{2+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2}$ |
| $\phi_6$ | $\frac{1+f_x^2-f_y^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ | $\frac{-g_x^2+g_y^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}{1+\lvert\nabla_0 f\rvert^2+\lvert\nabla_0 g\rvert^2+(f_xg_y+g_x^2)^2}$ |

*Demostración.* Como $\{(\phi_i)_x, (\phi_i)_y\}$ es un marco local del espacio tangente de $M$, entonces existen funciones $a$ y $b$ tales que, $e_4^T = a(\phi_i)_x + b(\phi_i)_y$. Podemos escribir el siguiente sistema para poder encontrar los coeficientes $a$ y $b$,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_4, (\phi_i)_x\rangle \\ \langle e_4, (\phi_i)_y\rangle \end{pmatrix},$$

por lo que, la solución para $a$ y $b$ viene dada por,

$$\tfrac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle e_4, (\phi_i)_x\rangle \\ \langle e_4, (\phi_i)_y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

En otras palabras,

$$a = \frac{G\langle e_4, (\phi_i)_x\rangle - F\langle e_4, (\phi_i)_y\rangle}{EG-F^2},$$

$$b = \frac{-F\langle e_4, (\phi_i)_x\rangle + E\langle e_4, (\phi_i)_y\rangle}{EG-F^2}.$$

Para reducir la notación, pondremos $\langle e_4, (\phi_i)_x\rangle = \gamma_1$ y $\langle e_4, (\phi_i)_y\rangle = \gamma_2$, entonces la magnitud de $e_4^T$ viene dada por,

$$\begin{aligned}
(EG-F^2)^2|e_4^T|^2 &= a^2E + 2abF + b^2G \\
&= (G\gamma_1 - F\gamma_2)^2E + 2(G\gamma_1 - F\gamma_2)(-F\gamma_1 + E\gamma_2)F + (-F\gamma_1 + E\gamma_2)^2G \\
&= G^2E\gamma_1^2 - 2GFE\gamma_1\gamma_2 + F^2E\gamma_2^2 - 2GF^2\gamma_1^2 + 2GEF\gamma_1\gamma_2 + 2F^3\gamma_1\gamma_2 \\
&\quad -2F^2E\gamma_2^2 + F^2G\gamma_1^2 - 2FEG\gamma_1\gamma_2 + GE^2\gamma_2^2 \\
&= G(EG-F^2)\gamma_1^2 + 2F(F^2-EG)\gamma_1\gamma_2 + E(GE-F^2)\gamma_2^2 \\
&= (EG-F^2)(G\gamma_1^2 - 2F\gamma_1\gamma_2 + E\gamma_2^2),
\end{aligned}$$

con lo cual,

$$|e_4^T|^2 = \frac{G\gamma_1^2 - 2F\gamma_1\gamma_2 + E\gamma_2^2}{EG - F^2}.$$

De aquí, sustituimos los valores de $\gamma_1$ y $\gamma_2$,

| Parametrización | $\langle e_4, (\phi_i)_x \rangle = \gamma_1$ | $\langle e_4, (\phi_i)_y \rangle = \gamma_2$ | $EG - F^2$ |
|---|---|---|---|
| $\phi_1$ | $g_x$ | $g_y$ | $2 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2$ |
| $\phi_2$ | $g_x$ | $g_y$ | $1 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2 + (f_x g_y - g_x^2)^2$ |
| $\phi_3$ | $g_x$ | $g_y$ | $1 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2 + (f_x g_y + g_x^2)^2$ |
| $\phi_4$ | 0 | 1 | $1 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2 + (f_x g_y - g_x^2)^2$ |
| $\phi_5$ | 0 | 1 | $2 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2$ |
| $\phi_6$ | 0 | 1 | $1 + \|\nabla_0 f\|^2 + \|\nabla_0 g\|^2 + (f_x g_y + g_x^2)^2$ |

Con lo cual obtenemos, en las primeras tres parametrizaciones que la magnitud de $e_4^T$, esta dada por,

$$|e_4^T|^2 = \frac{|\nabla_0 g|^2 + (f_x g_y - f_y g_x)^2}{EG - F^2},$$

y en las tres últimas tenemos,

$$|e_4^T|^2 = \frac{1 + f_x^2 + g_x^2}{EG - F^2}.$$

Utilizando las condiciones de las parametrizaciones mostradas en la Proposición 2.4.8, obtenemos la tabla deseada. □

**Proposición 2.4.14.** *En $\mathbb{R}^n$ una función eikonal $f$ con laplaciano constante es afín.*

*Demostración.* Utilizamos la fórmula de Bochner, esta es, si $M$ es una variedad y $f : M \to \mathbb{R}$, una función $C^\infty$ entonces,

$$\Delta \left( \frac{|\nabla f|^2}{2} \right) = \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |Hess f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

En este caso tenemos que el lado izquierdo es igual a cero, ya que $f$ es una función eikonal. El lado derecho se anula la curvatura de Ricci, ya que $\mathbb{R}^n$ tiene curvatura cero. Además $\nabla \Delta f = 0$, del hecho que $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 = \Delta f = 0$, por lo que,

$$\sum_{i,j} f_{x_i x_j}^2 = |Hess f|^2 = 0.$$

Concluimos, que todas las derivadas mixtas son idénticamente cero, por lo que, al integrar la segunda derivada $f_{x_i, x_j}$ respecto a $x_j$ tenemos para cada $i = 1, 2, \cdot, n$,

$$f_{x_i}(x) = c_i,$$

para alguna constante $c_i$, e integrando nuevamente, ahora, respecto a $x_i$, se tiene que, $f(x) = c_i x_i + g_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ y derivando, ahora, respecto a $x_k$ es claro que,

$$f_{x_k} = (g_i)_{x_x} = c_k,$$

y por lo tanto tenemos,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d_i = \langle c, x\rangle + d.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Proposición 2.4.15.** *Sea $M \subset \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana con parametrización,*

$$(x, y, f(x), g(y)).$$

*Entonces $M$ es un plano.*

*Demostración.* La condición, para que esta parametrización sea lagrangiana se reduce a,

$$f_x g_y = -1.$$

Es consecuencia de que las funciones $f$ y $g$ dependen sólo de $x$ y $y$ respectivamente. Tenemos, por lo tanto, que las funciones $f_x$ y $g_y$ son constantes, lo que implica que las funciones $f$ y $g$ son funciones lineales, en otras palabras, un abierto de un plano. □

**Corolario 2.4.16.** *Sea $M \subset \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana con parametrización $\phi_1(x, y) = (x, y, f(x, y), g(x, y))$, tal que, $f$ y $g$ son funciones eikonales o $|\nabla_0 f|^2 = |\nabla_0 g|^2$, entonces $M$ es de ángulo constante respecto a $e_4$.*

*Demostración.* La condición de ser de ángulo constante respecto a $e_4$ es que su proyección sobre el espacio tangente tenga magnitud constante, esto se sabe de la Proposición 2.1.2. Sabemos de la Proposición 2.4.13 que la magnitud de $e_4^T$ es,

$$|e_4^T|^2 = \frac{1 + |\nabla_0 g|^2}{2 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2},$$

el cual es constante bajo nuestros hipótesis. □

**Proposición 2.4.17.** *Sea $M \subset \mathbb{C}^2$ una superficie Lagrangiana con parametrización $\phi_1(x, y) = (x, y, f(x, y), g(x, y))$, tal que, $f$ y $g$ son funciones eikonales, tales que, $|\nabla_0 f| = |\nabla_0 g| = 1$. Entonces $M$ es un abierto de un plano.*

*Demostración.* Sabemos del Corolario 2.4.16 que $M$ es de ángulo constante. De la condición de lagrangiana podemos hacer,

$$f_x g_y = f_y g_x - 1, \tag{2.8}$$

elevando al cuadrado,

$$f_x^2 g_y^2 = f_y^2 g_x^2 + 1 - 2 f_y g_x,$$

sustituyendo que $f$ y $g$ son eikonales, esto es $f_x^2 + f_y^2 = 1$ y $g_x^2 + g_y^2 = 1$,

$$f_x^2(1 - g_x^2) = (1 - f_x^2) g_x^2 + 1 - 2 f_y g_x,$$

que es equivalente a,

$$f_x^2 = g_x^2 + 1 - 2 f_y g_x,$$

y de nuevo, como $f$ es eikonal,

$$0 = g_x^2 - 2 f_y g_x + f_y^2 = (g_x - f_y)^2.$$

Esto último implica que, $g_x = f_y$ y por lo tanto,

$$f_x^2 = 1 - f_y^2 = 1 - g_x^2 = g_y^2,$$

en otras palabras, tenemos las siguientes dos posibilidades $f_x = g_y$, o $f_x = -g_y$. En el primer caso, es decir, $f_y = g_x$, $f_x = g_y$ tenemos,

$$f_x^2 = f_y^2 - 1 = (1 - f_x^2) - 1 = -f_x^2,$$

lo cual es sólo posible si, $g_y = f_x = 0$, lo cual también implica $g_x^2 = f_y^2 = 1$, esto es, $f$ depende sólo de $y$, y la función $g$, depende solamente de $x$. Así, $f$ y $g$ son funciones afines, y por lo tanto $M$ es un plano. Ahora, en el otro caso, supongamos que $f_x = -g_y$, derivando esto respecto a $x$ se obtiene,

$$f_{xx} = -g_{yx},$$

por otro lado derivando la ecuación $f_y = g_x$ respecto a $y$, se tiene,

$$f_{yy} = g_{xy},$$

lo que implica que, $\Delta_0 f = f_{xx} + f_{yy} = -g_{xy} + g_{xy} = 0$, de manera similar $\Delta_0 g = g_{xx} + g_{yy} = 0$, entonces, se sigue de la Proposición 2.4.14, que, $f$ y $g$ son funciones afines, y por lo tanto, $M$ es un abierto de un plano. $\square$

**Proposición 2.4.18.** *Sea $M$ una superficie Lagrangiana de ángulo constante respecto a $e_4$. Supongamos que tiene parametrización $\phi_2(x, y) = (x, f(x, y), y, g(x, y))$. Si $F = 0$, y $g_x \neq 0$, entonces $M$ es un abierto de un plano.*

*Demostración.* Sabemos por la Proposición 2.4.8 que, $f_y = g_x$, además, de la hipótesis,

$$0 = F = f_x f_y + g_x g_y = f_x g_x + g_x g_y = g_x(f_x + g_y)$$

lo cual garantiza que, $f_x + g_y = 0$. Por lo cual tenemos,

$$|\nabla_0 f|^2 \;=\; f_x^2 + f_y^2 = (-g_y)^2 + g_x^2 = |\nabla_0 g|^2.$$

Por la Proposición 2.1.2 y teniendo en cuenta que,

$$|\nabla_0 f|^2 |\nabla_0 g|^2 = (f_x^2 + f_y^2)((-g_y)^2 + g_x^2) = ((-g_y)^2 + g_x^2)^2 = (f_x g_y - g_x^2)^2,$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} |e_4^T|^2 &= \frac{|\nabla_0 g|^2 + (f_x g_y - g_x^2)^2}{1 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2 + (f_x g_y - g_x^2)^2} = \frac{|\nabla_0 g|^2 + |\nabla_0 f|^2 |\nabla_0 g|^2}{1 + |\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 g|^2 + |\nabla_0 f|^2 |\nabla_0 g|^2} \\ &= \frac{|\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 f|^4}{1 + 2|\nabla_0 f|^2 + |\nabla_0 f|^4}. \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a la ecuación,

$$(|e_4^T|^2 - 1)|\nabla_0 f|^4 + (2|e_4^T|^2 - 1)|\nabla_0 f|^2 + |e_4^T|^2 = 0,$$

al resolverla,

$$|\nabla_0 f|^2 = \frac{-(2|e_4^T|^2 - 1) \pm \sqrt{(2|e_4^T|^2 - 1)^2 - 4(|e_4^T|^2 - 1)|e_4^T|^2}}{2(|e_4^T|^2 - 1)} = \frac{-2|e_4^T|^2 + 1 \pm 1}{2(|e_4^T|^2 - 1)},$$

en otras palabras, las soluciones son $|\nabla_0 f|^2 = -1$, solución que no es posible, o,

$$|\nabla_0 f|^2 = \frac{-|e_4^T|^2}{|e_4^T|^2 - 1} = \frac{|e_4^T|^2}{1 - |e_4^T|^2},$$

esto es,

$$|\nabla_0 f| = |\nabla_0 g| = \frac{|e_4^T|}{\sqrt{1 - |e_4^T|^2}}.$$

Ya que la superficie $M$ es de ángulo constante respecto a $e_4$ tenemos que la magnitud $|e_4^T|$ es constante, por lo que $f$ y $g$ son funciones eikonales.

Por otro lado, al derivar las ecuaciones, $f_x = -g_y$, y $f_y = g_x$ respecto a las variables $x$ e $y$ respectivamente, y comparar se tiene,

$$f_{xx} = -g_{xy} = -g_{yx} = -f_{yy}, \quad g_{xx} = f_{yx} = f_{xy} = -g_{yy}.$$

Estas últimas dos ecuaciones son equivalentes a, $\Delta_0 f = 0$ y $\Delta_0 g = 0$. Se sigue de la Proposición 2.4.14 que $f$ y $g$ son funciones afines, y por tanto, $M$ es un abierto de un plano. $\square$

**Corolario 2.4.19.** *Sea $M$ una superficie Lagrangiana con parametrización $\phi_i$, $i = 1, 2, 3$. Entonces la curvatura queda determinada por,*

$$\begin{aligned}(EG-F^2)^3K &= (\langle\phi_{xx}, J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle - \langle\phi_{xy}, J\phi_x\rangle^2)G \\ &\quad -(\langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle - \langle\phi_{xy}, J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy}, J\phi_x\rangle)F \\ &\quad +(\langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy}, J\phi_y\rangle - \langle\phi_{xy}, J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy}, J\phi_y\rangle)E.\end{aligned}$$

*Demostración.* Para calcular la curvatura utilizamos la ecuación de Gauss, esto es

$$K = \frac{\langle h(\phi_x, \phi_x), h(\phi_y, \phi_y)\rangle - \langle h(\phi_x, \phi_y), h(\phi_x, \phi_y)\rangle}{EG-F^2},$$

para esto calculamos por separado cada sumando, primero $\langle h(\phi_x, \phi_x), h(\phi_y, \phi_y)\rangle$ utilizando la Proposición 2.4.7

$$\begin{aligned}\langle h(\phi_x, \phi_x), h(\phi_y, \phi_y)\rangle &= \frac{(\langle\phi_{xx}, J\phi_x\rangle G - \langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle F)(\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle G - \langle\phi_{yy}, J\phi_y\rangle F)E}{(EG-F^2)^2} \\ &\quad + \frac{(\langle\phi_{xx}, J\phi_x\rangle G - \langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle F)(-\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle F + \langle\phi_{yy}, J\phi_y\rangle E)F}{(EG-F^2)^2} \\ &\quad + \frac{(-\langle\phi_{xx}, J\phi_x\rangle F + \langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle E)(\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle G - \langle\phi_{yy}, J\phi_y\rangle F)F}{(EG-F^2)^2} \\ &\quad + \frac{(-\langle\phi_{xx}, J\phi_x\rangle F + \langle\phi_{xx}, J\phi_y\rangle E)(-\langle\phi_{yy}, J\phi_x\rangle F + \langle\phi_{yy}, J\phi_y\rangle E)G}{(EG-F^2)^2},\end{aligned}$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
(EG-F)^2\left\langle h(\phi_x,\phi_x),h(\phi_y,\phi_y)\right\rangle &= \langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle(G^2E-2GF^2+F^2G)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle(-GFE+2GEF-FEG)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle(-GFE+F^3-EFG+EFG)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle(F^2E-F^2E-F^2E+E^2G)\\
&= \langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle G(EG-F^2)\\
&-\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle F(GE-F^2)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle E(EG-F^2),
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
(EG-F)^2\left\langle h(\phi_x,\phi_y),h(\phi_x,\phi_y)\right\rangle &= \langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle(G^2E-2GF^2+F^2G)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle(-GFE+2GEF-FEG)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle(-GFE+F^3-EFG+EFG)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle(F^2E-F^2E-F^2E+E^2G)\\
&= \langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle G(EG-F^2)\\
&-\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle F(GE-F^2)\\
&+\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle E(EG-F^2).
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\left\langle h(\phi_x,\phi_y),h(\phi_x,\phi_y)\right\rangle &= \frac{(\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle G-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle F)(\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle G-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle F)E}{(EG-F^2)^2}\\
&+\frac{(\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle G-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle F)(-\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle F+\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle E)F}{(EG-F^2)^2}\\
&+\frac{(-\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle F+\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle E)(\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle G-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle F)F}{(EG-F^2)^2}\\
&+\frac{(-\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle F+\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle E)(-\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle F+\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle E)G}{(EG-F^2)^2},
\end{aligned}
$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}(EG-F)^2\langle h(\phi_x,\phi_y),h(\phi_x,\phi_y)\rangle &= \langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle G(EG-F^2)\\ &\quad -\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle F(GE-F^2)\\ &\quad +\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle E(EG-F^2),\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(EG-F^2)^2K &= (\langle\phi_{xx},J\phi_x\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle-\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle)G\\ &\quad -(\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_x\rangle-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_x\rangle)F\\ &\quad +(\langle\phi_{xx},J\phi_y\rangle\langle\phi_{yy},J\phi_y\rangle-\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle\langle\phi_{xy},J\phi_y\rangle)E.\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

**Corolario 2.4.20.** *Sea $M$ una superficie Lagrangiana con parametrización $\phi_2$ y de ángulo constante respecto a $e_4$. Si $f_x = g_y$ entonces $M$ es plana.*

*Demostración.* De la igualdad $f_x = g_y$ y $f_y = g_x$ tenemos que $E = G$, además de la siguiente relación, que se obtiene al derivar $f_x = g_y$ y $f_y = g_x$ respecto a $x$ e $y$ respectivamente,

$$f_{yy} = g_{xy} = g_{yx} = f_{xx},$$

análogamente $g_{xx} = f_{xy} = g_{yy}$, de aquí, sustituyendo en la fórmula de la curvatura,

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(Edet(Hess(g))+Gdet(Hess(f))-Fdet\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ g_{xy} & g_{yy}\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{D^2}\left(E(g_{xx}^2-g_{xy}^2)+E(f_{xx}-f_{xy}^2)\right)\\ &= \frac{1}{D^2}\left(E(f_{xy}^2-f_{xx}^2)+E(f_{xx}-f_{xy}^2)\right)=0.\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 12.** *Sea $M$ un cilindro $(x, f(x), y, my + c)$. Entonces $M$ es Lagrangiana y de ángulo constante respecto a $e_4$. Además la función $\langle Z^T, JZ^\perp\rangle$ no es una función constante.*

*Demostración.* En este caso particular tenemos $f_y = 0 = g_x$, es decir, $M$ es Lagrangiana pues satisface la condición dada en la Proposición 2.4.8. Con lo cual $E = 1+f_x^2$, $G = 1+g_y^2 = 1+m^2$ y $F = 0$, por la Proposición 2.4.13 tenemos que

$$|e_4^T|^2 = \frac{g_y^2 + (g_y f_x)^2}{1 + f_x^2 + g_y^2 + (g_y f_x)^2} = \frac{m^2(1+f_x^2)}{1+f_x^2+m^2(1+f_x^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}.$$

Esto garantiza que $M$ es de ángulo constante respecto a $e_4$. Para lo último, tenemos

$$\langle Z^T, JZ^\perp \rangle = -mE,$$

el cual es constante, si y sólo si, $E$ es constante. $E$ es constante, si y sólo si $f$ es lineal, esto es, si y sólo si $M$ es un plano. $\square$

# Capítulo 3

# Variedad de Sekigawa

## 3.1. Métrica y estructura casi compleja de Sekigawa.

La variedad nearly Kaehler que estudiaremos en el resto de la tesis es propuesta por K. Sekigawa a E. Abbena y S. Garbiero en [1, Ejem. 3], en el artículo muestran que este es, en efecto, una variedad nearly Kaehler y Einstein. Aquí se utilizarán otras técnicas para probar esto.

En este capítulo, supondremos que $G$ es un grupo de Lie con métrica bi-invariante $g$. Denotamos su álgebra de Lie con $\mathfrak{g}$ y su conexión de Levi-Civita por $\nabla$.

**Definición 3.1.1.** *En el grupo de Lie producto $G \times G$ definimos y denotamos, los vectores vertical y horizontal, en $T_{(e,e)}(G \times G)$ respectivamente por,*

$$X^v := (0, X), \quad X^h := \left( \frac{2}{\sqrt{3}} X, \frac{1}{\sqrt{3}} X \right),$$

*para cada vector $X \in T_e G$.*

**Proposición 3.1.2.** *Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base de $T_e G$. Entonces el conjunto,*

$$\{X_1^h, X_2^h, \ldots, X_n^h, X_1^v, X_2^v, \ldots, X_n^v\},$$

*es una base para $T_{(e,e)}(G \times G)$.*

*Demostración.* Sea $(X, Y) \in T_{(e,e)}(G \times G)$. Ya que $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base de $T_e G$, existen escalares, $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$, tales que, $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ y $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$. Por un lado, primero,

$$\begin{aligned} X^h = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i, \frac{1}{\sqrt{3}}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i (X_i)^h. \end{aligned}$$

Después, de manera análoga,

$$Y^v = (0, Y) = \left(0, \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i (X_i)^v.$$

El caso $X^v = \sum_{i=1}^{n} a_i (X_i)^v$ es idéntico. Por otro lado, se sigue de un cálculo directo que,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v + Y^v &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right) - \frac{1}{2}(0, X) + (0, Y) \\ &= \left(X, \frac{1}{2}X\right) - \left(0, \frac{1}{2}X\right) + (0, Y) = (X, Y). \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$(X, Y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i)^h + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i)^v + \sum_{i=1}^{n} b_i (X_i)^v.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Definición 3.1.3.** *Definimos el producto interior $\langle , \rangle : T_{(e,e)}(G \times G) \to \mathbb{R}$, para cada $X, Y \in T_e G$ por medio de las siguientes ecuaciones,*

$$\left\langle X^h, Y^h \right\rangle := g(X, Y),\ \left\langle X^v, Y^h \right\rangle = \left\langle X^h, Y^v \right\rangle := 0,\ \left\langle X^v, Y^v \right\rangle := g(X, Y).$$

**Definición 3.1.4.** *Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, definimos los campos horizontal y vertical en el grupo de Lie producto $G \times G$ como,*

$$X^h(p, q) := \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p), \frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right), \quad X^v(p, q) := (0, X(q)),$$

*respectivamente.*

**Proposición 3.1.5.** *Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, un marco de campos invariantes izquierdos de $G$. Entonces el conjunto,*

$$\{X_1^h, X_2^h, \ldots, X_n^h, X_1^v, X_2^v, \ldots, X_n^v\},$$

*es un marco de campos invariantes izquierdos en la variedad producto $G \times G$. A este marco le llamaremos marco de Sekigawa.*

*Demostración.* Para cualquier punto $(p,q) \in G \times G$, denotamos la traslación por la izquierda por $(p,q)$ como $\mathcal{L}_{(p,q)}$, la que se define por la regla de correspondencia,

$$\mathcal{L}_{(p,q)}(r,s) := (L_p(r), L_q(s)),$$

para cualquier $(r,s) \in G \times G$, donde $L_p$ y $L_q$ son las traslaciones izquierdas del grupo $G$. Como consecuencia para cualquier campo $(X,Y) \in \mathfrak{X}(G \times G)$,

$$d\mathcal{L}_{(p,q)}|_{(r,s)}(X(r), Y(s)) = (dL_p|_r(X(r)), dL_q|_s(Y(s))).$$

Probaremos que los campos $X_i^h$, $X_i^v$ son campos invariantes izquierdos en el grupo de Lie producto $G \times G$,

$$\begin{aligned}
d\mathcal{L}_{(p,q)}|_{(r,s)}(X_i^h(r,s)) &= d\mathcal{L}_{(p,q)}|_{(r,s)}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i(r), \frac{1}{\sqrt{3}}X_i(s)\right) \\
&= \left(dL_p|_r\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i(r)\right), dL_q|_s\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X_i(s)\right)\right) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i(L_p(r)), \frac{1}{\sqrt{3}}X_i(L_q(s))\right) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i, \frac{1}{\sqrt{3}}X_i\right) \circ \mathcal{L}_{(p,q)}(r,s) = X_i^h \circ \mathcal{L}_{(p,q)}(r,s),
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
d\mathcal{L}_{(p,q)}|_{(r,s)}(X_i^v(r,s)) &= d\mathcal{L}_{(p,q)}|_{(r,s)}(0, X_i(s)) \\
&= (0, dL_q|_s(X_i(s))) = (0, X_i(L_q(s))) \\
&= (0, X_i) \circ \mathcal{L}_{(p,q)}(r,s) = X_i^v \circ \mathcal{L}_{(p,q)}(r,s).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para probar que es un marco local, de las hipótesis se sabe que existen funciones, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, $b_1$, $b_2$, …, $b_n$, tales que, $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$. Notemos primero,

$$\begin{aligned}
X^h(p,q) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p), \frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(p), \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(q)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X_i(p), \frac{1}{\sqrt{3}}X_i(q)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^h(p,q).
\end{aligned}$$

De manera similar se prueba,

$$Y^v(p,q) = (0, Y(q)) = \left(0, \sum_{i=1}^{n} b_i X_i(q)\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i^v(p,q).$$

El caso $X^v(p,q) = \sum_{i=1}^n a_i X_i^v(p,q)$ es análogo. Un cálculo directo prueba que,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}X^h(p,q) - \frac{1}{2}X^v(p,q) + Y^v(p,q) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p), \frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right) - \frac{1}{2}(0, X(q)) + (0, Y(q)) \\ &= \left(X(p), \frac{1}{2}X(q)\right) - \left(0, \frac{1}{2}X(q)\right) + (0, Y(q)) \\ &= (X(p), Y(q)).\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$(X,Y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^n a_i (X_i)^h + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i X_i^v + \sum_{i=1}^n b_i X_i^v.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Proposición 3.1.6.** *El producto interior en la Definición 3.1.3 se puede extender a una métrica en el grupo de Lie producto $G \times G$, extendiendo de manera invariante izquierda por medio de las fórmulas,*

1. $\left\langle X^h(p,q), Y^h(p,q)\right\rangle = g(X(e), Y(e))$,

2. $\left\langle X^h(p,q), Y^v(p,q)\right\rangle = 0$,

3. $\langle X^v(p,q), Y^v(p,q)\rangle = g(X(e), Y(e))$.

*Para todos los campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ , a esta métrica la llamaremos métrica de Sekigawa.*

*Demostración.* Se probó en la Proposición 3.1.5, que los campos horizontales y verticales son invariantes izquierdos, es decir, la métrica aplicado a estos campos será constante sin importar el punto de evaluación, se sigue de la Definición 3.1.3 que,

1. $\left\langle X^h(p,q), Y^h(p,q)\right\rangle = \left\langle X^h(e,e), Y^h(e,e)\right\rangle = g(X(e), Y(e))$,

2. $\left\langle X^h(p,q), Y^v(p,q)\right\rangle = \left\langle X^h(e,e), Y^v(e,e)\right\rangle = 0$,

3. $\langle X^v(p,q), Y^v(p,q)\rangle = \langle X^v(e,e), Y^v(e,e)\rangle = g(X(e), Y(e))$.

Lo que concluye la prueba. □

**Proposición 3.1.7.** *Para cualesquiera campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ se tienen las siguientes identidades,*

$$[X^v, Y^v] = [X, Y]^v,$$

$$[X^v, Y^h] = \frac{1}{\sqrt{3}}[X, Y]^v,$$

$$[X^h, Y^h] = \frac{-1}{3}[X, Y]^v + \frac{2}{\sqrt{3}}[X, Y]^h.$$

*Demostración.* Procederemos la prueba en orden de aparición, por lo tanto, si $f \in C^\infty(G \times G)$

$$\begin{aligned}
[X^v, Y^v] \cdot f &= [(0, X), (0, Y)] \cdot f = (0, X) \cdot ((0, Y) \cdot f) - (0, Y) \cdot ((0, X) \cdot f) \\
&= (0, X \cdot Y) \cdot f - (0, Y \cdot X) \cdot f \\
&= (0, (X \cdot Y) - (Y \cdot X)) \cdot f = (0, [X, Y]) \cdot f = [X, Y]^v \cdot f.
\end{aligned}$$

Para la segunda parte,

$$\begin{aligned}
[X^v, Y^h] \cdot f &= \left[(0, X), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right)\right] \cdot f \\
&= (0, X) \cdot \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right) \cdot f\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right) \cdot ((0, X) \cdot f) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(0, X \cdot Y) \cdot f - \frac{1}{\sqrt{3}}(0, Y \cdot X) \cdot f \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(0, [X, Y]) \cdot f = \frac{1}{\sqrt{3}}[X, Y]^v \cdot f.
\end{aligned}$$

Por último tenemos,

$$\begin{aligned}
[X^h, Y^h] \cdot f &= \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right)\right] \cdot f \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right) \cdot f\right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \frac{1}{\sqrt{3}}Y\right) \cdot f\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}X \cdot Y, \frac{1}{3}X \cdot Y\right) \cdot f - \left(\frac{4}{3}Y \cdot X, \frac{1}{3}Y \cdot X\right) \cdot f \\
&= \left(\frac{4}{3}[X, Y], \frac{1}{3}[X, Y]\right) \cdot f \\
&= \left(\frac{-1}{3}[X, Y]^v + \frac{2}{\sqrt{3}}[X, Y]^h\right) \cdot f.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

**Definición 3.1.8.** *En la variedad producto $G\times G$, definimos la función $J_{(e,e)}:T_{(e,e)}(G\times G)\to T_{(e,e)}(G\times G)$, de la siguiente manera, para cada $X_e\in T_eG$,*

$$J_{(e,e)}(X^v)=X^h,\;\; J_{(e,e)}(X^h)=-X^v.$$

**Proposición 3.1.9.** *La función $J_{(e,e)}$ se extiende a un tensor en $G\times G$. Este tensor esta definido por,*

$$J_{(p,q)}(X(p),Y(q))=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}Y(q)-X(p),-2dL_{qp^{-1}}X(p)+Y(q)\right). \tag{3.1}$$

*Para cada $(X,Y)\in\mathfrak{X}(G\times G)$*

*Demostración.* Sea $(X(p),Y(q))\in T_{(p,q)}(G\times G)$, aplicamos a este vector la derivada de la traslación por la izquierda de $(p^{-1},q^{-1})$,

$$d\mathcal{L}_{(p^{-1},q^{-1})}(X(p),Y(q))=(dL_{p^{-1}}X(p),dL_{q^{-1}}Y(q))\in T_{(e,e)}(G\times G),$$

a este vector aplicamos el operador $J_{(e,e)}$ de la Definición 3.1.8, y después aplicamos $d\mathcal{L}_{(p,q)}$,

$$J_{(p,q)}(X(p),Y(q))=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}Y(q)-X(p),-2dL_{qp^{-1}}X(p)+Y(q)\right),$$

con lo cual obtenemos el resultado deseado. □

**Lema 3.1.10.** *El tensor $J_{(p,q)}:T_{(p,q)}(G\times G)\to T_{(p,q)}(G\times G)$ queda determinado por las fórmulas,*

$$J_{(p,q)}(X^v(p,q))=X^h(p,q),$$

$$J_{(p,q)}(X^h(p,q))=-X^v(p,q).$$

*Demostración.* Para cualquier campo invariante izquierdo $X\in\mathfrak{X}(G)$ el tensor $J$ aplicado al campo horizontal generado por $X$ es,

$$\begin{aligned}
J_{(p,q)}(X^h(p,q)) &= J_{(p,q)}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p),\frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}X(p),-2dL_{qp^{-1}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p)-\frac{2}{\sqrt{3}}X(p),\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}X(q)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right)=-(0,X(q))\\
&= -X^v(p,q),
\end{aligned}$$

y aplicado al campo vertical generado por $X$,

$$\begin{aligned} J_{(p,q)}(X^v(p,q)) &= J_{(p,q)}(0,X(q)) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}(X(q)),X(q)\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X(p),\frac{1}{\sqrt{3}}X(q)\right) \\ &= X^h(p,q). \end{aligned}$$

Lo que termina la prueba. □

**Lema 3.1.11.** *El tensor $J$ de tipo $(1,1)$, definido en la Proposición 3.1.9, es una estructura casi compleja de la variedad producto $G \times G$.*

*Demostración.* Sea $(X,Y) \in \mathfrak{X}(G \times G)$, entonces por la Proposición 3.1.9 sabemos,

$$J_{(p,q)}(X_p,Y_q) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2dL_{pq^{-1}}Y_q - X_p, -2dL_{qp^{-1}}X_p + Y_q\right), \tag{3.2}$$

aplicamos nuevamente el operador $J$ en la ecuación anterior y obtenemos,

$$\begin{aligned} J^2_{(p,q)}(X_p,Y_q) &= \frac{1}{3}(2dL_{pq^{-1}}(-2dL_{qp^{-1}}X_p+Y_q)-(2dL_{pq^{-1}}Y_q-X_p) \\ &\quad ,-2dL_{qp^{-1}}(2dL_{pq^{-1}}Y_q-X_p)+(-2dL_{qp^{-1}}X_p+Y_q)) \\ &= \frac{1}{3}(-3X_p,-3Y_q) \\ &= -(X_p,Y_q). \end{aligned}$$

Lo que garantiza que $J$ es una estructura casi compleja. □

**Proposición 3.1.12.** *La variedad $(G \times G, J, \langle , \rangle)$, es una variedad casi Hermitiana.*

*Demostración.* Lo único que hace falta probar para que sea una variedad casi Hermitiana es, que la estructura casi compleja $J$ preserva la métrica de la Propoción 3.1.6, y esto se sigue de los siguientes cálculos,

$$\left\langle JX^h_{(p,q)}, JY^h_{(p,q)}\right\rangle = \left\langle X^v_{(p,q)}, Y^v_{(p,q)}\right\rangle = g(X_e,Y_e) = \left\langle X^h_{(p,q)}, Y^h_{(p,q)}\right\rangle,$$

$$\left\langle JX^v_{(p,q)}, JY^v_{(p,q)}\right\rangle = \left\langle X^h_{(p,q)}, Y^h_{(p,q)}\right\rangle = g(X_e,Y_e) = \left\langle X^v_{(p,q)}, Y^v_{(p,q)}\right\rangle,$$

$$\left\langle JX^v_{(p,q)}, JY^h_{(p,q)}\right\rangle = -\left\langle X^h_{(p,q)}, Y^v_{(p,q)}\right\rangle = 0 = \left\langle X^v_{(p,q)}, Y^h_{(p,q)}\right\rangle.$$

Con lo que concluimos la prueba. □

## 3.2. Conexión y curvatura

**Proposición 3.2.1.** *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos. La conexión de Levi-Civita de la variedad casi hermitiana $(G \times G, J, \langle , \rangle)$, en las partes horizontales y verticales vienen determinadas por,*

$$\begin{aligned}
D_{X^h}Y^h &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^h - \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^v, \\
D_{X^v}Y^v &= \left(\nabla_X Y\right)^v, \\
D_{X^v}Y^h &= \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h, \\
D_{X^h}Y^v &= \frac{-1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^v.
\end{aligned}$$

*A esta conexión la llamaremos conexión de Sekigawa.*

*Demostración.* Comenzamos por calcular la parte horizontal de $D_{X^h}Y^h$ en cualquier punto $(p, q) \in G \times G$, como estos campos son invariantes izquierdos los cálculos son análogos en cualquier punto, por lo tanto, en la prueba se omitirá el punto donde se están evaluando. Sea $Z \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariante izquierdo, entonces por la fórmula de Koszul del Teorema 1.1.9 se sigue,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^h}Y^h, Z^h\right\rangle &= -\left\langle [Y^h, Z^h], X^h\right\rangle - \left\langle [X^h, Z^h], Y^h\right\rangle - \left\langle [Y^h, X^h], Z^h\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{2}{\sqrt{3}}[Y, Z]^h, X^h\right\rangle - \left\langle \frac{2}{\sqrt{3}}[X, Z]^h, Y^h\right\rangle - \left\langle \frac{2}{\sqrt{3}}[Y, X]^h, Z^h\right\rangle \\
&= -g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}[Y, Z], X\right) - g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}[X, Z], Y\right) - g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}[Y, X], Z\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}(-g\left(Y, [Z, X]\right) - g\left([X, Z], Y\right) - g\left([Y, X], Z\right)) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}g\left([X, Y], Z\right)).
\end{aligned}$$

De la Proposición 1.3.20 podemos concluir,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}g\left([X, Y], Z\right)) = \frac{2}{\sqrt{3}}2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\left\langle (\nabla_X Y)^h, Z^h\right\rangle.$$

Ahora, para obtener la parte vertical, se procede de la misma manera,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^h}Y^h, Z^v\right\rangle &= -\left\langle [Y^h, Z^v], X^h\right\rangle - \left\langle [X^h, Z^v], Y^h\right\rangle - \left\langle [Y^h, X^h], Z^v\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{3}[Y, X]^v, Z^v\right\rangle = -g\left(\frac{1}{3}[X, Y], Z\right) = \frac{-1}{3}\left(2g\left(\nabla_X Y, Z\right)\right) \\
&= \frac{-2}{3}\left\langle (\nabla_X Y)^v, Z^v\right\rangle.
\end{aligned}$$

De estos dos cálculos tenemos que,

$$D_{X^h}Y^h = \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v.$$

Calculamos la parte horizontal de $D_{X^v}Y^v$,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^v}Y^v, Z^h\right\rangle &= -\left\langle [Y^v, Z^h], X^v\right\rangle - \left\langle [X^v, Z^h], Y^v\right\rangle - \left\langle [Y^v, X^v], Z^h\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z]^v, X^v\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z]^v, Y^v\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z]^v, X^v\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z]^v, Y^v\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X]^v, Z^v\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X]^v, Z^v\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-g([Y,Z],X) - g([X,Z],Y) - g([Y,X],Z)\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X], Z\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}g(\nabla_X Y, Z) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[X,Y], Z\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}g(\nabla_X Y, Z) - \frac{2}{\sqrt{3}}g(\nabla_X Y, Z) = 0,
\end{aligned}$$

y la parte vertical es,

$$\begin{aligned}
2\langle D_{X^v}Y^v, Z^v\rangle &= -\langle [Y^v, Z^v], X^v\rangle - \langle [X^v, Z^v], Y^v\rangle - \langle [Y^v, X^v], Z^v\rangle \\
&= -\langle [Y,Z]^v, X^v\rangle - \langle [X,Z]^v, Y^v\rangle - \langle [Y,X]^v, Z^v\rangle \\
&= -g([Y,Z],X) - \langle [X,Z], Y\rangle - \langle [Y,X], Z\rangle \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) = 2\langle (\nabla_X Y)^v, Z^v\rangle.
\end{aligned}$$

Así,

$$D_{X^v}Y^v = (\nabla_X Y)^v.$$

Calculamos ahora la parte horizontal de $D_{X^v}Y^h$,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^v}Y^h, Z^h\right\rangle &= -\left\langle [Y^h, Z^h], X^v\right\rangle - \left\langle [X^v, Z^h], Y^h\right\rangle - \left\langle [Y^h, X^v], Z^h\right\rangle \\
&= \frac{1}{3}\langle [Y,Z]^v, X^v\rangle = \frac{1}{3}g([Y,Z],X) = \frac{-1}{3}g([Y,X],Z) \\
&= \frac{1}{3}g([X,Y],Z) = \frac{2}{3}g(\nabla_X Y, Z) = \frac{2}{3}\left\langle [X,Y]^h, Z^h\right\rangle,
\end{aligned}$$

mientras la parte vertical queda determinada por,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^v}Y^h, Z^v\right\rangle &= -\left\langle [Y^h, Z^v], X^v\right\rangle - \left\langle [X^v, Z^v], Y^h\right\rangle - \left\langle [Y^h, X^v], Z^v\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z]^v, X^v\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X]^v, Z^v\right\rangle \\
&= -g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z], X\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X], Z\right) \\
&= -g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z], X\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z], Y\right) g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X], Z\right) \\
&\quad +g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z], Y\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} g\left(\nabla_X Y, Z\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} g\left([X,Y], Z\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} g\left(\nabla_X Y, Z\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} g\left(\nabla_X Y, Z\right) = 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$D_{X^v}Y^h = \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h.$$

Por último, calculamos la parte horizontal de $D_{X^h}Y^v$,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^h}Y^v, Z^h\right\rangle &= -\left\langle [Y^v, Z^h], X^h\right\rangle - \left\langle [X^h, Z^h], Y^v\right\rangle - \left\langle [Y^v, X^h], Z^h\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{3}[X,Z]^v, Y^v\right\rangle = g\left(\frac{1}{3}[X,Z], Y\right) = -g\left(\frac{1}{3}[X,Y], Z\right) \\
&= -\frac{2}{3} g\left(\nabla_X Y, Z\right) = -\frac{2}{3}\left\langle (\nabla_X Y)^h, Z^h\right\rangle,
\end{aligned}$$

y su parte vertical es,

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_{X^h}Y^v, Z^v\right\rangle &= -\left\langle [Y^v, Z^v], X^h\right\rangle - \left\langle [X^h, Z^v], Y^v\right\rangle - \left\langle [Y^v, X^h], Z^v\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z]^v, Y^v\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X]^v, Z^v\right\rangle \\
&= -g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z], X\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[X,Z], Y\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X], Z\right) \\
&\quad +g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,Z], X\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} g\left(\nabla_X Y, Z\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}[Y,X], Z\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\langle (\nabla_X Y)^v, Z^v\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}\left\langle (\nabla_X Y)^v, Z^v\right\rangle \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\left\langle (\nabla_X Y)^v, Z^v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$D_{X^h}Y^v = \frac{-1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^v.$$

Con lo que concluimos la prueba. □

**Teorema 3.2.2.** *La variedad casi Hermitiana $(G \times G, J, \langle , \rangle)$ es una variedad nearly Kaehler, llamada variedad de Sekigawa.*

*Demostración.* Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos. Probaremos que $\mathcal{G}(X,Y)$ es antisimétrico. De manera obvia, $\mathcal{G}(X^h, X^h) = \mathcal{G}(X^v, X^v) = \mathcal{G}(X^h, X^v) = 0$, ya que, todos estos valores quedan en términos de corchetes de Lie de iguales entradas. Sólo falta probar,

$$\mathcal{G}(X^h, Y^v) = -\mathcal{G}(Y^v, X^h),\ \mathcal{G}(X^v, Y^v) = -\mathcal{G}(X^v, Y^v),\ \mathcal{G}(X^h, Y^h) = -\mathcal{G}(Y^h, X^h).$$

Calculamos primero el lado izquierdo de la primer igualdad,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X^h, Y^v) &= D_{X^h}J(Y)^v - JD_{X^h}(Y)^v = D_{X^h}(Y)^h - J\left(\frac{-1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^v\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^h - \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^v - \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^v - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^h = \frac{-2}{3}\left(\nabla_X Y\right)^v.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(Y^v, X^h) &= D_{Y^v}J(X)^h - JD_{Y^v}(X)^h = -D_{Y^v}(X)^v - \frac{1}{3}J\left(\nabla_Y X\right)^h\\ &= -D_{Y^v}(X)^v + \frac{1}{3}\left(\nabla_Y X\right)^v = -\left(\nabla_Y X\right)^v + \frac{1}{3}\left(\nabla_Y X\right)^v = \frac{-2}{3}\left(\nabla_Y X\right)^v.\end{aligned}$$

En los otras dos igualdades por orden de aparición tenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X^v, Y^v) &= D_{X^v}J(Y)^v - JD_{X^v}(Y)^v = D_{X^v}(Y)^h - J\left(\nabla_X Y\right)^v\\ &= \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h - \left(\nabla_X Y\right)^h = \frac{-2}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(Y^v, X^v) &= D_{Y^v}J(X)^v - JD_{Y^v}(X)^v = D_{Y^v}(X)^h - J\left(\nabla_Y X\right)^v\\ &= \frac{1}{3}\left(\nabla_Y X\right)^h - \left(\nabla_Y X\right)^h = \frac{-2}{3}\left(\nabla_Y X\right)^h.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X^h, Y^h) &= D_{X^h}J(Y)^h - JD_{X^h}(Y)^h = -D_{X^h}(Y)^v - J\left(\frac{-1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^v + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^h\right)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^v + \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h + \frac{1}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_X Y\right)^v = \frac{2}{3}\left(\nabla_X Y\right)^h.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(Y^h, X^h) &= D_{Y^h}J(X)^h - JD_{Y^h}(X)^h = -D_{Y^h}(X)^v - J\left(\frac{-1}{3}(\nabla_Y X)^v + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y X)^h\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y X)^v + \frac{1}{3}(\nabla_Y X)^h + \frac{1}{3}(\nabla_Y X)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y X)^v = \frac{2}{3}(\nabla_Y X)^h .\end{aligned}$$

Ahora, de la Proposición 1.3.20, se sigue $2\nabla_X Y = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, en otras palabras,

$$\nabla_X Y = -\nabla_Y X.$$

Así, por ejemplo,

$$\mathcal{G}(X^h, Y^v) = \frac{-2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v = \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y X)^v = -\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y X)^v\right) = -\mathcal{G}(Y^v, X^h).$$

En el resto de las ecuaciones se procede de la misma manera. Concluimos entonces que la variedad $(G \times G, J, \langle , \rangle)$ es una variedad nearly Kaehler. $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos. La curvatura de la variedad de Sekigawa en los campos horizontales y verticales en la variedad de Sekigawa viene dada por las siguientes fórmulas,*

$$R_{X^vY^v}Z^v = \frac{1}{4}\left([[X, Y], Z]\right)^v, \; R_{X^vY^v}Z^h = \frac{5}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^h,$$

$$R_{X^hY^h}Z^h = \frac{1}{4}\left([[X, Y], Z]\right)^h, \; R_{X^hY^h}Z^v = \frac{5}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^v,$$

$$\begin{aligned}R_{X^vY^h}Z^h &= \frac{1}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^v + \frac{2}{36}\left([X, [Y, Z]]\right)^v, \\ R_{X^hY^v}Z^h &= \frac{1}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^v - \frac{2}{36}\left([Y, [X, Z]]\right)^v, \\ R_{X^hY^v}Z^v &= \frac{1}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^h + \frac{2}{36}\left([X, [Y, Z]]\right)^h, \\ R_{X^vY^h}Z^v &= \frac{1}{36}\left([[X, Y], Z]\right)^h - \frac{2}{36}\left([Y, [X, Z]]\right)^h .\end{aligned}$$

*Demostración.* Sabemos de la Proposición 1.1.11,

$$\langle R_{XY}Z, W\rangle = \langle R_{JXJY}JZ, JW\rangle ,$$

esto reduce los cálculos considerablemente, ya que, tenemos por ejemplo,

$$\left\langle R_{X^hY^h}Z^h, W^h\right\rangle = -\left\langle R_{X^vY^v}Z^v, W^v\right\rangle ,$$

$$\left\langle R_{X^hY^h}Z^h, W^v\right\rangle = \left\langle R_{X^vY^v}Z^v, W^h\right\rangle ,$$

es decir, salvo un signo, tienen los mismos coeficientes, por tanto, sólo calcularemos 4 de estos términos, a saber, $R_{X^vY^v}Z^v$, $R_{X^vY^v}Z^h$, $R_{X^vY^h}Z^h$ y $R_{X^vY^h}Z^v$. Vamos en orden de aparición de las ecuaciones, así con un cálculo directo, en los cuales usamos los resultados de las Proposición 3.2.1, Proposición 1.3.20 y el Lema 1.3.22,

$$\begin{aligned}
R_{X^vY^v}Z^v &= D_{[X^v,Y^v]}(Z)^v - D_{X^v}(D_{Y^v}(Z)^v) + D_{Y^v}(D_{X^v}(Z)^v) \\
&= D_{[X,Y]^v}(Z)^v - D_{X^v}((\nabla_Y Z)^v) + D_{Y^v}((\nabla_X Z)^v) \\
&= \left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^v - (\nabla_X(\nabla_Y Z))^v + (\nabla_Y(\nabla_X Z))^v \\
&= (R_{XY}Z)^v = \frac{1}{4}\left[[X,Y],Z\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{X^vY^v}Z^h &= D_{[X^v,Y^v]}(Z)^h - D_{X^v}(D_{Y^v}(Z)^h) + D_{Y^v}(D_{X^v}(Z)^h) \\
&= D_{[X,Y]^v}(Z)^h - D_{X^v}(\frac{1}{3}(\nabla_Y Z)^h) + D_{Y^v}(\frac{1}{3}(\nabla_X Z)^h) \\
&= \frac{1}{3}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h - \frac{1}{9}(\nabla_X(\nabla_Y Z))^h + \frac{1}{9}(\nabla_Y(\nabla_X Z))^h \\
&= \frac{2}{9}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h + \frac{1}{9}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h - \frac{1}{9}(\nabla_X(\nabla_Y Z))^h + \frac{1}{9}(\nabla_Y(\nabla_X Z))^h \\
&= \frac{2}{9}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h + \frac{1}{9}(R_{XY}Z)^h \\
&= \frac{2}{18}\left[[X,Y],Z\right]^h + \frac{1}{36}\left[[X,Y],Z\right]^h = \frac{5}{36}\left[[X,Y],Z\right]^h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{X^vY^h}Z^h &= D_{[X^v,Y^h]}(Z)^h - D_{X^v}(D_{Y^h}(Z)^h) + D_{Y^h}(D_{X^v}(Z)^h) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}D_{[X,Y]^v}(Z)^h - D_{X^v}(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{3}(\nabla_Y Z)^v) + D_{Y^h}((\nabla_X Z)^h) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h - \frac{2}{\sqrt{3}}D_{X^v}((\nabla_Y Z)^h) + \frac{1}{3}D_{X^v}((\nabla_Y Z)^v) + \frac{1}{3}D_{Y^h}((\nabla_X Z)^h) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h - \frac{2}{3\sqrt{3}}(\nabla_X(\nabla_Y Z))^h + \frac{1}{3}(\nabla_X(\nabla_Y Z))^v \\
&\quad + \frac{1}{3}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y(\nabla_X Z))^h - \frac{1}{3}(\nabla_Y(\nabla_X Z))^v\right) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}}(R_{XY}Z)^h - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left((\nabla_X(\nabla_Y Z))^h - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^h\right) + \frac{2}{9}(\nabla_X(\nabla_Y Z))^v \\
&\quad \frac{1}{9}((\nabla_X(\nabla_Y Z))^v - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^v) \\
&= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[[X,Y],Z\right]^h - \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[[X,Y],Z\right]^h + \frac{1}{36}\left[[X,Y],Z\right]^v + \frac{2}{36}[X,[Y,Z]]^v \\
&= \frac{1}{36}\left[[X,Y],Z\right]^v + \frac{2}{36}[X,[Y,Z]]^v.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{X^vY^h}Z^v &= D_{[X^v,Y^h]}(Z)^v - D_{X^v}(D_{Y^h}(Z)^v) + D_{Y^h}(D_{X^v}(Z)^v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}D_{[X,Y]^v}(Z)^v - D_{X^v}(\frac{-1}{3}(\nabla_Y Z)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y Z)^v) + D_{Y^h}((\nabla_X Z)^v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^v + \frac{1}{9}(\nabla_X\nabla_Y Z)^h - \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X\nabla_Y Z)^v - \frac{1}{3}(\nabla_Y\nabla_X Z)^h \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_Y\nabla_X Z)^v \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^v - 2((\nabla_X\nabla_Y Z)^v - (\nabla_Y\nabla_X Z)^v)) \\
&\quad \frac{1}{36}([X,[Y,Z]])^h - \frac{1}{12}([Y,[X,Z]])^h \\
&= -\frac{1}{36}([Z,[X,Y]])^h - \frac{1}{36}([Y,[Z,X]])^h - \frac{1}{12}([Y,[X,Z]])^h \\
&= -\frac{1}{36}([Z,[X,Y]])^h - \frac{1}{36}([Y,[X,Z]])^h - \frac{3}{36}([Y,[X,Z]])^h \\
&= \frac{1}{36}([[X,Y],Z])^h - \frac{2}{36}([Y,[X,Z]])^h.
\end{aligned}
$$

Lo que concluye la prueba. □

**Proposición 3.2.4.** *La curvatura seccional de la variedad de Sekigawa* $(G \times G, J, \langle,\rangle)$*, viene dada por,*

$$
K(X^h,Y^h) = \frac{\frac{1}{4}\left\langle [X,Y]^h,[X,Y]^h\right\rangle}{\langle X^h,X^h\rangle\langle Y^h,Y^h\rangle - \langle X^h,Y^h\rangle^2},
$$

$$
K(X^h,Y^v) = \frac{\frac{1}{36}\langle [X,Y]^v,[X,Y]^v\rangle}{\langle X^h,X^h\rangle\langle Y^v,Y^v\rangle},
$$

$$
K(X^v,Y^v) = \frac{\frac{1}{4}\langle [X,Y]^v,[X,Y]^v\rangle}{\langle X^v,X^v\rangle\langle Y^v,Y^v\rangle - \langle X^v,Y^v\rangle^2}.
$$

*Demostración.* Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos, entonces,

$$
\begin{aligned}
(\left\langle X^h,X^h\right\rangle\left\langle Y^h,Y^h\right\rangle - \left\langle X^h,Y^h\right\rangle^2)K(X^h,Y^h) &= \left\langle R_{X^hY^h}X^h,Y^h\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\langle [[X,Y],X]^h,Y^h\right\rangle = \frac{1}{4}g\left([[X,Y],X],Y\right) \\
&= \frac{1}{4}g\left([X,Y],[X,Y]\right) = \frac{1}{4}\left\langle [X,Y]^h,[X,Y]^h\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Para la segunda de ellas, tenemos,

$$
\begin{aligned}
(\left\langle X^h,X^h\right\rangle\langle Y^v,Y^v\rangle)K(X^h,Y^v) &= \left\langle R_{X^hY^v}X^h,Y^v\right\rangle \\
&= \frac{1}{36}\langle [[X,Y],X]^v,Y^v\rangle = \frac{1}{36}g\left([[X,Y],X],Y\right) \\
&= \frac{1}{36}g\left([X,Y],[X,Y]\right) = \frac{1}{36}\langle [X,Y]^v,[X,Y]^v\rangle.
\end{aligned}
$$

Por último,

$$\begin{aligned}(\langle X^v, X^v\rangle \langle Y^v, Y^v\rangle - \langle X^v, Y^v\rangle^2)K(X^v, Y^v) &= \langle R_{X^vY^v}X^v, Y^v\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle [[X,Y],X]^v, Y^v\rangle = \frac{1}{4}g\left([[X,Y],X],Y\right) \\ &= \frac{1}{4}g\left([X,Y],[X,Y]\right) = \frac{1}{4}\langle [X,Y]^v, [X,Y]^v\rangle .\end{aligned}$$

Lo que finaliza la demostración. $\square$

**Proposición 3.2.5.** *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$. La curvatura de Ricci de la variedad de Sekigawa en los campos horizontales y verticales viene dada por,*

$$Ric(X^h, Y^h) = \frac{10}{36}\sum_{j=1}^{n}\left\langle [X,E_j]^h, [Y,E_j]^h\right\rangle,$$

$$Ric(X^v, Y^v) = \frac{10}{36}\sum_{j=1}^{n}\langle [X,E_j]^v, [Y,E_j]^v\rangle,$$

$$Ric(X^h, Y^v) = 0.$$

*Demostración.* Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ un marco ortonormal para $G$, entonces sabemos por la Proposición 3.1.5 que $E_1^h, E_2^h, \ldots, E_n^h, E_1^v, E_2^v, \ldots, E_n^v$ forman un marco ortonormal para la variedad de Sekigawa, entonces los siguientes cálculos muestran, cuando se consideran ambos campos horizontales,

$$\begin{aligned}Ric(X^h, Y^h) &= \sum_{j=1}^{n}\left\langle R_{X^hE_j^h}Y^h, E_j^h\right\rangle + \sum_{j=1}^{n}\left\langle R_{X^hE_j^v}Y^h, E_j^v\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left\langle [[X,E_j],Y]^h, E_j^h\right\rangle + \sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{1}{36}[[X,E_j]Y]^v - \frac{2}{36}[E_j,[X,Y]]^v, E_i^v\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}g\left([[X,E_j],Y],E_j\right) + \sum_{j=1}^{n}g\left(\frac{1}{36}[[X,E_j],Y] - \frac{2}{36}[E_j,[X,Y]],E_i\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}g\left([X,E_j],[Y,E_j]\right) + \frac{1}{36}\sum_{j=1}^{n}g\left([X,E_j],[Y,E_j]\right) \\ &\quad + \frac{2}{36}\sum_{j=1}^{n}g\left([E_j,E_j],[X,Y]\right) \\ &= \frac{10}{36}\sum_{j=1}^{n}g\left([X,E_j],[Y,E_j]\right) = \frac{10}{36}\sum_{j=1}^{n}\left\langle [X,E_j]^h, [Y,E_j]^h\right\rangle .\end{aligned}$$

Cuando se considera un campo vertical y el otro horizontal,

$$
\begin{aligned}
Ric(X^v, Y^h) &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle R_{X^v E_j^h} Y^h, E_j^h \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left\langle R_{X^v E_j^v} Y^h, E_j^v \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{1}{36}[[X, E_j], Y]^v + \frac{2}{36}[X, [E_j, Y]]^v, E_j^h \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{5}{36}[[X, E_j], Y]^h, E_j^v \right\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Por último, si consideramos ambos campos verticales,

$$
\begin{aligned}
Ric(X^v, Y^v) &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle R_{X^v E_j^h} Y^v, E_j^h \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left\langle R_{X^v E_j^v} Y^v, E_j^v \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{1}{36}[[X, E_j], Y]^h - \frac{2}{36}[E_j, [X, Y]]^h, E_j^h \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{1}{4}[[X, E_j], Y]^v, E_j^v \right\rangle \\
&= \frac{10}{36} \sum_{j=1}^{n} g\left([X, E_j], [Y, E_j]\right) = \frac{10}{36} \sum_{j=1}^{n} \left\langle [X, E_j]^v, [Y, E_j]^v \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

**Corolario 3.2.6.** *Si el grupo $G$ es una variedad de Einstein, entonces la variedad de Sekigawa es de Einstein.*

*Demostración.* Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos, entonces como $G$ es Einstein,

$$
\sum_{i=1}^{n} g\left([X, E_i], [Y, E_i]\right) = Ric_G(X, Y) = \frac{1}{4} g\left(X, Y\right).
$$

Entonces, según los cálculos de la Proposición 3.2.5 tenemos,

$$
Ric(X^h, Y^h) = \frac{10}{36} \sum_{j=1}^{n} g\left([X, E_j], [Y, E_j]\right) = \frac{10}{36} Ric_G(X, Y) = \frac{10}{36}(\frac{1}{4} g\left(X, Y\right)) = \frac{5}{72} \left\langle X^h, Y^h \right\rangle ,
$$

De igual manera tenemos,

$$
Ric(X^v, Y^v) = \frac{10}{36} \sum_{j=1}^{n} g\left([X, E_j], [Y, E_j]\right) = \frac{10}{36} Ric_G(X, Y) = \frac{5}{72} \sum_{j=1}^{n} \left\langle X^v, Y^v \right\rangle .
$$

Y de una manera más sencilla,

$$
Ric(X^h, Y^v) = 0 = \frac{5}{72} \left\langle X^h, Y^h \right\rangle .
$$

Lo que termina la prueba. $\square$

**Proposición 3.2.7.** *La curvatura escalar de la variedad Sekigawa $(G \times G, J, \langle , \rangle)$, es,*

$$
S = \frac{10}{36} dim(G).
$$

*Demostración.* Sea $E_1$, $E_2, \ldots, E_n$ un marco ortonormal para $G$, entonces $E_1^h$, $E_2^h, \ldots, E_n^h$, $E_1^v$, $E_2^v, \ldots, E_n^v$ es un marco ortonormal para $G \times G$,. Por medio del siguiente cálculo obtenemos,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} Ric(E_k^h, E_k^h) + \sum_{k=1}^{n} Ric(E_k^v, E_k^v) \\ &= \frac{10}{36} \sum_{j,k=1}^{n} |[E_k, E_j]|^2 + \frac{10}{36} \sum_{j,k=1}^{n} |[E_k, E_j]|^2 \\ &= \frac{5}{9} \sum_{j,k=1}^{n} |[E_k, E_j]|^2. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

**Lema 3.2.8.** *La curvatura seccional de un plano casi complejo $\Omega$ generado por los vectores unitarios $\overline{X} = (X_1, X_2), J\overline{X}$ esta dada por*

$$K(\Omega) = \frac{2}{3}|[X_1, X_2]|^2.$$

*Demostración.* Nótese primero que,

$$J\overline{X} = J\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_1^h - \frac{1}{2}X_1^v + X_2^v\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}X_1^v - \frac{1}{2}X_1^h + X_2^h$$

de aquí tenemos que,

$$\begin{aligned}
R_{XJX}X &= R_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_1^h-\frac{1}{2}X_1^v+X_2^v\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}X_1^v-\frac{1}{2}X_1^h+X_2^h\right)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_1^h-\frac{1}{2}X_1^v+X_2^v\right)\\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{8}R_{X_1^hX_1^v}X_1^h+\frac{3}{8}R_{X_1^hX_1^v}X_1^v-\frac{3}{4}R_{X_1^hX_1^v}X_2^v-\frac{3}{8}R_{X_1^hX_1^h}X_1^h+\frac{\sqrt{3}}{8}R_{X_1^hX_1^h}X_1^v\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_1^hX_1^h}X_2^v+\frac{3}{4}R_{X_1^hX_2^h}X_1^h-\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_1^hX_2^h}X_1^v+\frac{\sqrt{3}}{2}R_{X_1^hX_2^h}X_2^v+\frac{3}{8}R_{X_1^vX_1^v}X_1^h\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{8}R_{X_1^vX_1^v}X_1^v+\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_1^vX_1^v}X_2^h+\frac{\sqrt{3}}{8}R_{X_1^vX_1^h}X_1^h-\frac{1}{8}R_{X_1^vX_1^h}X_1^v+\frac{1}{4}R_{X_1^vX_1^h}X_2^v\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_1^vX_2^h}X_1^h+\frac{1}{4}R_{X_1^vX_2^h}X_1^v-\frac{1}{2}R_{X_1^vX_2^h}X_2^v-\frac{3}{4}R_{X_2^vX_1^v}X_1^h+\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_2^vX_1^v}X_1^v\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{X_2^vX_1^v}X_2^v-\frac{\sqrt{3}}{4}R_{X_2^vX_1^h}X_1^h+\frac{1}{4}R_{X_2^vX_1^h}X_1^v-\frac{1}{2}R_{X_2^vX_1^h}X_2^v+\frac{\sqrt{3}}{2}R_{X_2^vX_2^h}X_1^h\\
&\quad -\frac{1}{2}R_{X_2^vX_2^h}X_1^v+R_{X_2^vX_2^h}X_2^v\\
&= -\frac{3}{4}\frac{2}{36}\left[X_1,[X_1,X_2]\right]^h+\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^v+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{5}{36}\left[[X_1,X_2],X_2\right]^v\\
&\quad -\frac{1}{4}\frac{2}{36}\left[X_1,[X_1,X_2]\right]^h-\frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{1}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^v+\frac{2}{36}\left[X_1,[X_2,X_1]\right]^v\Big)\\
&\quad +\frac{1}{4}\frac{1}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{36}\left[[X_1,X_2],X_2\right]^h-\frac{2}{36}\left[X_2,[X_1,X_2]\right]^h\Big)\\
&\quad -\frac{3}{4}\frac{5}{36}\left[[X_2,X_1],X_1\right]^h+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{4}\left[[X_2,X_1],X_1\right]^v-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4}\left[[X_2,X_1],X_2\right]^v\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{36}\left[[X_2,X_1],X_1\right]^v+\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{36}\left[[X_2,X_1],X_1\right]^h-\frac{2}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{1}{36}\left[[X_2,X_1],X_2\right]^h+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{36}\left[X_2,[X_2,X_1]\right]^v+\frac{1}{2}\frac{2}{36}\left[X_2,[X_2,X_1]\right]^h\\
&= \frac{12}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h+\sqrt{3}\left(\frac{-4}{36}\left[[X_1,X_2],X_1\right]^v+\frac{8}{36}\left[[X_1,X_2],X_2\right]^v\right).
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\Big\langle R_{XJX}X,JX\Big\rangle &= -\frac{12}{72}\Big\langle\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h,X_1^h\Big\rangle+\frac{12}{36}\Big\langle\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h,X_2^h\Big\rangle\\
&\quad +\frac{12}{72}\Big\langle\left[[X_1,X_2],X_1\right]^h,X_1^v\Big\rangle-\frac{24}{72}\left\langle\left[[X_1,X_2],X_2\right]^v,X_1^v\right\rangle\\
&= \frac{12}{36}g\left([X_1,X_2],[X_1,X_2]\right)-\frac{12}{36}g\left([X_1,X_2],[X_2,X_1]\right)\\
&= \frac{12}{36}g\left([X_1,X_2],[X_1,X_2]\right)+\frac{12}{36}g\left([X_1,X_2],[X_1,X_2]\right)\\
&= \frac{2}{3}|[X_1,X_2]|^2.
\end{aligned}$$

$\square$

## 3.3. El operador $P$

**Definición 3.3.1.** *En la variedad de Sekigawa, definimos el operador $P : T(G\times G) \to T(G\times G)$ por medio de la ecuación,*

$$P_{(p,q)}(X(p), Y(q)) = (dL_{pq^{-1}}Y(q), dL_{qp^{-1}}X(p)).$$

**Observación 4.** En el caso particular de $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ son campos invariantes izquierdos,

$$P_{(p,q)}(X(p), Y(q)) = (Y(p), X(q)).$$

*Notación* 3. A la variedad $G\times G$ se le puede asignar la métrica producto, y por tanto la conexión producto. A estas las denotaremos por medio de $h(,)$ y $D^E$, respectivamente

**Corolario 3.3.2.** *La relación entre la métrica producto $h$ y la métrica de Sekiagawa $\langle,\rangle$, viene dada por,*

$$\left\langle \overline{X}, \overline{U} \right\rangle = h\left(\overline{X}, \overline{U}\right) - \frac{1}{2}h\left(\overline{X}, P\overline{U}\right), \tag{3.3}$$

*donde $\overline{X}, \overline{U} \in \mathfrak{X}(G\times G)$ son campos invariantes izquierdos.*

*Demostración.* De un cálculo directo tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle (X,Y),(U,V)\rangle &= \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v + Y^v, \frac{\sqrt{3}}{2}U^h - \frac{1}{2}U^v + V^v \right\rangle \\
&= \frac{3}{4}\left\langle X^h, U^h\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle X^v, U^v\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle X^v, V^v\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle Y^v, U^v\right\rangle + \left\langle Y^v, V^v\right\rangle \\
&= g(X,U) + g(Y,V) - \frac{1}{2}\left(g(X,V) + g(Y,U)\right) \\
&= h\left((X,Y),(U,V)\right) - \frac{1}{2}h\left((X,Y), P(U,V)\right).
\end{aligned}$$

Se concluye la prueba. □

**Lema 3.3.3.** *El operador $P$ preserva la métrica de Sekigawa.*

*Demostración.* Es claro que el tensor $P$ preserva la métrica producto, esto es, para cualesquiera campos invariantes izquierdos $\overline{X}, \overline{U} \in \mathfrak{X}(G\times G)$,

$$h\left(P\overline{X}, P\overline{U}\right) = h\left(\overline{X}, \overline{U}\right).$$

Un cálculo directo entonces muestra,

$$\langle P\overline{X}, P\overline{U}\rangle = h\left(P\overline{X}, P\overline{U}\right) - \frac{1}{2}h\left(P\overline{X}, P(P\overline{U})\right) = h\left(\overline{X}, \overline{U}\right) - \frac{1}{2}h\left(P\overline{X}, \overline{U}\right) = \langle \overline{X}, \overline{U}\rangle.$$

Que es lo que se quería probar. □

**Lema 3.3.4.** *Para cualesquiera* $\overline{X} = (X, Y)$, $\overline{U} = (U, V) \in \mathfrak{X}(G \times G)$, *campos invariantes izquierdos en la variedad de Sekigawa, la relación entre la conexión nearly Kaehler y la conexión producto esta determinada por,*

$$D_{\overline{X}}(\overline{U}) = D^E_{\overline{X}}(\overline{U}) - \frac{1}{3}\left(D^E_{\overline{X}}P\overline{U} - D^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right).$$

*Demostración.* Por medio de un cálculo directo, usando la Proposición 3.2.1,

$$\begin{aligned}
D_{(X,Y)}(U,V) &= D_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v + Y^v\right)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}U^h - \frac{1}{2}U^v + V^v\right) \\
&= \frac{3}{4}D_{X^h}U^h - \frac{\sqrt{3}}{4}D_{X^h}U^v + \frac{\sqrt{3}}{2}D_{X^h}V^v - \frac{\sqrt{3}}{4}D_{X^v}U^h + \frac{1}{4}D_{X^v}U^v \\
&\quad -\frac{1}{2}D_{X^v}V^v + \frac{\sqrt{3}}{2}D_{Y^v}U^h - \frac{1}{2}D_{Y^v}U^v + D_{Y^v}V^v \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X U)^h - \frac{1}{3}(\nabla_X U)^v\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}(\nabla_X U)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X U)^v\right) \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}(\nabla_X V)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X V)^v\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}(\nabla_X U)^h\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}(\nabla_X U)^v - \frac{1}{2}(\nabla_X V)^v + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}(\nabla_Y U)^h\right) - \frac{1}{2}(\nabla_Y U)^v + (\nabla_Y V)^v \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_X U)^h - \frac{1}{4}(\nabla_X U)^v - \frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_X V)^h + \frac{1}{2}(\nabla_X V)^v \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_Y U)^h - \frac{1}{2}(\nabla_Y U)^v + (\nabla_Y V)^v \\
&= \left(\nabla_X U - \frac{1}{3}\nabla_X V + \frac{1}{3}\nabla_Y U, \frac{1}{3}\nabla_X V - \frac{1}{3}\nabla_Y U + \nabla_Y V\right) \\
&= D^E_{\overline{X}}(\overline{U}) - \frac{1}{3}\left(D^E_{\overline{X}}P\overline{U} - D^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right).
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

**Lema 3.3.5.** *Sean* $X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(G)$ *campos invariantes izquierdos, entonces,*

$$\mathcal{G}((X,Y),(U,V)) = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\nabla_X U + \nabla_X V + \nabla_Y U - 2\nabla_Y V, 2\nabla_X U - \nabla_X V - \nabla_Y U - \nabla_Y V).$$

*Demostración.* En los siguientes cálculos hacemos uso de la demostración de la Proposición

3.2.2 donde se calculan los valores para el tensor $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}((X,Y),(U,V)) &= \mathcal{G}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v + Y^v, \frac{\sqrt{3}}{2}U^h - \frac{1}{2}U^v + V^v\right) \\
&= \frac{3}{4}\mathcal{G}(X^h,U^h) - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathcal{G}(X^h,U^v) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{G}(X^h,V^v) \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}\mathcal{G}(X^v,U^h) + \frac{1}{4}\mathcal{G}(X^v,U^v) - \frac{1}{2}\mathcal{G}(X^v,V^v) \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{G}(Y^v,U^h) - \frac{1}{2}\mathcal{G}(Y^v,U^v) + \mathcal{G}(Y^v,V^v) \\
&= \frac{1}{3}\left(\nabla_X U\right)^h + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\nabla_X U\right)^v + \frac{1}{3}\left(\nabla_X V\right)^h - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\nabla_X V\right)^v \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\nabla_Y U\right)^v + \frac{1}{3}\left(\nabla_Y U\right)^h - \frac{2}{3}\left(\nabla_Y V\right)^h \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\nabla_X U + \nabla_X V + \nabla_Y U - 2\nabla_Y V, 2\nabla_X U - \nabla_X V - \nabla_Y U - \nabla_Y V\right).
\end{aligned}$$

Lo que termina la prueba. □

**Corolario 3.3.6.** *La relación entre la conexión producto denotada por $D^E$ y la conexión de Sekigawa $D$ es,*

$$D^E_{\overline{X}}\overline{U} = D_{\overline{X}}\overline{U} + \frac{1}{2}\left(J\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + J\mathcal{G}(\overline{U}, P\overline{X})\right),$$

*donde $\overline{X} = (X,Y)$ y $\overline{U} = (U,V)$ para cualesquiera campos invariantes izquierdos $U,V,X,Y \in \mathfrak{X}(G)$.*

*Demostración.* Aplicamos el tensor $J$ al campo $\mathcal{G}((X,Y),(U,V))$ que nos proporciona el Lema 3.3.5

$$J\mathcal{G}(\overline{X},\overline{U}) = \frac{2}{3}\left(\nabla_X U - \nabla_X V - \nabla_Y U, \nabla_X V - \nabla_Y U + \nabla_Y V\right),$$

con lo cual,

$$J\mathcal{G}(\overline{X},P\overline{U}) = \frac{2}{3}\left(\nabla_X V - \nabla_X U - \nabla_Y V, \nabla_X U - \nabla_Y V + \nabla_Y U\right),$$

y,

$$\begin{aligned}
J\mathcal{G}(\overline{U},P\overline{X}) &= \frac{2}{3}\left(\nabla_U Y - \nabla_U X - \nabla_V Y, \nabla_U X - \nabla_V Y + \nabla_V X\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(-\nabla_Y U + \nabla_X U + \nabla_Y V, -\nabla_X U + \nabla_Y V - \nabla_X V\right),
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} J\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + J\mathcal{G}(\overline{U}, P\overline{X}) &= \frac{2}{3}(\nabla_X V - \nabla_Y U, \nabla_Y U - \nabla_X V) \\ &= \frac{2}{3}\left(D^E_{\overline{X}} P\overline{U} - D^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right), \end{aligned}$$

aplicando el Lema 3.3.4 se concluye la prueba. □

**Lema 3.3.7.** *Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariente izquierdo. El operador $P$ aplicado a la parte horizontal y vertical de un campo invariante izquierdo $X \in \mathfrak{X}(G)$,*

$$PX^h = \frac{1}{2}X^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}X^v, \; PX^v = \frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v.$$

*Demostración.* Recordemos que el operador $P$ en el campo invariante izquierdo $\overline{U} = (U, V) \in \mathfrak{X}(G \times G)$, esta dado por,

$$P(U_p, V_q) = (V_p, U_q).$$

Por tanto el siguiente cálculo muestra, omitiendo el punto de evaluación,

$$\begin{aligned} PX^h &= P(\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}X) = (\frac{1}{\sqrt{3}}X, \frac{2}{\sqrt{3}}X) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}X^h) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}X^v) + (\frac{2}{\sqrt{3}}X^v) \\ &= \frac{1}{2}X^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}X^v. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$PX^v = P(0, X) = (X, 0) = \frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v.$$

Lo que concluye la demotración. □

**Corolario 3.3.8.** *El operdor $P$ anticonmuta con la estructura casi compleja, esto es,*

$$PJ = -JP.$$

*Demostración.* Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariante izquierdo, aplicado a la parte horizontal,

$$PJX^h = -PX^v = \frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v,$$

y

$$JPX^h = J(\frac{1}{2}X^h + \frac{3}{\sqrt{3}}X^v) = -\frac{1}{2}X^v + \frac{3}{2\sqrt{3}}X^h = -PJX^h.$$

Luego, por otro lado, aplicado a la parte vertical,

$$PJX^v = PX^h = \frac{1}{2}X^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}X^v,$$

y,

$$JPX^v = J(\frac{\sqrt{3}}{2}X^h - \frac{1}{2}X^v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}X^v - \frac{1}{2}X^h = -PJX^v.$$

Después de comparar, tenemos lo que se quería probar. □

**Lema 3.3.9.** *Sen $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campos invariantes izquierdos, entonces la derivada covariante del tensor $P$, en la parte horizontal y vértical de los campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ satisface,*

$$(D_{X^h}P)Y^h = \frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^v,$$
$$(D_{X^h}P)Y^v = \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^h,$$
$$(D_{X^v}P)Y^v = \frac{-1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h,$$
$$(D_{X^v}P)Y^h = \frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v.$$

*Demostración.* Tenemos, utilizando el Lema 3.3.7 y la Proposición 3.2.1,

$$\begin{aligned}
(D_{X^h}P)Y^h &= D_{X^h}PY^h - PD_{X^h}Y^h \\
&= D_{X^h}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}Y^v) - P(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v) + \frac{3}{2\sqrt{3}}(\frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) \\
&\quad -\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}(\nabla_X Y)^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) + \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X Y)^v) \\
&= \frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^v.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_{X^h}P)Y^v &= D_{X^h}PY^v - PD_{X^h}Y^v \\
&= D_{X^h}(\frac{\sqrt{3}}{2}Y^h - \frac{1}{2}Y^v) - P(\frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v) - \frac{1}{2}(\frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) \\
&\quad \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(\nabla_X Y)^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X Y)^v) \\
&= \frac{1}{3}(\nabla_X Y)^h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D_{X^v}P)Y^v &= D_{X^v}PY^v - PD_{X^v}Y^v \\ &= D_{X^v}(\frac{\sqrt{3}}{2}Y^h - \frac{1}{2}Y^v) - P(\nabla_X Y)^v \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{3}\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X Y)^v - (\frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla_X Y)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X Y)^v) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(\nabla_X Y)^h = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h.\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}(D_{X^v}P)Y^h &= D_{X^v}PY^h - PD_{X^v}Y^h \\ &= D_{X^v}(\frac{1}{2}Y^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}Y^v) - P(\frac{1}{3}\nabla_X Y)^h \\ &= \frac{1}{6}(\nabla_X Y)^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(\nabla_X Y)^h + \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v.\end{aligned}$$

Con lo que concluimos la prueba. □

**Lema 3.3.10.** *Para cualesquiera campos invariantes izquierdos $\overline{X}, \overline{U} \in \mathfrak{X}(G \times G)$,*

$$D_{P\overline{X}}P\overline{U} = PD_{\overline{X}}\overline{U}. \tag{3.4}$$

*Demostración.* Notemos primero que esta propiedad es válida para la conexión producto, en efecto,

$$D^E_{P\overline{X}}P\overline{U} = D^E_{P(X,Y)}P(U,V) = D^E_{(Y,X)}(V,U) = (\nabla_Y V, \nabla_X U) = PD^E_{\overline{X}}\overline{Y},$$

por lo anterior y la Proposición 3.3.4,

$$\begin{aligned}D_{P\overline{X}}P\overline{U} &= D^E_{P\overline{X}}P\overline{U} - \frac{1}{3}\left(D^E_{P\overline{X}}P^2\overline{U} - D^E_{P^2\overline{X}}P\overline{U}\right) = PD^E_{\overline{X}}\overline{U} - \frac{1}{3}\left(PD^E_{\overline{X}}P\overline{U} - PD^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right) \\ &= P\left(D^E_{\overline{X}}\overline{U} - \frac{1}{3}\left(D^E_{\overline{X}}P\overline{U} - D^E_{P\overline{X}}\overline{U}\right)\right) = PD_{\overline{X}}\overline{U}.\end{aligned}$$

Y así se concluye la prueba. □

**Teorema 3.3.11.** *Para todos los campos $\overline{X}, \overline{U} \in \mathfrak{X}(G \times G)$ invariantes izquierdos se satisfacen las siguientes ecuaciones.*

$$P\mathcal{G}(\overline{X}, \overline{U}) + \mathcal{G}(P\overline{X}, P\overline{U}) = 0, \tag{3.5}$$

$$(D_{\overline{X}}P)J\overline{U} = J(D_{\overline{X}}P)\overline{U}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + PG(\overline{X}, \overline{U}) = -2J(D_{\overline{X}}P)\overline{U}, \tag{3.7}$$

$$(D_{\overline{X}}P)P\overline{U} + P(D_{\overline{X}}P)\overline{U} = 0, \tag{3.8}$$

$$(D_{\overline{X}}P)P\overline{U} + (D_{P\overline{X}}P)\overline{U} = 0. \tag{3.9}$$

*Demostración.* Comenzamos con la primer ecuación, esto se sigue de los siguientes cálculos,

$$\begin{aligned} P\mathcal{G}(\overline{X}, \overline{U}) &= P(D_{\overline{X}}J\overline{U} - JD_{\overline{X}}\overline{U}) = PD_{\overline{X}}J\overline{U} - PJD_{\overline{X}}\overline{U} \\ &= D_{P\overline{X}}PJ\overline{U} + JPD_{\overline{X}}\overline{U} = -D_{P\overline{X}}JP\overline{U} + JD_{P\overline{X}}P\overline{U} \\ &= -\mathcal{G}(P\overline{X}, P\overline{U}). \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación probaremos que esto es válido para cualesquiera campos horizontales y verticales generados por los campos invariantes izquierdos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, para estos cálculos recurrimos al Lema 3.3.9, en el caso de que ambos sean horizontales,

$$(D_{X^h}P)JY^h = -(D_{X^h}P)Y^v = \frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^h$$

y por otro lado,

$$J((D_{X^h}P)Y^h) = J(-\frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v) = \frac{-1}{3}J(\nabla_X Y)^v = \frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^h.$$

En el caso en el que ambos son verticales,

$$(D_{X^v}P)JY^v = (D_{X^v}P)Y^h = \frac{-1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v$$

y,

$$J((D_{X^v}P)Y^v) = J(-\frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v) = \frac{-1}{\sqrt{3}}J(\nabla_X Y)^h = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v.$$

Por último en el caso mixto se tiene

$$(D_{X^v}P)JY^h = -(D_{X^v}P)Y^v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h$$

$$(D_{X^h}P)JY^v = (D_{X^h}P)Y^h = \frac{-1}{3}(\nabla_X Y)^v$$

y,

$$J((D_{X^v}P)Y^h) = J(\frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^v) = \frac{1}{\sqrt{3}}J(\nabla_X Y)^v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\nabla_X Y)^h.$$

$$J((D_{X^h}P)Y^v) = J(\frac{1}{3}(\nabla_X Y)^h) = \frac{1}{3}J(\nabla_X Y)^h = -\frac{1}{3}(\nabla_X Y)^v.$$

Lo que finaliza la prueba de la segunda ecuación. Para la tercera ecuación tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + P\mathcal{G}(\overline{X}, \overline{U}) &= D_{\overline{X}}JP\overline{U} - JD_{\overline{X}}P\overline{U} + P(D_{\overline{X}}J\overline{U} - JD_{\overline{X}}\overline{U}) \\
&= -D_{\overline{X}}PJ\overline{U} - JD_{\overline{X}}P\overline{U} + PD_{\overline{X}}J\overline{U} + JPD_{\overline{X}}\overline{U} \\
&= -D_{\overline{X}}PJ\overline{U} + PD_{\overline{X}}J\overline{U} - JD_{\overline{X}}P\overline{U} + JPD_{\overline{X}}\overline{U} \\
&= -(D_{\overline{X}}P)J\overline{U} - J(D_X P)\overline{U} = -2J(D_{\overline{X}}P)\overline{U}.
\end{aligned}$$

Que es exactamente lo que se quería probar. Ahora, para probar la cuarta ecuación tenemos,

$$\begin{aligned}
(D_{\overline{X}}P)P\overline{U} &= D_{\overline{X}}PP\overline{U} - PD_{\overline{X}}P\overline{U} = D_{\overline{X}}\overline{U} - PD_{\overline{X}}P\overline{U} \\
&= P(PD_{\overline{X}}\overline{U} - D_{\overline{X}}P\overline{U}) = -P((D_{\overline{X}}P)\overline{U}).
\end{aligned}$$

En el caso de la quinta y última ecuación, utilizamos el Lema 3.3.10,

$$\begin{aligned}
(D_{\overline{X}}P)P\overline{U} &= D_{\overline{X}}PP\overline{U} - PD_{\overline{X}}P\overline{U} = PPD_{\overline{X}}\overline{U} - PD_{\overline{X}}P\overline{U} \\
&= PD_{P\overline{X}}P\overline{U} - D_{P\overline{X}}\overline{U} = -P((D_{P\overline{X}}P)\overline{U}).
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. □

# Capítulo 4

# Ángulos de una Subvariedad Lagrangiana de $G \times G$

## 4.1. Existencia de ángulos

**Proposición 4.1.1.** *Sea $M$ una subvariedad lagrangiana de la variedad de Sekigawa. Existen $A, B : TM \to TM$ endomorfismos tales que, el operador $P$ se puede descomponer como, $P = A + JB$.*

*Demostración.* El hecho que $M$ es lagrangiana garantiza que el espacio tangente de $G \times G$ restringido a $M$, se descompone como una suma directa

$$T(G \times G) = TM \oplus TM^{\perp} = TM \oplus JTM,$$

por lo que, el operador $P$ aplicado a un campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$, se puede factorizar de manera única como,

$$P(\overline{X}) = [P(\overline{X})]^{T} + [P(\overline{X})]^{\perp},$$

de aquí se define,

$$A(\overline{X}) := [P(\overline{X})]^{T},\ JB(\overline{X}) := [P(\overline{X})]^{\perp}.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Lema 4.1.2.** *Los operadores $A$ y $B$ definidos en la Proposición 4.1.1, satisfacen la siguientes relaciones,*

1. $A^2 + B^2 = I$,

2. $AB = BA$,

3. $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$ *y* $\langle BX, Y\rangle = \langle X, BY\rangle$,

*Para cualesquiera* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

*Demostración.* Vamos a probar que $A$ y $B$ son simétricos, esto es, probaremos el tercer inciso, para ello utilizaremos,

$$PJX = -JPX = -J(AX + JBX) = BX - JAX.$$

Con lo cual, haciendo uso del Lema 3.3.3 tenemos,

$$\langle AX, Y\rangle = \langle PX, Y\rangle = \langle X, PY\rangle = \langle X, AY\rangle$$

$$\langle BX, Y\rangle = \langle PJX, Y\rangle = -\langle JPX, Y\rangle = \langle PX, JY\rangle = \langle X, PJY\rangle = \langle X, BY\rangle.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} X &= P^2X = P(AX + JBX) = PAX + PJBX = (A^2X + JBAX) - JPBX \\ &= (A^2X + JBAX) - J(ABX + JB^2X) = (A^2 + B^2)X + J(BA - AB)X, \end{aligned}$$

comparando parte normal y parte tangente obtenemos las dos primeras afirmaciones. □

**Corolario 4.1.3.** *Si $M$ es una subvariedad Lagrangiana de la variedad de Sekigawa, entonces existen un marco ortonormal $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ y $n$ funciones $\theta_i : M \to [0, \pi)$, tales que,*

$$PE_i = cos(2\theta_i)E_i + sen(2\theta_i)JE_i.$$

*Demostración.* Del hecho que $A$ y $B$ conmutan y son operadores simétricos, se sigue que, son simultáneamente diagonalizables, esto es, existen campos ortogonales $E_1, E_2, \ldots, E_n$, tales que,

$$AE_i = \lambda_i E_i,$$

$$BE_i = \mu_i E_i,$$

estas últimas ecuaciones aseguran que,

$$1 = \langle E_i, E_i\rangle = \langle PE_i, PE_i\rangle = \langle \lambda_i E_i + \mu_i JE_i, \lambda_i E_i + \mu_i JE_i\rangle = \lambda_i^2 + \mu_i^2,$$

de aquí, existen funciones $\theta_i$, con imagen en $[0, \pi)$, tales que, $\lambda_i = cos(2\theta_i)$ y $\mu_i = sen(2\theta_i)$ □

**Observación 5.** La elección natural del argumento de las funciones seno y coseno del Corolario 4.1.3 son simplemente $\theta_i$. En este caso se modifica, pues este argumento es útil para simplificar los cálculos de las demostraciones siguientes.

**Teorema 4.1.4.** *Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ los campos que se garantizan que existen en Corolario 4.1.3, entonces, para cada elección de $i, k, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,*

$$\begin{aligned}(-cos(2\theta_k) + cos(2\theta_j))\,(\mathcal{G}_{ij}^k + 2\omega_{ij}^k) &= 4sen(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} + 2(sen(2\theta_k) + sen(2\theta_j))h_{ij}^k, \\ (sen(2\theta_k) - sen(2\theta_j))\,(\mathcal{G}_{ij}^k - 2\omega_{ij}^k) &= 4cos(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} + 2(cos(2\theta_k) + cos(2\theta_j))h_{ij}^k,\end{aligned}$$

*donde $\mathcal{G}_{ij}^k = \langle \mathcal{G}(E_i, E_j), JE_k\rangle$, $h_{ij}^k = \langle h(E_i, E_j), JE_k\rangle$ y $\omega_{ij}^k = \langle D_{E_i}E_j, E_k\rangle = \langle \nabla_{E_i}E_j, E_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \omega_{ij}^r E_r, E_k\right\rangle$ son los símbolos de Christoffel de la conexión de $M$. En particular, si $j = k$,*

$$E_i \cdot \theta_j = -h_{jj}^i.$$

*Demostración.* Vamos a utilizar la Ecuación 3.7,

$$\mathcal{G}(\overline{X}, P\overline{U}) + P\mathcal{G}(\overline{X}, \overline{U}) = -2J(D_{\overline{X}}P)\overline{U},$$

para ello, calculamos el lado izquierdo por separado, esto es, utilizando la Proposición 1.1.6 se sigue, que para cualesquiera $E_i, E_j, JE_k$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}(E_i, PE_j), JE_k\rangle &= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j + sen(2\theta_j)JE_j), JE_k\rangle \\ &= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j), JE_k\rangle + \langle \mathcal{G}(E_i, sen(2\theta_j)JE_j), JE_k\rangle \\ &= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j), JE_k\rangle - \langle J\mathcal{G}(E_i, sen(2\theta_j)E_j), JE_k\rangle \\ &= cos(2\theta_j)\mathcal{G}_{ij}^k.\end{aligned}$$

En el caso del otro sumando,

$$\begin{aligned}\langle P\mathcal{G}(E_i, E_j), JE_k\rangle &= \langle \mathcal{G}(E_i, E_j), PJE_k\rangle \\ &= -\langle \mathcal{G}(E_i, E_j), JPE_k\rangle \\ &= -\langle \mathcal{G}(E_i, E_j), J(cos(2\theta_k)E_k + sen(2\theta_k)JE_k)\rangle \\ &= -\langle \mathcal{G}(E_i, E_j), cos(2\theta_k)JE_k - sen(2\theta_k)E_k)\rangle \\ &= -cos(2\theta_k)\mathcal{G}_{ij}^k.\end{aligned}$$

El lado derecho es,

$$\langle -2J(D_{E_i}P)E_j, JE_k\rangle = \langle -2(D_{E_i}P)E_j, E_k\rangle = -2\langle D_{E_i}PE_j, E_k\rangle + 2\langle PD_{E_i}E_j, E_k\rangle .$$

Calculamos por separado cada uno de los sumandos, el primero primero es,

$$\begin{aligned}
-2\langle D_{E_i}PE_j, E_k\rangle &= -2\langle D_{E_i}(cos(2\theta_j)E_j + sen(2\theta_j)JE_j), E_k\rangle \\
&= -2\langle E_i \cdot cos(2\theta_j)E_j, E_k\rangle - 2\langle cos(2\theta_j)D_{E_i}E_j, E_k\rangle \\
&\quad -2\langle E_i \cdot sen(2\theta_j)JE_i, E_k\rangle - 2\langle sen(2\theta_j)D_{E_i}JE_j, E_k\rangle \\
&= 4sen(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} - 2cos(2\theta_j)\omega_{ij}^k - 2sen(2\theta_j)\left\langle A_{JE_j}E_i, E_k\right\rangle \\
&= 4sen(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} - 2cos(2\theta_j)\omega_{ij}^k - 2sen(2\theta_j)h_{ik}^j,
\end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned}
2\langle PD_{E_i}E_j, E_k\rangle &= 2\langle D_{E_i}E_j, PE_k\rangle \\
&= 2\langle D_{E_i}E_j, cos(2\theta_k)E_k + sen(2\theta_k)JE_k\rangle \\
&= 2\langle D_{E_i}E_j, cos(2\theta_k)E_k\rangle + 2\langle D_{E_i}E_j, sen(2\theta_k)JE_k\rangle \\
&= 2cos(2\theta_k)\omega_{ij}^k + 2sen(2\theta_k)h_{ij}^k.
\end{aligned}$$

Al igualar tenemos la primer ecuación. Por otro lado, para cualesquiera $E_i, E_j, E_k$, el primer sumando de la Ecuación 3.7,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}(E_i, PE_j), E_k\rangle &= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j + sen(2\theta_j)JE_j), E_k\rangle \\
&= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j), E_k\rangle + \langle \mathcal{G}(E_i, sen(2\theta_j)JE_j), E_k\rangle \\
&= \langle \mathcal{G}(E_i, cos(2\theta_j)E_j), E_k\rangle - \langle J\mathcal{G}(E_i, sen(2\theta_j)E_j), E_k\rangle \\
&= sen(2\theta_j)\mathcal{G}_{ij}^k,
\end{aligned}$$

el segundo sumando es,

$$\begin{aligned}
\langle P\mathcal{G}(E_i, E_j), E_k\rangle &= \langle \mathcal{G}(E_i, E_j), PE_k\rangle \\
&= \langle \mathcal{G}(E_i, E_j), cos(2\theta_k)E_k + sen(2\theta_k)JE_k\rangle \\
&= \langle \mathcal{G}(E_i, E_j), cos(2\theta_k)E_k + sen(2\theta_k)JE_k)\rangle \\
&= sen(2\theta_k)\mathcal{G}_{ij}^k.
\end{aligned}$$

Por el otro lado, la parte derecha es,

$$\langle -2J(D_{E_i}P)E_j, E_k\rangle = 2\langle D_{E_i}PE_j, JE_k\rangle - 2\langle PD_{E_i}E_j, JE_k\rangle .$$

Calculamos primero,

$$\begin{aligned}
2\langle D_{E_i}PE_j, JE_k\rangle &= 2\langle D_{E_i}(cos(2\theta_j)E_j + sen(2\theta_j)JE_j), JE_k\rangle \\
&= 2\langle (E_i \cdot cos(2\theta_j))E_j, JE_k\rangle\, 2\langle cos(2\theta_j)D_{E_i}E_j, JE_k\rangle \\
&\quad +2\langle (E_i \cdot sen(2\theta_j))JE_j, JE_k\rangle + 2\langle sen(2\theta_j)D_{E_i}JE_j, JE_k\rangle \\
&= 2cos(2\theta_j)h_{ij}^k + 4cos(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} \\
&\quad 2sen(2\theta_j)\left\langle \nabla^{\perp}_{E_i}JE_j, JE_k\right\rangle \\
&= 2cos(2\theta_j)h_{ij}^k + 4cos(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} \\
&\quad 2sen(2\theta_j)\langle J\nabla_{E_i}E_j, JE_k\rangle + 2sen(2\theta_j)\langle \mathcal{G}(E_i, E_j), JE_k\rangle \\
&= 4cos(2\theta_j)(E_i \cdot \theta_j)\delta_{jk} + 2sen(2\theta_j)\omega_{ij}^k + 2cos(2\theta_j)h_{ij}^k \\
&\quad +2sen(2\theta_j)\mathcal{G}_{ij}^k,
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
2\langle PD_{E_i}E_j, E_k\rangle &= 2\langle D_{E_i}E_j, PE_k\rangle \\
&= 2\langle D_{E_i}E_j, cos(2\theta_k)E_k + sen(2\theta_k)JE_k\rangle \\
&= 2\langle D_{E_i}E_j, cos(2\theta_k)E_k\rangle + 2\langle D_{E_i}E_j, sen(2\theta_k)JE_k\rangle \\
&= 2cos(2\theta_k)\omega_{ij}^k + 2sen(2\theta_k)h_{ij}^k.
\end{aligned}$$

Igualando, tenemos la segunda ecuación. En particular si hacemos $k = j$ las dos ecuaciones se reducen a,

$$0 = 4sen(2\theta_j)E_i \cdot \theta_j + 4sen(2\theta_j)h_{ij}^j,$$

$$0 = 4cos(2\theta_j)E_i \cdot \theta_j + 4cos(2\theta_j)h_{ij}^j,$$

las cuales al sumarlas implican que,

$$\left((E_i \cdot \theta_j) + h_{ij}^j\right)(cos(2\theta_j) + sen(2\theta_j)) = 0,$$

ya que las funciones *cos* y *sen* no se anulan al mismo tiempo entonces,

$$E_i \cdot \theta_j = -h_{ij}^j = -h_{jj}^i.$$

Lo que concluye la prueba. □

**Teorema 4.1.5.** *Una subvariedad lagrangiana conexa $M$, de $G \times G$ es mínima si y sólo si la suma de los ángulos es constante.*

*Demostración.* Sean $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ los campos que diagonalizan a los operadores $A$ y $B$, que se obtienen en el Corolario 4.1.3, aplicamos el Teorema 4.1.4 para obtener,

$$\begin{aligned} E_i \cdot \sum_{j=1}^{dim(M)} \theta_j &= \sum_{i=1}^{dim(M)} E_i \cdot \theta_j = - \sum_{j=1}^{dim(M)} \langle h(E_j, E_j), JE_i \rangle \\ &= - \left\langle \sum_{j=1}^{dim(M)} h(E_j, E_j), JE_i \right\rangle = - \langle dim(M)H, JE_i \rangle . \end{aligned}$$

Por lo que si suponemos que $\sum_{j=1}^{dim(M)} \theta_j$, es constante, entonces para cada $i = 1, 2, \cdots, dim(M)$,

$$\langle dim(M)H, JE_i \rangle = 0,$$

en otras palabras, $M$ es mínima. Por otro lado, si $M$ es mínima $dim(M)H = \sum_{j=1}^{dim(M)} h(E_j, E_j) = 0$, esto es, para todo $i = 1, 2, \cdots, dim(M)$,

$$E_i \cdot \sum_{j=1}^{dim(M)} \theta_j = 0,$$

esto es, $\sum_{j=1}^{dim(M)} \theta_j$ es constante. □

## 4.2. Subvariedades lagrangianas totalmente geodésicas en $G \times G$

En esta sección vamos a probar que las inmersiones del grupo de Lie $G$ en la variedad de Sekigawa $G \times G$ son inmersiones isométricas, Lagrangianas y totalmente geodésicas. En algunos casos esto se prueba sin ninguna hipótesis adicional, en caso de existir alguna condición extra la mencionaremos en el ejemplo.

**Ejemplo 13.** *La inmersión $\phi_2 : G \to G \times G$, definida como $\phi_2(p) = (e, p)$ donde $e$ es la identidad en $G$.*

*Demostración.* Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ un marco ortonormal de campos invariantes izquierdos de $G$. Notemos que, $d\phi_2(X_i) = (0, X_i) = X_i^v$, se sigue que, para cualesquiera $i \neq j$,

$$\langle d\phi_2 X_i, d\phi_2 X_j\rangle = \left\langle X_i^v, X_j^v\right\rangle = g(X_i, X_j) = \delta_{ij},$$

esto es, la inmersión es isométrica. Luego, para probar que la inmersión es lagrangiana, los cálculos,

$$\langle Jd\phi_2 X_i, d\phi_2 X_j\rangle = \left\langle JX_i^v, X_j^v\right\rangle = \left\langle X_i^h, X_j^v\right\rangle = 0,$$

prueban que la inmersión es Lagrangiana. Ahora, para probar que es una subvariedad totalmente geodesica, sabemos por lo anterior que si, $X_1, X_2, \cdots, X_n \in \mathfrak{X}(G)$ es marco ortonormal para $G$. Entonces $d\phi_2 X_1 = X_1^v, d\phi_2 X_2 = X_2^v, \cdots, d\phi_2 X_n = X_n^v$ es un marco ortonormal de la subvariedad inmersa. Ahora, de la fórmula de Gauss, y de la Proposición 3.2.1, se sigue,

$$\nabla_{X_i^v} X_j^v + h(X_i^v, X_j^v) = D_{X_i^v} X_j^v = (\nabla_{X_i} X_j)^v = d\phi_2(\nabla_{X_i} X_j).$$

Al comparar las partes normales y partes tangentes obtenemos que, $h(X_i^v, X_j^v) = 0$ para todo $i, j$, esto es, la inmersión $\phi_2$ es totalmente geodésica.

Por último, vamos a calcular, en esta base, cuales son los ángulos que le corresponden a esta inmersión, para ello utilizamos el Lema 3.3.7. esto es,

$$Pd\phi_2(X_i) = P(X_i^v) = \frac{\sqrt{3}}{2} X_i^h - \frac{1}{2} X_i^v = -\frac{1}{2} X_i^v - \frac{\sqrt{3}}{2} JX_i^v = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) X_i^v + sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) JX_i^v.$$

En este caso los ángulos son independientes del marco ortonormal, los cuales son en cada caso, $\theta_i = \dfrac{2\pi}{3}$. □

**Ejemplo 14.** *La inmersión $\phi_1 : G \to G \times G$ definida por $\phi_1(p) = (p, e)$.*

*Demostración.* Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ un marco ortonormal de campos invariantes izquierdos de $G$. La diferencial satisface, $d\phi_1(X_i) = (X, 0) = \frac{\sqrt{3}}{2} X_i^h - \frac{1}{2} X_i^v$. Los cálculos siguientes muestran que $\phi_1$, es una inmersión isométrica,

$$\langle d\phi_1 X_i, d\phi_1 X_j\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} X_i^h - \frac{1}{2} X_i^v, \frac{\sqrt{3}}{2} X_j^h - \frac{1}{2} X_j^v \right\rangle = \frac{3}{4} g(X_i, X_j) + \frac{1}{4} g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

Por otro lado, el que sea una subvariedad lagrangiana lo prueba el cálculo siguiente,

$$\begin{aligned} \langle Jd\phi_1 X_i, d\phi_1 X_j\rangle &= \left\langle J(\frac{\sqrt{3}}{2} X_i^h - \frac{1}{2} X_i^v), \frac{\sqrt{3}}{2} X_j^h - \frac{1}{2} X_j^v \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{-\sqrt{3}}{2} X_i^v - \frac{1}{2} X_i^h, \frac{\sqrt{3}}{2} X_j^h - \frac{1}{2} X_j^v \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Por último utilizando la fórmula de Gauss y la Proposición 3.2.1,

$$\begin{aligned}
D_{d\phi_1 X_i} d\phi_1 X_j &= D_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_j^h - \frac{1}{2}X_j^v\right) \\
&= D_{\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_j^h - \frac{1}{2}X_j^v\right) - D_{\frac{1}{2}X_i^v} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_j^h - \frac{1}{2}X_j^v\right) \\
&= \frac{3}{4} D_{X_i^h} X_j^h - \frac{\sqrt{3}}{4} D_{X_i^h} X_j^v - \frac{\sqrt{3}}{4} D_{X_i^v} X_j^h + \frac{1}{4} D_{X_i^v} X_j^v \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^h - \frac{1}{3}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v\right) \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{-1}{3}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^h\right) + \frac{1}{4}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^h - \frac{1}{2}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^h - \frac{1}{2}\left(\nabla_{X_i} X_j\right)^v \\
&= d\Phi(\nabla_{X_i} X_j),
\end{aligned}$$

el cual es tangente a la inmersión. Esto es, la segunda forma fundamental se anula, lo que es equivalente a que la inmersión sea totalmente geodésica. Una prueba más sencilla de este mismo hecho se hace utilizando que la función $p : G \times G \to G \times G$, definida por, $p(g, h) = (h, g)$ es una isometría. Además es claro que, $dp = P$. Sabemos por el Corolario 3.3.8, que $p$ es antiholomorfa (Definición 1.2.11). El hecho que $\phi_1 = p \circ \phi_2$, garantiza que al aplicar el Lema 1.2.12, $\phi_1$ es una inmersión lagrangiana. Además $\phi_1$ es una inmersión isométrica, ya que es composición de una inmersión isométrica y una isometría y por lo tanto también totalmente geodésica. Por último para calcular los ángulos que le corresponden a esta base ortonormal hacemos,

$$\begin{aligned}
P d\phi_1(X_i) &= P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}X_i^h + \frac{\sqrt{3}}{2}X_i^v\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right) = X_i^v.
\end{aligned}$$

Por otro lado para variables $a$ y $b$ tenemos,

$$\begin{aligned}
a d\phi_1(X_i) + bJ d\phi_1(X_i) &= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right) + bJ\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right) \\
&= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h - \frac{1}{2}X_i^v\right) + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^v - \frac{1}{2}X_i^h\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2}\right)X_i^h + \left(-\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)X_i^v.
\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son iguales si y sólo si, $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, esto hace que,

$$Pd\phi_1(X_i) = -\frac{1}{2}d\phi_1(X_i) - \frac{\sqrt{3}}{2}Jd\phi_1(X_i) = cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)d\phi_1(X_i) + sen\left(\frac{4\pi}{6}\right)Jd\phi_1(X_i). \quad (4.1)$$

Lo que garantiza que cualquier base diagonaliza a los operadores $A$ y $B$, por lo tanto los ángulos correspondientes a esta base (y a cualquiera) son $\theta_i = \frac{4\pi}{3}$. □

**Ejemplo 15.** *La inmersión diagonal, esto es,* $\Delta : G \to G \times G$ *definida por* $\Delta(p) = (p, p)$.

*Demostración.* Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ un marco ortonormal de campos invariantes izquierdos de $G$. La imagen bajo la derivada es, $d\Delta(X_i) = (X_i, X_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}X^h + \frac{1}{2}X^v$. Calculamos,

$$\begin{aligned}
\langle d\Delta(X_i), d\Delta(X_j)\rangle &= \langle (X_i, X_i), (X_j, X_j)\rangle \\
&= h((X_i, X_i), (X_j, X_j)) - \frac{1}{2}h((X_i, X_i), P(X_j, X_j)) \\
&= h((X_i, X_i), (X_j, X_j)) - \frac{1}{2}h((X_i, X_i), (X_j, X_j)) \\
&= \delta_{ij},
\end{aligned}$$

con lo cual se comprueba que la inmersión es isométrica. Por otro lado, para comprobar que $\Delta$ es una inmersión Lagrangiana hacemos,

$$\begin{aligned}
\left\langle d\Delta(X_i), J_{(p,p)}d\Delta(X_j)\right\rangle &= \langle (X_i, X_i), J(X_j, X_j)\rangle \\
&= \left\langle (X_i, X_i), \frac{1}{\sqrt{3}}(X_j, -X_j)\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(h((X_i, X_i), (X_j, -X_j)) - \frac{1}{2}h((X_i, X_i), P(X_j, -X_j))\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(h((X_i, X_i), (X_j, -X_j)) - \frac{1}{2}h((X_i, X_i), (-X_j, X_j))\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para probar que la inmersión $\Delta$ es totalmente geodésica, calculamos,

$$\begin{aligned}
D_{d\Delta(X_i)}d\Delta(X_j) &= D_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_i^h + \frac{1}{2}X_i^v\right)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X_j^h + \frac{1}{2}X_j^v\right) \\
&= \frac{3}{4}D_{X_i^h}X_j^h + \frac{\sqrt{3}}{4}D_{X_i^h}X_j^v + \frac{\sqrt{3}}{4}D_{X_i^v}X_j^h + \frac{1}{4}D_{X_i^v}X_j^v \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^h - \frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^v\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^v\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^h\right) + \frac{1}{4}(\nabla_{X_i}X_j)^v) = \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^h + \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}X_j)^v \\
&= d\Delta(\nabla_{X_i}X_j).
\end{aligned}$$

Con lo cual podemos afirmar que la segunda forma fundamental se anula y por tanto, la inmersión es totalmente geodésica. Por último, para calcular los ángulos que le corresponden a esta base observamos que,

$$Pd\Delta(X_i) = P(X_i, X_i) = (X_i, X_i) = d\Delta(X_i) + 0Jd\Delta(X_i) = cos(0)d\Delta(X_i) + sen(0)Jd\Delta(X_i).$$

Esto es, el ángulo que le corresponde a cada campo $X_i$ es $\theta_i = 0$. □

**Ejemplo 16.** *Sean $\sigma \in G$ y $\nu : G \to G\times G$ la función dada por $\nu(g) = (g, R_\sigma(g))$. La condición general para que la inmersión $\nu$ sea inmersión isométrica, Lagrangiana y totalmente geodésica es $\sigma \in Z(G)$. Mientras por separado tenemos,*

1. *$Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id$ si y sólo si $\nu$ es inmersión isométrica.*
2. *$Ad_{\sigma^2} = Id$ si y sólo si $\nu$ es inmersión Lagrangiana.*
3. *$ad_X(Ad_\sigma(Y)) = -ad_Y(Ad_\sigma(X))$ para cada campo invariante izquierdo $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ si y sólo si $\nu$ es inmersión totalmente geodésica.*

*Demostración.* Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un marco ortonormal de $G$. La imagen bajo la diferencial $d\nu(X_i) = (X_i, dR_\sigma(X_i))$. Primero, veamos que es una inmersión isométrica, para ello hacemos para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\langle (X_i, dR_\sigma(X_i)), (X_j, dR_\sigma(X_j))\rangle &= h\left((X_i, dR_\sigma(X_i)), (X_j, dR_\sigma(X_j))\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((X_i, dR_\sigma(X_i)), P(X_j, dR_\sigma(X_j))\right)\\
&= h\left((X_i, dR_\sigma(X_i)), (X_j, dR_\sigma(X_j))\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((X_i, dR_\sigma(X_i)), (dL_{\sigma^{-1}}(dR_\sigma(X_j)), dL_\sigma(X_j))\right)\\
&= \delta_{ij} + g(dR_\sigma(X_i), dR_\sigma(X_j)) - \frac{1}{2}g(X_i, dL_{\sigma^{-1}}(dR_\sigma(X_j))\\
&\quad -\frac{1}{2}g(dR_\sigma(X_i), dL_\sigma(X_j))\\
&= 2\delta_{ij} - \frac{1}{2}g(X_i, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)) - \frac{1}{2}g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j)\\
&= 2\delta_{ij} - \frac{1}{2}g(Ad_\sigma(X_i), X_j) - \frac{1}{2}g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j)\\
&= 2\delta_{ij} - \frac{1}{2}g(Ad_\sigma(X_i) + Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j)
\end{aligned}$$

Por lo que, $\nu$ es una inmersión isométrica si y sólo si,

$$\langle (X_i, dR_\sigma(X_i)), (X_j, dR_\sigma(X_j))\rangle = \delta_{ij},$$

si y sólo si,

$$\frac{1}{2}g(Ad_\sigma(X_i) + Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j)) = \delta_{ij},$$

si y sólo si,

$$Ad_\sigma(X_i) + Ad_{\sigma^{-1}}(X_i) = 2X_i = 2Id(X_i).$$

En otras palabras, la condición equivalente para que la inmersión $\nu$ sea isométrica es,

$$Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id.$$

Por otro lado, la hipótesis $\sigma \in Z(G)$ es equivalente a que $Ad_\sigma = Id$ por la Proposición 1.3.18, se sigue que $Ad_{\sigma^{-1}} = Id$, con lo que es posible concluir que,

$$Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id.$$

Así, $\nu$ es una inmersión isométrica. Para probar que $\nu$ es una inmersión Lagrangiana, calculamos $\left\langle d\nu(X_i), J|_{(e,\sigma)} d\nu(X_j) \right\rangle = \zeta$

$$\begin{aligned}
\zeta &= \left\langle (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j, -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)) \right\rangle \\
&= h\left( X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j, -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)) \right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left( (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}P(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j, -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)) \right) \\
&= h\left( (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j, -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)) \right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left( (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(dL_{\sigma^{-1}}(-2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j))), dL_\sigma(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j) \right) \\
&= h\left( (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(2dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j) - X_j, -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)) \right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left( (X_i, dR_\sigma(X_i)), \frac{1}{\sqrt{3}}(-2X_j + dL_{\sigma^{-1}}dR_\sigma(X_j))), 2dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)) \right).
\end{aligned}$$

Usamos la definición de la métrica producto y obtenemos,

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{\sqrt{3}} g\left(X_i, 2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j) + \frac{1}{\sqrt{3}} g(dR_\sigma(X_i), -2dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} g(X_i, -2X_j + Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)) - \frac{1}{2\sqrt{3}} g(dR_\sigma(X_i), 2dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} g(X_i, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} - \frac{1}{2\sqrt{3}} g(Ad_\sigma(X_i), X_j) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{3}} g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} g(Ad_\sigma(X_i), X_j) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} - \frac{1}{2\sqrt{3}} g(Ad_\sigma(X_i), X_j) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{3}} g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} g(Ad_\sigma(X_i), X_j) - \frac{3}{2\sqrt{3}} g(Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} g(Ad_\sigma(X_i) - Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j).
\end{aligned}$$

Entonces, $\nu$ es una inmersión Lagrangiana si $\zeta = 0$, lo cual ocurre si y sólo si,

$$g(Ad_\sigma(X_i) - Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j) = 0,$$

si y sólo si,

$$Ad_\sigma - Ad_{\sigma^{-1}} = 0.$$

Equivalentemente si

$$Ad_\sigma = Ad_{\sigma^{-1}},$$

o

$$Ad_{\sigma^2} = Id,$$

lo cual, en nuestro caso es cierto ya que $Ad_\sigma = Id$. Es conveniente hacer una observación aquí, las condiciones para que la inmersión sea isométrica y Lagrangiana son respectivamente,

1. $Ad_\sigma + Ad_{\sigma^{-1}} = 2Id$,

2. $Ad_{\sigma^2} = Id$.

y estas son equivalentes a que $\sigma \in Z(G)$, lo cual, es equivalente a que la representación adjunta cumpla $Ad_\sigma = Id$, esto por la Proposición 1.3.18. Para probar esta afirmación, notemos que es evidente que la condición $Ad_\sigma = Id$ implica que las ecuaciones se satisfacen. Recíprocamente, si suponemos válidas estas ecuaciones podemos aplicar la representación adjunta a la primera de ellas obteniendo,

$$Ad_{\sigma^2} + Id = 2Ad_\sigma,$$

luego, utilizando la segunda de ellas y sustituyéndola en esta ecuación obtenemos,

$$2Id = 2Ad_\sigma,$$

lo que es equivalente a $Id = Ad_\sigma$. Por último, para probar que $\nu$ es totalmente geodésica, como en los casos anteriores calculamos,

$$\begin{aligned}
D_{d\nu(X_i)}d\nu(X_j) &= D_{(X_i, dR_\sigma(X_i))}(X_j, dR_\sigma(X_j)) \\
&= D_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(X_i)^h - \frac{1}{2}(X_i)^v + dR_\sigma(X_i)^v\right)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(X_j)^h - \frac{1}{2}(X_j)^v + dR_\sigma(X_j)^v\right) \\
&= \frac{3}{4}D_{(X_i)^h}(X_j)^h - \frac{\sqrt{3}}{4}D_{(X_i)^h}(X_j)^v + \frac{\sqrt{3}}{2}D_{(X_i)^h}(dR_\sigma(X_j))^v \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}D_{(X_i)^v}(X_j)^h + \frac{1}{4}D_{(X_i)^v}(X_j)^v - \frac{1}{2}D_{(X_i)^v}(dR_\sigma(X_j))^v \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}D_{(dR_\sigma(X_i))^v}(X_j)^h - \frac{1}{2}D_{(dR_\sigma(X_i))^v}(X_j)^v + D_{(dR_\sigma(X_i))^v}(dR_\sigma(X_j))^v \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^h - \frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^v\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^v\right) \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^h + \frac{2}{\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^v\right) \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}(\nabla_{X_i}X_j)^h\right) + \frac{1}{4}(\nabla_{X_i}X_j)^v - \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^v \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^h\right) - \frac{1}{2}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^v + (\nabla_{dR_\sigma(X_i)}dR_\sigma(X_j))^v \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\nabla_{X_i}X_j)^h - \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}X_j)^v - \frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^h + \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^v \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^h - \frac{1}{2}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^v + (\nabla_{dR_\sigma(X_i)}dR_\sigma(X_i))^v.
\end{aligned}$$

Notemos que, el último término

$$\nabla_{dR_\sigma(X_i)}dR_\sigma(X_i) = \frac{1}{2}[dR_\sigma(X_i), dR_\sigma(X_j)] = \frac{1}{2}dR_\sigma([X_i, X_j]) = dR_\sigma(\nabla_{X_i}X_j).$$

En los términos tres y cuatro, sustituyendo la Definición 3.1.4, de un campo horizontal o vertical, se tiene,

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^h + \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j))^v = \frac{1}{3}(-\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j), \nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j)).$$

De manera análoga, con los términos cinco y seis,

$$\frac{\sqrt{3}}{6}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^h - \frac{1}{2}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j)^v = \frac{1}{3}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j, -\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j).$$

En otras palabras tenemos,

$$\begin{aligned} D_{d\nu(X_i)}d\nu(X_j) &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla_{X_i}X_j)^h - \frac{1}{2}(\nabla_{X_i}X_j)^v + dR_\sigma(\nabla_{X_i}X_j) \\ & \quad \frac{1}{3}(-\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j), \nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j)) + \frac{1}{3}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j, -\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j) \\ &= d\nu(\nabla_{X_i}X_j) + \frac{1}{3}(-\nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j), \nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j)) \\ & \quad + \frac{1}{3}(\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j, -\nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j). \end{aligned}$$

De esto tenemos que $\nu$ es una inmersión totalmente geodésica si y sólo si,

$$\frac{1}{2}[X_i, dR_\sigma(X_j)] = \nabla_{X_i}dR_\sigma(X_j) = \nabla_{dR_\sigma(X_i)}X_j = \frac{1}{2}[dR_\sigma(X_i), X_j],$$

al aplicar a la ecuación la derivada de $L_\sigma^{-1}$ el cual es un difeomorfismo obtenemos la expresión equivalente,

$$\frac{1}{2}[X_i, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)] = \nabla_{X_i}Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) = \nabla_{Ad_{\sigma^{-1}}(X_i)}X_j = \frac{1}{2}[Ad_{\sigma^{-1}}(X_i), X_j].$$

La cual es equivalente a,

$$ad_{X_i}Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) = -ad_{X_j}Ad_{\sigma^{-1}}(X_i),$$

al utilizar la condición $Ad_\sigma = Id$, la cual implica, en particular que, $Ad_{\sigma^{-1}} = Id$, tenemos que,

$$ad_{X_i}Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) = -ad_{X_j}Ad_{\sigma^{-1}}(X_i),$$

es verdadero y por lo tanto, $\nu$ es una inmersión totalmente geodésica. □

**Ejemplo 17.** *Sea $\sigma \in G$. La función $\vartheta : G \to G \times G$ definida como $\vartheta(p) = (p^{-1}, p\sigma p^{-1}) = (i(p), \mu(R_\sigma(p), i(p)))$.*

*Demostración.* Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ un marco ortonormal de campos invariantes izquierdos de $G$. La imagen bajo la derivada de $\vartheta$ en la identidad para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es,

$$d|_e\nu(X_k) = (di(X_k), d(\mu(R_\sigma, i))(X_k)) = (-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)).$$

La inmersión $\vartheta$ es isométrica si para cada $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle d\vartheta(X_k), d\vartheta(X_j)\rangle = \langle(-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (-X_j, dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\rangle \\
&= h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (-X_j, dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), P(-X_j, dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\right) \\
&= h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (-X_j, dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (dL_{\sigma^{-1}}(dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)), -dL_\sigma(X_j)\right) \\
&= g\left(X_k, X_j\right) + g\left(dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k), dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(g\left(-X_k, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j\right) + g\left(dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k), -dL_\sigma(X_j)\right)\right).
\end{aligned}$$

Hacemos uso del hecho que la métrica de $G$ es bi-invariante tenemos que,

$$\begin{aligned}
\langle d\vartheta(X_k), d\vartheta(X_j)\rangle &= 3\delta_{kj} - g\left(dR_\sigma(X_k), dL_\sigma(X_j)\right) - g\left(dL_\sigma(X_k), dR_\sigma(X_j)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(2\delta_{kj} - g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right) - g\left(Ad_{\sigma^{-1}}(X_k), X_j\right)\right) \\
&= 2\delta_{kj} - \frac{1}{2}g\left(Ad_\sigma(X_k) + Ad_{\sigma^{-1}}(X_k), X_j\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la inmersión es isométrica si y sólo si,

$$Ad_\sigma(X_k) + Ad_{\sigma^{-1}}(X_k) = 2X_k.$$

Por otro lado, la inmersión $\vartheta$ es una inmersión Lagrangiana si para cada $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle d\vartheta(X_k), J_{(e,\sigma)}d\vartheta(X_j)\right\rangle = \left\langle(-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), J_{(e,\sigma)}(-X_j, dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\right\rangle \\
&= \left\langle(-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j, dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right)\right\rangle \\
&= h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j, dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), \frac{1}{\sqrt{3}}P\left(2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j, dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), \left(2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j, dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), \left(Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) + X_j, 2dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)\right)\right).
\end{aligned}$$

Utilizando ahora que la métrica en $G$ es bi-invariante, tenemos que la inmersión es Lagrangiana si y sólo si,

$$
\begin{aligned}
0 &= h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) - X_j, dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j))\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}h\left((-X_k, dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k)), (Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) + X_j, 2dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j))\right)\\
&= g\left(-X_k, 2Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) + X_j\right) + g\left(dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k), dL_\sigma(X_j) + dR_\sigma(X_j)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(g\left(-X_k, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j) + X_j\right) + g\left(dR_\sigma(X_k) - dL_\sigma(X_k), 2dR_\sigma(X_j) - dL_\sigma(X_j)\right)\right)\\
&= \delta_{kj} - 2g\left(X_k, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)\right) + g\left(dR_\sigma(X_k), dL_\sigma(X_j)\right) - g\left(dL_\sigma(X_k), dR_\sigma(X_j)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(2\delta_{kj} - g\left(X_k, Ad_{\sigma^{-1}}(X_j)\right) - g\left(dR_\sigma(X_k), dL_\sigma(X_j)\right) - 2g\left(dL_\sigma(X_k), dR_\sigma(X_j)\right)\right)\\
&= \delta_{kj} - 2g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right) + g\left(Ad_{\sigma^{-1}}(X_k), X_j\right) - g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right)\\
&\quad -\delta_{kj} + \frac{1}{2}g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right) + \frac{1}{2}g\left(Ad_{\sigma^{-1}}(X_k), X_j\right) + g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right)\\
&= \frac{3}{2}(-g\left(Ad_\sigma(X_k), X_j\right) + g\left(Ad_{\sigma^{-1}}(X_k), X_j\right)).
\end{aligned}
$$

Por lo que la inmersión es Lagrangiana si y sólo si,

$$Ad_\sigma - Ad_{\sigma^{-1}} = 0,$$

lo cual ocurre si y sólo si,

$$Ad_{\sigma^2} = Id.$$

□

# Bibliografía

[1] E. Abbena, S. Garbiero, *Almost Hemitian homogeneous manifolds and Lie groups*, Nihonkai Math. 4, 1993, 1, 1-15.

[2] M. Antić, N. Djurdjević, M. Moruz, L Vrancken, *Three-dimensional CR submanifolds ofthe nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$*,* Annali di Matematica Pura edApplicata, 198, 2019, 227-242.

[3] B. Bektaş, M. Moruz, J. Van der Veken, L. Vrancken,*Lagrangian submanifolds of the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *from minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 149, 2019, 3, 655-689.

[4] B. Bektaş, M. Moruz, J. Van der Veken, L. Vrancken, *Lagrangian submanifolds with constant angle functions of the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$*,* Journal of Geometry and Physics, 127, 2018, 1-13.

[5] A. Benjacu, *CR submanifolds of a Kaehler manifold. I*, Proceedings of the American Mathematical Society, 69 (1978), 1, 135-142.

[6] J. Bolton, F. Dillen, B. Dioos. L. Vrancken, *Almost complex surfaces in the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$*,* Tohoku Mathematical Journal, 67, 2015, 1 - 17.

[7] J. B. Butruille, *Classification des variété approximativement kähleriennes homogénes,* Annals of Global Analysis and Geometry, 27, 2005, 201–225.

[8] I. Casrto, F. Urbano, *Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form,* Tohoku Mathematical Journal, 45, 1993, 565-582.

[9] B. Y. Chen, *Construction of Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane with Legendre curves* Kodai Mathematics Journal, 29, 2006, 84-112.

[10] B. Y. Chen, *Lagrangian surfaces of constant curvature in complex Euclidean plane,* Tohoku Mathematical Journal, 56, 2004, 289-298.

[11] B. Y. Chen, *Riemannian Geometry of Lagrangian manifolds*, Taiwanese Journal of Mathematics, 5, 2001, 4, 681-723.

[12] B. Dioos, L. Vrancken, X. Wang, *Lagrangian submanifolds in the homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$*,* Annals of Global Analysis and Geometry, 53, 2018, 39–66.

[13] C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés*, In Topologie algébrique, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 12, 1949, 3–15.

[14] N. Ejiri, *Totally Real Submanifolds in a 6-Sphere*, Proceedings of the American Mathematical Society, 83, 4, 1981, 759-763.

[15] E. Ghandour, L. Vrancken, *Almost Complex Surfaces in the Nearly Kähler* $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$, Mathematics 2020, 8, 1160.

[16] M. do Carmo, *Riemanninan Geometry*, Birkhauser, 1992.

[17] A. Gray, *Almost complex submanifolds of the six sphere*, Proceedings of the American Mathematical Society, 2 1969, 277-279.

[18] A. Gray, L. M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Annali di Matematica pura ed applicata 123, 1980, 35–58.

[19] J. D. Lotay, *Ruled Lagrangian submanifolds of the 6-sphere,* Transactions of the American Mathematical Society, 363, 5, 2011, 2305–2339.

[20] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on lie groups*, Advances in Mathematics, 21, 3, 1976, 293-329.

[21] M. Moruz, L. Vrancken,*Properties of the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, Publications de lÍnstitut Mathematique, 103, 2018, 147-158.

[22] G. Ruiz-Hernández, *Minimal helix surfaces in* $N \times \mathbb{R}$, Abh, Math. Semin. Univ. Hambg., 81, 2011, 55-67.

[23] L. Vrancken, *Special Lagrangian submanifolds of the nearly Kaehler 6-sphere,* Glasgow Mathematical Journal, 45, 2003, 415-426.

[24] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 94, 1983.

[25] Y. Zhang, B. Dioos, L. Vrancken, X. Wang, *Lagrangian submannifolds in teh 6-dimensional nearly Kahler manifolds with parallel second fundamental form*, Journal of Geometry and Physics, 108, 2016, 21-37.