



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CARACTERIZACIÓN DE PROCESOS DE LÉVY ESPECTRALMENTE
POSITIVOS EN $[0, \infty)$ Y CONDICIÓN DE FRONTERA PEGAJOSA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MIRIAM RAMÍREZ GARCÍA

DIRECTOR
GERÓNIMO URIBE BRAVO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

SERGIO IVÁN LÓPEZ ORTEGA
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Introducción	IV
1. Notación y preliminares	1
1.1. La teoría de Itô sobre procesos puntuales de excursión	5
2. Procesos de Lévy espectralmente positivos en $[0, \infty)$	10
2.1. Extensiones recurrentes que dejan 0 continuamente	11
2.2. Condiciones de frontera de cualquier extensión recurrente	19
3. Procesos de Lévy pegajosos como solución a una ecuación de cambio de tiempo.	26
3.1. Análisis determinista	27
3.1.1. Monotonía y unicidad	28
3.1.2. Existencia	29
3.1.3. Aproximación	30
3.2. Aplicación a procesos de Lévy pegajosos	33
3.2.1. Existencia, unicidad y aproximación	33
3.2.2. Detalles de medibilidad y propiedad fuerte de Markov	34
3.2.3. Un problema de martingala	37
References	41
Bibliografía	42

Resumen

Motivado por modelos poblacionales que utilizan procesos de difusión, Feller caracterizó todos los movimientos brownianos en $[0, \infty)$. Un subproducto notable de dicha caracterización, fue el descubrimiento de un comportamiento pegajoso en la frontera. En este trabajo generalizamos la caracterización dada por Feller a una clase amplia de procesos de Lévy, a saber, aquellos sin saltos negativos y cuyas trayectorias tienen variación no acotada. En particular, encontramos procesos con un comportamiento pegajoso en la frontera, a los cuales nombramos procesos de Lévy pegajosos. Exhibimos una representación de estos últimos como solución a una ecuación de cambio de tiempo dirigida por un proceso Lévy. Tal solución es adaptada a la filtración cambiada de tiempo del proceso Lévy que dirige la ecuación. Esto contrasta con la ecuación diferencial estocástica que describe a un movimiento browniano pegajoso, la cual es conocida por no tener soluciones adaptadas. Se sabe que esa no adaptabilidad es una limitante para que aproximaciones naturales a la solución de la ecuación diferencial estocástica, converjan en probabilidad a pesar de converger débilmente. En cambio, nosotros encontramos un esquema de aproximación fuerte para la solución de nuestra Ecuación de Cambio de Tiempo (adaptando el método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias), siempre que podamos aproximar fuertemente al proceso de Lévy que dirige la ecuación.

Abstract

Motivated by population models using diffusion processes, Feller characterized all Brownian motions on $[0, \infty)$. A remarkable by-product of that characterization was the discovery of a sticky boundary behavior. In this work, we generalize the characterization given by Feller to a broad class of Lévy processes, namely those without negative jumps and whose paths have unbounded variation. In particular, we find processes with a sticky boundary behavior, which we name sticky Lévy processes. We exhibit a representation of the latter as a solution to a Time Change Equation driven by a Lévy process. Such a solution is adapted to the time-changed filtration of the Lévy process driving the equation. This is in contrast to the Stochastic Differential Equation describing a sticky Brownian motion, which is known to have no adapted solutions. A known consequence of such non-adaptability is that certain natural approximations to the solution of the corresponding SDE do not converge in probability, despite they do converge weakly. Instead, we provide strong approximation schemes for the solution of our TCE (by adapting Euler's method for ODEs), whenever the driving Lévy process is strongly approximated.

Introducción

Al comenzar este trabajo, pretendíamos usar al movimiento browniano pegajoso para mostrar un contexto donde las ecuaciones de cambio de tiempo (que abreviaremos como ECT) presentan cierta ventaja sobre las ecuaciones diferenciales estocásticas (o EDE). Con ello queríamos honrar la memoria de Wolfgang Doeblin, el precursor de las ECT, pues por razones históricas que narraremos más adelante, la representación de procesos de difusión dada por Doeblin usando este tipo de ecuaciones, es menos conocida que aquella dada por Kiyosi Itô mediante EDE. Sin embargo, nuestro deseo de describir situaciones más generales, nos llevó a reemplazar el movimiento browniano por otros procesos de Lévy en la ECT considerada, lo cual inevitablemente nos condujo al análisis de procesos de Markov en $[0, \infty)$. Usando la teoría de excursiones de Itô, alcanzamos una caracterización similar a la dada por William Feller para el movimiento browniano en $[0, \infty)$, ahora para procesos de Lévy espectralmente positivos con variación no acotada y que toman valores no negativos. Es así como esta tesis estudia las condiciones de frontera de procesos de Lévy en $[0, \infty)$, haciendo énfasis en el caso pegajoso. Basamos nuestro trabajo en dos herramientas: la teoría de excursiones y los cambios de tiempo, estos últimos en el sentido probabilístico, pero también en el sentido literal, pues viajamos en la historia para descubrir como los trabajos de distintos autores se entrelazan.

Empezamos nuestro viaje en la década de 1950, época en la que Feller analizaba los procesos de difusión con valores en un subespacio de la recta real y estudiaba su comportamiento en la frontera. Entre las razones que lo motivaron a realizar ese trabajo, se encontraba su interés en genética. Si modelamos el tamaño de una población por medio de una difusión, entonces tal proceso debe ser no negativo y resulta natural preguntarse ¿qué sucede después de que llega a 0? Usando la teoría de semigrupos, Feller descubrió que además de las clásicas condiciones de frontera conocidas hasta entonces (Dirichlet, Neumann y Robin), existen otros comportamientos posibles. Al respecto relata en [Fel52]: “*Various probability considerations and a long outstanding problem in genetics made it increasingly clear that, in addition to the classical types of boundary conditions there exist some of a new type. Physically speaking, there exist diffusion processes where a particle can be absorbed, and stay absorbed for a finite time, after which it penetrates slowly back into the interior*”. Por medio del generador infinitesimal, Feller describió todos los posibles comportamientos en la frontera de cualquier movimiento browniano en $[0, \infty)$, i.e., cualquier proceso fuerte de Markov con valores no negativos que se comporta como el movimiento browniano hasta la primera vez que llega a 0. Más precisamente, Feller expresó el dominio del generador infinitesimal de cualquier movimiento browniano en $[0, \infty)$ como el siguiente subconjunto de las funciones dos veces continuamente diferenciables en $[0, \infty)$

$$\{f \in C^2[0, \infty) : p_0 f(0) - p_1 f'(0) + \frac{p_2}{2} f''(0) - \int_0^\infty (f(y) - f(0))\mu(dy) = 0\},$$

donde p_0, p_1 y p_2 son constantes no negativas y μ es una medida en $(0, \infty)$, las cuales satisfacen

$$p_0 + p_1 + p_2 + \int (y \wedge 1)\mu(dy) = 1.$$

La novedad en el hallazgo de Feller fue la aparición de la segunda derivada en la condición de frontera. En particular, descubrió la condición $f'(0) = \gamma/2f''(0)$ para alguna constante $\gamma > 0$, la cual corresponde al caso donde 0 es un punto regular e instantáneo¹ en cual el proceso pasa una cantidad positiva de tiempo c.s. Denominamos movimiento browniano pegajoso (en 0) al proceso con este tipo de comportamiento en la frontera.

Es importante destacar que el resultado de Feller es de carácter analítico. En este punto, un problema que surgió de forma natural fue construir todos los procesos de difusión correspondientes a las condiciones de frontera halladas. Feller no estableció un procedimiento para hacerlo, pero conjeturó la posibilidad de usar el tiempo local para construir el proceso correspondiente a la condición de frontera elástica $\{f(0) = p_2/p_1 f'(0)\}$. Al respecto Itô relata en [Itô07]: “Feller had just finished his works on the most general one-dimensional diffusion process [...]. I learned about these from Henry McKean, a graduate student of Feller, while I explained my previous work to McKean. There was once an occasion when McKean tried to explain to Feller my work on the stochastic differential equations [...]. It seemed to me that Feller did not fully understand its significance, but when I explained Lévy’s local time to Feller, he immediately appreciated its relevance to the study of the one-dimensional diffusion. Indeed, Feller later gave us a conjecture that the Brownian motion on $[0, \infty)$ with an elastic boundary condition could be constructed from the reflecting barrier Brownian motion by killing its local time [...] at the origin by an independent exponentially distributed random time, which was eventually substantiated in my joint paper with McKean [IM63]”. En tal artículo, Itô y McKean dieron una construcción probabilística de todos los movimientos brownianos en $[0, \infty)$; su método involucra tiempos locales y excursiones fuera de cero. Años más tarde, Itô extendió esas ideas en [Itô72], donde consideró un proceso de Markov estándar X para el cual un punto específico a es recurrente. Su objetivo era determinar todas las posibles extensiones recurrentes del proceso X^a obtenido al detener el proceso X en el tiempo de primera llegada a a , denotado aquí por T_a . En otras palabras, pretendía describir la clase de todos los procesos fuertes de Markov que se comportan como X^a hasta llegar a a . La idea de Itô es que la totalidad de las excursiones fuera de a de tales procesos, puede formularse como un proceso de Poisson puntual estacionario con valores en cierto espacio de funciones. Itô mostró que la ley de cualquier extensión recurrente está únicamente determinada por la medida característica de un proceso de Poisson puntual asociado y por la ley de X^a . También probó que dicha medida característica satisface ciertas condiciones y aludió a la posibilidad de revertir el procedimiento para construir todas las posibles extensiones recurrentes de un proceso dado. Itô no enunció tal procedimiento de manera rigurosa. Años más tarde Robert Blumenthal [Blu83] y Thomas Salisbury [Sal86] mostraron que de hecho, se requieren condiciones más fuertes. Así, dado un proceso fuerte de Markov X con trayectorias càdlàg y recurrente en un punto a , se alcanzó una correspondencia biunívoca entre las extensiones recurrentes de X^a y la medida característica del proceso puntual de excursiones. En la primera parte de este trabajo, dado un proceso de Lévy espectralmente positivo X con trayectorias de variación no acotada, encontramos una descripción precisa de cualquier extensión recurrente de X^0 en términos de tres constantes no negativas y de una medida en $(0, \infty)$. Identificamos tales parámetros con las condiciones de frontera de la extensión, obteniendo un resultado similar al de Feller para caracterizar el dominio del generador infinitesimal.

Para enunciar nuestros resultados de forma precisa, dada una extensión recurrente Z de X^0 , denotamos por $L = (L_t, t \geq 0)$ a su tiempo local en 0, el cual es normalizado para satisfacer la condición $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-t} dL_t] = 1$. Sea $\tau = (\tau_t, t \geq 0)$ el inverso continuo por la derecha de L y \mathbf{n}

¹En el capítulo 1 recordamos definiciones y aclaramos la notación.

y \underline{n} las medidas de excursiones de Z y del proceso X reflejado en su ínfimo respectivamente, recordando que este último está dado por $\underline{R}_t = X_t - \underline{X}_t$ donde $\underline{X}_t = \inf\{X_s : s \leq t\}$. Escribamos Y para representar al proceso de excursiones fuera de 0 de Z .

Teorema 1. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo cuyas trayectorias tienen variación no acotada. Sea Z una extensión recurrente del proceso detenido X^0 . Entonces existen tres constantes no negativas p_c, p_d, p_κ y una medida μ en $(0, \infty)$ que satisfacen:*

1. $\int \mu(dx) \mathbf{E}_x[1 \wedge T_0] < \infty$.
2. Si $p_c = 0$ y $\mu((0, \infty)) < \infty$, entonces $p_d > 0$.
3. La medida característica del proceso de excursiones de Z fuera de 0 esta dada por

$$\mathbf{n} = p_c \underline{\mathbf{n}} + \int \mu(dx) \mathbf{P}_x^0.$$

4. $p_d + p_\kappa + p_c \int (1 - e^{-T_0}) d\underline{\mathbf{n}} + \int \mu(dx) \mathbf{E}_x^0[1 - e^{-T_0}] = 1$.
5. El inverso del tiempo local τ puede ser recuperado al matar a tasa p_κ al subordinador $\bar{\tau}_t = p_d t + \sum_{s \leq t} T_0(Y_s)$.

Teorema 2. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo cuyas trayectorias tienen variación no acotada. Cualquier función f en el dominio del generador infinitesimal \mathcal{G} de Z satisface:*

$$p_\kappa f(0) - p_c f'(0+) + p_d \mathcal{G}f(0+) - \int_{(0, \infty)} (f(y) - f(0)) \mu(dy) = 0. \quad (1)$$

donde p_c, p_d y p_κ cumplen la condiciones del teorema 1.

Al igual que en el resultado de Feller, vemos que una posible condición de frontera está descrita por $f'(0+) = \gamma \mathcal{G}f(0+)$ para alguna constante $\gamma > 0$. Generalizando el caso browniano, diremos que un proceso de Lévy en $[0, \infty)$ es pegajoso (en 0) si el origen es un punto regular e instantáneo en el que el proceso pasa una cantidad positiva de tiempo c.s. Es bien sabido que el movimiento browniano pegajoso satisface una EDE de la forma

$$Z_t = z + \int_0^t \mathbf{I}(Z_s > 0) dB_s + \gamma \int_0^t \mathbf{I}(Z_s = 0) ds, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

donde B es un movimiento browniano estándar, $\gamma > 0$ e \mathbf{I} denota la función indicadora. Se sabe que dicha ecuación no tiene soluciones fuertes, lo cual significa que cualquier proceso que satisface (2) involucra cierta aleatoriedad extra a la del movimiento browniano B . Este resultado fue conjeturado por A. V. Skorohod e inicialmente probado por R. Chitashvili en [Chi97] y posteriormente por algunos otros autores [War97, EP14, Bas14]. En contraste con la representación del movimiento browniano pegajoso como solución a una EDE, en la segunda parte de la tesis proponemos una representación de los procesos de Lévy espectralmente positivos con frontera pegajosa como solución a una ECT. La particularidad de esta representación es que no requiere alguna aleatoriedad extra a la generada por el proceso de Lévy que dirige la ecuación.

Para precisar a que nos referimos con ECT, viajemos otra vez al pasado, ahora a la época de la segunda guerra mundial, concretamente a febrero de 1940, cuando el matemático Wolfgang Doebelin, alemán de nacimiento pero nacionalizado francés, recurrió al procedimiento de *Pli cacheté* de la *Académie des Sciences* para resguardar su trabajo sobre la ecuación de Kolmogorov.

Tal procedimiento es una herramienta que le permite a un científico establecer su autoría en un descubrimiento, cuando por alguna razón no es capaz de publicarlo por el momento. Los manuscritos registrados bajo este procedimiento permanecen cerrados un siglo a menos que el autor o sus familiares lo reclamen. Doeblin tenía razones de peso para emplear dicho procedimiento. Tras defender su tesis doctoral en 1938, fue enlistado en el servicio militar e incorporado a un batallón. Alejado de cualquier contacto científico e inmerso en el ambiente de la segunda guerra mundial, luchaba contra la depresión haciendo matemáticas. Doeblin sabía que el tema de la ecuación de Kolmogorov estaba atrayendo mucho interés y temía ser precedido o plagiado. Lo angustiaba la idea de morir en la guerra y que los resultados de su investigación se perdieran. Por ello tomó sus precauciones: en una carta fechada el 12 de marzo de 1940, alertó a su mentor Maurice Fréchet sobre el envío del Pli y en un correo separado registrado el 13 de marzo de 1940, envió una copia de sus memorias a la Académie. Doeblin creía que la guerra no iba a durar mucho y que podría recuperar su manuscrito, o que Fréchet lo haría por él. Todo parecía estar bien planeado, pero las cosas no salieron como esperaba. Doeblin murió en junio de 1940. La guerra duro 5 años más. Después de la liberación de Francia la vida fue difícil. Fréchet olvidó completamente el Pli y la carta de Doeblin. Más de medio siglo transcurrió antes de que esa carta fuera encontrada. En mayo del 2000, los esfuerzos de Doeblin para preservar sus ideas finalmente alcanzaron el éxito y el contenido de su manuscrito fue dado a conocer. Entre las ideas que aparecen en tal documento se encuentra una avanzada² representación de los procesos de difusión no-homogéneos \mathbb{R} -valuados. De manera precisa, Doeblin describe las trayectorias de un tal proceso que empieza en x y cuyos coeficientes de deriva y difusión son respectivamente $(a(y, s))$ y $(\sigma(y, s))$, como

$$X_t = x + B \int_0^t \sigma^2(X_s, s) ds + \int_0^t a(X_s, s) ds,$$

donde B es un movimiento browniano. Pocos años después de que Doeblin encontrara dicha expresión, Itô halló una representación de los mismos procesos como solución a la EDE

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s, s) d\tilde{B}_s + \int_0^t a(X_s, s) ds,$$

donde \tilde{B} también denota a un movimiento browniano. La relación entre ambas expresiones dada por

$$B \int_0^t \sigma^2(X_s, s) ds = \int_0^t \sigma^2(X_s, s) d\tilde{B}_s,$$

podría ser entendida hasta años después con los trabajos de Dubins-Schwarz y Dambis, ambos en 1965.

En la segunda parte de esta tesis, nuestro resultado principal expone una situación en la que resulta más conveniente la representación de un proceso mediante una ECT que mediante una EDE. Para enunciar dicho resultado, fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el cual consideramos $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ una filtración que satisface las hipótesis habituales.

Teorema 3. *Sea X un proceso de Lévy espectralmete positivo, adaptado a $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, con trayectorias de variación no acotada y tiempo de vida infinito. Dados un parámetro $\gamma > 0$ y un punto $z \geq 0$, existe un par de procesos estocásticos $C = (C_t, t \geq 0)$ y $Z = (Z_t, t \geq 0)$ que satisfacen*

$$Z_t = z + X_{C_t} + \gamma \int_0^t \mathbf{I}(Z_s = 0) ds, \quad \text{donde} \quad C_t = \int_0^t \mathbf{I}(Z_s > 0) ds, \quad (3)$$

²Es importante destacar que la noción de martingala no existía en la época en que el Pli fue escrito.

para toda $t \geq 0$. Dicho par es único en el sentido de indistinguibilidad. Dado un par (C, Z) que verifica la ecuación (3), se cumple que C es un (\mathcal{F}_t) -cambio de tiempo, Z es adaptado a la filtración cambiada de tiempo $(\widehat{\mathcal{F}}_t, t \geq 0)$ dada por $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{C_t}$ y Z es una extensión recurrente de X^0 con frontera pegajosa.

Para explicar la hipótesis de variación no acotada, recordemos que esta implica que las derivadas de Dini de X son infinitas (como se probó originalmente en [Rog68]; ver [AHUB20] para una extensión y más aplicaciones). En otras palabras, en cualquier tiempo de paro T (como el tiempo de primera llegada a 0), se cumple que

$$-\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{X_{T+h} - X_T}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{X_{T+h} - X_T}{h} = \infty.$$

Esta condición nos permite probar que 0 es regular e instantáneo para Z . El siguiente (contra) ejemplo también muestra indirectamente su relevancia: la ecuación

$$h(t) = \beta \int_0^t \mathbb{I}(h(s) > 0) ds + \gamma \int_0^t \mathbb{I}(h(s) = 0) ds$$

no admite solución si $\beta < 0 < \gamma$. La dificultad con la ECT (3) es la discontinuidad de las funciones indicadoras en $(0, \infty)$ y en $\{0\}$. El éxito de su análisis se sigue de una descripción explícita de la solución en términos del procesos reflejado en el sentido de Skorohod, como veremos en la primera parte del Capítulo 3.

Nuestro último resultado exhibirá una consecuencia positiva de la adaptabilidad de la solución a la ECT. En [Bas14] se estudia un sistema equivalente a la EDE (2), en particular se argumenta que la no existencia de soluciones fuertes a dicho sistema, tiene como secuela que ciertas aproximaciones naturales a las soluciones de la EDE correspondiente, no convergen en probabilidad a pesar de converger débilmente. Nosotros presentamos un esquema de aproximación simple para la solución de la ECT (3) que converge casi seguramente.

Establecemos dicho resultado de convergencia, partiendo de una aproximación al proceso de Lévy X que dirige la ECT (3). Supongamos que tenemos $(X^n, n \geq 1)$ una sucesión de procesos discretos en tiempo tal que cada X^n está indexado por \mathbb{N}/n . Denotemos también por X^n a la extensión a $[0, \infty)$ del proceso correspondiente, tal que sus trayectorias pertenecen al espacio de funciones càdlàg \mathbb{D} y son constantes entre puntos consecutivos de \mathbb{N}/n . Supongamos que $X^n \rightarrow X$ en la topología de Skorohod, donde la convergencia puede ser débil o casi segura. Consideremos $(z_n, n \geq 1)$ una sucesión de reales no negativos que converge a z . Para cada $n \geq 1$, definiremos un par de procesos C^n y Z^n que aproximen a la solución de la ECT (3), ya sea débil o casi seguramente, dependiendo el tipo de convergencia de $(X^n, n \geq 1)$. Definimos los procesos C^n y Z^n como $C^n(0) = 0$,

$$C^n(t) = C^n(\lfloor nt \rfloor / n) + (t - \lfloor nt \rfloor / n) \mathbb{I}(Z^n(t) > 0) \quad (4)$$

y

$$Z^n(t) = (z_n + X^n - \gamma \text{Id})(C^n(\lfloor nt \rfloor / n)) + \gamma \lfloor nt \rfloor / n. \quad (5)$$

Observemos que C^n también se pueden escribir como

$$C_t^n = \int_0^t \mathbb{I}(z_n + X^n \circ C^n(\lfloor ns \rfloor / n) + \gamma(\lfloor ns \rfloor / n - C^n(\lfloor ns \rfloor / n)) > 0) ds, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

Teorema 4. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo con variación no acotada. Denotemos por (C, Z) a la única solución a la ECT (3). Consideremos $(X^n, n \geq 1)$ una sucesión de procesos con trayectorias en \mathbb{D} , tal que cada X^n es la extensión constante por pedazos de algún proceso discreto en tiempo indexado en \mathbb{N}/n que empieza en 0. Supongamos que $X^n \rightarrow X$ en la topología de Skorohod, ya sea débilmente o casi seguramente. Sea $(z_n, n \geq 1)$ una sucesión de reales no negativos que convergen al punto z . Para cada $n \geq 1$, definamos los procesos C^n y Z^n como en (4) y (5) respectivamente. Entonces el par (C^n, Z^n) converge a (C, Z) . El tipo de convergencia será débil o casi segura, dependiendo del tipo de convergencia de $(X^n, n \geq 1)$.*

Observemos que este procedimiento corresponde a una aproximación tipo Euler para las soluciones de la ECT (3). Si consideráramos esa misma ecuación pero ahora dirigida por un proceso para el cual no podamos garantizar la existencia de alguna solución, nuestro esquema de aproximación podría converger pero el límite podría no ser solución, como se muestra en el siguiente ejemplo simple pero ilustrativo. Sean $X = -\text{Id}$, $z = 0$, $\gamma = 1$ y $X^n(t) = -[nt]/n$. Entonces las aproximaciones propuestas en (4) y (5) se reducen a

$$C^n\left(\frac{2k-1}{n}\right) = C^n\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{k}{n} \quad \text{y} \quad Z^n\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{1}{n} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Estas sucesiones convergen a $C^*(t) = t/2$ y $Z^* = 0$, pero claramente dichos procesos no satisfacen la ECT (3).

Capítulo 1

Notación y preliminares

“Bad notation can make good exposition bad and bad exposition worse; ad hoc decisions about notation, made mid-sentence in the heat composition, are almost certain to result in bad notation.” [Hal70]

A lo largo de este trabajo adoptamos la notación $C[0, \infty)$ para representar al espacio de funciones continuas $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dotado con la métrica uniforme. Denotamos por $C_0[0, \infty)$, $C_b[0, \infty)$ y $C^k[0, \infty)$ a los subespacios de funciones continuas que se anulan al infinito, acotadas y k -veces continuamente diferenciables respectivamente. Mas generalmente, dada una función $u \in C[0, \infty)$ simbolizamos por $u'(x+)$ a su derivada por la derecha en un punto x , cuando esta exista, y consideramos la norma $\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |u(t)|$. Como es usual, abreviamos por *càdlàg* a la propiedad de una función de ser continua por la derecha y tener límite por la izquierda en cada punto. Denotamos por \mathbb{D} al espacio de funciones *càdlàg* $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$, donde Δ denota un punto aislado que funge como cementerio. Hacemos la convención de que cualquier función en $[0, \infty)$ puede extenderse a $[0, \infty) \cup \{\Delta\}$ definiendo $f(\Delta) = 0$. Denotaremos también por Δ a la función constante que toma el valor Δ , entendiéndose si nos referimos al punto cementerio o a la función constante Δ según el contexto. A los elementos de \mathbb{D} los llamamos *trayectorias*. Escribiremos $\mathbb{D}_0 = \{u \in \mathbb{D} : u(0) = 0\}$ para denotar el subespacio de trayectorias que empiezan en 0. Para una trayectoria $u \in \mathbb{D}$, definimos su *tiempo de vida* como

$$\zeta(u) = \inf\{s \geq 0 : u(s) = \Delta\},$$

acordando que $\inf \emptyset = \infty$. Dado un espacio topológico (E, \mathcal{T}) , denotaremos por $\mathcal{B}(E)$ a la σ -álgebra de los subconjuntos de Borel de un espacio E . En particular consideramos \mathbb{R} con la topología usual y \mathbb{D} dotado con la topología de Skorohod (ver [Bil99, Capítulo 3, Sección 12]). Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ consideramos el tiempo aleatorio

$$T_A(u) = \inf\{s > 0 : u(s) \in A\},$$

al cual llamamos el *tiempo de primera llegada* de u a un conjunto A si $u(0) \notin A$, o el *tiempo de primer retorno* a A si $u(0) \in A$. Para aligerar la notación, omitiremos el término u cuando no haya riesgo de confusión y denotamos por T_x al tiempo de primera llegada (o tiempo de primer retorno) al conjunto $\{x\}$. A las trayectorias que son constantes a partir de su tiempo de primer retorno a 0, las llamamos *excursiones* fuera de 0.

Para seguir la simbología usual introducimos la llamada notación canónica para los procesos estocásticos con trayectorias *càdlàg*. Sean $\Omega = \mathbb{D}$ y \mathcal{F} su σ -álgebra de Borel. Al proceso

$X = (X_t, t \geq 0)$ en Ω dado por $X_t(\omega) = \omega(t)$ si $t \geq 0$, lo llamamos *proceso canónico*. La familia de mapeos $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ con $t \geq 0$, definidos por $\theta_t \omega(s) = \omega(t+s)$ para toda $s \geq 0$, es llamada el *operador traslación*. También escribimos X_t^- y $\Delta X_t = X_t - X_t^-$ para denotar respectivamente al límite por la izquierda y al salto de X en el tiempo $t \in (0, \zeta)$.

Denotaremos por \mathbf{P} a una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) , bajo la cual X es un *proceso de Lévy*, esto es, un proceso estocástico \mathbb{R} -valuado, con trayectorias càdlàg, con incrementos independientes y estacionarios y tal que $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$. Para cualquier real x , escribimos \mathbf{P}_x para referirnos a la ley de $X + x$ bajo \mathbf{P} . De acuerdo a esto, escribimos \mathbf{E} y \mathbf{E}_x para representar a los operadores esperanza correspondientes. A menos que se especifique lo contrario, supondremos que $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es la filtración natural de X completada con todos los conjuntos \mathbf{P} -nulos de \mathcal{F} . Cabe recordar que al completar la filtración natural de un proceso de Lévy, la filtración resultante es continua por la derecha [Pro05, Capítulo I, Teorema 31].

Note que en todos nuestros resultados establecimos dos hipótesis para el proceso de Lévy X : ser espectralmente positivo y tener trayectorias de variación no acotada. En [Rog68] se prueba que si X tiene variación no acotada, entonces 0 es regular para $(-\infty, 0)$ y para $(0, \infty)$, i.e., $\mathbf{P}_0(T_{(-\infty, 0)=0}) = 1$ y $\mathbf{P}_0(T_{(0, \infty)=0}) = 1$ respectivamente. Usaremos esta implicación una y otra vez a lo largo del trabajo, pues la condición de regularidad nos permite aplicar otros resultados conocidos, por ejemplo el teorema 3.1 de [Mil77], el cual asegura que para cualquier proceso de Lévy X tal que $-X$ no es un subordinador y para el cual 0 es regular para $(0, \infty)$, se cumple que todas las trayectorias de X son continuas en los mínimos, esto es, si T es un tiempo aleatorio y $M \in [0, T]$ es el punto donde se alcanza el ínfimo \underline{X}_T , entonces condicional a $\{M < T\}$, se cumple $X_M = \underline{X}_T$ c.s. Este resultado se generaliza en [AHUB20]) para el caso de procesos con incrementos intercambiables.

Por otro lado analicemos la hipótesis de X de ser espectralmente positivo, i.e., $\Delta X_t \geq 0$ para toda $t \geq 0$. Se sabe que los procesos de Lévy cuyos saltos tienen el mismo signo presentan una enorme ventaja al momento de realizar cálculos sobre aquellos cuyos saltos cambian de signo. En particular, la ausencia de saltos de algún signo facilita trabajar con el *exponente de Laplace* ψ de X en vez del exponente característico. Dicho exponente satisface la igualdad

$$e^{\psi(\lambda)t} = \mathbf{E}[e^{-\lambda X_t}], \quad \lambda \geq 0.$$

Usando la desigualdad de Hölder se puede ver que ψ es una función estrictamente convexa y tiende a infinito cuando λ tiende a infinito. Denotemos por $\Phi(0)$ a la solución más grande de la ecuación $\psi(\lambda) = 0$. Como el mapeo $\psi : [\Phi(0), \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es continuo y estrictamente creciente, podemos considerar su inversa de Φ dada por

$$\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}, \quad q \geq 0.$$

Un resultado fundamental de la teoría de fluctuaciones que involucra a Φ , es el teorema 1 de [Ber96, Capítulo VII], el cual asegura que el ínfimo acumulado \underline{X} , dado por $\underline{X}_t = \inf\{X_s : s \leq t\}$ es un tiempo local para el proceso reflejado en su ínfimo $\underline{R} = X - \underline{X}$ y que su inverso

$$T(x) = \inf\{s \geq 0 : \underline{X}_s < -x\} = T_{(-\infty, -x)}, \quad x \geq 0$$

es un *subordinador* (proceso de Lévy con trayectorias no decrecientes) con exponente de Laplace Φ . Dicho de otro modo, T satisface

$$\mathbf{E}_x[e^{-qT(0)}] = \mathbf{E}[e^{-qT(x)}] = e^{-\Phi(q)x}, \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

La propiedad fuerte de Markov del proceso reflejado en su ínfimo, está garantizada por la proposición 1 de [Ber96, Capítulo VI]. Mientras que la proposición 3 de la misma referencia asegura que los pares de variables $(\underline{R}_t, -\underline{X}_t)$ y $(\overline{X}_t, \overline{R}_t)$ tienen la misma distribución bajo \mathbf{P} , donde $\overline{X}_t = \sup\{X_s : s \leq t\}$ es el supremo acumulado de X y $\overline{R} = \overline{X} - X$ es el proceso reflejado en su supremo.

Otro concepto importante en la teoría de fluctuaciones son las *funciones de escala*, las cuales son una familia de funciones $(W^{(q)}, q \geq 0)$ tales que $W^{(q)}(x) = 0$ si $x < 0$, mientras que en para $q \in [0, \infty)$, $W^{(q)}$ es la única función continua por la derecha cuya transformada de Laplace satisface

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q} \quad \text{para } \beta > \Phi(q).$$

La función $W^{(q)}$ es llamada la *función de q -escala*. Más propiedades de las funciones de escala se pueden consultar en [KKR12]. En particular, el lema 2.4 de [KKR12] asegura que bajo la hipótesis de variación no acotada de las trayectorias de X , su función de q -escala es continuamente diferenciable en $(0, \infty)$, y el teorema 2.7 de la misma referencia garantiza que si $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ y $q \geq 0$, entonces

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T(0)} e^{-qt} \mathbf{I}(X_t \in A) dt \right] = \int_A \left(e^{-\Phi(q)x} W^{(q)}(y) - W^{(q)}(y - x) \right) dy, \quad (1.2)$$

para todo $x > 0$. Retomaremos estas identidades en la Sección 2.1.

Recordemos también la llamada descomposición de Lévy-Itô, la cual describe la estructura de cualquier proceso de Lévy en términos de tres procesos de Lévy auxiliares, cada uno con diferente comportamiento trayectorial. Consideremos N el proceso puntual de los saltos de X dado por

$$N_t = \sum_{s \geq t} \delta_{(s, \Delta X_s)},$$

donde la suma se considera sobre los tiempos s tales que $\Delta X_s \neq 0$. En [Ber96, Capítulo 1, Teorema 1] se prueba que N es un proceso puntual de Poisson¹ con intensidad $\pi(ds, dx) = ds\nu(dx)$. A la medida característica ν , la cual está dada por $\nu(A) = \mathbb{E}[|\{s \in [0, 1] : \Delta X_s \in A\}|]$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se le conoce como la *medida de Lévy* de X y satisface la condición de integrabilidad $\int_{(0, \infty)} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$. Escribimos la descomposición de Lévy-Itô de X como

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}, \quad (1.3)$$

donde

$$X^{(1)} = at + \sigma B_t$$

es un movimiento browniano independiente de N , con coeficiente de difusión $\sigma^2 \geq 0$ y coeficiente de deriva a ,

$$X^{(2)} = \int_{(0, t]} \int_{[1, \infty)} x N(ds, dx)$$

es el proceso de Poisson compuesto formado por los saltos grandes de X , y finalmente

$$X^{(3)} = \int_{(0, t]} \int_{(0, 1)} x (N(ds, dx) - \nu(dx) ds)$$

¹Para la teoría general de procesos puntuales de Poisson se puede consultar [Itô15]. En particular en la sección 1.1 recordamos algunos resultados importantes sobre procesos puntuales de Poisson.

es una martingala cuadrado integrable. A lo largo de este trabajo supondremos que X tiene variación no acotada, lo cual es equivalente a que σ sea estrictamente positivo o que se satisfaga $\int_0^1 x\nu(dx) = \infty$. Bajo tal hipótesis se cumple que $X^{(3)}$ tiene una cantidad numerable de saltos en cualquier intervalo finito, cuya magnitud es menor que uno.

Para las definiciones y propiedades relacionadas con procesos de Markov (incluyendo pero no limitando a esperanza condicional, funciones de transición, propiedad fuerte de Markov, procesos de Feller, generador infinitesimal, problema de la martingala), referimos a los libros de [EK86] y [RY99] y adoptamos la notación de este último. Para los conceptos relacionados a cálculo estocástico, seguimos el libro de [Pro05] y adoptamos la notación empleada ahí. En particular, si X es una semimartingala denotaremos por $[X, X]$ a su variación cuadrática y escribiremos indiscriminadamente $\int H_s dX_s$ o $H \cdot X$ para referirnos a la integral estocástica de H con respecto a X , donde el integrando H es un proceso *predecible*, i.e., una función definida en (Ω, \mathbb{R}_+) medible con respecto a la sigma álgebra generada por todos los procesos adaptados y continuos en \mathbb{R}_+ .

A continuación enunciaremos algunos de los resultados de dichas referencias que aplicaremos más adelante.

Recordatorio 1.1. (Fórmula de Itô) *Sea X una semimartingala y sea f una función $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Entonces $f(X)$ también es una semimartingala y se cumple la fórmula*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s).$$

Recordatorio 1.2. ([Pro05, Capítulo II, Teorema 20]) *Sea X una martingala local localmente cuadrado integrable y sea H un proceso adaptado con trayectorias càglàd. Entonces la integral estocástica $H \cdot X$ también es una martingala local localmente cuadrado integrable.*

A veces es útil saber cuando una martingala local en realidad es una martingala. Los siguientes dos resultados nos dan condiciones suficientes para asegurarlo. Denotemos por $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$ y por $X^* = \sup_{s \geq 0} |X_s^*|$.

Recordatorio 1.3. ([Pro05, Capítulo I, Teorema 51]) *Sea X una martingala local. Si $\mathbb{E}[X_t^*] < \infty$ para toda $t \geq 0$, entonces X es una martingala. Si $\mathbb{E}[X^*] < \infty$ entonces X es una martingala uniformemente integrable.*

Recordatorio 1.4. ([Pro05, Capítulo II, Corolario 27.3]) *Sea M una martingala local. Entonces M es una martingala con $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ para toda $t \geq 0$ si y sólo si $\mathbb{E}[[M, M]_t] < \infty$ para toda $t \geq 0$ y en tal caso $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[[M, M]_t]$.*

Antes de recordar los resultados relacionados con los cambios de tiempo, formalicemos la idea natural de cambiar la velocidad a la que se recorren las trayectorias de un proceso.

Definición 1.1. *Un cambio de tiempo C es una familia de tiempos de paro $(C_t, t \geq 0)$ tal que los mapeos $t \mapsto C_s$ son crecientes c.s. y con trayectorias continuas por la derecha. Dado un proceso X , la composición $X_C = X \circ C$ es llamada el proceso cambiado de tiempo.*

Definición 1.2. *Decimos que un proceso X es adaptado a un cambio de tiempo C si, X es contante en cada intervalos $[C_{t-}, C_t]$.*

Note que para un cambio de tiempo continuo C , cualquier proceso es adaptado a C .

Recordatorio 1.5. ([RY99, Capítulo V, Ejercicio 1.12]) Considere un cambio de tiempo C y sea D un cambio de tiempo relativo a la filtración cambiada de tiempo $(\mathcal{F}_{C_t}, t \geq 0)$. Entonces el mapeo $t \mapsto C_{D_s}$ es un cambio de tiempo y la σ -álgebra cambiada de tiempo es $(\mathcal{F}_{C_{D_t}}, t \geq 0)$.

Recordatorio 1.6. (Parte de [Jac79, Teorema 10.17]) Si X es adaptado a un cambio de tiempo C , entonces el proceso $[X, X]$ también es adaptado a C y $[X_C, X_C] = [X, X]_C$.

Recordatorio 1.7. ([Jac79, Lema 10.18]) Sea X adaptado al cambio de tiempo C . Para todo proceso previsible y acotado H se cumple que $(H \cdot X)_C = (H_{C-}) \cdot (X_C)$.

Finalmente, dado que nuestro interés se centra en los procesos que se comportan como X fuera de 0 y en su comportamiento en este punto, dedicaremos un apartado en este capítulo para aclarar la noción referente a extensiones recurrentes e introducir la teoría de excursiones.

1.1. La teoría de Itô sobre procesos puntuales de excursión

“After several years it became my habit to observe even finite dimensional facts from the infinite dimensional viewpoint. This habit led me to reduce the problem above [The description of all possible extensions of a minimal diffusion up to the hitting time of the boundary point] to a Poisson point process with values in the space of excursions”. [Itô87]

Dado un proceso de Markov X , definimos el *proceso detenido* en su tiempo de primera llegada a 0 como

$$X_t^0 = X_{t \wedge T_0}, \quad t \geq 0,$$

donde empleamos la notación $a \wedge b$ para referirnos al mínimo entre los valores a y b . Escribimos $(\mathbf{P}_x^0, x \geq 0)$ para denotar las leyes de X^0 empezando en x . Por simplicidad escribimos $\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}_0^0$.

Decimos que X es *recurrente* en 0 si para todo $x \geq 0$, el proceso llega a 0 en tiempo finito \mathbf{P}_x -c.s., lo que formalmente se escribe como $\mathbf{P}_x(T_0 < \infty) = 1$ para toda $x \geq 0$. En particular notemos que cuando X es recurrente en 0, entonces no deriva a $\pm\infty$, y de acuerdo al Teorema 12 de [Ber96, Capítulo VI] sólo hay otro comportamiento posible, la *oscilación*. Esto significa que $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \limsup_{t \rightarrow \infty} (-X_t) = \infty$ c.s. Inversamente, si X oscila, entonces la ausencia de saltos negativos implica que empezando en cualquier punto, el tiempo que tarda X en tocar el 0 es finito. Por lo tanto, oscilar es una condición necesaria y suficiente para que X sea recurrente en 0.

Definición 1.3. Decimos que un proceso fuerte de Markov $Z = (Z_t, t \geq 0)$ con trayectorias càdlàg, con valores en $[0, \infty)$ y con leyes $(\mathbb{P}_x, x \geq 0)$, es una extensión recurrente de X^0 si 0 es recurrente y bajo \mathbb{P}_x , el proceso detenido Z^0 tiene ley \mathbf{P}_x^0 para todo punto $x > 0$.

Igual que antes omitiremos el subíndice 0 para denotar la ley \mathbb{P}_0 .

Si conociéramos la forma en que una extensión recurrente Z empieza desde 0, en principio, podríamos reiniciar el proceso cada vez que Z regresa al origen. Entonces las leyes de probabilidad de Z estarían determinadas por $(\mathbf{P}_x^0, x > 0)$ y \mathbb{P} . Este análisis se torna delicado cuando

empezando en 0, el proceso Z deja instantáneamente el origen y vuelve a él inmediatamente. Para precisar tal comportamiento, usamos la ley 0 – 1 de Blumenthal, gracias a la cual sabemos que el evento “ Z regresa a 0 en tiempos arbitrariamente pequeños” es trivial, o sea $\mathbb{P}(T_0 = 0)$ es cero o uno. Decimos que 0 es *irregular* en el primer caso y *regular* en el segundo. Cuando 0 es regular, consideramos $S_0 = \inf\{t \geq 0 : Z_t \neq 0\}$ el *tiempo de la primera salida de 0*. Nuevamente la ley 0 – 1 de Blumenthal asegura que $\mathbb{P}(S_0 = 0)$ es cero o uno, en otras palabras, el evento “ Z deja el origen instantáneamente” también es trivial. Decimos que 0 es un punto *instantáneo* cuando esta probabilidad es uno. El estudio de las excursiones fuera de 0 es particularmente interesante cuando 0 es regular e instantáneo, hipótesis que asumiremos a partir de ahora.

Una forma adecuada de estudiar las extensiones recurrentes de un proceso de Markov, recae en la teoría de excursiones introducida por Itô en [Itô72]. Denotemos por Π al *espacio de las funciones puntuales* con valores en $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$, i.e, el conjunto de todas las funciones $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $p(t) = \Delta$ excepto para una cantidad numerable de tiempos t . Sea \mathcal{P} la σ -álgebra generada por la función $p \mapsto N(A, p)$, donde N cuenta el número de veces t en las que se se satisface $(t, p(t)) \in A$ para cualquier conjunto $A \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{D})$. Diremos que p es σ -discreto si existe una sucesión de conjuntos $U_n(t) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{D})$ tal que $\mathbb{D} = \bigcup_n U_n(t)$ y $N((0, t] \times U_n(t), p) < \infty$ para todo $t > 0$ y todo $n \geq 1$. Dada una función puntual $p \in \Pi$ y un conjunto $A \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{D})$, definimos la *restricción* de p a A , denotada por $p|_A$, como sigue

$$p|_A(t) = \begin{cases} p(t), & \text{si } (t, p(t)) \in A, \\ \Delta, & \text{si } (t, p(t)) \notin A. \end{cases}$$

En particular, si $T \in \mathcal{B}([0, \infty))$, la restricción al conjunto $T \times \mathbb{D}$ es llamada la *restricción al dominio* y la denotamos por $p|_T^d$. Si en cambio restringimos a conjuntos de la forma $[0, \infty) \times U$ con $U \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$, entonces la llamamos la *restricción al rango* y escribimos $p|_U^r$.

Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una función $Y : \Omega \rightarrow \Pi$ es llamada *proceso puntual* si es medible relativo a \mathcal{F} y \mathcal{P} . Decimos que un proceso puntual $Y = (Y_t, t \geq 0)$ es *de Poisson* si satisface:

1. Es σ -discreto.
2. Para toda $t \geq 0$, la restricción al dominio $Y|_{(0,t]}^d$ y el proceso trasladado $\theta_t Y$ son independientes.
3. Para toda $t \geq 0$, el procesos trasladado $\theta_t Y$ tiene la misma distribución que Y .

Se sabe que dado un proceso puntual de Poisson Y , existe una medida σ -finita \mathbf{n} en \mathbb{D} , tal que

$$\mathbb{E}[N((0, t) \times U, Y)] = t\mathbf{n}(U),$$

para todas $t \geq 0$ y $U \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$. Dicha medida determina la ley de probabilidad de Y , razón por la cual se le llama la *medida característica* de Y . Más aún, Itô prueba en [Itô72, Teorema 4.2] que dada \mathbf{n} una medida σ -finita en \mathbb{D} , existe un proceso puntual de Poisson cuya medida característica es \mathbf{n} . Observemos que en la definición de funciones puntuales (y por lo tanto de procesos puntuales), la elección del espacio \mathbb{D} no juega algún papel especial, por lo que podemos sustituirlo por cualquier otro espacio V . Dados un proceso puntual de Poisson $Y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{D}$ con medida característica \mathbf{n} y dada una función $f : \mathbb{D} \rightarrow V$ medible relativo a $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ y $\mathcal{B}(V)$, la composición $f \circ Y : [0, \infty) \rightarrow V$ también resulta ser un proceso puntual de Poisson y su medida característica está dada por $\mathbf{n}f^{-1}$. Similarmente, si Y es un proceso puntual de Poisson

con valores en V y medida característica \mathbf{n} , entonces la restricción al rango de Y a un conjunto $U \in \mathcal{B}(V)$ también es un proceso puntual de Poisson y su medida característica es la restricción de \mathbf{n} a U , como se muestra en [Itô72, Teorema 4.7].

Regresando a las extensiones recurrentes de X^0 , Itô observó en [Itô72] que dada una extensión recurrente Z , si parametrizamos de forma adecuada su conjunto de ceros $\{t : Z_t = 0\}$, entonces las excursiones de Z fuera de 0, corresponden a los átomos de un proceso puntual de Poisson. La parametrización propuesta por Itô se basa en la existencia de un proceso no decreciente que c.s. sólo crece en el conjunto de ceros de Z , llamado el *tiempo local* de Z en 0, y denotado aquí por $L = (L_t, t \geq 0)$. Dicha existencia está garantizada en la teoría general de procesos de Markov, como se puede consultar en [Ber96, Capítulo IV] o [BG64]. Se sabe que el tiempo local es único salvo constantes multiplicativos. Para fijarlo, elijamos aquel tal que $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-t} dL_t] = 1$. Es bien sabido (ver por ejemplo el teorema 8 de [Ber96, Capítulo IV]) que el inverso continuo por la derecha del tiempo local

$$\tau_s = \inf\{t : L_t > s\}, \quad s \geq 0$$

es un subordinador posiblemente matado en un tiempo exponencial independiente e_κ , con algún parámetro $p_\kappa \geq 0$, al cual llamamos la *tasa de muerte*. Adoptamos la convención de que $e_\kappa = \infty$ si $p_\kappa = 0$ (una forma de interpretar la muerte de τ es notando que si la tasa de muerte es cero, entonces 0 es recurrente para Z , mientras que una tasa de muerte positiva implica que τ muere en tiempo finito y por lo tanto 0 es transitorio). De esta manera, podemos escribir τ como

$$\tau_s = \begin{cases} p_d s + \sum_{r \leq s} (\tau_r - \tau_r^-) & \text{si } s < e_\kappa, \\ \Delta & \text{si } s \geq e_\kappa, \end{cases}$$

para alguna constante $p_d \geq 0$ a la que llamamos *derivada*. De hecho, el corolario 6 de [Ber96, Capítulo IV] asegura que la constante p_d se relaciona con el tiempo que el proceso X pasa en 0 de la siguiente manera

$$\int_0^t \mathbb{I}(X_s = 0) ds = p_d L_t, \quad \text{para toda } t \geq 0. \quad (1.4)$$

Observemos que c.s. el complemento del conjunto de ceros de Z consiste de todos los intervalos abiertos maximales de $(0, \infty)$ en los cuales Z es estrictamente positivo. Parafraseando, si (g, d) es uno de esos intervalos, entonces el pedazo de trayectoria Z_{g+} toma valores estrictamente positivos en $(0, d - g)$. Resulta útil extender esos pedazos de trayectorias a $[0, \infty)$. Para hacerlo basta definirlos como 0 si $t \geq d - g$. Nos referiremos a esas trayectorias como las excursiones de Z fuera de 0 y a los intervalos $[g, d)$ como los intervalos de excursión. De manera formal, consideremos el proceso puntual $Y = (Y_s, s \geq 0)$ con valores en \mathbb{D} definido para $s \leq L_\infty$ como

$$Y_s(t) = \begin{cases} Z(\tau_s^- + t) & \text{si } 0 \leq t < \tau_s - \tau_s^-, \\ 0 & \text{si } t \geq \tau_s - \tau_s^-, \end{cases} \quad (1.5)$$

si $\tau_s^- < \tau_s$ y $Y_s = \Delta$ si $\tau_s^- = \tau_s$. El resultado principal de la teoría de excursiones de [Itô72] asegura que Y es un proceso puntual de Poisson al que llamamos el *proceso de excursiones* de Z fuera de 0. El esquema 1.1 puede ayudarnos a entender la definición de este proceso.

La medida característica de Y se llama la *medida de excursiones* de Z y se denota por \mathbf{n} . Usando la correspondencia entre los saltos de τ y la longitud de los intervalos de excursión de Z , el exponente de Laplace de τ se expresa como

$$\varphi(\lambda) = p_\kappa + p_d \lambda + \int (1 - e^{-\lambda T_0(u)}) \mathbf{n}(du), \quad \lambda \geq 0. \quad (1.6)$$

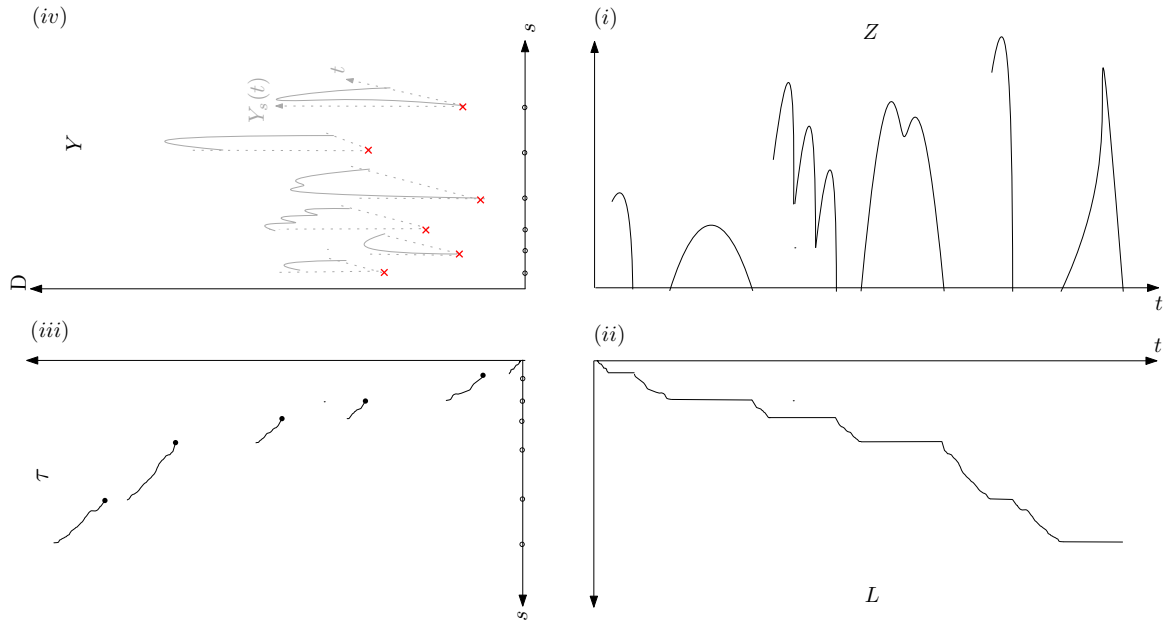


Figura 1.1: *Un bosquejo del proceso de excursiones.* En (i) graficamos sólo las excursiones grandes del proceso Z , pero recordemos que estamos bajo la hipótesis de que 0 es regular e instantáneo, razón por la cual el tiempo local en 0 se comporta como en el esquema (ii). Pongamos especial atención a los puntos de discontinuidad del inverso del tiempo local, que se puede apreciar en (iii), pues son los átomos del proceso puntual Y representado en (iv). Dado que Y toma valores en el espacio de trayectorias, la función Y_s se grafica como un punto en \mathbb{D} . Agregando un sistema de coordenadas en cada uno de esos puntos, graficamos la correspondiente excursión de Z fuera de 0, cuya longitud es el tamaño del salto de τ correspondiente.

En consecuencia $\mathbf{n}[1 \wedge T_0]$ es finito. Aquí hemos adoptado la notación $\mu[f] = \int f(x)\mu(dx)$ para cualquier medida μ y cualquier función integrable f .

La descripción de Z a través de su proceso de excursiones nos permite realizar muchos cálculos de manera explícita usando fórmulas de procesos puntuales de Poisson. Un resultado importante de la teoría de excursiones al que recurriremos más adelante, es la llamada fórmula de Maisonneuve (ver [Mai75]), la cual nos dice que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{g \in G} Y_g f \circ \theta_g \right] = \mathbf{n}(f) \mathbb{E} \left[\int_0^\infty Y_t dL_t \right] \quad (1.7)$$

para todo proceso predecible y positivo Y y para cualquier función medible f en la σ -álgebra de Z completada.

Decimos que una extensión recurrente Z de X^0 *deja 0 continuamente* si su medida de excursiones \mathbf{n} satisface que $\mathbf{n}(Z_0 > 0) = 0$. Si en cambio $\mathbf{n}(Z_0 = 0) = 0$, diremos que la extensión *deja 0 por un salto* c.s. Definimos la restricción de \mathbf{n} a las excursiones que dejan 0 continuamente como $\mathbf{n}^c(\cdot) = \mathbf{n}(\cdot \cap \{Z_0 = 0\})$ y la restricción a las excursiones que dejan 0 por un salto como $\mathbf{n}^d(\cdot) = \mathbf{n}(\cdot \cap \{Z_0 > 0\})$. En caso de que \mathbf{n}^d no sea idénticamente cero, resulta útil conocer en qué punto empiezan las excursiones que dejan 0 por un salto. Sea $e : \mathbb{D} \rightarrow (0, \infty) \cup \{\Delta\}$ definido como $e(u) = u(0)$ si $u(0) > 0$ y $e(u) = \Delta$ si $u(0) = 0$. Entonces $e \circ Y$ es un proceso puntual de Poisson con medida característica $\mu = \mathbf{n}e^{-1} = \mathbf{n}(\{Z_0 \in \cdot\} \cap \{Z_0 > 0\})$. Llamaremos a μ la *medida de saltos*. El teorema 2.3.3 de [Itô15] asegura que \mathbf{n}^d está determinada por la medida de saltos μ y por la ley de X^0 de la siguiente forma:

$$\mathbf{n}^d(U) = \int_{(0, \infty)} \mu(dx) \mathbf{P}_x^0(X^0 \in U), \quad (1.8)$$

para todo $U \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$.

Como comentamos anteriormente, dada una medida σ -finita \mathbf{n} en \mathbb{D} , existe un proceso puntual de Poisson con ella como su medida característica, pero saber bajo que condiciones corresponde a la medida de excursiones de alguna extensión recurrente de X^0 requiere un análisis más profundo. El teorema 6.4 de [Itô72] establece algunas condiciones necesarias para que esto suceda. En particular asegura que se debe cumplir alguno de los siguientes casos:

1. Caso discreto: \mathbf{n} es una medida de probabilidad concentrada en \mathbb{D}_0 .
2. Caso de permanencia exponencial: \mathbf{n} es finita pero no idénticamente cero y esta concentrada en $\{u \in \mathbb{D} : u(0) \neq 0\}$ y $\int_{\mathbb{D}} (1 - e^{-T_0(u)}) \mathbf{n}(du) < 1$,
3. Caso instantáneo: \mathbf{n} es infinita y $\mathbf{n}(\mathbb{D}_0)$ es cero o infinito.

Finalmente recordemos el teorema 2.3.5 de [Itô15], que asegura que en el caso 2, se cumple que $p_d \geq 0$ en general y $p_d > 0$ si μ es finita.

Capítulo 2

Procesos de Lévy espectralmente positivos en $[0, \infty)$

“The theory of general Markov processes is doubtless one of the most fascinating fields of probability, but it is also one of the most demanding. Nonetheless, the special case of Lévy processes is much easier to handle, thanks to techniques of Fourier analysis and the spatial homogeneity”. [Ber96]

En este capítulo, dado un proceso de Lévy espectralmente positivo X cuyas trayectorias tienen variación no acotada, encontramos una descripción precisa de la medida de excursiones de cualquier extensión recurrente de X^0 en términos de tres constantes no negativas y de una medida en $(0, \infty)$.

Teorema. (1) *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo cuyas trayectorias tienen variación no acotada. Sea Z una extensión recurrente del proceso detenido X^0 . Entonces existen tres constantes no negativas p_c, p_d, p_κ y una medida μ en $(0, \infty)$ que satisfacen:*

1. $\int \mu(dx) \mathbf{E}_x[1 \wedge T_0] < \infty$.
2. Si $p_c = 0$ y $\mu((0, \infty)) < \infty$, entonces $p_d > 0$.
3. La medida característica del proceso de excursiones de Z fuera de 0 esta dada por

$$\mathbf{n} = p_c \underline{\mathbf{n}} + \int \mu(dx) \mathbf{P}_x^0.$$

4. $p_d + p_\kappa + p_c \int (1 - e^{-T_0}) d\underline{\mathbf{n}} + \int \mu(dx) \mathbf{E}_x^0[1 - e^{-T_0}] = 1$.
5. El inverso del tiempo local τ puede ser recuperado al matar a tasa p_κ al subordinador $\bar{\tau}_t = p_d t + \sum_{s \leq t} T_0(Y_s)$.

La existencia de las constantes p_d y p_κ se sigue del capítulo anterior recordando que son la deriva del inverso del tiempo local de Z y su tasa de muerte respectivamente. Por lo que inmediatamente se cumple la condición 5 del teorema 1. Similarmente la medida μ es la medida de saltos que satisface (1.8). En particular, la condición de integrabilidad 1 del teorema 1 se sigue de (1.8) y el hecho de que $\mathbf{n}[1 \wedge T_0] < \infty$.

Recordando que definimos \mathbf{n}^c y \mathbf{n}^d como la restricción de \mathbf{n} a las excursiones que dejan 0 continuamente y a las excursiones que dejan 0 por un salto respectivamente, deducimos que \mathbf{n} admite la descomposición

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^c + \int_{(0,\infty)} \mu(dx) \mathbf{P}_x^0.$$

Entonces para concluir la descomposición de \mathbf{n} enunciada en el teorema 1, debemos probar que \mathbf{n}^c es un múltiplo de la medida de excursiones del proceso reflejado en el ínfimo (la cual hemos denotado por $\underline{\mathbf{n}}$). Nos encargaremos de este asunto en la siguiente sección. Teniendo establecida la descomposición de la medida característica en términos de las contantes p_c, p_d y la medida μ , la condición 2 se deduce de que la medida de excursiones \mathbf{n} satisface alguno de los tres casos enunciados en el capítulo de preliminares. Suponiendo que $p_c = 0$ y $\mu((0, \infty)) < \infty$, se debe cumplir el caso 2 y en consecuencia $p_d > 0$. Finalmente, la condición (4) se verifica de la normalización del tiempo local L y la representación del exponente de Laplace (1.6) de la siguiente manera:

$$1 = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-t} dL_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\tau_s} ds \right] = \int_0^\infty e^{-s(p_d + p_\kappa + \mathbf{n}[1 - e^{-T_0}])} ds = [p_d + p_\kappa + \mathbf{n}[1 - e^{-T_0}]]^{-1}.$$

2.1. Extensiones recurrentes que dejan 0 continuamente

“Describing the excursion measures for the Feller Brownian motions is only a simple exercise; but the decomposition into a part attributable to paths which leave the origin continuously and a part coming from paths which leave by a jump gives a good illustration of what happens also in the most general case”. [Blu92]

Nuestro objetivo ahora es describir \mathbf{n}^c en términos de $\underline{\mathbf{n}}$. Empezaremos analizando todas las extensiones que dejan 0 continuamente que no pasan tiempo positivo en dicho punto, para descubrir que se tratan del proceso reflejado en el ínfimo.

Proposición 2.1. *Existe a lo más una extensión recurrente de X^0 con tiempo de vida infinito, la cual c.s. deja 0 continuamente y no pasa tiempo positivo en 0.*

Demostración. Sea Z una extensión recurrente de X^0 con las características enunciadas. Mostraremos que los operadores resolventes $(R_\lambda, \lambda > 0)$ sólo dependen de X^0 y no de la extensión Z . De hecho, es bien sabido que basta considerar un sólo valor de λ (ver por ejemplo [Blu92, Capítulo 1, Sección 9]). Por simplicidad, tomaremos $\lambda = 1$. Por la propiedad fuerte de Markov para toda $f \in C_0[0, \infty)$ y para toda $x > 0$,

$$R_1 f(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T(0)} e^{-t} f(Z_t) dt \right] + \mathbb{E}_x \left[e^{-T(0)} \int_0^\infty e^{-t} f(Z_{t+T(0)}) dt \right] = R_1^0 f(x) + \mathbb{E}_x [e^{-T(0)}] R_1 f(0),$$

donde $(R_\lambda^0, \lambda > 0)$ representa los operadores resolventes de X^0 . Analicemos $R_1 f(0)$. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos recursivamente dos sucesiones de tiempos aleatorios como $T^{\varepsilon,1} = T_{[\varepsilon,\infty)}$,

$$D^{\varepsilon,k} = T^{\varepsilon,k} + T_0 \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \quad \text{y} \quad T^{\varepsilon,k+1} = D^{\varepsilon,k} + T_{[\varepsilon,\infty)} \circ \theta_{D^{\varepsilon,k}}, \quad k \geq 1.$$

Entonces $D^{\varepsilon,k}$ es el extremo derecho del intervalo correspondiente a la k -ésima excursión de Z tal que su altura mayor o igual que ε y $T^{\varepsilon,k}$ es la primera vez que Z pasa el nivel ε en la k -ésima excursión de altura es mayor o igual que ε . Con la convención de que $D^{\varepsilon,0} = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} R_1 f(0) &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{D^{\varepsilon,k}}^{D^{\varepsilon,k+1}} e^{-t} f(Z_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{D^{\varepsilon,k}}^{T^{\varepsilon,k+1}} e^{-t} f(Z_t) dt \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} f(Z_t) dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Notemos que en los intervalos de la forma $[D^{\varepsilon,k}, T^{\varepsilon,k+1})$ se satisface que $Z_t < \varepsilon$, permitiéndonos acotar la primera esperanza en (2.1) por $\|f\|_{\infty} \mathbb{E} [\int_0^{\infty} e^{-t} \mathbf{I}(Z_t < \varepsilon) dt]$. Dado que Z no pasa tiempo positivo en 0, este término converge a cero si $\varepsilon \rightarrow 0$. Para analizar el segundo término de (2.1), introducimos la siguiente función

$$F(x) = \frac{\mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-t} f(Z_t) dt \right]}{\mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right]}, \quad x > 0. \quad (2.2)$$

Observemos que en la definición anterior podemos reemplazar a Z (incluyendo su tiempo de llegada a 0 y la medida \mathbb{P}) por X sin afectar su valor

$$F(x) = \frac{\mathbf{E}_x^0 \left[\int_0^{T_0(X^0)} e^{-t} f(X_t^0) dt \right]}{\mathbf{E}_x^0 \left[\int_0^{T_0(X^0)} e^{-t} dt \right]} = \frac{\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_0(X)} e^{-t} f(X_t) dt \right]}{\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_0(X)} e^{-t} dt \right]}.$$

Lo cual significa que F sólo depende de X^0 y no de la extensión recurrente Z . Probaremos que existe el límite de $F(x)$ cuando $x \rightarrow 0+$, el cual coincide con el límite del segundo término en (2.1) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y por lo tanto con $R_1 f(0)$. Para verificar la existencia, haremos uso de las funciones de escala. Empezaremos suponiendo que f es la función indicadora sobre algún conjunto de Borel compacto $A \subseteq (0, \infty)$. Recordemos que en el capítulo de preliminares introdujimos el tiempo de paro $T(x) = \inf\{s \geq 0 : X_s < x\}$. Como 0 es regular para $(-\infty, 0)$, entonces $\mathbf{P}(T(0) = 0) = 1$. Gracias a la ausencia de saltos negativos y a la propiedad fuerte de Markov, deducimos que $\mathbf{P}_x(T(0) = T_0(X)) = 1$ para todo $x > 0$. Entonces podemos calcular $F(x)$ reemplazando $T_0(X)$ por $T(0)$. Usando las identidades (1.1) y (1.2) escribimos

$$F(x) = \frac{\int_A \left(e^{-\Phi(1)x} W^{(1)}(y) - W^{(1)}(y-x) \right) dy}{1 - e^{-\Phi(1)x}}.$$

Dado que el numerador y denominador convergen a cero cuando $x \rightarrow 0+$, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_A \left(-\Phi(1) e^{-\Phi(1)x} W^{(1)}(y) + \frac{d}{dx} W^{(1)}(y-x) \right) dy}{\Phi(1)},$$

donde el intercambio en el orden de la derivada con la integral se justifica gracias a la regla de Leibniz [PM91, Teorema 11.1], pues $W^{(1)} \in C^1(0, \infty)$ y A es compacto. Usando nuevamente el hecho de que $(W^{(1)})'$ es continua y el teorema de convergencia dominada, podemos intercambiar el orden del límite y la integral para deducir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_A \left(\frac{(W^{(1)})'(y)}{\Phi(1)} - W^{(1)}(y) \right) dy < \infty$$

cuando f es la función indicadora sobre algún conjunto de Borel compacto A . Concluimos el caso general argumentando con el teorema de clases monótonas y denotamos $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

Usaremos este límite para terminar el cálculo de $R_1 f(0)$ que dejamos pendiente en (2.1). Gracias a la propiedad fuerte de Markov podemos escribir el segundo término del lado derecho de (2.1) como

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} \mathbb{E}_{Z_{T^{\varepsilon,k}}} \left[\int_0^{T_0} e^{-t} f(Z_t) dt \right] \right].$$

Multiplicando por uno de forma adecuada obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} F(Z_{T^{\varepsilon,k}}) \mathbb{E}_{Z_{T^{\varepsilon,k}}} \left[\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right] \right].$$

Aplicando la propiedad fuerte de Markov, esto es lo mismo que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{-T^{\varepsilon,k}} F(Z_{T^{\varepsilon,k}}) \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \middle| \mathcal{F}_{T^{\varepsilon,k}}^Z \right] \right],$$

que a su vez se puede escribir como

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \{F(Z_{T^{\varepsilon,k}}) - F(0)\} \right] \quad (2.3)$$

$$+ \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} F(0) \right]. \quad (2.4)$$

Veamos que el término en (2.3) converge a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La definición de $F(0)$ se traduce en que para toda constante $c > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < z < \delta$, entonces $|F(z) - F(0)| < c$. Lo anterior nos permite acotar (2.3) por

$$c \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{T^{\varepsilon,k}}^{D^{\varepsilon,k}} e^{-t} dt \right) \mathbf{I}(Z_{T^{\varepsilon,k}} < \delta) \right] + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-T^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \mathbf{I}(\delta \leq Z_{T^{\varepsilon,k}}) \right]. \quad (2.5)$$

Observemos que la primera esperanza es menor o igual que uno y como $c > 0$ es arbitrario, podemos tomar δ suficientemente pequeño para que el primer término en (2.5) sea despreciable. Para analizar la segunda esperanza denotamos por $G^{\varepsilon,k}$ al extremo izquierdo del k -ésimo intervalo de excursión de Z cuya altura es mayor o igual que ε . Sea G el conjunto de extremos izquierdos de las excursiones de Z fuera de 0. Notemos que para todo $k \geq 1$ se tiene

$$e^{-T^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{T^{\varepsilon,k}} \leq e^{-G^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{G^{\varepsilon,k}}.$$

De esta desigualdad se desprende que la esperanza involucrada en el segundo término de (2.5) está acotada por

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-G^{\varepsilon,k}} \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \circ \theta_{G^{\varepsilon,k}} \mathbf{I}(\delta \leq Z_{T^{\varepsilon,k}}) \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{g \in G} e^{-g} \left\{ \left(\int_0^{T_0} e^{-t} dt \right) \mathbf{I}(\delta \leq Z_{T_{[\varepsilon, \infty)}}) \right\} \circ \theta_g \right].$$

Aplicando la fórmula de Maisonneuve para excursiones que recordamos en (1.7) vemos que la última esperanza coincide con

$$\mathbf{n} \left[(1 - e^{-T_0}) \mathbf{I}(\delta \leq Z_{T_{[\varepsilon, \infty)}}) \right] \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-t} dL_t \right].$$

Notemos que para $\delta > 0$ fija, esta cantidad converge a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$ pues Z deja 0 continuamente. Por lo tanto, toda la expresión (2.5) converge a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora analicemos el término (2.4), el cual se puede reescribir como

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_{T^{\varepsilon, k+1}}^{D^{\varepsilon, k+1}} e^{-t} dt \right] F(0) = \left(1 - \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_{D^{\varepsilon, k}}^{T^{\varepsilon, k+1}} e^{-t} dt \right] \right) F(0),$$

y esta última expresión converge a $F(0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, pues por hipótesis Z no pasa tiempo positivo en 0. Por lo tanto tomando el límite en (2.1) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$R_1 f(0) = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} F(x).$$

En consecuencia $R_1 f(x)$ sólo depende de X^0 y no de su extensión Z . \square

El siguiente paso es verificar que el proceso reflejado en el ínfimo \underline{R} es la única extensión recurrente de X^0 que satisface las condiciones de la proposición 2.1. Consideremos los procesos ínfimo acumulado y supremo acumulado dados por

$$\underline{X}_t = \inf\{X_s : s \leq t\}, \quad \overline{X}_t = \sup\{X_s : s \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

así como los procesos reflejados en su ínfimo y en su supremo respectivamente

$$\underline{R}_t = X_t - \underline{X}_t, \quad \overline{R}_t = \overline{X}_t - X_t, \quad t \geq 0.$$

Lema 2.1. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo con variación no acotada. Entonces el proceso reflejado en su ínfimo \underline{R} es una extensión de X^0 que c.s. deja 0 continuamente y no pasa tiempo positivo en 0. Además tiene tiempo de vida infinito.*

Demostración. La definición del proceso reflejado en su ínfimo asegura que \underline{R} toma valores no negativos y como dijimos en los preliminares, \underline{R} posee la propiedad fuerte de Markov. Para mostrar que c.s. deja 0 continuamente, probaremos que si g es el extremo izquierdo de algún intervalo de excursión, entonces $\underline{R}_g = 0$ c.s. En efecto, la ausencia de saltos negativos implica que \underline{X} es continuo y que $\underline{R}_g^- = 0$, i.e., $X_g^- = \underline{X}_g^- = \underline{X}_g$ donde la última igualdad nuevamente se sigue de la ausencia de saltos negativos. Como g es el extremo izquierdo de algún intervalo de excursión, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\underline{R} > 0$ en $(g, g + \varepsilon)$, garantizando que el mínimo de X en $[0, g + \varepsilon)$ se alcanza en g . La variación no acotada de X implica que 0 es regular para $(0, \infty)$. Aplicando el resultado de [Mil77] que recordamos en el capítulo de preliminares, el cual nos dice que bajo la hipótesis de regularidad, el proceso es continuo en el mínimo, obtenemos que X es continuo en g , i.e., $X_g = X_g^-$. Así $X_g = \underline{X}_g$ o equivalentemente $\underline{R}_g = 0$ c.s. como queríamos. Para ver que c.s. \underline{R} no pasa tiempo en 0, recordemos que los pares de variables $(\underline{R}_t, -\underline{X}_t)$ y $(\overline{X}_t, \overline{R}_t)$ tienen la misma distribución bajo \mathbf{P} . En consecuencia

$$\mathbf{P}(X_t = \underline{X}_t) = \mathbf{P}((\underline{R}_t, -\underline{X}_t) \in \{0\} \times [0, \infty)) = \mathbf{P}((\overline{X}_t, \overline{R}_t) \in \{0\} \times [0, \infty)) \leq \mathbf{P}(\overline{X}_t = 0).$$

Usando nuevamente la regularidad de 0 para $(0, \infty)$, vemos que esta última probabilidad es cero. Por lo tanto

$$\mathbf{E} \left[\int_0^{\infty} \mathbf{I}(\underline{R}_s = 0) ds \right] = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X_s = \underline{X}_s) ds = 0.$$

Finalmente, dado que el tiempo de vida de X es infinito, deducimos lo mismo para \underline{X} y en consecuencia para \underline{R} . \square

Finalizaremos esta sección usando la proposición 2.1 y el lema 2.1 para mostrar que, dada Z una extensión recurrente de X^0 , la parte continua de su medida de excursión \mathbf{n}^c coincide con la medida de excursión del proceso reflejado en el ínfimo $\underline{\mathbf{n}}$ salvo alguna constante multiplicativa. La idea de la prueba es utilizar Z para construir otra extensión recurrente Z^c de Z^0 que cumpla las condiciones de la proposición 2.1.

Proposición 2.2. *Sea Z una extensión recurrente de X^0 y sea \mathbf{n} su medida de excursiones. Entonces existe una constante no negativa p_c tal que la restricción de \mathbf{n} a las excursiones que empiezan continuamente está dada por $\mathbf{n}^c = p_c \underline{\mathbf{n}}$.*

Demostración. Como 0 es un punto regular, \mathbf{n} es una medida infinita, y como vimos en el capítulo de preliminares, sólo hay dos posibilidades para su parte continua \mathbf{n}^c , o bien es idénticamente cero, o bien es una medida infinita. En el primer caso se sigue trivialmente que \mathbf{n}^c es un múltiplo de $\underline{\mathbf{n}}$. Supongamos por tanto que \mathbf{n}^c es infinita. Sea Y el proceso puntual de las excursiones de Z fuera de 0. Consideremos el proceso puntual de las excursiones de Z que dejan 0 continuamente, o sea la restricción al rango $Y^c = Y|_{\mathbb{D}_0^c}$. Como observamos en el capítulo de preliminares, la restricción Y^c también es un proceso puntual de Poisson y que su medida característica es \mathbf{n}^c . Definimos $\tau_c = (\tau_c(s), s \geq 0)$ como el subordinador obtenido al considerar la longitud de las excursiones de Y^c , esto es,

$$\tau_c(s) = \sum_{r \leq s} (\tau_r - \tau_r^-) \mathbf{I}(Z(\tau_r^-) = 0).$$

Este proceso nos auxiliará en la construcción de Z^c indicándonos como realizar el pegado de las excursiones de Z que empiezan continuamente. Escribimos $L^c = (L_t^c, t \geq 0)$ para denotar el inverso continuo por la derecha de τ_c , el cual está dado por $L_t^c = \inf\{s > 0 : \tau_c(s) > t\}$. Dado $t \geq 0$, sea $s = L_t^c$ y definamos

$$Z_t^c = \begin{cases} Y_s^c(t - \tau_c^-(s)) & \text{si } \tau_c^-(s) \leq t < \tau_c(s), \\ 0 & \text{si } \tau_c^-(s) = \tau_c(s). \end{cases}$$

La figura 2.1 nos ayuda a entender la definición de Z^c .

Supongamos por un momento que $Z^c = (Z_t^c, t \geq 0)$ es un proceso fuerte de Markov. Observemos que Z^c no pasa tiempo positivo en 0 pues la deriva de τ_c es cero, como se puede deducir de la igualdad (1.4). Aplicando la proposición 2.1 y el lema 2.1, deducimos que Z^c tiene la misma distribución que el proceso reflejado en el ínfimo \underline{R} .

En este punto es necesario recordar que los tiempos locales son únicos salvo constantes multiplicativas, por lo que el inverso continuo por la derecha de un tiempo local depende de la constante considerada. Veamos como dicha elección afecta a la medida característica. Si \tilde{L} y \bar{L} son dos versiones del tiempo local de un proceso W , entonces existe una constante $c \geq 0$ tal que $\bar{L} = c\tilde{L}$. Por consiguiente, el inverso del tiempo local $\bar{\tau}$ está dado por $\bar{\tau}_t = \inf\{s : \tilde{L}_s \geq t/c\} = \tilde{\tau}(t/c)$ para $t \geq 0$. Sea \bar{Y} y \tilde{Y} los procesos puntuales de excursiones definidos en (1.5) obtenidos al considerar los tiempos locales \bar{L} y \tilde{L} respectivamente. Denotemos por $\bar{\mathbf{n}}$ y $\tilde{\mathbf{n}}$ a sus medidas características. Observemos que si $\tilde{\tau}^-(s/c) < \tilde{\tau}(s/c)$, entonces .

$$\bar{Y}_s(t) = \begin{cases} W(\tilde{\tau}^-(s/c) + t) & \text{si } 0 \leq t < \tilde{\tau}(s/c) - \tilde{\tau}^-(s/c), \\ 0 & \text{si } t \geq \tilde{\tau}(s/c) - \tilde{\tau}^-(s/c). \end{cases}$$

Mientras que $\bar{Y}_s = \Delta$ si $\tilde{\tau}^-(s/c) = \tilde{\tau}(s/c)$. En otras palabras, $\bar{Y}'_s = \tilde{Y}'_{s/c}$. Esto implica que para todo conjunto $U \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ y para todo $s > 0$ se cumple que

$$s\bar{\mathbf{n}}(U) = N((0, s) \times U, \bar{Y}) = N((0, cs) \times U, \tilde{Y}) = cs\tilde{\mathbf{n}}(U).$$

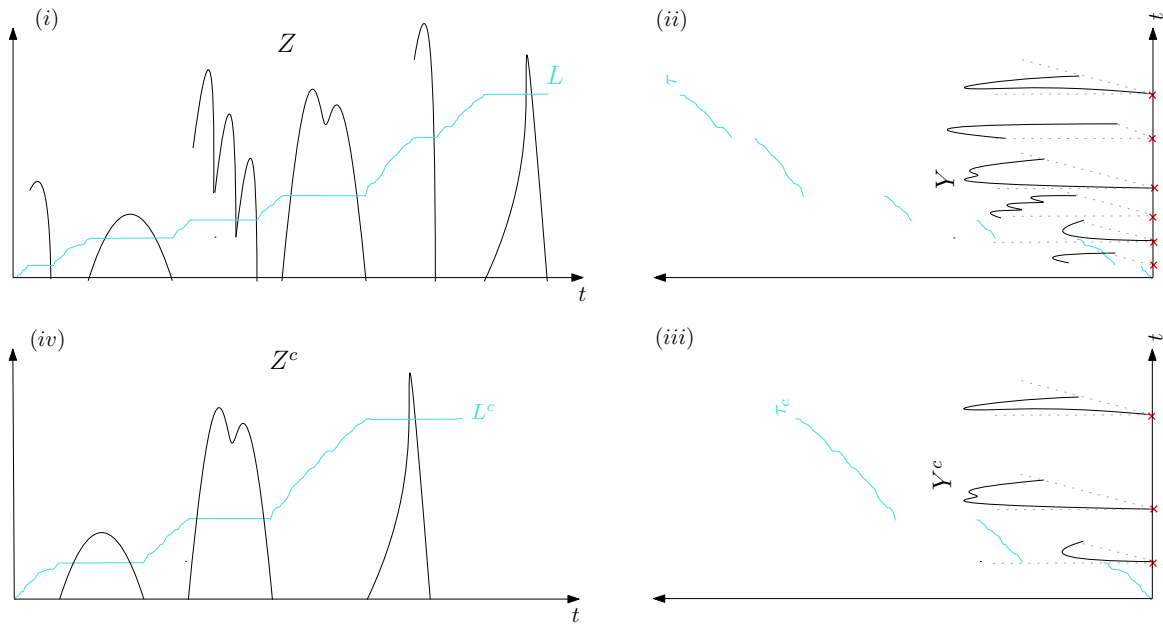


Figura 2.1: *Construcción del proceso Z^c a partir de Z .* En (i) graficamos el proceso original Z y en azul su tiempo local en 0. En (ii) observamos en azul τ el inverso del tiempo local y en negro un bosquejo del proceso de excursiones Y . Dado que este proceso toma valores en \mathbb{D} , la representación aquí debe entenderse como la presencia de una excursión en cada discontinuidad de τ . En (iii) restringimos Y a las excursiones que comienzan continuamente y construimos τ_c al sumar los saltos de τ correspondientes a las excursiones que empiezan continuamente. Finalmente en (iv) pegamos las excursiones de Y^c de acuerdo a τ_c .

Por lo tanto $\bar{n} = c\bar{\mathbf{n}}$.

Aplicando esta observación al proceso Z^c concluimos que existe una constante no negativa p_c tal que $\mathbf{n}^c = p_c \mathbf{n}$.

Resta verificar la propiedad fuerte de Markov, para hacerlo requerimos algunos preparativos. Empezaremos notando que τ_c es estrictamente creciente. Recordemos que estamos bajo la hipótesis de que \mathbf{n}^c es una medida infinita, i.e., $\mathbf{n}^c(\mathbb{D}) = \infty$. Entonces para todo $t > 0$ se cumple

$$\mathbb{E}[N((0, t) \times \mathbb{D}_0, Y)] = t\mathbf{n}(\mathbb{D}_0) = t\mathbf{n}^c(\mathbb{D}) = \infty.$$

Interpretando esta identidad en términos del proceso de excursiones que empiezan continuamente Y^c , deducimos que en cualquier intervalo $(0, t)$, el proceso de Poisson Y^c tiene una infinidad de átomos, los cuales corresponden a puntos de discontinuidad de τ_c . En otras palabras, para cualesquiera $0 < s < t$, se satisface

$$\tau_c(t) - \tau_c(s) = \sum_{s < r \leq t} (\tau_r - \tau_r^-) \mathbf{I}(Z(\tau_r^-) = 0) > 0,$$

como queríamos. A continuación definiremos un cambio de tiempo $\alpha = (\alpha(t), t \geq 0)$ de forma que Z^c pueda expresarse como el proceso Z cambiado de tiempo. Si denotamos por $(\mathcal{F}_t^{Z^c}, t \geq 0)$ a la filtración natural de Z^c y por $(\mathcal{F}_t^Z, t \geq 0)$ a la correspondiente a Z , tendremos que $\mathcal{F}_T^{Z^c} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha(T)}^Z$ para cualquier $(\mathcal{F}_t^{Z^c})$ -tiempo de paro T . Esta contención nos facilitará concluir la propiedad fuerte de Markov de Z^c a partir de la de Z en el tiempo aleatorio $\alpha(T)$.

Para definir el cambio de tiempo α , fijemos $t > 0$ y supongamos primero que t pertenece a algún intervalo de excursión (no degenerado) de Z^c , en otras palabras, se da la desigualdad $\tau_c^-(L_t^c) \leq t < \tau_c(L_t^c)$. La construcción del proceso con trayectorias que empiezan continuamente, establece que

$$Z_t^c = Y_{L_t^c}^c(t - \tau_c^-(L_t^c)) \mathbf{I}(\tau_c^-(L_t^c) < \tau_c(L_t^c)) = Y_{L_t^c}(t - \tau_c^-(L_t^c)). \quad (2.6)$$

Recordando que τ_c se definió como la suma de los saltos de τ correspondientes a las excursiones de Z que empiezan continuamente, notamos que

$$0 \leq t - \tau_c^-(L_t^c) < \tau_c(L_t^c) - \tau_c^-(L_t^c) = \tau(L_t^c) - \tau^-(L_t^c).$$

Usando la definición del proceso puntual de excursiones Y dada en (1.5), reescribimos (2.6) como

$$Z_t^c = Z(\tau^-(L_t^c) + t - \tau_c^-(L_t^c)).$$

Observemos también que $Z(\tau^-(L_t^c)) = 0$ implica que $\tau_c(L_t^c) - \tau_c^-(L_t^c) = \tau(L_t^c) - \tau^-(L_t^c)$, por lo que la ecuación anterior se reescribe como

$$Z_t^c = Z(\tau(L_t^c) + t - \tau_c(L_t^c)). \quad (2.7)$$

Analicemos ahora el caso cuando $t = \tau_c^-(L_t^c) = \tau_c(L_t^c)$. Bajo esta hipótesis, el lado derecho de (2.7) se reduce a $Z(\tau(L_t^c))$. Gracias a la ausencia de saltos negativos vemos que ambos lados de la ecuación (2.7) se anulan. Por lo tanto la identidad (2.7) siempre se satisface. Para cada $t \geq 0$, definamos un tiempo aleatorio estrictamente creciente de la siguiente manera

$$\alpha(t) = \tau(L_t^c) + t - \tau_c(L_t^c).$$

Para verificar que $\alpha(t)$ es un (\mathcal{F}_r^Z) -tiempo de paro, fijamos $r \geq 0$ y descomponemos el conjunto $\{\alpha(t) \leq r\}$ como la unión de ciertos conjuntos de acuerdo a si $\alpha(t)$ y r pertenecen o no al

mismo intervalo de excursión, y en caso de que sí, lo separamos dependiendo si la excursión empezó continuamente o con un brinco. En este último caso, notamos que la única forma en que $\alpha(t) \leq r$, es si r es el extremo derecho de la excursión. Más precisamente, escribimos $\{\alpha(t) \leq r\} = A \cup B \cup C$, donde

$$\begin{aligned} A &= \{\tau^-(L_t^c) = \tau^-(L_r), \tau^-(L_t^c) + t - \tau_c^-(L_t^c) \leq r, Z(\tau^-(L_r)) = 0\}, \\ B &= \{\tau^-(L_t^c) = \tau^-(L_r), r = \tau(L_r), Z(\tau^-(L_r)) > 0\}, \\ C &= \{\tau(L_t^c) < \tau^-(L_r)\}. \end{aligned}$$

A continuación reescribiremos los tres conjuntos de forma adecuada para ver que son medibles con respecto a \mathcal{F}_r^Z . Afirmamos que

$$A = \{\tau_c^-(L_r) \leq t \leq \tau_c^-(L_r) + r - \tau^-(L_r), Z(\tau^-(L_r)) = 0\}.$$

Dado que τ y τ_c son estrictamente crecientes, deducimos que $\tau^-(L_t^c) = \tau^-(L_r)$ equivale a $\tau_c^-(L_t^c) = \tau_c^-(L_r)$. Suponiendo que se satisface cualquiera de estas igualdades, la condición $\tau^-(L_t^c) + t - \tau_c^-(L_t^c) \leq r$ se reescribe como $\tau^-(L_r) + t - \tau_c^-(L_r) \leq r$. Ahora veamos que

$$B = \{\tau_c^-(L_r) = t = \tau_c(L_r), r = \tau(L_r)\}.$$

Para ello notemos que $Z(\tau^-(L_r)) > 0$ es equivalente a $\tau_c^-(L_r) = \tau_c(L_r)$ e igual que en el caso anterior, la igualdad $\tau^-(L_t^c) = \tau^-(L_r)$ se cumple si y sólo si $\tau_c^-(L_t^c) = \tau_c^-(L_r)$. Finalmente mostraremos que

$$C = \{t < \tau_c^-(L_r)\}.$$

Como τ y τ_c son estrictamente crecientes, entonces la desigualdad $\tau(L_t^c) < \tau^-(L_r)$ es equivalente a $\tau_c(L_t^c) < \tau_c^-(L_r)$ y esto sucede si y sólo si $t < \tau_c^-(L_r)$. Establecidas estas tres identidades de conjuntos, concluimos que $\alpha(t)$ es un (\mathcal{F}_r^Z) -tiempo de paro y por lo tanto $(\alpha(t), t \geq 0)$ es un cambio de tiempo. Dado que $Z^c = (Z_{\alpha(t)}, t \geq 0)$, deducimos que $\mathcal{F}_t^{Z^c} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha(t)}^Z$ para toda $t \geq 0$.

Ya estamos listos para verificar la propiedad fuerte de Markov de Z^c . Sea T un $(\mathcal{F}_t^{Z^c})$ -tiempo de paro. Aproximando a T por una sucesión de tiempos de paro que solamente toman una cantidad numerable de valores, no es complicado ver que $\alpha(T)$ es un (\mathcal{F}_t^Z) -tiempo de paro y que $\mathcal{F}_T^{Z^c} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha(T)}^Z$. Denotemos por \bar{Z} al proceso trasladado $Z \circ \theta_{\alpha(T)}$ y sea \bar{L} su tiempo local en 0, entonces

$$\bar{L}_s = L_{\alpha(T)+s} - L_{\alpha(T)} = L_{\alpha(T)+s} - L_T^c,$$

donde la segunda igualdad se obtiene al notar que $\tau^-(L_t^c) \leq \alpha(T) \leq \tau(L_T^c)$. Sea $\bar{\tau}$ el inverso del tiempo local de \bar{Z} , i.e.,

$$\bar{\tau}_s = \inf\{u : L_{\alpha(T)+u} > L_T^c + s\} = \tau(L_T^c + s) - \alpha(T).$$

Denotemos por $\bar{\tau}_c$ al subordinador obtenido al sumar la longitud de las excursiones de \bar{Z} que empiezan continuamente

$$\bar{\tau}_c(s) = \bar{\tau}_0 + \sum_{0 < r \leq s} (\bar{\tau}_r - \bar{\tau}_r^-) \mathbf{I}(\bar{Z}(\bar{\tau}_r^-) = 0),$$

aquí hemos hecho la convención de que el primer intervalo de excursión es $[\alpha(T), \tau(L_T^c)]$ (el cual puede ser trivial si la excursión de \bar{Z} que contiene a $\alpha(T)$ empieza por un salto). Escribiendo

esta expresión en términos de Z y sus correspondientes funcionales obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_c(s) &= (\tau(L_T^c) - \alpha(T)) + \sum_{0 < r \leq s} (\tau(L_T^c + r) - \tau^-(L_T^c + r)) \mathbf{I}(Z(\tau^-(L_T^c + r)) = 0) \\
&= -T + \tau_c(L_T^c) + \sum_{L_T^c < r \leq L_T^c + s} (\tau_r - \tau_r^-) \mathbf{I}(Z(\tau_r^-) = 0) \\
&= \tau_c(L_T^c + s) - T.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea \bar{L}^c su inverso continuo por la derecha, esto es

$$\bar{L}_s^c = \inf\{u : \tau_c(L_T^c + u) > T + s\} = L_{T+s}^c - L_T^c.$$

Con la ayuda de los procesos trasladados, podemos escribir

$$Z_{\alpha(T+s)} = \bar{Z}(\bar{\tau}(\bar{L}_s^c) + s - \bar{\tau}_c(\bar{L}_s^c)). \quad (2.8)$$

Denotemos por F_s al funcional que manda el proceso Z a $Z_{\alpha(s)}$, i.e.,

$$Z \mapsto Z(\tau(Z)(L^c(Z)_s) + s - \tau_c(Z)(L^c(Z)_s)),$$

donde hemos escrito entre paréntesis el término Z para especificar la dependencia en Z de cada uno de los procesos. Entonces la ecuación (2.8) es equivalente a

$$Z_{\alpha(T+s)} = F_s(\bar{Z}) = F_s(Z \circ \theta_{\alpha(T)}).$$

Gracias a la propiedad fuerte de Markov de Z , la probabilidad condicional $\mathbb{P}(Z_{T+s}^c \in \cdot | \mathcal{F}_T^{Z^c})$ es igual a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Z_{\alpha(T+s)} \in \cdot | \mathcal{F}_{\alpha(T)}^Z) \middle| \mathcal{F}_T^{Z^c}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{Z_{\alpha(T)}}(Z_{\alpha(s)} \in \cdot) \middle| \mathcal{F}_T^{Z^c}\right] = \mathbb{P}_{Z_T^c}(Z_s^c \in \cdot).$$

Esto concluye la prueba de la propiedad fuerte de Markov y con ello la unicidad de las extensiones recurrentes que dejan 0 continuamente y que no pasan tiempo positivo en 0. \square

2.2. Condiciones de frontera de cualquier extensión recurrente

“Feller’s greatest discovery in mathematics was sticky (or slowly reflecting) boundary behaviour of one-dimensional diffusion processes (characterised by the appearance of the second derivative at the boundary point). Before him (Dirichlet, Neumann, Robin) it was not known that this was possible. A boundary condition containing the second derivative (in one dimension) should therefore be referred to as Feller boundary condition[...] and extensions of this condition to higher dimensions should likewise contain the name of Feller”. [Pes14]

En esta sección abordamos la prueba del teorema 2, cuyo objetivo es dar una descripción similar a la de Feller para los posibles comportamientos en la frontera de cualquier extensión recurrente de X^0 .

Teorema. (2) Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo cuyas trayectorias tienen variación no acotada. Cualquier función f en el dominio del generador infinitesimal \mathcal{G} de Z satisface:

$$p_\kappa f(0) - p_c f'(0+) + p_d \mathcal{G}f(0+) - \int_{(0,\infty)} (f(y) - f(0))\mu(dy) = 0. \quad (1)$$

donde p_c, p_d y p_κ cumplen la condiciones del teorema 1.

Recordemos que Feller determinó dichos comportamientos a través del dominio de su generador infinitesimal. Cabe señalar que las extensiones recurrentes no necesariamente son procesos de Feller, por lo que cuando hablamos del generador infinitesimal, nos referimos al operador extendido, i.e., aquel que satisface el problema de la martingala [RY99, Capítulo VII, Definición 1.8].

Manteniendo la notación del teorema 1, podemos juntar la constante p_κ y la medida μ para definir una medida no negativa μ_κ en el espacio extendido $(0, \infty) \cup \{\Delta\}$ de forma que la restricción de μ_κ a $(0, \infty)$ sea μ , mientras que la restricción a $\{\Delta\}$ coincida con $p_\kappa \delta_\Delta$, donde δ_Δ es la delta de Dirac centrada en Δ . Recordando la convención $f(\Delta) = 0$, vemos que la condición de frontera (1) enunciada en el teorema 2, se transforma en

$$-p_c f'(0+) + p_d \mathcal{G}f(0+) - \int_{(0,\infty) \cup \{\Delta\}} (f(y) - f(0))\mu_\kappa(dy) = 0.$$

En términos probabilísticos interpretamos este cambio, como la identificación de la muerte con un salto al estado cementerio Δ .

Dividiremos la demostración del teorema 2 en varios resultados, el primero de los cuales aparece en [Yan14, Lema 3.1]. Decidimos incluirlo con la intención de que la prueba del teorema referido esté completa.

Lema 2.2. Para cualquier $\lambda > 0$ y para todo $t \geq 0$ se satisface la siguiente igualdad c.s.

$$\int_0^{\tau_t} e^{-\lambda s} \mathbf{I}(Z_s = 0) ds = p_d \int_0^t e^{-\lambda \tau_s} ds.$$

Demostración. Sea $t > 0$. Recordemos que la igualdad (1.4) establece la relación entre el tiempo que Z pasa en 0 y el inverso de su tiempo local. Así

$$\int_0^{\tau_t} \mathbf{I}(Z_s = 0) ds = p_d t.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+\varepsilon}} e^{-\lambda r} \mathbf{I}(Z_r = 0) dr \leq e^{-\lambda \tau_s} \int_{\tau_s}^{\tau_{s+\varepsilon}} \mathbf{I}(Z_r = 0) dr = p_d \varepsilon e^{-\lambda \tau_s},$$

implicando que la función $F(s) = \int_0^{\tau_s} e^{-\lambda r} \mathbf{I}(Z_r = 0) dr$ es absolutamente continua, en otras palabras, existe una función localmente integrable $f(r)$ tal que $F(s) = \int_0^s f(r) dr$. Notemos también que

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+\varepsilon}} e^{-\lambda r} \mathbf{I}(Z_r = 0) dr \geq e^{-\lambda \tau_{s+\varepsilon}} \int_{\tau_s}^{\tau_{s+\varepsilon}} \mathbf{I}(Z_r = 0) dr = p_d \varepsilon e^{-\lambda \tau_{s+\varepsilon}}.$$

Por lo tanto, la derivada por la derecha de $F(s)$ es $p_d e^{\lambda \tau_s}$ para todo $s \geq 0$. En consecuencia $F(s) = p_d \int_0^s e^{\lambda \tau_r} dr$ \square

Usaremos este resultado para verificar la siguiente relación entre el exponente de Laplace φ del inverso del tiempo local, el operador resolvente y la medida de excursiones.

Lema 2.3. *Para todo $\lambda > 0$ y cualquier función $g \in C_0[0, \infty)$ se satisface*

$$R_\lambda g(0)\varphi(\lambda) = p_d g(0) + \mathbf{n} \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(Z_t) dt \right].$$

Demostración. Para calcular $R_\lambda g(0)$ consideramos por separado los casos $Z_s = 0$ y $Z_s > 0$. El lema 2.2 nos permite escribir

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-\lambda s} g(Z_s) \mathbf{I}(Z_s = 0) ds \right] = p_d g(0) \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda \tau_s} ds \right],$$

o en términos del exponente de Laplace de τ

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-\lambda s} g(Z_s) \mathbf{I}(Z_s = 0) ds \right] = p_d g(0) \int_0^\infty e^{-s\varphi(\lambda)} ds = \frac{p_d g(0)}{\varphi(\lambda)}. \quad (2.9)$$

Por otro lado descomponemos el conjunto $\{Z_s > 0\}$ en la unión de los intervalos de excursión fuera de cero, obteniendo

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-\lambda s} g(Z_s) \mathbf{I}(Z_s > 0) ds \right] = \mathbb{E} \left[\sum_s \int_{\tau_s^-}^{\tau_s} e^{-\lambda r} g(Y_s(r - \tau_s^-)) dr \right],$$

donde la suma se considera sobre todos los puntos $s \geq 0$ tales que $\tau_s - \tau_s^- > 0$. Usando que el incremento $\tau_s - \tau_s^-$ es la longitud del intervalo de excursión, reescribimos

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-\lambda s} g(Z_s) \mathbf{I}(Z_s > 0) ds \right] = \mathbb{E} \left[\sum_s e^{-\lambda \tau_s^-} \int_0^{T_0(Y_s)} e^{-\lambda r} g(Y_s(r)) dr \right].$$

Gracias a la fórmula de Maisonneuve (1.7), esta esperanza coincide con

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} dL_s \right] \mathbf{n} \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda s} g(Z_s) ds \right].$$

Haciendo un cambio de variable y recordando que τ es un subordinador (posiblemente matado) con exponente de Laplace φ , el primer factor es lo mismo que $\mathbb{E} \left[\int_0^{L_\infty} e^{-\lambda \tau_s} ds \right] = 1/\varphi(\lambda)$. Así,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-\lambda s} g(Z_s) \mathbf{I}(Z_s > 0) ds \right] = \frac{\mathbf{n} \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda s} g(Z_s) ds \right]}{\varphi(\lambda)}.$$

Concluimos la prueba sumando esta igualdad y la obtenida en (2.9). \square

A continuación presentamos un cálculo que necesitaremos en la prueba del teorema 2, se trata de relacionar la medida de excursiones del proceso reflejado en el ínfimo con el resolvente del proceso detenido en 0.

Lema 2.4. *Para cualquier función $g \in C_0([0, \infty))$ se cumple que:*

$$(R_\lambda^0 g)'(0+) = \underline{\mathbf{n}} \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(Z_t) dt \right].$$

Demostración. Recordemos que en el capítulo 1 introdujimos las letras ψ y Φ para denotar la transformada de Laplace de Z y su inversa continua por la derecha respectivamente. Denotemos por \hat{Z} al proceso de Lévy espectralmente negativo dado por $\hat{Z}_t = -Z_t$ y sea $\hat{\mathbf{n}}$ la medida de excursiones de \hat{Z} reflejado en su supremo. Definamos h^- la función dada por

$$h^-(x) = \frac{1 - e^{\Phi(0)x}}{\Phi(0)}, \quad x < 0,$$

donde el cociente es entendido en el sentido de límite cuando $\Phi(0) = 0$. Siguiendo a [PPR18, Sección 2.1], podemos asegurar la existencia de una constante $c_- > 0$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^-(x)} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] = c_- \hat{\mathbf{n}}^* \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right],$$

donde $\hat{\mathbf{n}}^*$ denota la medida imagen de $\hat{\mathbf{n}}$ bajo la función que manda una trayectoria $\omega \in \Omega$ en su negativa $-\omega$. La constante c_- depende de la normalización del tiempo local en 0 del proceso \hat{Z} reflejado en su supremo, supondremos que lo normalizamos para que $c_- = 1$. Debemos analizar dos casos:

1. Si $\Phi(0) = 0$, entonces

$$h^-(x) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\Phi(q)x}}{\Phi(q)} = -x.$$

En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^-(x)} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] = -\frac{d^-}{dx} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] \Big|_{x=0}.$$

2. Si $\Phi(0) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^-(x)} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1 - e^{\Phi(0)x}}{\Phi(0)x} \right]^{-1} \frac{\mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right]}{x} \\ &= -\frac{d^-}{dx} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

En ambos casos concluimos la igualdad

$$-\frac{d^-}{dx} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right] \Big|_{x=0} = \hat{\mathbf{n}}^* \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(\hat{Z}_t) dt \right], \quad (2.10)$$

para toda función continua y acotada g . Dada g , definimos g^- como $g^-(x) = g(-x)$, entonces

$$(R_\lambda^0 g)'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(Z_t) dt \right]}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g^-(\hat{Z}_t) dt \right]}{x}.$$

Aplicando (2.10) a g^- concluimos que

$$(R_\lambda^0 g)'(0+) = \hat{\mathbf{n}}^* \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g^-(\hat{Z}_t) dt \right] = \mathbf{n} \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(Z_t) dt \right].$$

□

Finalmente tenemos todas las herramientas para calcular el dominio del generador infinitesimal.

Demostración. (Teorema 2). Definamos un operador H en $C_0^2([0, \infty))$ como sigue

$$H(f) = -p_c f'(0+) + p_d \mathcal{G}f(0+) - \int_{(0, \infty) \cup \{\Delta\}} (f(y) - f(0)) \mu_\kappa(dy).$$

Entonces debemos probar que $H(f) = 0$ para cualquier función f en el dominio del generador de Z . Fijemos $\lambda > 0$ y sea f una función en dicho dominio. Recordando que este conjunto coincide con el rango del resolvente R_λ , escribimos $f = R_\lambda g$ para algún $g \in C_0([0, \infty))$. Aplicando la propiedad fuerte de Markov y la linealidad de H obtenemos

$$H(f) = H(R_\lambda^0 g) + R_\lambda g(0) H(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}]), \quad (2.11)$$

donde $\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}]$ denota a la función dada por $\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}](x) = \mathbb{E}_x[e^{-\lambda T_0}]$. Calculemos por separado cada término de (2.11). El primero corresponde a

$$H(R_\lambda^0 g) = -p_c (R_\lambda^0 g)'(0+) + p_d \mathcal{G}(R_\lambda^0 g)(0+) - \int_{(0, \infty)} (R_\lambda^0 g(y) - R_\lambda^0 g(0)) \mu(dy).$$

Recordando que $(\lambda \text{Id} - \mathcal{G})R_\lambda = \text{Id}$, vemos que

$$\mathcal{G}(R_\lambda^0 g) = \mathcal{G}(R_\lambda g - R_\lambda g(0) \mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}]) = \lambda R_\lambda g - g - R_\lambda g(0) \mathcal{G}(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}]).$$

Por otra parte

$$\int_{(0, \infty)} (R_\lambda^0 g(y) - R_\lambda^0 g(0)) \mu(dy) = \int_{(0, \infty)} \mathbf{E}_y^0 \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right] \mu(dy) = \mathbf{n}^d \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right].$$

Entonces podemos rescribir el primer término de (2.11) como

$$\begin{aligned} H(R_\lambda^0 g) &= -p_c (R_\lambda^0 g)'(0+) + p_d \lambda R_\lambda g(0+) - p_d g(0) - p_d R_\lambda g(0) \mathcal{G}(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])(0+) \\ &\quad - \mathbf{n}^d \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ahora desarrollemos el segundo factor del segundo término de (2.11).

$$\begin{aligned} H(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}]) &= -p_c (\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])'(0+) + p_d \mathcal{G}(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])(0+) - \int_{(0, \infty) \cup \{\Delta\}} \mathbb{E}_y[e^{-\lambda T_0} - 1] \mu_\kappa(dy) \\ &= -p_c (\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])'(0+) + p_d \mathcal{G}(\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])(0+) + p_\kappa \delta_\Delta [1 - e^{-\lambda T_0}] + \mathbf{n}^d [1 - e^{-\lambda T_0}]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sustituyendo las expresiones (2.12) y (2.13) en (2.11) y notando que $\delta_\Delta \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right] = 0$, obtenemos

$$H(f) = -p_d g(0) - (p_\kappa \delta_\Delta + \mathbf{n}^c + \mathbf{n}^d) \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right] \quad (2.14)$$

$$+ \mathbf{n}^c \left[\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right] - p_c (R_\lambda^0 g)'(0+) \quad (2.15)$$

$$+ R_\lambda g(0+) \left[p_d \lambda + (p_\kappa \delta_\Delta + \mathbf{n}^c + \mathbf{n}^d) [1 - e^{-\lambda T_0}] \right] \quad (2.16)$$

$$- R_\lambda g(0+) \left[p_c (\mathbb{E}_\bullet[e^{-\lambda T_0}])'(0+) + \mathbf{n}^c [1 - e^{-\lambda T_0}] \right]. \quad (2.17)$$

El lema 2.3 implica que los términos en las líneas (2.14) y (2.16) suman cero. En la proposición 2.2 probamos que $\mathbf{n}^c = p_c \mathbf{n}$, por lo que el lema 2.4 garantiza que la línea (2.15) también se anula. Aplicando nuevamente el lema 2.4 con g la función constante $g = 1$ obtenemos

$$-p_c \frac{d^+}{dx} \mathbb{E}_x [e^{-\lambda T_0}] \Big|_{x=0} = p_c \frac{d^+}{dx} \mathbb{E}_x [1 - e^{-\lambda T_0}] \Big|_{x=0} = p_c \mathbf{n} [1 - e^{-\lambda T_0}] = \mathbf{n}^c [1 - e^{-\lambda T_0}].$$

Por lo tanto $H(f) = 0$. □

Concluiremos esta sección exponiendo una condición suficiente que garantice la propiedad de Feller de las extensiones recurrentes de X^0 . Recordemos que un proceso Z es *estocásticamente continuo* si para todo $h > 0$ y para todo $t \geq 0$ se satisface

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|Z_t - Z_s| > h) = 0.$$

Lema 2.5. *Sea Z una extensión recurrente de X^0 . Si Z es estocásticamente continua, entonces tiene la propiedad de Feller.*

Demostración. Denotemos por p_t al operador de transición de Z definido en $C_0[0, \infty)$, i.e.,

$$p_t g(x) = \mathbb{E}_x [g(Z_t)] \quad \text{para } g \in C_0[0, \infty) \text{ y } x \geq 0.$$

Por la proposición 2.4 de [RY99, Capítulo III] basta verificar que

1. para cada $t \geq 0$ fija, se cumple que $p_t(C_0[0, \infty)) \subseteq C_0[0, \infty)$,
2. para cada $g \in C_0$ y para toda $x \geq 0$, se cumple $\lim_{t \rightarrow 0} p_t g(x) = g(x)$.

Consideremos un espacio de probabilidad $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ en el que podamos definir dos procesos independientes \bar{X} y \bar{Z} tales que la ley de $x + \bar{X}$ bajo \bar{P} coincide con P_x si $x > 0$, mientras que la ley de \bar{Z} bajo \bar{P} es igual a \mathbb{P} . Sea \bar{E} el operador esperanza correspondiente a \bar{P} . Definamos el proceso $Z^{(x)}$ como

$$Z_t^{(x)} = \begin{cases} x + \bar{X}_t, & t < T_{-x}(\bar{X}) \\ \bar{Z}_{t-T_{-x}(\bar{X})}, & t \geq T_{-x}(\bar{X}), \end{cases}$$

si $x > 0$, mientras que $Z_t^{(0)} = \bar{Z}_t$ para toda $t \geq 0$. Dado $x \geq 0$ y una sucesión de reales positivos $(x_n, n \geq 1)$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$, probaremos que la sucesión de tiempos de primera llegada $(T_{-x_n}(\bar{X}), n \geq 1)$ converge a $T_{-x}(\bar{X})$ c.s. Para aligerar la notación, escribiremos $T^n = T_{-x_n}(\bar{X})$ y $T = T_{-x}(\bar{X})$ respectivamente. Supongamos que $\bar{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} T^n < T) > 0$, en particular existe $\delta > 0$ tal que $\bar{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} T^n \leq T - \delta) > 0$. Consideremos el ínfimo de $x + \bar{X}$ sobre el intervalo $[0, T - \delta]$

$$\varepsilon = \inf\{x + \bar{X}_t : t \in [0, T - \delta]\},$$

y denotemos por S al tiempo donde tal ínfimo se alcanza, esto es,

$$S = \inf\{t : x + \bar{X}_{t-} = \varepsilon\}.$$

Supongamos que $\varepsilon = 0$. Dado que T es el primer tiempo en el cual $x + \bar{X}$ llega a 0 y que $S < T$, entonces $x + \bar{X}_{S-} < x + \bar{X}_S$. Esto contradice la continuidad en el mínimo para las trayectorias de X , que como expusimos en los preliminares, esta garantizada por la regularidad de X para

$(0, \infty)$. En consecuencia $\varepsilon > 0$. La convergencia de la condición inicial $x_n \rightarrow x$ asegura que para toda n suficientemente grande tenemos que

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n + \bar{X}_t \quad \text{si } 0 \leq t \leq T - \delta,$$

contradiciendo que $\bar{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} T^n \leq T - \delta) > 0$. Ahora supongamos que se cumple $\bar{P}(T < \limsup_{n \rightarrow \infty} T^n) > 0$. Igual que antes existe $\delta > 0$ tal que el conjunto $A = \{T + \delta \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} T^n\}$ tiene probabilidad positiva con respecto a \bar{P} . Esto significa que para toda $\omega \in A$ existe una subsucesión $(n_{k(\omega)}, k(\omega) \geq 1)$ para la cual $x_{n_{k(\omega)}} + \bar{X}_t(\omega) > 0$ si $0 \leq t < T + \delta/2$. Tomando el límite cuando $k(\omega) \rightarrow \infty$ vemos que para toda $\omega \in A$ se cumple que $x + \bar{X}_t(\omega) \geq 0$ si $0 \leq t < T + \delta/2$. Sin embargo

$$\bar{P}(x + \bar{X}_t \geq 0 \text{ si } T \leq t < T + \delta) = P_x(X_t \geq 0 \text{ si } T_0(X) \leq t < T_0(X) + \delta) = P(X_t \geq 0 \text{ si } 0 \leq t < \delta)$$

y esta última probabilidad es cero gracias al carácter regular de 0 para $(-\infty, 0)$, que como vimos anteriormente está asegurado por la variación no acotada de X . Por lo tanto $\limsup_{n \rightarrow \infty} T^n \leq T$ \bar{P} -c.s. y concluimos la igualdad $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n$.

A continuación usaremos la convergencia de los tiempos de primera llegada para mostrar la propiedad de Feller. Para probar (1), fijemos $t \geq 0$, $g \in C_0[0, \infty)$ y $x \geq 0$. Consideremos una sucesión de reales no negativos tales que $x_n \rightarrow x$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $x_n > 0$ para una infinidad de índices. Si $t = 0$, entonces

$$\bar{E}[g(Z_0^{(x_n)})] = E_{x_n}[g(X_0)] \rightarrow E_x[g(X_0)] = g(x) = \bar{E}[g(Z_0^{(x)})].$$

Si $t > 0$, acotamos $\bar{E}[|g(Z_t^{(x_n)}) - g(Z_t^{(x)})|]$ de forma adecuada por

$$\begin{aligned} & \bar{E}[|g(x_n + \bar{X}_t) - g(x + \bar{X}_t)| \mathbf{I}(t \leq T^n \wedge T)] + 2\|g\|_\infty \bar{P}(T^n \wedge T < t < T^n \vee T) \\ & + \bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-T^n}) - g(\bar{Z}_{t-T})| \mathbf{I}(t \geq T^n \vee T)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Los primeros dos términos convergen a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Resta verificar lo mismo para el tercero. Observemos que para los índices $\{n_j, j \geq 1\}$ en los cuales $x_{n_j} \leq x$, se cumple que $T^{n_j} < T$ y en consecuencia $|\bar{Z}_{t-T^{n_j}} - \bar{Z}_{t-T}| \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $x_n > x$, por lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_{t-T^n} = \bar{Z}_{t-T}^-$ c.s. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-T^n}) - g(\bar{Z}_{t-T})| \mathbf{I}(t \geq T^n \vee T)] \leq \bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-T}^-) - g(\bar{Z}_{t-T})| \mathbf{I}(t > T)].$$

Notemos que para valores fijos $s \leq t$, la continuidad estocástica de Z garantiza que $\bar{P}(|\bar{Z}_{t-s}^- - \bar{Z}_{t-s}^-| > \delta) = 0$, implicando que $\bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-s}^-) - g(\bar{Z}_{t-s}^-)|] = 0$ si $s \leq t$. Dado que T es función de \bar{X} , deducimos que T y \bar{Z} son independientes. Así

$$\bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-T}^-) - g(\bar{Z}_{t-T})| \mathbf{I}(t \geq T)] = \bar{E}[\bar{E}[|g(\bar{Z}_{t-s}^-) - g(\bar{Z}_{t-s}^-)| \mathbf{I}(t \geq s)]_{s=T}] = 0,$$

lo cual establece la convergencia de (2.18) a cero.

Verifiquemos la propiedad (2). Si $x > 0$, entonces $\bar{P}(T \leq t) = P_x(T_0(X) \leq t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Note que

$$\bar{E}[g(Z_t^{(x)})] = E_x[g(X_t) \mathbf{I}(T_0(X) > t)] + \bar{E}[g(Z_{t-T}) \mathbf{I}(T_0(x + X) \leq t)].$$

El segundo término está acotado en valor absoluto por $\|g\|_\infty P_x(T_0(X) \leq t)$, en consecuencia $\bar{E}[g(Z_t^{(x)})] \rightarrow g(x)$. Si $x = 0$, entonces $p_t g(0) = \bar{E}[g(\bar{Z}_t)] = \mathbb{E}[g(Z_t)]$ que converge a $g(0)$ cuando $t \rightarrow 0$. \square

Capítulo 3

Procesos de Lévy pegajosos como solución a una ecuación de cambio de tiempo.

“In our opinion, [the] Doebelin equation $[X(t) = Z[\int_0^t \beta(s, X(s))ds] + \int_0^t a(s, X(s))ds]$ can be seen as an alternative model to the stochastic Ito equation when Z is a general Levy process or a semimartingale. The noise part in [this equation] is obtained from putting into driving process Z a corresponding «random clock» called in the financial language the «operational time», the case which is often seen in praxis and is desired to be modeled in many applications”. V.P. Kurenok, Statement of research interests.

En este capítulo exponemos una situación en la que resulta más conveniente la representación de cierto proceso mediante una ECT que mediante una EDE. Dicho proceso es una extensión recurrente de un proceso de Lévy espectralmente positivo, para la cual el origen es un punto regular e instantáneo en el que pasa una cantidad positiva de tiempo. Estructuramos la prueba del teorema 3 como sigue: primero exploramos una versión determinista de la ECT para mostrar la unicidad de las soluciones. Auxiliándonos del proceso reflejado, encontramos el único proceso que satisface la ECT. Posteriormente analizaremos el comportamiento en 0 de dicha solución para deducir que se trata de un proceso de Lévy pegajoso. El análisis determinista de la ECT, principalmente un resultado de monotonía obtenido en la prueba de unicidad, será un ingrediente esencial para mostrar también la convergencia del esquema de aproximación propuesto. Finalmente, usando cálculo estocástico en lugar del teorema 2, describimos el dominio del generador infinitesimal de un proceso de Lévy pegajoso.

3.1. Análisis determinista

“From the pathwise viewpoint, the idea of associating with a diffusion X a «compensated» process Z which follows the trajectories of a standard Brownian motion is a natural one [...]. However, Doebelin’s method goes much further and the change of time which he adopts seems to be original”. [BY02]

En esta sección discutiremos una versión determinista de la ecuación de cambio de tiempo que hemos planteado, i.e.,

$$Z_t = z + X_{C_t} + \gamma \int_0^t \mathbf{I}(Z_s = 0) ds, \quad \text{donde} \quad C_t = \int_0^t \mathbf{I}(Z_s > 0) ds. \quad (3)$$

Probaremos que las soluciones a la correspondiente ecuación satisfacen cierta propiedad de monotonía, la cual será la clave tanto en la demostración de la unicidad como en la convergencia de nuestro esquema de aproximación. Por otro lado, trataremos el problema de existencia a través de un conocido resultado de Skorohod.

Empecemos definiendo el problema determinista asociado. Para ello seguiremos las ideas de [CPGUB13] y [CPGUB17]. Si Z es una solución a la ECT (3), c.s. sus trayectorias satisfacen una ecuación del tipo

$$h(t) = f(c(t)) + g(t), \quad c(t) = \int_0^t \mathbf{I}(h(s) > 0) ds. \quad (3.1)$$

donde $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función càdlàg sin saltos negativos que empieza en algún valor no negativo y g es una función continua, no decreciente y empieza en 0. (En efecto, podemos considerar como f a las trayectorias de $t \mapsto z + X_t - \gamma t$ y $g(t) = \gamma t$). Recordemos que al ser f càdlàg, podemos definir el salto de f en t como $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$. Por una solución a (3.1) hacemos referencia tanto a la función h (de la cual se construye directamente c) como al par (h, c) . En principio no es obvio que la función h sea no negativa, vamos a probarlo.

Proposición 3.1. *Sean f y g funciones càdlàg y suponga que $\Delta f \geq 0$, g es no decreciente y $f(0) + g(0) \geq 0$. Entonces cualquier solución a la ECT (3.1) es no negativa. Más aún, si g es estrictamente creciente, entonces la función c , dada por $c(t) = \int_0^t \mathbf{I}(h(s) > 0) ds$, también es estrictamente creciente.*

Demostración. Supongamos que existe alguna función h que satisface la ecuación (3.1) y que puede tomar valores en $(-\infty, 0)$. La ausencia de saltos negativos de f (y en consecuencia de h), asegura que h llega continuamente a $(-\infty, 0)$. La continuidad por la derecha de f (y por tanto de h), garantiza que existe algún intervalo con longitud positiva en el cual h es negativa. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña para garantizar que τ definida por

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : h < 0 \text{ en } (t, t + \varepsilon)\}$$

es finita. Como h es negativa en una vecindad derecha de τ , entonces

$$\int_0^\tau \mathbf{I}(h(s) > 0) ds = \int_0^{\tau+\varepsilon} \mathbf{I}(h(s) > 0) ds.$$

Lo cual nos lleva a una contradicción, pues

$$0 = h(\tau) = f\left(\int_0^\tau \mathbf{I}(h(s) > 0) ds\right) + g(\tau) \leq f\left(\int_0^{\tau+\varepsilon} \mathbf{I}(h(s) > 0) ds\right) + g(\tau + \varepsilon) = h(\tau + \varepsilon),$$

pero $h(\tau + \varepsilon) < 0$.

A continuación supongamos que g crece estrictamente. Por definición c es no-decreciente. Por contradicción, probemos que también crece estrictamente. Si $c(t) = c(s)$ para algún $s < t$, entonces $h = 0$ en (s, t) trabajando en un intervalo más chico, podemos asumir que $h(s) = h(t) = 0$. En consecuencia $0 = h(s) = f \circ c(s) + g(s) < f \circ c(s) + g(t) = f \circ c(t) + g(t) = h(t) = 0$. Por lo tanto, c debe ser estrictamente creciente. \square

Si $f_-(t) = f(t-)$, el resultado anterior y una ligera modificación de su prueba también son válidos para las soluciones de la desigualdad

$$\int_s^t \mathbf{I}(h(r) > 0) dr \leq c(t) - c(s) \leq \int_s^t \mathbf{I}(h(r) \geq 0) dr,$$

donde $h(r) = f_- \circ c(r) + g_-(r)$ y f y g satisfacen las hipótesis de la proposición 3.1. Estas desigualdades surgen naturalmente cuando se estudia la estabilidad de (3.1) como apreciaremos en la prueba del teorema 4.

3.1.1. Monotonía y unicidad

“The one-dimensional stochastic differential equation $dX_t = \sigma(X_t)dW_t$ has been the subject of intensive study for well over half a century. What can one say about pathwise uniqueness when σ is allowed to be zero at certain points? Of course, a large amount is known, but there are many unanswered questions remaining”. [Bas14]

A continuación estableceremos un resultado de comparación para las soluciones a ecuaciones de la forma (3.1), este resultado será la idea clave en la prueba de unicidad y lo retomaremos en la Sección 3.1.3, donde también será determinante.

Proposición 3.2. Sean (f^1, g^1) y (f^2, g^2) pares de funciones càdlàg que satisfacen que $\Delta f^i \geq 0$, g^i es estrictamente creciente y $f^i(0) + g^i(0) \geq 0$. Supongamos que $f^1 \leq f^2$ y $g^1 \leq g^2$. Si h^1 y h^2 satisfacen

$$h^i(t) = f^i(c^i(t)) + g^i(t), \quad c^i(t) = \int_0^t \mathbf{I}(h^i(s) > 0) ds,$$

para $i = 1, 2$, entonces se cumple la desigualdad $c^1 \leq c^2$. En particular, la ecuación determinista (3.1) admite a lo más una solución.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y definamos $c^\varepsilon(t) = c^2(\varepsilon + t)$. Sea

$$\tau = \inf\{t > 0 : c^1(t) > c^\varepsilon(t)\}.$$

Para obtener una contradicción, supongamos que $\tau < \infty$. La continuidad de c^1 y de c^ε garantiza que $c^1(\tau) = c^\varepsilon(\tau)$ y que c^1 excede a c^ε en algún punto t de cualquier vecindad derecha de τ . En tales puntos, se cumple que $c^\varepsilon(t) - c^\varepsilon(\tau) < c^1(t) - c^1(\tau)$, lo que equivale a

$$\int_\tau^t \mathbf{I}(h^2(\varepsilon + s) > 0) ds < \int_\tau^t \mathbf{I}(h^1(s) > 0) ds. \quad (3.2)$$

Las hipótesis sobre g^1 y g^2 garantizan que $g^1(\tau) < g^1(\varepsilon + \tau) \leq g^2(\varepsilon + \tau)$. Por lo tanto

$$0 \leq h^1(\tau) = f^1 \circ c^1(\tau) + g^1(\tau) < f^2 \circ c^\varepsilon(\tau) + g^2(\varepsilon + \tau) = h^2(\varepsilon + \tau).$$

Gracias a la continuidad por la derecha de h^2 , podemos elegir t suficientemente cercana a τ , de forma que $h^2(\varepsilon + s) > 0$ para todo $s \in [\tau, t)$. Regresando a la desigualdad (3.2), obtenemos la contradicción

$$t - \tau = \int_{\tau}^t \mathbb{I}(h^2(\varepsilon + s) > 0) ds < \int_{\tau}^t \mathbb{I}(h^1(s) > 0) ds = t - \tau.$$

Por lo tanto $\tau = \infty$ y concluimos el resultado anunciado al hacer tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

En particular, si (h^1, c^1) y (h^2, c^2) son dos soluciones a (3.1) (dirigida por las mismas funciones f y g), entonces este resultado de monotonía (aplicado dos veces) implica que $c^1 = c^2$ y en consecuencia $h^1 = f \circ c^1 + g = f \circ c^2 + g = h^2$. \square

Corolario 3.1. *Sean f y g son funciones càdlàg tales que f no tiene saltos negativos, g es estrictamente creciente y $f(0) + g(0) \geq 0$. Entonces la ecuación determinista (3.1) admite a lo más una solución. En particular la ECT (3) tiene a la más una solución.*

Demostración. La primera afirmación se sigue por simetría y la segunda reemplazando f por las trayectorias de $x + X - \gamma \text{Id}$ y g por γId . \square

3.1.2. Existencia

“The Skorohod Lemma redefines our notion of Reflected Brownian motion. We started with specular reflection, and ended with a constrained process, which, away from the boundary of its domain, behaves as a Brownian motion. Can we extend this idea to other driving processes?” [Dua20]

La prueba de que la ECT (3) admite una solución, se basa en la siguiente variante de un resultado bien conocido de Skorohod (cfr. [RY99, Capítulo VI, Lema 2.1]).

Lema 3.1. *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función càdlàg sin saltos negativos y supongamos que comienza en algún valor no negativo. Entonces existe un único par (r, l) de funciones definidas en $[0, \infty)$ que satisfacen que $r = f + l$, r es no negativa, l es no decreciente, continua, se anula en 0 y sólo crece en el conjunto $\{s : r(s) = 0\}$. Más aún, la función l está dada por*

$$l(t) = \sup_{s \leq t} (-f(s) \vee 0).$$

Este resultado puede demostrarse siguiendo la prueba de [RY99, Capítulo VI, Lema 2.1], basta notar que como $-f \vee 0$ no tiene saltos positivos, entonces l es continua.

Proposición 3.3. *Sea f una función càdlàg, con $\Delta f \geq 0$ y $f(0) \geq 0$. Sea (r, l) el par de funciones del lema 3.1 aplicado a f . Si $\{t \geq 0 : r(t) = 0\}$ tiene medida de Lebesgue cero para todo $t \geq 0$, entonces existe una solución h a*

$$h(t) = z + f \left(\int_0^t \mathbb{I}(h(s) > 0) ds \right) + \gamma \int_0^t \mathbb{I}(h(s) = 0) ds. \quad (3.3)$$

Equivalentemente, en términos de la ecuación (3.1), la función h satisface

$$h = f^\gamma \circ c + \gamma \text{Id}, \quad c(t) = \int_0^t \mathbb{I}(h(s) > 0) ds, \quad (3.4)$$

donde $f^\gamma(t) = f(t) - \gamma t$.

Demostración. Aplicando el lema 3.1 a f , deducimos la existencia de un único par de funciones (r, l) que satisfacen $r(t) = f(t) + l(t)$ con $r \geq 0$ y l continua, no decreciente, tal que $l(0) = 0$ y

$$\int_0^t \mathbf{I}(r_s > 0) dl_s = 0. \quad (3.5)$$

Para construir la solución a la ECT determinista (3.3), consideremos la función estrictamente creciente a definida por $a(t) = t + l(t)/\gamma$ para todo $t \geq 0$. Denotemos por c a su inversa y consideremos la composición $h = r \circ c$. La hipótesis $\int_0^t \mathbf{I}(r(s) = 0) ds = 0$ para todo $t \geq 0$, junto con la no negatividad de r implican que

$$t = \int_0^t \mathbf{I}(r(s) > 0) ds = \int_0^t \mathbf{I}(r(s) > 0) (ds + \gamma^{-1} dl_s),$$

donde la última igualdad está garantizada por (3.5). Sustituyendo el tiempo determinista t por $c(t)$ en la expresión anterior y usando que c es la inversa de a , tenemos

$$c(t) = \int_0^{c(t)} \mathbf{I}(r(s) > 0) da(s) = \int_0^t \mathbf{I}(h(s) > 0) ds.$$

Finalmente, despejando l en la definición de a vemos que $l(t) = \gamma(a(t) - t)$, lo cual implica que

$$l(c(t)) = \gamma(t - c(t)) = \gamma \int_0^t \mathbf{I}(h(s) = 0) ds.$$

Por lo tanto $h(t) = r(c(t))$ se reescribe como

$$h(t) = f \left(\int_0^t \mathbf{I}(h(s) > 0) ds \right) + \gamma \int_0^t \mathbf{I}(h(s) = 0) ds,$$

mostrando que h satisface la ECT determinista (3.3). □

3.1.3. Aproximación

“There are currently no methods to simulate a sticky diffusion directly: there is no practical way to extend existing methods for discretizing SDEs based on choosing discrete time steps, such as Euler-Maruyama or its variants [...] to sticky processes”. [BR20]

A continuación discutiremos un método simple para aproximar la solución a nuestra ECT determinista (3.1), obteniendo una forma sencilla de simular la distribución de un proceso de Lévy pegajoso. Entre la gran cantidad de esquemas de discretización existentes, elegimos el método de Euler por su simplicidad y facilidad de implementar. Una vez más, la clave de la demostración recae en el lema de monotonía que probamos anteriormente.

Proposición 3.4. *Sea f una función càdlàg con $\Delta f \geq 0$ y $f(0) \geq 0$. Supongamos que la ecuación (3.3) (equivalentemente (3.4)) admite una única solución (h, c) . Sea \tilde{f}^n una sucesión de funciones càdlàg que converge a f y consideremos $f^n = \tilde{f}^n - \gamma \lfloor n \cdot \rfloor / n$. Definamos c^n y h^n como $c^n(0) = c^n(0-) = 0$*

$$c^n(t) = c^n(\lfloor nt \rfloor / n-) + (t - \lfloor nt \rfloor / n) \mathbf{I}(h^n(t) > 0), \quad (3.6)$$

y

$$h^n(t) = f^n(c^n(\lfloor nt \rfloor/n)) + \gamma \lfloor nt \rfloor/n. \quad (3.7)$$

Entonces $h^n \rightarrow h$ en la topología J_1 de Skorohod y $c^n \rightarrow c$ uniformemente en conjuntos compactos.

Recordemos que las Proposiciones 3.3 y 3.1 dan condiciones para garantizar la existencia de una única solución a la ecuación (3.1), lo cual es la hipótesis principal de la proposición anterior. Notemos también que h^n es constante en los intervalos de la forma $[(k-1)/n, k/n)$ por lo cual c^n es lineal en $[(k-1)/n, k/n)$ y en los extremos de dichos intervalos, c^n toma valores en \mathbb{N}/n . En consecuencia, $c^n(\lfloor nt \rfloor/n) = \lfloor nc^n(t) \rfloor/n$. Estructuramos la prueba del teorema 4 como sigue: probaremos que la sucesión de funciones $(c^n, n \geq 1)$ es relativamente compacta, esto es, cualquier subsucesión de $(c^n, n \geq 1)$ tiene otra subsucesión convergente. Dada $(c^{n_j}, j \geq 1)$ una subsucesión convergente a un cierto límite c^* , mostraremos que la sucesión $((c^{n_j}, h^{n_j}), j \geq 1)$ también converge y que el límite está dado por (c^*, h^*) , donde $h^* = f^\gamma \circ c^* + \gamma \text{Id}$ y f^γ fue definida anteriormente como $f - \gamma \text{Id}$. Modificando mínimamente la prueba de la proposición 3.2, verificaremos que el límite (c^*, h^*) no depende de la elección de la subsucesión $(n_j, j \geq 1)$, deduciendo así que la sucesión completa $((c^n, h^n), n \geq 1)$ converge.

Demostración. Como γId es continua, entonces la hipótesis $\tilde{f}^n \rightarrow f$ implica que $f^n \rightarrow f - \gamma \text{Id}$ (recordemos que en general la suma en el espacio de Skorohod no es una operación continua, como se ejemplifica en [Bil99][Ejercicio 12.2]). Sin embargo, el teorema 4.1 de [Whi80] asegura la continuidad de la suma de dos funciones cuando sus puntos de discontinuidad no coinciden)

Fijemos $t_0 > 0$. Note que la ecuación (3.6) puede ser escrita como

$$c^n(t) = \int_0^t \mathbb{I}(h^n(s) > 0) ds.$$

garantiza que las funciones c^n son Lipschitz continuas con constante de Lipschitz igual a 1. En particular son equicontinuas y están uniformemente acotadas en $[0, t_0]$. La compacidad relativa de la familia de funciones $(c^n, n \geq 1)$ en $[0, t_0]$ se sigue del teorema de Arzelà-Ascoli. Fijemos una subsucesión $(c^{n_j}, j \geq 1)$ que converge uniformemente en el espacio de funciones continuas en $[0, t_0]$, digamos a una función no-decreciente c^* . La convergencia uniforme asegura la continuidad de c^* . Más aún, c^* satisface que $c^*(t) - c^*(s) \leq t - s$ si $s \leq t$. Esta observación será fundamental para probar que $c = c^*$. Dado que $c^{n_j}(\lfloor n_j t \rfloor/n_j) = \lfloor n_j c^{n_j}(t) \rfloor/n_j$ para toda $t \geq 0$, podemos escribir $h^{n_j} = f^{n_j} \circ c^{n_j} + \gamma \lfloor n_j \cdot \rfloor/n_j$. Probaremos la convergencia del par $(c^{n_j}, f^{n_j} \circ c^{n_j})$ a $(c^*, f \circ c^*)$ cuando $j \rightarrow \infty$. En efecto, la convergencia $f^n \rightarrow f^\gamma$ implica que $\liminf_{n \rightarrow \infty} f^n(t_n) \geq f^\gamma(t-)$ cuando $t_n \rightarrow t$. (Esta afirmación se sigue de la proposición 3.6.5 en [EK86], la cual asegura que los puntos de acumulación de $\{f^n(t_n)\}$ pertenecen a $\{f^\gamma(t-), f^\gamma(t)\}$). En consecuencia

$$\mathbb{I}(f^\gamma(c^*(s)-) + \gamma s > 0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbb{I}(f^{n_j}(c^{n_j}(s)) + \gamma \lfloor ns \rfloor/n > 0).$$

Por el lema de Fatou, se sigue que

$$\int_s^t \mathbb{I}(f^\gamma(c^*(r)-) + \gamma r > 0) dr \leq c^*(t) - c^*(s).$$

Argumentando como en la proposición 3.1, vemos que $f_-^\gamma \circ c^* + \gamma \text{Id}$ es no-negativa y c^* es estrictamente creciente. Recordando que la composición de una función continua y estrictamente creciente seguida de una función càdlàg es continua en el espacio de Skorohod (ver [Whi80,

Teorema 3.2]), vemos que $f^{n_j} \circ c^{n_j} \rightarrow f^\gamma \circ c^*$. Como γId es continua, deducimos que $h^{n_j} \rightarrow h^* := f^\gamma \circ c^* + \gamma \text{Id}$, como queríamos.

Recapitulando, hemos probado la convergencia de la subsucesión $((c^{n_j}, h^{n_j}), j \geq 1)$. Para ver que el límite correspondiente no depende de la subsucesión $(n_j, j \geq 1)$, mostraremos dicho límite es de hecho, la única solución (c, h) de la ECT determinista (3.1). Probaremos que $c^* = c$ verificando que se satisfacen ambas desigualdades $c^* \leq c$ y $c^* \geq c$.

La primera desigualdad se deduce exactamente como en la prueba de la proposición 3.2 al aplicar el lema de Fatou para notar que

$$\int_s^t \mathbf{I}(f^\gamma \circ c^*(r) + \gamma r > 0) dr \leq c^*(t) - c^*(s).$$

Replicaremos aquí dicha prueba para facilitar la lectura. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $c^\varepsilon(t) = c^*(\varepsilon + t)$. Sea

$$\tau = \inf\{t > 0 : c(t) > c^\varepsilon(t)\}.$$

Supongamos que $\tau < \infty$. La continuidad de c y de c^ε garantizan que $c(\tau) = c^\varepsilon(\tau)$ y que c excede a c^ε en algún punto t de cualquier vecindad derecha de τ . En tales puntos, se cumple que $c^\varepsilon(t) - c^\varepsilon(\tau) < c(t) - c(\tau)$. En consecuencia

$$\int_{\varepsilon+\tau}^{\varepsilon+t} \mathbf{I}(f^\gamma(c^*(r)) + \gamma r > 0) dr \leq c^\varepsilon(t) - c^\varepsilon(\tau) < \int_\tau^t \mathbf{I}(f^\gamma(c(r)) + \gamma r > 0) dr. \quad (3.8)$$

Dado que $f^\gamma(c(\tau)) + \gamma\tau < f^\gamma(c^*(\varepsilon + \tau)) + \gamma(\varepsilon + \tau)$, y gracias a la continuidad por la derecha de f^γ , podemos elegir t suficientemente cercana a τ , de forma que $f^\gamma(c^*(r)) + \gamma r > 0$ para todo $r \in [\varepsilon + \tau, \varepsilon + t)$. Regresando a la desigualdad (3.8), obtenemos una contradicción. Por lo tanto $\tau = \infty$ y concluimos que $c \leq c^*$ al hacer tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

Análogamente se verifica la desigualdad contraria, incluimos la prueba para no pasar por alto algún detalle. Fijemos $\varepsilon > 0$ y definamos $c^\varepsilon(t) = c(\varepsilon + t)$. Sea

$$\tau = \inf\{t > 0 : c^*(t) > c^\varepsilon(t)\}.$$

Para obtener una contradicción, supongamos que $\tau < \infty$. La continuidad de c^* y de c^ε garantizan que $c^*(\tau) = c^\varepsilon(\tau)$ y que c^* excede a c^ε en algún punto t de cualquier vecindad derecha de τ . En tales puntos, se cumple que $c^\varepsilon(t) - c^\varepsilon(\tau) < c^*(t) - c^*(\tau)$. Como c^* es Lipschitz continua con constante de Lipschitz 1, vemos que

$$\int_\tau^t \mathbf{I}(h(\varepsilon + s) > 0) ds < c^*(t) - c^*(\tau) \leq t - \tau. \quad (3.9)$$

Por otro lado observemos que

$$0 \leq h^*(\tau) = f^\gamma \circ c^*(\tau) + \gamma\tau < f^\gamma \circ c^\varepsilon(\tau) + \gamma(\varepsilon + \tau) = h(\varepsilon + \tau).$$

Gracias a la continuidad por la derecha de h , podemos elegir t suficientemente cercana a τ , de forma que $h(\varepsilon + s) > 0$ para todo $s \in [\tau, t)$. Regresando a (3.9), llegamos a una desigualdad absurda $t - \tau < t - \tau$. Por lo tanto $\tau = \infty$ y concluimos la desigualdad $c^* \leq c$ al hacer tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

Con esto concluimos que $c^* = c$ y en consecuencia también se da la identidad $h^* = h$. En otras palabras, hemos probado que los límites c^* y h^* no dependen de la subsucesión considerada, garantizando con ello, la convergencia de toda la sucesión $((c^n, h^n), n \geq 1)$ a la única solución de la ECT determinista (3.1) como queríamos. \square

3.2. Aplicación a procesos de Lévy pegajosos

El objetivo de esta sección es aplicar en análisis determinista de la sección pasada para probar los Teoremas 3 y 4. Mostrar la existencia, unicidad y aproximación es sencillo, mientras que la propiedad de Markov y el hecho de que la solución Z a la ECT (3) es un proceso de Lévy pegajoso, requieren cierto trabajo (probabilista) extra. Concluiremos la existencia y unicidad del teorema 3, así como la prueba del teorema 4 en la Subsección 3.2.1. Posteriormente, probaremos la propiedad fuerte de Markov de la solución a la ECT (3), lo cual nos permitirá mostrar que dicha solución es un proceso de Lévy pegajoso. Esto concluye la prueba del teorema 3, pero deja abierto el cálculo del parámetro de pegajosidad (o equivalentemente, la condición de frontera de su generador infinitesimal). Dicha condición se estudia en la Subsección 3.2.3. También podríamos utilizar el teorema 2, pero decidimos incluir un análisis alternativo vía cálculo estocástico para independizar los resultados de los dos capítulos de este trabajo.

3.2.1. Existencia, unicidad y aproximación

Abordemos ahora las pruebas de existencia y unicidad del teorema 3.

Teorema. (3) *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo, adaptado a $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, con trayectorias de variación no acotada y tiempo de vida infinito. Dados un parámetro $\gamma > 0$ y un punto $z \geq 0$, existe un par de procesos estocásticos $C = (C_t, t \geq 0)$ y $Z = (Z_t, t \geq 0)$ que satisfacen*

$$Z_t = z + X_{C_t} + \gamma \int_0^t \mathbf{I}(Z_s = 0) ds, \quad \text{donde} \quad C_t = \int_0^t \mathbf{I}(Z_s > 0) ds, \quad (3)$$

para toda $t \geq 0$. Dicho par es único en el sentido de indistinguibilidad. Dado un par (C, Z) que verifica la ecuación (3), se cumple que C es un (\mathcal{F}_t) -cambio de tiempo, Z es adaptado a la filtración cambiada de tiempo $(\widehat{\mathcal{F}}_t, t \geq 0)$ dada por $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{C_t}$ y Z es una extensión recurrente de X^0 con frontera pegajosa.

Demostración. (Existencia y unicidad) Note que la unicidad de la solución a la ecuación (3) se desprende de la proposición 3.2 reemplazando la función càdlàg f por las trayectorias de $z + X - \gamma \text{Id}$ y $g = \gamma \text{Id}$. Para obtener existencia, aplicamos el lema 3.1 a las trayectorias de X para deducir la existencia de un único par de procesos (R, L) que satisfacen $R_t = z + X_t + L_t$ con R un proceso no-negativo y L un proceso continuo, con trayectorias no decrecientes y tales que $L_0 = 0$ y $\int_0^t \mathbf{I}(R_s > 0) dL_s = 0$. De hecho, tenemos una representación explícita de L como

$$L_t = \sup_{s \leq t} ((-z - X_s) \vee 0). \quad (3.10)$$

Observemos que R no es más que el proceso reflejado en su ínfimo. De la descripción explícita del proceso L dada en (3.10), se sigue que $\mathbb{P}(R_t = 0) = \mathbb{P}(X_t = \underline{X}_t)$, donde $\underline{X}_t = \inf_{s \leq t} X_s$. Similarmente denotamos $\overline{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Sabemos que para toda $t \geq 0$ fija, el par $(X_t - \underline{X}_t, \underline{X}_t)$ tiene la misma distribución que $(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t)$, por lo cual

$$\mathbb{P}(X_t = \underline{X}_t) = \mathbb{P}((X_t - \underline{X}_t, \underline{X}_t) \in \{0\} \times [0, \infty)) = \mathbb{P}((\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t) \in \{0\} \times [0, \infty))$$

y esta probabilidad está acotada por $\mathbb{P}(\overline{X}_t = 0)$. Gracias a la regularidad de 0 para $(0, \infty)$, concluimos que esta probabilidad es cero para toda $t > 0$. Por lo tanto

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \mathbf{I}(R_t = 0) dt \right] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t = \underline{X}_t) dt = 0.$$

En consecuencia, la proposición 3.3 garantiza la existencia de la solución a la ECT (3). \square

Procedamos ahora a la prueba del teorema 4.

Teorema. (4) *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo con variación no acotada. Denotemos por (C, Z) a la única solución a la ECT (3). Consideremos $(X^n, n \geq 1)$ una sucesión de procesos con trayectorias en \mathbb{D} , tal que cada X^n es la extensión constante por pedazos de algún proceso discreto en tiempo indexado en \mathbb{N}/n que empieza en 0. Supongamos que $X^n \rightarrow X$ en la topología de Skorohod, ya sea débilmente o casi seguramente. Sea $(z_n, n \geq 1)$ una sucesión de reales no negativos que convergen al punto z . Para cada $n \geq 1$, definamos los procesos C^n y Z^n como $C^n(0) = 0$,*

$$\begin{aligned} C^n(t) &= C^n(\lfloor nt \rfloor/n) + (t - \lfloor nt \rfloor/n) \mathbf{I}(Z^n(t) > 0), \\ Z^n(t) &= (z_n + X^n - \gamma \text{Id})(C^n(\lfloor nt \rfloor/n)) + \gamma \lfloor nt \rfloor/n. \end{aligned}$$

en (4) y (5) respectivamente. Entonces el par (C^n, Z^n) converge a (C, Z) . El tipo de convergencia será débil o casi segura, dependiendo del tipo de convergencia de $(X^n, n \geq 1)$.

Demostración. En el enunciado del Teorema 4, permitimos que la convergencia $X^n \rightarrow X$ sea débil o casi segura. Recurriendo al teorema de representación de Skorohod, podemos suponer que esta convergencia se satisface de forma c.s. en algún espacio de probabilidad adecuado. El resultado se desprende inmediatamente de la proposición 3.4 al considerar las trayectorias $f = z + X - \gamma \text{Id}$ y $f^n = z_n + X^n - \gamma \lfloor n \cdot \rfloor/n$. \square

3.2.2. Detalles de medibilidad y propiedad fuerte de Markov

“The importance of the theory of Markov processes is due to several facts [...] However, the usefulness of the theory will be limited by the number of processes that can be constructed and studied. We have seen how to construct a Markov process starting from a [transition function], but the snag is that there aren’t many t.f.’s which are explicitly known; moreover, in most phenomena which can be modeled by a Markov process, what is grasped by intuition is not the t.f. but the way in which the process moves from point to point. For these reasons, the following notions [(infinitesimal generators)] are very important”. [RY99]

Para finalizar la prueba del teorema 3, resta verificar la adaptabilidad de la única solución a la ECT (3) a la filtración cambiada de tiempo $(\widehat{\mathcal{F}}_s, s \geq 0)$ y que dicha solución efectivamente es un proceso de Lévy pegajoso basado en X . Dedicaremos la presente sección a dicho objetivo.

Por construcción el mapeo $t \mapsto C_t$ es continuo y estrictamente creciente. Recordando que C es la inversa del mapeo $t \mapsto t + L_t/\gamma$, escribimos

$$\{C_t \leq s\} = \{\gamma(t - s) \leq L_s\} \in \mathcal{F}_s,$$

para todo $t \geq 0$, i.e., el tiempo aleatorio C_t es un (\mathcal{F}_s) -tiempo de paro, pues la filtración es continua por la derecha. Por lo tanto el proceso C es un (\mathcal{F}_s) -cambio de tiempo y Z es adaptado a $(\widehat{\mathcal{F}}_t, t \geq 0)$. En este sentido decimos que Z no presenta aleatoriedad extra como sucedía con la ecuación diferencial estocástica que describe al movimiento browniano pegajoso (cf. [War97, Teorema 1]).

Verifiquemos que la única solución Z a la ECT definida en (3) es una extensión del proceso matado X^0 . Por construcción, si $Z_0 > 0$, entonces Z coincide con $z + X$ hasta que ambos llegan a cero. Así, los procesos matados al llegar a 0 tienen la misma ley. Supongamos ahora que Z satisface la ECT (3) con $Z_0 = z = 0$. Por construcción,

$$\gamma \int_0^t \mathbf{I}(Z_s = 0) ds = L \circ C,$$

donde $C_t = \int_0^t \mathbf{I}(Z_s > 0) ds$ y $L_t = -\inf_{s \leq t} X_s$. Como hemos argumentado antes, la variación infinita implica que $L_t > 0$ para todo $t > 0$ y en consecuencia $L_\infty > 0$ c.s. Dado que C es la inversa de $t \mapsto t + L_t/\gamma$, vemos que $C_\infty = \infty$ y concluimos que $L \circ C_\infty > 0$ c.s., implicando que Z pasa tiempo positivo en 0.

Recordando nuevamente que la solución Z a la ECT (3) es un cambio de tiempo continuo y estrictamente creciente del proceso reflejado en su ínfimo $R = X - \underline{X}$, veremos que Z hereda el comportamiento regular e instantáneo de R en 0. En efecto,

$$\mathbb{P}(T_0(R \circ C) = 0) = \mathbb{P}(\inf\{s > 0 : X \circ C_s = \underline{X} \circ C_s\} = 0) = \mathbb{P}(\inf\{s > 0 : X_s = \underline{X}_s\} = 0),$$

y el último evento está contenido en el evento $\{\inf\{s > 0 : X_s \leq 0\} = 0\}$, que como vimos antes, tiene probabilidad uno gracias a la variación infinita de X . Similarmente

$$\mathbb{P}(S_0(R \circ C) = 0) = \mathbb{P}(\inf\{s > 0 : X_s > \underline{X}_s\} = 0) \geq \mathbb{P}(\inf\{s > 0 : X_s > 0\} = 0) = 1.$$

Para concluir la prueba del teorema 3, sólo falta verificar la propiedad fuerte de Markov. Recordando la construcción de la única solución a la ECT (3) dada en la Sección 3.1, deducimos la existencia de un mapeo medible F_s que manda las trayectorias del proceso de Lévy X y la condición inicial z a la única solución de la ECT (3) evaluada en un tiempo s , i.e., $Z_s = F_s(X, z)$ para toda $s \geq 0$. Sea T un $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -tiempo de paro. Aproximándolo por una sucesión de $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -tiempos de paro $(T^n, n \geq 1)$ que decrecen a T , cada uno de los cuales toma sólo una cantidad numerable de valores $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots$, vemos que C_T es un (\mathcal{F}_t) -tiempo de paro. En efecto,

$$\{C_T \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{C(T^n) \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T^n = t_{n,k}, C(t_{n,k}) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

De la ECT (3) deducimos que

$$Z_{T+s} = Z_T + (X_{C(T+s)} - X_{C(T)}) + \gamma \int_0^s \mathbf{I}(Z_{T+r} = 0) dr.$$

Introduciendo los procesos \bar{C} , \bar{X} y \bar{Z} definidos por $\bar{C}_s = C(T+s) - C(T)$, $\bar{X}_s = X_{C(T)+s} - X_{C(T)}$ y $\bar{Z}_s = Z_{T+s}$ respectivamente, podemos reescribir la última ecuación como

$$\bar{Z}_s = Z_T + \bar{X}_{\bar{C}(s)} + \gamma \int_0^s \mathbf{I}(\bar{Z}_r = 0) dr, \quad (3.11)$$

y \bar{C} satisface $\bar{C}_s = \int_0^s \mathbf{I}(\bar{Z}_r > 0) dr$ para $s \geq 0$. En otras palabras, el proceso \bar{Z} es solución a la ECT (3) dirigida por \bar{X} y con condición inicial Z_T , implicando que $\bar{Z}_s = F_s(\bar{X}, Z_T)$. Note que \bar{X} tiene la misma distribución que X y es independiente de $\widehat{\mathcal{F}}_T$. Por lo cual, en el conjunto $\{Z_T = z\}$, la ley condicional de Z_{T+} dada $\widehat{\mathcal{F}}_T$ es igual a la ley de Z empezando en z . Para establecer esta propiedad de forma rigurosa, aún en el caso en que $\{Z_T = z\}$ tiene medida cero para toda $z \geq 0$, imitaremos la prueba del teorema de desintegración (comparar con [Kal02, Teorema 6.4]).

Proposición 3.5. Sea S un (\mathcal{F}_t) -tiempo de paro, Y una variable aleatoria que es \mathcal{F}_S -medible y $g : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $\mathbb{E}[|g(X_{S^+} - X_S, Y)|] < \infty$. Entonces

$$\mathbb{E}[g(X_{S^+} - X_S, Y) | \mathcal{F}_S] = \int \nu(dy) \mathbb{E}[g(X, y)] \quad \text{c.s.}, \quad (3.12)$$

donde ν denota una versión regular de $\mathbb{P}(Y \in \cdot | \mathcal{F}_S)$. De hecho, podemos tomar $\nu(C) = \mathbb{I}(Y \in C)$ para todo $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Demostración. Empecemos recordando que una versión regular de $\mathbb{P}(Y \in \cdot | \mathcal{F}_S)$ es una versión de la probabilidad condicional que además es un kernel de probabilidad de (Ω, \mathcal{F}_S) en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Puesto que Y es \mathcal{F}_S -medible, entonces $\nu = \mathbb{I}(Y \in \cdot)$ c.s.

Sea $A \in \mathcal{F}_S$. Para probar la identidad

$$\mathbb{E}[g(X_{S^+} - X_S, Y) \mathbb{I}(A)] = \mathbb{E}\left[\int \nu(dy) \mathbb{E}[g(X, y)] \mathbb{I}(A)\right], \quad (3.13)$$

primero mostraremos su validez para las distribuciones finito-dimensionales, en otras palabras verificaremos por inducción que (3.13) se satisface para las funciones del tipo $g = \mathbb{I}(B_n \times C)$, donde $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y B_n es de la forma $\{x \in \mathbb{D} : x(t_i) \in \Gamma_i, i = 1, \dots, n\}$ para algunos tiempos $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. A tales conjuntos los llamamos finito dimensionales. Reescribiendo (3.13) para estas funciones, debemos probar que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{S+t_1} - X_S \in \Gamma_1, \dots, X_{S+t_n} - X_S \in \Gamma_n, Y \in C, A) \\ = \mathbb{E}\left[\int \nu(dy) \mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n, y \in C) \mathbb{I}(A)\right]. \end{aligned}$$

Por simplicidad hemos escrito $\mathbb{P}(A, B)$ para denotar la probabilidad de la intersección $\mathbb{P}(A \cap B)$. Componiendo con la función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por

$$h(x_1, \dots, x_n, y) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}, y),$$

es equivalente probar que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{S+t_1} - X_S \in \Gamma_1, X_{S+t_2} - X_{S+t_1} \in \Gamma_2, \dots, X_{S+t_n} - X_{S+t_{n-1}} \in \Gamma_n, Y \in C, A) \\ = \mathbb{E}\left[\int \nu(dy) \mathbb{P}[X_{t_1} \in \Gamma_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in \Gamma_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, y \in C] \mathbb{I}(A)\right], \quad (3.14) \end{aligned}$$

para cualesquiera conjuntos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Si $n = 1$, condicionando a \mathcal{F}_S y usando la independencia y estacionariedad del incremento $X_{S+t_1} - X_S$, el lado izquierdo de (3.14) se reescribe como

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1) \int \nu(dy) \mathbb{I}(y \in C) \mathbb{I}(A)\right] = \mathbb{E}\left[\int \nu(dy) \mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, y \in C) \mathbb{I}(A)\right],$$

verificando lo que queríamos. Supongamos que la ecuación (3.14) se satisface para funciones de la forma $g = \mathbb{I}(B_n \times C)$ y probemos su validez para $g = \mathbb{I}(B_{n+1} \times C)$. En este caso, el lado izquierdo de (3.14) está dado por

$$\mathbb{P}(X_{S+t_1} - X_S \in \Gamma_1, \dots, X_{S+t_{n+1}} - X_{S+t_n} \in \Gamma_{n+1}, Y \in C, A).$$

Condicionando a \mathcal{F}_{S+t_n} y usando la independencia y estacionariedad de los incrementos, esta probabilidad es igual a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}(X_{S+t_1} - X_S \in \Gamma_1, \dots, X_{S+t_n} - X_{S+t_{n-1}} \in \Gamma_n) \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \in \Gamma_{n+1}) \mathbb{I}(Y \in C) \mathbb{I}(A)\right].$$

Por hipótesis de inducción, podemos reescribir la última cantidad como

$$\mathbb{E} \left[\int \nu(dy) \mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in \Gamma_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, y \in C) \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \in \Gamma_{n+1}) \mathbb{I}(A) \right].$$

Nuevamente usando la independencia de los incrementos, esto es equivalente a

$$\mathbb{E} \left[\int \nu(dy) \mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in \Gamma_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \in \Gamma_{n+1}, y \in C) \mathbb{I}(A) \right],$$

con lo que concluimos la veracidad de (3.14). Como la clase de los conjuntos finito dimensionales es cerrada bajo intersecciones, usando el teorema de clases de Dynkin, se sigue el resultado para funciones del tipo $\mathbb{I}(B \times C)$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ y $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por linealidad, esta fórmula se extiende a funciones simples en $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ y usando el teorema de convergencia monótona, la ecuación (3.13) se cumple para cualquier función medible y no negativa definida en $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Tomando diferencias, vemos que también se cumple para funciones medibles e integrables, con lo cual comprobamos la ecuación (3.12). \square

Aplicando la proposición anterior al tiempo de paro $S = C_T$, la variable $Y = Z_T$ y la función $g = f \circ F_s$, la ecuación (3.12) se convierte en

$$\mathbb{E} \left[f(Z_{T+s}) \middle| \widehat{\mathcal{F}}_T \right] = \int \nu(dz) \mathbb{E}_z[f(Z_s)] = \mathbb{E}_{Z_T} f(Z_s) \quad \text{c.s.},$$

lo que concluye la prueba de la propiedad fuerte de Markov.

3.2.3. Un problema de martingala

“Itô’s theory proved its versatility and efficiency, in connection with Doob’s martingale theory, so that, enriched by the works of a large number of scientists during the fifties and the sixties, Itô’s formula would become the cornerstone, from the seventies onwards, of a myriad of applications of stochastic calculus, of which Wolfgang Doeblin, in his memoir «Sur l’équation de Kolmogorov» was one of the heralds”. [BY02]

En la Sección 2.2 describimos el dominio del generador infinitesimal de cualquier extensión recurrente de X^0 por medio de tres constantes no negativas p_c, p_d y p_κ y una medida μ en $(0, \infty)$. Acabamos de probar que la única solución a la ECT (3) es una extensión recurrente de X^0 que deja 0 continuamente, pasa tiempo positivo en 0 y cuyo tiempo de vida es infinito. Esto significa que los parámetros correspondientes a dicha extensión satisfacen $p_c > 0$, $p_d > 0$, $p_\kappa = 0$ y $\mu = 0$. El teorema 2 asegura que cualquier función f en el dominio de su generador infinitesimal satisface

$$f'(0+) = \frac{p_d}{p_c} \mathcal{G}f(0+).$$

A continuación presentamos otro método para hallar esta condición de frontera que no requiere los resultados desarrollados en el capítulo anterior. Originalmente desarrollamos estos cálculos para mostrar que la ECT dirigida por un movimiento browniano (3) tiene solución. Tal prueba consiste en dar un esquema de discretización de la ECT y verificar que el proceso límite satisface la ECT mediante el cálculo del generador infinitesimal del límite. Pensamos que esa prueba,

puede extenderse para estudiar ECT más generales. Nuestra principal intención es dar una aplicación de cálculo estocástico, pues recordemos que normalmente el cálculo del generador infinitesimal se basa en técnicas de análisis de Fourier.

Proposición 3.6. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente positivo con variación no acotado, sea \mathcal{L} generador infinitesimal. Dados $z \geq 0$ y $\gamma > 0$, sea Z la única solución a la ECT (3). Entonces, para cualquier función $f \in C_0^2[0, \infty)$ que satisface la condición de frontera $f'(0+) = \mathcal{L}f(0+)$, el proceso M definido por*

$$M_t = f(Z_t) - \int_0^t \mathcal{L}f(Z_s) ds,$$

es una martingala y

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mathbb{E}[f(Z_t)] = \mathcal{L}f(z).$$

Demostración. Sea Z la única solución a la ECT (3) dirigida por un proceso de Lévy espectralmente positivo X . La fórmula de Itô para semimartingalas garantiza que para cualquier función $f \in C_b^2[0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f(Z_t) = & f(z) + \int_0^t f'(Z_s^-) dX_{C_s} + \int_0^t \gamma f'(Z_s^-) \mathbf{I}(Z_s^- = 0) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Z_s^-) d[Z, Z]_s^c \\ & + \sum_{s \leq t} (\Delta f(Z_s) - f'(Z_s^-) \Delta Z_s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desarrollemos cada uno de estos términos. Usando la descomposición de Lévy-Itô de X introducida en (1.3), veremos que $\int_0^t f'(Z_s^-) dX_{C_s}$ es una semimartingala de la forma

$$M_t + \int_0^t a f'(Z_s^-) (1 - \mathbf{I}(Z_s = 0)) ds + \int_0^t f'(Z_s^-) dX_{C_s}^{(2)}, \quad (3.16)$$

para alguna martingala cuadrado integrable M . Para hacerlo, usaremos el siguiente resultado del cual posponemos su demostración.

Lema 3.2. *Sea C un (\mathcal{F}_t) -cambio de tiempo continuo tal que $C \leq \text{Id}$. Sea X una (\mathcal{F}_t) -martingala local continua por la derecha. Entonces el proceso cambiado de tiempo X_C es una $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -martingala local continua por la derecha.*

El lema 3.2 asegura que el proceso $\sigma B + X^{(3)}$ cambiado de tiempo por C sigue siendo martingala local. Como recordamos en los preliminares, se sabe que las martingalas locales localmente cuadrado integrables son preservadas bajo la integración estocástica siempre y cuando el integrando sea adaptado y con trayectorias càglàd. En consecuencia la integral estocástica $M = f'(Z^-) \cdot (\sigma B_C + X_C^{(3)})$ es una $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -martingala local. También recordamos que una condición necesaria y suficiente para que una martingala local sea martingala cuadrado integrable, es que su variación cuadrática sea integrable. Verifiquemos que $\mathbb{E}[[M, M]_t] < \infty$ para toda $t \geq 0$. En el recordatorio 1.6 dijimos que la variación cuadrática del proceso cambiado de tiempo coincide con el cambio de tiempo de la variación cuadrática, así que para toda $t \geq 0$

$$\left[\sigma B_C + X_C^{(3)}, \sigma B_C + X_C^{(3)} \right]_t = \left[\sigma B + X^{(3)}, \sigma B + X^{(3)} \right]_{C_t}.$$

Usando la independencia de B y $X^{(3)}$ vemos que esta variación cuadrática es $\sigma^2 C_t + [X^{(3)}, X^{(3)}]_{C_t}$. Notemos que c.s esta cantidad está acotada por $\sigma^2 t + [X^{(3)}, X^{(3)}]_t$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}[[M, M]_t] \leq \|f'\|_\infty^2 \mathbb{E}\left[[\sigma B + X^{(3)}, \sigma B + X^{(3)}]_{C_t}\right] \leq \|f'\|_\infty^2 \left(\sigma^2 t + t \int_{(-1,1)} x^2 \nu(dx)\right) < \infty.$$

Con lo cual queda verificada la descomposición (3.16). Más tarde nos ocuparemos del último término de dicha descomposición.

Regresando a la fórmula de Itô (3.15), nos toca calcular el término correspondiente a la integral respecto a la parte continua de la variación cuadrática de Z , primero encontramos dicha variación, la cual se puede escribir como

$$[Z, Z] = [X_C, X_C] + 2[X_C, \gamma(\text{Id} - C)] + \gamma^2[\text{Id} - C, \text{Id} - C].$$

Observe que el primer término es $[X, X]_C$. Notemos también que $\gamma(\text{Id} - C)$ tiene variación finita. Se sabe que para un proceso A de variación localmente finita, la variación cuadrática $[X, A]_t$ es solamente $\sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta A_s$ c.s. (como se puede consultar en [Kal02, Teorema 26.6]). Dada la continuidad de C , concluimos que la covariación $[X_C, \gamma(\text{Id} - C)]_s$ es cero c.s. Con el mismo razonamiento deducimos que $[\text{Id} - C, \text{Id} - C] = 0$ c.s. Por lo tanto la variación cuadrática de Z queda $[Z, Z] = [X, X]_C$ y

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(Z_s^-) d[Z, Z]_s^c = \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f''(Z_s^-) (1 - \mathbb{I}(Z_s = 0)) ds.$$

En el desarrollo de (3.15), tenemos pendiente el último término del lado derecho, el cual corresponde a la parte de saltos. Notemos que las discontinuidades de $f \circ Z$ derivan de discontinuidades de Z , que a su vez son causadas por discontinuidades de $X \circ C$, en otras palabras

$$\{s \leq t : |\Delta f(Z_s)| > 0\} \subseteq \{s \leq t : \Delta Z_s > 0\} = \{s \leq t : \Delta(X \circ C)_s\}.$$

Haciendo el cambio de variable $r = C_s$, la suma de los saltos en (3.15) se reescribe como

$$\sum_{r \leq C_t} (\Delta f(Z \circ A_r) - f'(Z^- \circ A_r) \Delta(Z \circ A_r)), \quad (3.17)$$

donde A denota al inverso de C . Afirmamos que A es un $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -cambio de tiempo. En efecto, separando en los casos $r < t$ y $r \geq t$ vemos que $\{A_t \leq s\} \cap \{C_s \leq r\} = \{t \leq C_s \leq r\} \in \mathcal{F}_r$ para todo $r \geq 0$. Usando el recordatorio 1.5, podemos reescribir la filtración $(\widehat{\mathcal{F}}_t, t \geq 0)$ cambiada de tiempo por A como la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ cambiada de tiempo por $C \circ A = \text{Id}$, o sea $\widehat{\mathcal{F}}_{A_t} = \mathcal{F}_t$. Por lo tanto, para cualquier función continua g , el proceso $(g(Z_{A_t}^-), t \geq 0)$ es (\mathcal{F}_t) -predecible.

A continuación agruparemos la suma de los saltos en (3.17) con la integral estocástica $(f' \circ Z^-) \cdot (X^{(2)} \circ C)$ que dejamos pendiente en (3.16). Para ello, nos conviene reescribir tal integral como $(f' \circ Z^- \circ A \circ C) \cdot (X^{(2)} \circ C)$ y aplicar el recordatorio 1.7 para deducir que $(f' \circ Z^-) \cdot (X^{(2)} \circ C) = ((f' \circ Z^- \circ A) \cdot X^{(2)}) \circ C$. En consecuencia

$$\begin{aligned} & \int_0^t f'(Z_s^-) dX_{C_s}^{(2)} + \sum_{s \leq C_t} (\Delta f(Z \circ A_s) - f'(Z^- \circ A_s) \Delta(Z \circ A_s)) \\ &= \int_0^{C_t} \int_{(0, \infty)} \left(f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - f'(Z_{A_s}^-) x \mathbb{I}(x \in (0, 1)) \right) (N(ds, dx) - \nu(dx) ds) \\ & \quad + \int_0^{C_t} \int_{(0, \infty)} \left(f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - f'(Z_{A_s}^-) x \mathbb{I}(x \in (0, 1)) \right) \nu(dx) ds. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Definamos el proceso \bar{M} como

$$\begin{aligned}\bar{M}_t &= - \int_0^t \int_{[1,\infty)} (f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-)) \nu(dx) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{[1,\infty)} (f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-)) N(ds, dx) \\ &\quad + \int_0^t \int_{(0,1)} (f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - f'(Z_{A_s}^-)x) (N(ds, dx) - \nu(dx) ds).\end{aligned}$$

Usando que ν es una medida de Lévy notamos que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[1,\infty)} |f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-)| \nu(dx) ds \right] \leq \|f\|_\infty^2 t \nu([1, \infty)) < \infty.$$

Además desarrollando el polinomio de Taylor de orden uno de $f(Z_{A_s}^- + x)$ vemos que

$$f'(Z_{A_s}^-)x = f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - R(x), \quad x \in (0, 1),$$

donde el residuo R satisface que $|R(x)| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty x^2$. Por lo tanto

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{(0,1)} (f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - f'(Z_{A_s}^-)x) \nu(dx) ds \right] \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty t \mathbb{E} \left[\int_{(0,1)} x^2 \nu(dx) \right] < \infty.$$

El teorema 5.2.1 de [App09] garantiza que \bar{M} es una (\mathcal{F}_t) -martingala local y aplicando el lema 3.2 deducimos que al cambiarla de tiempo con C permanece martingala local, ahora con respecto a $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$. Además, para todo $t \geq 0$ se cumple que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |\bar{M}_{C_s}| \right] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |\bar{M}_s| \right] \leq (2\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_\infty^2) t \int_{(0,\infty)} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty.$$

En consecuencia la martingala local \bar{M}_C resulta ser martingala, como recordamos en 1.3.

Recopilando las expresiones involucradas en la fórmula de Itô (3.15), obtenemos la siguiente descomposición de semimartingala

$$\begin{aligned}f(Z_t) - f(z) &= M_t + \int_0^t a f'(Z_s^-) (1 - \mathbf{I}(Z_s = 0)) ds + \int_0^t \gamma f'(0+) \mathbf{I}(Z_s = 0) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f''(Z_s^-) (1 - \mathbf{I}(Z_s = 0)) ds + \bar{M}_{C_t} \\ &\quad + \int_0^{C_t} \int_{(0,\infty)} (f(Z_{A_s}^- + x) - f(Z_{A_s}^-) - f'(Z_{A_s}^-)x \mathbf{I}(x \in (0, 1))) \nu(dx) ds.\end{aligned}$$

Recordemos que el generador infinitesimal de X^0 está dado por

$$\mathcal{G}f(z) = \begin{cases} a f'(z) + \frac{\sigma^2}{2} f''(z) + \int_{\mathbb{R}_+} (f(z+x) - f(z) - f'(z)x \mathbf{I}(x \in (0, 1))) \nu(dx), & z > 0, \\ 0 & z = 0, \end{cases}$$

y definamos $\mathcal{L}f(0)$ como

$$\mathcal{L}f(0) = (a - \gamma) f'(0+) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0+) + \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(0+) - f'(0+)x \mathbf{I}(x \in (0, 1))) \nu(dx),$$

Notando que $\mathcal{L}f(0) = \mathcal{G}f(0+) - \gamma f'(0+)$, podemos reescribir la martingala $M + \overline{M}_C$ como

$$M + \overline{M}_{C_t} = f(Z_t) - f(z) - \int_0^t \mathcal{G}f(Z_s^-) ds + \int_0^t \mathcal{L}f(0) \mathbb{I}(Z_s = 0) ds.$$

Deducimos que si una función $f \in C_b^2[0, \infty)$, que satisface la condición de frontera $\mathcal{L}f(0) = 0$ o equivalentemente $\gamma f'(0+) = \mathcal{G}f(0+)$, entonces el proceso dado por $f(Z_t) - f(z) - \int_0^t \mathcal{L}f(Z_s) ds$ es una martingala. Por hipótesis, el último término está acotado por una función lineal de t , por lo cual $\mathbb{E}[f(Z_t)]$ es diferenciable en 0 y su derivada es $\mathcal{L}f(z)$. \square

Concluiremos la sección con la prueba del lema 3.2.

Demostración. (Lema 3.2) Supongamos que $(\beta_n, n \geq 1)$ es una sucesión de (\mathcal{F}_t) -tiempos de paro que localiza a X , i.e., $\beta_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y para toda $n \geq 1$, el proceso $X^{\beta_n} \mathbb{I}(\beta_n > 0)$ es una martingala uniformemente integrable. Conservando la notación de A para el inverso de C , probaremos que $(A(\beta_n), n \geq 1)$ es una sucesión de $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -tiempos de paro que localiza al proceso cambiado de tiempo X_C . La propiedad de ser (\mathcal{F}_t) -tiempo de paro se deduce al observar que $\{\beta_n \leq C_t\} \in \mathcal{F}_{\beta_n} \cap \mathcal{F}_{C_t} \subset \widehat{\mathcal{F}}_t$, lo cual implica que

$$\{A(\beta_n) \leq t\} \cap \{C_t \leq s\} = \{\beta_n \leq C_t\} \cap \{C_t \leq s\} \in \mathcal{F}_s.$$

Usando que $C \circ A = \text{Id}$, obtenemos

$$(Z \circ C)_t^{A(\beta_n)} = Z_{C_t \wedge \beta_n} = Z_{C_t}^{\beta_n}.$$

Dado que Z^{β_n} es una (\mathcal{F}_t) -martingala, el teorema de paro opcional de Doob garantiza que

$$\mathbb{E}\left[Z_{C_t}^{\beta_n} \mid \mathcal{F}_{C_s}\right] = Z_{C_s}^{\beta_n}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Por lo tanto $(Z \circ C)^{A(\beta_n)}$ es una $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -martingala. Además $A(\beta_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ pues $C \leq \text{Id}$. \square

Bibliografía

- [AHUB20] Osvaldo Angtuncio Hernández and Gerónimo Uribe Bravo, *Dini derivatives and regularity for exchangeable increment processes*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **7** (2020), 24–45. MR 4130409
- [App09] David Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 116, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. MR 2512800
- [Bas14] Richard F. Bass, *A stochastic differential equation with a sticky point*, Electron. J. Probab. **19** (2014), no. 32, 22. MR 3183576
- [Ber96] Jean Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR 1406564
- [BG64] R. M. Blumenthal and R. K. Gettoor, *Local times for Markov processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **3** (1964), 50–74. MR 165569
- [Bil99] Patrick Billingsley, *Convergence of probability measures*, second ed., Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, A Wiley-Interscience Publication. MR 1700749
- [Blu83] R. M. Blumenthal, *On construction of Markov processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **63** (1983), no. 4, 433–444. MR 705615
- [Blu92] Robert M. Blumenthal, *Excursions of Markov processes*, Probability and its Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. MR 1138461
- [BR20] Guillaume Barraquand and Mark Rychkovsky, *Large deviations for sticky Brownian motions*, Electron. J. Probab. **25** (2020), Paper No. 119, 52. MR 4161129
- [BY02] Bernard Bru and Marc Yor, *Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin*, Finance Stoch. **6** (2002), no. 1, 3–47. MR 1885582
- [Chi97] R. Chitashvili, *On the nonexistence of a strong solution in the boundary problem for a sticky Brownian motion*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **115** (1997), 17–31. MR 1639096
- [CPGUB13] M. Emilia Caballero, José Luis Pérez Garmendia, and Gerónimo Uribe Bravo, *A Lamperti-type representation of continuous-state branching processes with immigration*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 3A, 1585–1627. MR 3098685

- [CPGUB17] ———, *Affine processes on $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ and multiparameter time changes*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 3, 1280–1304. MR 3689968
- [Dua20] Mauricio Duarte, *Reflected (degenerate) diffusions and stationary measures*, XIII Symposium on Probability and Stochastic Processes, Progr. Probab., vol. 75, Birkhäuser/Springer, Cham, [2020] ©2020, pp. 3–35. MR 4181377
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz, *Markov processes: characterization and convergence*, Wiley series in probability and mathematical statistics. Probability and mathematical statistics, Wiley, 1986.
- [EP14] Hans-Jürgen Engelbert and Goran Peskir, *Stochastic differential equations for sticky Brownian motion*, Stochastics **86** (2014), no. 6, 993–1021. MR 3271518
- [Fel52] William Feller, *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. of Math. (2) **55** (1952), 468–519. MR 0047886
- [Hal70] P. R. Halmos, *How to write mathematics*, Enseign. Math. (2) **16** (1970), 123–152. MR 277319
- [IM63] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Brownian motions on a half line*, Illinois J. Math. **7** (1963), 181–231. MR 0154338
- [Itô72] Kiyosi Itô, *Poisson point processes attached to Markov processes*, 225–239. MR 0402949
- [Itô87] ———, *Selected papers*, Springer-Verlag, New York, 1987, Edited and with an introduction by S. R. S. Varadhan and Daniel W. Stroock. MR 868862
- [Itô07] ———, *Memoirs of my research on stochastic analysis*, Stochastic analysis and applications, Abel Symp., vol. 2, Springer, Berlin, 2007, pp. 1–5. MR 2397781
- [Itô15] ———, *Poisson point processes and their application to Markov processes*, SpringerBriefs in Probability and Mathematical Statistics, Springer, Singapore, 2015, With a foreword by Shinzo Watanabe and Ichiro Shigekawa. MR 3467032
- [Jac79] Jean Jacod, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 714, Springer, Berlin, 1979. MR 542115
- [Kal02] Olav Kallenberg, *Foundations of modern probability*, second ed., Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1876169
- [KKR12] Alexey Kuznetsov, Andreas E. Kyprianou, and Victor Rivero, *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, Lévy matters II, Lecture Notes in Math., vol. 2061, Springer, Heidelberg, 2012, pp. 97–186. MR 3014147
- [Kyp14] Andreas E. Kyprianou, *Fluctuations of Lévy processes with applications*, second ed., Universitext, Springer, Heidelberg, 2014, Introductory lectures. MR 3155252
- [Mai75] Bernard Maisonneuve, *Exit systems*, Ann. Probability **3** (1975), no. 3, 399–411. MR 400417

- [Mil77] P. W. Millar, *Zero-one laws and the minimum of a Markov process*, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977), 365–391. MR 433606
- [Pes14] Goran Peskir, *On Boundary Behaviour of One-dimensional Diffusions: from Brown to Feller and Beyond*, 2014.
- [PM91] Murray H. Protter and Charles B. Morrey, Jr., *A first course in real analysis*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1123269
- [PPR18] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. M. Rivero, *The excursion measure away from zero for spectrally negative Lévy processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), no. 1, 75–99. MR 3765881
- [Pro05] Philip E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Second edition. Version 2.1, Corrected third printing. MR 2273672
- [Rog68] B. A. Rogozin, *The local behavior of processes with independent increments*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **13** (1968), 507–512. MR 0242261
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, third ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1725357
- [Sal86] Thomas S. Salisbury, *On the Itô excursion process*, Probab. Theory Related Fields **73** (1986), no. 3, 319–350. MR 859837
- [War97] Jonathan Warren, *Branching processes, the ray-knight theorem, and sticky brownian motion*, Séminaire de probabilités de Strasbourg **31** (1997), 1–15 (fre).
- [Whi80] Ward Whitt, *Some useful functions for functional limit theorems*, Math. Oper. Res. **5** (1980), no. 1, 67–85. MR 561155
- [Yan14] Kouji Yano, *Extensions of diffusion processes on intervals and Feller’s boundary conditions*, Osaka J. Math. **51** (2014), no. 2, 375–404. MR 3192547