UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONCEPTOS CARACTERIZADOS MEDIANTE ORTOGONALIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
CARLOS OLDAIR RENTERÍA GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CODIRECTOR DE TESIS
DR. HUGO JUÁREZ ANGUIANO
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA, UAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. OMAR ANTOLÍN CAMARENA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. DICIEMBRE 2023.

Índice general

Introducción iii

1. Levantamiento de morfismos **1**
- 1.1. Conexidad 3
- 1.2. Axiomas de separación 5

2. Resultados Principales **9**
- 2.1. Caracterización de morfismos Propios 9
- 2.2. Generalizaciones del Teorema de Taimanov 18

A. Propiedades algebraicas **33**
- A.1. Morfismos suprayectivos 33
- A.2. Morfismos inyectivos 35
- A.3. Módulos proyectivos y módulos inyectivos. 36

B. Contraejemplos **39**

Introducción

Desde su definición formal en [16], el levantamiento de morfismos ha tenido un papel destacado en la teoría de categorías y en diferentes áreas de la topología.

Recientemente Gavrilovich [9] caracterizó algunas propiedades y conceptos clásicos en términos de la propiedad de levantamiento de morfismos. Dichos conceptos incluyen propiedades algebraicas como: solubilidad, p-grupos, grupos finitos nilpotentes, grupos libres de torsión; y propiedades topológicas como: conexidad, axiomas de separación, compacidad y morfismos propios. Particularmente caracteriza los morfismos propios con dominio y codomino T_4 como aquellos que están en la clase $((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^{lr}$ (ver definición 1.0.1 y notación 1.0.3). En el mismo artículo el autor propone la siguiente conjetura:

Conjetura 0.0.1 *En la categoría de espacios topológicos,* $((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^{lr}$ *es la clase de morfismos propios.*

Con el trabajo realizado durante los primeros semestres, en [11] dimos una respuesta parcial a dicha conjetura (teorema 2.1.11).

Una vez enviado [11] a arbitraje, se continuó trabajando en responder completamente la conjetura 0.0.1. Al trabajar en esto, quedó claro que necesitábamos saber cuándo una función continua definida en un subespacio denso de un espacio topológico se puede extender a todo el espacio. En este sentido, uno de los teoremas más significativos es el teorema de Taimanov [19], este proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una función continua con codominio compacto tenga una extensión continua.

Este resultado tiene varias generalizaciones. En [1] Agnello y Cammaroto nos presentan una de ellas, en el contexto de funciones casi continuas y espacios casi compactos. Otra de estas se encuentra en [12], ahí Konami y Miwa presentan una versión en la topología fibrada de tal teorema, recordemos que la topología fibrada fue introducida por I.M.James en [10]. Este punto de vista proviene de la teoría de categorías, es un caso particular de categoría rebanada.

Por su naturaleza, la topología fibrada parece ser un buen ambiente para aplicar la propiedad de levantamiento de morfismos.

Motivados por [1] y [12] vimos posible dar una versión fibrada del teorema de Taimanov para funciones casi continuas. Para hacer esto son necesarios algunos conceptos sobre $\mathcal{P}$-funciones, es decir, funciones continuas que satisfacen una propiedad topológica $\mathcal{P}$.

El concepto de $\mathcal{P}$-funciones fue introducido por B.A. Pasynkov, F. Cammaroto y G. Nordo para ampliar las propiedades correspondientes de $\mathcal{P}$-*espacios*, es decir, para una propiedad topológica $\mathcal{P}$, se define una propiedad análoga $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ para funciones, de tal modo que al considerar funciones con dominio un $\mathcal{P}$-*espacio* estas cumplan evidentemente la propiedad $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$, sin que sean estas ultimas las únicas que cumplen la propiedad.

Esta línea de investigación inició con la introducción de funciones T_0, T_1, T_2 y *regulares* por Pasynkov [15], luego, F. Cammaroto y G. Nordo definieron y estudiaron las propiedades $\mathcal{P}$ = *Urysohn, semirregular* y *casi regular* [6], después, F. Cammaroto, V.V. Fedorchuk, J.R. Porter y A. Catalioto desarrollaron las funciones H-*cerradas* y U-*cerradas* en [4] y [5].

Haciendo evidente el propósito de la topología fibrada, que es llevar a nivel de morfismos las propiedades de espacios, notamos que es equivalente el concepto de que una función $f : X \longrightarrow Y$ sea T_0 con el de que el espacio X sea un espacio T_0 fibrado (sobre Y), lo mismo con las propiedades T_1, T_2 y algunas otras.

Con todo esto he podido demostrar un teorema de extensión para funciones casi continuas fibradas (teorema 2.2.25).

Siguiendo el estudio de la extensión de funciones continuas, en [14] encontramos un teorema más general, dado por Osipov. En dicho artículo el autor introduce una nueva familia de axiomas de separación y da un teorema de extensión. Como corolario de dicho teorema se tiene el respectivo resultado de extensión para funciones con codominio un espacio de Urysohn.

En este punto se comenzó a trabajar en una versión fibrada del resultado de Osipov. Hasta ahora se ha logrado demostrar una versión para funciones fibradas con codominio una función de Urysohn (teorema 2.2.34).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo introducimos la propiedad de levantamiento de morfismos, luego, para familiarizarnos un poco con la manera de trabajar con esta, desarrollamos caracterizaciones sencillas de los conceptos topológicos de conexidad y axiomas de separación.

En el segundo capítulo presentamos todos los resultados obtenidos, comenzamos probando una serie de lemas en los que se caracterizan los morfismos inyectivos, morfismos con imagen densa, morfismos cuya topología del dominio está inducida por la del codominio y morfismos cuya cerradura de la imagen de cerrados ajenos se mantiene ajena, dichos lemas los usaremos en la demostración del teorema 2.1.11 que es la caracterización de morfismos propios con dominio regular, luego damos todos los conceptos necesarios para enunciar y probar los resultados de extensión en la topología fibrada, estos incluyen dos versiones fibradas del Teorema de Taimanov para funciones casi-continuas (teoremas 2.2.25 y 2.2.27) y un resultado de extensión para funciones continuas fibradas con codominio una función de Urysohn (teorema 2.2.34).

Al final de este trabajo encontramos dos apéndices, el primero sobre la aplicación de la propiedad de levantamiento de morfismos a propiedades algebraicas, y el segundo sobre algunos contraejemplos de afirmaciones que se hacen en [9].

Capítulo 1

Levantamiento de morfismos

Este capítulo comienza con la definición de la propiedad de levantamiento de morfismos y las respectivas definiciones de clases ortogonales, después, desarrollamos algunas caracterizaciones de conexidad que se enuncian en [9], y al final desarrollamos las caracterizaciones correspondientes para algunos axiomas de separación.

Definición 1.0.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathcal{C}$. Decimos que f tiene la propiedad de levantamiento por la izquierda con respecto a g (equivalentemente g tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a f) o que f es ortogonal izquierdo a g ($f \perp g$) si para cualesquiera morfismos $i : X \longrightarrow A$, $j : Y \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta ($gi = jf$)*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

existe $h : Y \longrightarrow A$ morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $hf = i$ y $gh = j$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B. \end{tikzcd}$$

Para una clase de morfismos $\mathcal{M}$ en $\mathcal{C}$ definimos:

$$\mathcal{M}^l = \{f \in Mor(\mathcal{C}) : f \perp g \text{ para todo } g \in \mathcal{M}\}.$$

$$\mathcal{M}^r = \{g \in Mor(\mathcal{C}) : f \perp g \text{ para todo} f \in \mathcal{M}\}.$$

$$\mathcal{M}^{lr} = (\mathcal{M}^l)^r.$$

Observemos que si la categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal 1, la condición $f : X \longrightarrow Y \perp g : A \longrightarrow 1$ es equivalente a lo siguiente: para cualquier $i : X \longrightarrow A$ existe un morfismo $h : Y \longrightarrow A$ tal que $i = hf$.

Las caracterizaciones que se proponen en [9] se presentan en términos de familias de morfismos (funciones continuas) entre espacios topológicos finitos. La notación que usamos para estos espacios la tomamos del mismo artículo y se justifica con la siguiente observación.

Observación 1.0.2 *En un espacio topológico finito se tiene un preorden en sus puntos: para $x, y \in X$, $x \leq y$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$. Así $x \searrow y$ denotará que $x \leq y$.*

Notación 1.0.3 • $\{a\}$ *es el espacio discreto de 1 punto.*

- $\{a, b\}$ *es el espacio discreto de 2 puntos.*

- $\{a \leftrightarrow b\}$ *es el espacio codiscreto de 2 puntos.*

- $\{a \searrow b\}$ *denota el espacio de Sierpinski.*

- $\{x \searrow z \swarrow y\}$ *es el espacio topológico de 3 puntos con la siguiente topología.*

$$\tau = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

- $\{a \swarrow c \searrow b\}$ *es el espacio topológico de 3 puntos con la siguiente topología.*

$$\sigma = \{\emptyset, \{c\}, \{c, a\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Para los morfismos que tomemos entre estos espacios estaremos etiquetando los puntos del dominio y del codominio de la misma forma, lo que nos indicará la regla de correspondencia del morfismo, es decir, el morfismo enviará "cada punto en sí mismo", como ejemplo los siguientes morfismos:

- $f : \{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\}$ *está definido como:* $f(a) = a$.
- $f : \{b\} \longrightarrow \{a \searrow b\}$ *está dado por:* $f(b) = b$.
- $f : \{a, b\} \longrightarrow \{a \searrow b\}$ *como:* $f(a) = a$ *y* $f(b) = b$.

De este modo, para ser consistentes con esto, en ocasiones el espacio de un solo punto estará etiquetado por una cadena de igualdades entre los puntos del dominio, por ejemplo:

- $f : \{x \searrow z \swarrow y\} \longrightarrow \{x = y = z\}$ *es el morfismo constante con codominio el espacio de un solo punto, es decir,* $f(x) = *$, $f(y) = *$ *y* $f(z) = *$.

1.1. Conexidad

En esta sección presentamos una caracterización de conexidad y una de conexidad por trayectorias. En [9] se proponen más pero presentar todas no es el propósito de esta tesis. Para más ejemplos consultar [17].

Proposición 1.1.1 *Un espacio* K *es conexo o vacío si y solo si* $f : K \longrightarrow \{*\}$ *está en* $(\{a, b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$.

Demostración. Sea K un espacio topológico conexo y consideremos el morfismo $f : K \longrightarrow \{*\}$.

Supongamos que $i : K \longrightarrow \{a, b\}$ y $j : \{*\} \longrightarrow \{a = b\}$ son tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{a, b\} \arrow[d, "c"] \\ \{*\} \arrow[r, "j"'] & \{a = b\} \end{tikzcd}$$

Si $K = \emptyset$, entonces el morfismo $\overline{a} : \{*\} \longrightarrow \{a, b\}$ definido como $\overline{a}(*) = a$ es continuo y cumple que $\overline{a}f = i$ y $c\overline{a} = j$.

Ahora, si $K \neq \emptyset$, entonces i es constante. Definimos $h : \{*\} \longrightarrow \{a, b\}$ como $h(*) = i(K)$. Claramente h es continuo y cumple que $hf = i$ y $ch = j$. Por lo tanto, $(K \longrightarrow \{*\}) \in (\{a, b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$.

Supongamos ahora que $(K \longrightarrow \{*\}) \in (\{a, b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$ y que $K \neq \emptyset$. Notemos que cualquier morfismo $i : K \longrightarrow \{a, b\}$ hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \{a, b\} \arrow[d, "c"] \\
\{*\} \arrow[r, "j"'] & \{a = b\}
\end{tikzcd}$$

y ya que $(K \longrightarrow \{*\}) \in (\{a, b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$, entonces para todo i existe $h : \{*\} \longrightarrow \{a, b\}$ tal que $i = hf$, pero cualquier morfismo desde $\{*\}$ es constante por lo que entonces i lo es. Por lo tanto, K es conexo. $\square$

Proposición 1.1.2 *Un espacio topológico X es conexo por trayectorias si y solo si para cada espacio compacto y Hausdorff K y cada mapeo inyectivo $\{x, y\} \hookrightarrow K$ ocurre que $\{x, y\} \hookrightarrow K \perp X \longrightarrow \{*\}$.*

Demostración. Sean X un espacio conexo por trayectorias, K un espacio compacto y Hausdorff y $f : \{x, y\} \hookrightarrow K$ un morfismo inyectivo.

Supongamos que $i : \{x, y\} \longrightarrow X$ y $j : K \longrightarrow \{*\}$ son morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\{x, y\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "c"] \\
K \arrow[r, "j"'] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\{f(x)\}$ y $\{f(y)\}$ son cerrados ajenos de K, y ya que K es compacto y Hausdorff entonces es T_4 y en particular es $T_{3\frac{1}{2}}$, por lo que existe $h : K \longrightarrow [0, 1]$ continuo tal que $h(f(x)) = 0$ y $h(f(y)) = 1$.

Por otro lado, como X es conexo por trayectorias existe $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ morfismo continuo tal que $\sigma(0) = i(x)$ y $\sigma(1) = i(y)$. De este modo, tenemos que $\sigma h : K \longrightarrow X$ es continuo y cumple que $\sigma h f = i$ y $c\sigma h = j$. Por tanto $f \perp c$.

Supongamos ahora que para cada espacio compacto y Hausdorff K y para cada morfismo inyectivo $f : \{x, y\} \longrightarrow K$ se tiene que $f \perp X \longrightarrow \{*\}$. En particular $f : \{0,1\} \longrightarrow [0,1] \perp X \longrightarrow \{*\}$. Sean $x_0, x_1 \in X$. Consideremos el morfismo $i : \{0,1\} \longrightarrow X$ dado por $i(0) = x_0$ y $i(1) = x_1$. Claramente i es continuo y cumple que $ci = jf$ para cualquier morfismo $j : [0,1] \longrightarrow \{*\}$. Entonces, existe $h : [0,1] \longrightarrow X$ continuo tal que $ch = j$ y $hf = i$. De este modo h es una trayectoria de x_0 a x_1. Por lo tanto, X es conexo por trayectorias. $\square$

1.2. Axiomas de separación

Para presentar las caracterizaciones de los axiomas de separación T_0 y T_1 introdujimos la definición 1.2.1 y probamos el resultado 1.2.2, en este último usamos 1 para denotar el objeto terminal en Top, que es isomorfo a $\{*\}$.

Definición 1.2.1 *Sean $B \neq \emptyset$ y X espacios topológicos. Decimos que X es B-separado si toda función continua $f : B \longrightarrow X$ es constante.*

Proposición 1.2.2 *Sea $B \neq \emptyset$ un espacio topológico. Un espacio X es B-separado si y solo si $X \longrightarrow 1 \in (B \longrightarrow 1)^r$.*

Demostración. Sea X espacio topológico. Supongamos que X es B-separado. Si $X = \emptyset$, no existe $i : B \longrightarrow X$ y por tanto $X \longrightarrow 1 \in (B \longrightarrow 1)^r$.

Si $X \neq \emptyset$, entonces cualquier función continua $i : B \longrightarrow X$ hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "g"] \\
1 \arrow[r, "j"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Ya que X es B-separado, i es constante, por lo que $h : 1 \longrightarrow X$ definida como $h(1) = i(B)$ es continua y cumple que $h! = i$ y $gh = j$. Por lo tanto, $X \longrightarrow 1 \in (B \longrightarrow 1)^r$.

Supongamos ahora que $X \longrightarrow 1 \in (B \longrightarrow 1)^r$. Observemos que cualquier función continua $i : B \longrightarrow X$ cumple que $j! = gi$, por lo que entonces para cualquier función continua existe $h : 1 \longrightarrow X$ tal que $h! = i$ de donde concluimos que i es constante. Por lo tanto, X es B-separado. $\square$

Corolario 1.2.3 *Un espacio X es T_0 si y solo si $X \longrightarrow 1 \in (\{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow 1)^r$.* $\square$

Corolario 1.2.4 *Un espacio X es T_1 si y solo si $X \longrightarrow 1 \in (\{a \searrow b\} \longrightarrow 1)^r$.* $\square$

Proposición 1.2.5 *Un espacio X es T_2 si y solo si para cada morfismo inyectivo $\{x, y\} \hookrightarrow X$ ocurre que $\{x, y\} \hookrightarrow X \perp c : \{x \searrow z \swarrow y\} \longrightarrow \{x = z = y\}$.*

Demostración. Sean X un espacio T_2 y $f : \{x, y\} \hookrightarrow X$ morfismo inyectivo.

Supongamos que $i : \{x, y\} \longrightarrow \{x \searrow z \swarrow y\}$ y $j : X \longrightarrow \{x = z = y\}$ son morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\{x,y\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{x \searrow z \swarrow y\} \arrow[d, "c"] \\
X \arrow[r, "j"'] & \{x = z = y\}
\end{tikzcd}$$

Como $f(x) \neq f(y)$ existen $U, V \subset X$ abiertos tales que $f(x) \in U,\ f(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, si $i(\{x, y\}) \cap \{z\} = \emptyset$ definimos $h : X \longrightarrow \{x \searrow z \swarrow y\}$ como:

$$h(x) = \begin{cases} i(x) & si\ x \in U \\ i(y) & si\ x \in V \\ z & si\ x \in X \setminus (U \cup V) \end{cases}$$

así por la topología de $\{x \searrow z \swarrow y\}$ h es continuo y cumple que $hf = i$ y $ch = j$.

Por otro lado, si $i(\{x,y\}) \cap \{z\} \neq \emptyset$ pueden ocurrir dos cosas: $i(\{x,y\}) = \{z\}$ o $i(\{x,y\}) \neq \{z\}$.
Si $i(\{x,y\}) = \{z\}$, definimos $h : X \longrightarrow \{x \searrow z \swarrow y\}$ como $h = c_z$ que es claramente continuo y cumple que $hf = i$ y $ch = j$.
Si $i(\{x,y\}) \neq \{z\}$, podemos suponer que $i(y) \neq z$, por lo que definimos h como:

$$h(x) = \begin{cases} i(y) & si\ x \in V \\ z & si\ x \in X \setminus V \end{cases}$$

de esta manera tenemos que h es continuo y cumple que $hf = i$ y $ch = j$. Por lo tanto, $\{x,y\} \hookrightarrow X \perp \{x \searrow z \swarrow y\} \longrightarrow \{x = z = y\}$.

Ahora supongamos que para cada morfismo inyectivo $f : \{x,y\} \hookrightarrow X$ ocurre que $f \perp \{x \searrow z \swarrow y\} \longrightarrow \{x = z = y\}$.

Sean $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 \neq x_1$ y consideremos los morfismos $f : \{x,y\} \hookrightarrow X$ dado por $f(x) = x_0$, $f(y) = x_1$, $i : \{x,y\} \longrightarrow \{x \searrow z \swarrow y\}$ dado por $i(x) = x$, $i(y) = y$ y $j : X \longrightarrow \{x = z = y\}$ el único morfismo que existe en $\{x = z = y\}$. De este modo tenemos que $ci = jf$, entonces existe $h : X \longrightarrow \{x \searrow z \swarrow y\}$ continuo tal que $hf = i$ y $cteh = j$.

$$\begin{tikzcd}
\{x,y\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook, "f"'] & \{x \searrow z \swarrow y\} \arrow[d, "c"] \\
X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "j"'] & \{x = z = y\}
\end{tikzcd}$$

Así, por la continuidad de h tenemos que $h^{-1}(\{x\})$ y $h^{-1}(\{y\})$ son abiertos ajenos de X tales que $x_0 \in h^{-1}(\{x\})$ y $x_1 \in h^{-1}(\{y\})$. Por lo tanto, X es T_2.
$\square$

Al igual que en la sección de conexidad solo hemos presentado algunos resultados que se proponen en [9], otros axiomas de separación también se encuentran desarrollados en mi tesina de maestría [17].

Capítulo 2

Resultados Principales

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos durante el doctorado, en la primer sección desarrollamos lo necesario para mostrar la respuesta parcial que dimos a la conjetura 0.0.1 en [11], en la segunda sección damos los conceptos que necesitamos para enunciar y probar las generalizaciones que tenemos del Teorema de extensión de funciones continuas de Taimanov (teorema 2.2.1).

2.1. Caracterización de morfismos Propios

Comencemos recordando la definición de morfismo propio.

Definición 2.1.1 [2] *Un morfismo propio $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, cerrada y con fibras compactas.*

Los siguientes lemas se mencionan en [9] sin dar una demostración, a continuación probamos cada uno de ellos para posteriormente usarlos en la demostración del teorema 2.1.11.

Lema 2.1.2 $(\{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$ *es la clase de morfismos inyectivos.*

Demostración. Si $f : X \longrightarrow Y \in (\{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$, entonces para cualquier $i : X \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$ existe $h : Y \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$ tal que $i = hf$, así si

$x_0, x_1 \in X$ son tales que $x_0 \neq x_1$ entonces para $i : X \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$ definido como: $i(x_0) = a$ y $i(x) = b$ para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ existe $h : Y \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$ tal que $i = hf$, por lo que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Por lo tanto f es inyectivo.

Por otro lado, si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo inyectivo entonces para cada morfismo $i : X \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$, podemos definir $h : Y \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$ como sigue:

$$h(y) = \begin{cases} i(x) & \text{si } y = f(x) \\ a & \text{si } y \notin f(X) \end{cases}$$

Así h es un morfismo continuo bien definido tal que $hf = i$. $\square$

Lema 2.1.3 $(\{a \searrow b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$ *es la clase de morfismos* $f : X \longrightarrow Y$ *tal que la topología en* X *es inducida por* Y*.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y \in (\{a \searrow b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$ y U subconjunto abierto de X. Para el morfismo $i : X \longrightarrow \{a \searrow b\}$ definido como sigue:

$$i(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in U \\ b & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Existe un morfismo $h : Y \longrightarrow \{a \searrow b\}$ tal que $i = hf$. Entonces, $h^{-1}(a)$ es un subconjunto abierto de Y tal que $f(U) \subseteq h^{-1}(a)$. Como $f^{-1}(h^{-1}(a))) = i^{-1}(a) = U$, entonces $U = f^{-1}(h^{-1}(a))$. Por lo tanto la topología en X es inducida por Y.

Supongamos ahora que $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo donde la topología en X es inducida por Y. Para cualquier morfismo $i : X \longrightarrow \{a \searrow b\}$ tenemos que $i^{-1}(a)$ es un subconjunto abierto de X, así que $i^{-1}(a) = f^{-1}(V)$ para algún subconjunto abierto V de Y. Definimos una función continua $h : Y \longrightarrow \{a \searrow b\}$ como sigue:

$$h(y) = \begin{cases} a & \text{si } y \in V \\ b & \text{si } y \in Y \setminus V \end{cases}$$

Claramente $i = hf$. Por tanto, $f \in (\{a \searrow b\} \longrightarrow \{a = b\})^l$. $\square$

Lema 2.1.4 $(\{b\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^l$ *es la clase de morfismos con imagen densa.*

Demostración. Tomemos $f : X \longrightarrow Y \in (\{b\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^l$ y sea U un subconjunto abierto de Y. Si $f(X) \cap U = \emptyset$ considere la función $j : Y \longrightarrow \{a \searrow b\}$ definida como sigue:

$$j(y) = \begin{cases} a & \text{si } y \in U \\ b & \text{si } y \in X \setminus U \end{cases}$$

De este modo, j es continua y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \{b\} \arrow[d, "\bar{b}"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & \{a \searrow b\} \end{tikzcd}$$

Entonces, existe $h : Y \longrightarrow \{b\}$ continua tal que $hf = c$ y $\bar{b}h = j$, por lo que j es constante, y se deduce que $U = \emptyset$. Por lo tanto $f(X)$ es denso Y.

Recíprocamente, supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo con imagen densa en Y y $j : Y \longrightarrow \{a \searrow b\}$ es un morfismo tal que $jf = \bar{b}c$. Como $j^{-1}(a)$ es un subconjunto abierto de Y y $jf(X) = \{b\}$ entonces $j^{-1}(a) \cap f(X) = \emptyset$, así $j^{-1}(a) = \emptyset$, por lo que j es constante. Definimos $h : Y \longrightarrow \{b\}$ como $h(y) = b$ para todo $y \in Y$. Por tanto $hf = c$ y $\bar{b}h = j$. □

Lema 2.1.5 *$(\{a \swarrow c \searrow b\} \longrightarrow \{a = c = b\})^l$ es la clase de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ tales que para cualesquiera $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, se tiene que $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$.*

Demostración. Tomemos $f : X \longrightarrow Y \in (\{a \swarrow c \searrow b\} \longrightarrow \{a = c = b\})^l$ y sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos.

Definimos $i : X \longrightarrow \{a \swarrow c \searrow b\}$ como sigue:

$$i(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x \in B \\ c & \text{si } x \in X \setminus (A \cup B) \end{cases}$$

Claramente i es continua, entonces existe una función continua $h : Y \longrightarrow \{a \swarrow c \searrow b\}$ tal que $i = hf$, así $h^{-1}(a)$ y $h^{-1}(b)$ son cerrados disjuntos de Y tales que $f(i^{-1}(a)) \subseteq h^{-1}(a)$ y $f(i^{-1}(b)) \subseteq h^{-1}(b)$, de modo que $\overline{f(g^{-1}(a))} = \overline{f(A)} \subseteq h^{-1}(a)$ y $\overline{f(g^{-1}(b))} = \overline{f(B)} \subseteq h^{-1}(b)$. Por lo tanto, $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$.

Por otro lado, supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es tal que para cualesquiera $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$.

Sea $i : X \longrightarrow \{a \swarrow c \searrow b\}$ función continua. Tenemos que $i^{-1}(a)$ e $i^{-1}(b)$ son cerrados disjuntos de X, entonces $\overline{f(i^{-1}(a))} \cap \overline{f(i^{-1}(b))} = \emptyset$. Definimos $h : Y \longrightarrow \{a \swarrow c \searrow b\}$ como sigue:

$$h(y) = \begin{cases} a & \text{si } y \in \overline{f(i^{-1}(a))} \\ b & \text{si } y \in \overline{f(i^{-1}(b))} \\ c & \text{si } y \in X \setminus (\overline{f(i^{-1}(a))} \cup \overline{f(i^{-1}(b))}) \end{cases}$$

Así h es continua y satisface que $i = hf$. $\square$

Proposición 2.1.6 *Si X es un espacio topológico finito y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces f es un morfismo propio si y solo si $f \in (\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r$.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ función continua con X finito. Como un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es propio si y solo si f es cerrado y $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$, entonces, equivalentemente probaremos que $f : X \longrightarrow Y$ es cerrado si y solo si $f \in (\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r$.

Asumamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{a\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{a}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "f"] \\
\{a \searrow b\} \arrow[r, "j"'] & Y
\end{tikzcd}$$

con f cerrado. Como j es continua $j(b) \in \overline{\{j(a)\}}$, y ya que f es cerrado y el diagrama conmuta entonces $j(b) \in \overline{\{j(a)\}} \subseteq f(\overline{\{i(a)\}})$, entonces existe $x_b \in \overline{\{i(a)\}}$ tal que $f(x_b) = j(b)$. De este modo definimos $h : \{a \searrow b\} \longrightarrow X$

como: $h(a) = i(a)$ y $h(b) = x_b$. Evidentemente h es continua y satisface que $h\overline{a} = i$ y $fh = j$. Así, $f \in (\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r$.

Ahora, supongamos que $f \in (\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r$. Sea C subconjunto cerrado de X. Queremos probar quet $f(C)$ es un subconjunto cerrado de Y.

Sea $y \in \overline{f(C)}$. Como C es finito, existe $x \in C$ tal que cada subconjunto abierto de Y que contiene a y contiene a $f(x)$. La función $j : \{a \searrow b\} \longrightarrow Y$ definida como: $j(a) = f(x)$ y $j(b) = y$ es continua. Sea $i : \{a\} \longrightarrow X$ definida como $i(a) = x$; tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\{a\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{a}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "f"] \\
\{a \searrow b\} \arrow[r, "j"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces, existe una función continua $h : \{a \searrow b\} \longrightarrow X$ tal que $h\overline{a} = i$ y $fh = j$. Por lo que $h(a) = x$ y $h(b) \in \overline{C} = C$. Entonces, $y = j(b) = f(h(b)) \in f(C)$. $\square$ Como es habitual $|X|$ denotará la cardinalidad de un conjunto X.

Definición 2.1.7 *Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos en Top. Definimos* $\mathcal{M}_{<n} = \{f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{M} : |X|, |Y| < n\}$.

Para nuestros fines hemos dado la definición anterior en Top aunque es claro que se puede dar en cualquier categoría en la que tenga sentido hablar del cardinal de cada objeto.

Observación 2.1.8 $(\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5}$ *es la clase de morfismos propios con dominio y codominio de cardinalidad menor o igual que* 4.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro en un conjunto X, definimos una topología en el conjunto $X \cup \{\infty\}$, con $\infty \notin X$, como sigue:

$$\tau = \mathcal{P}(X) \cup \{F \cup \{\infty\} : F \in \mathcal{F}\}.$$

Al espacio que obtenemos lo denotamos por $X_{\mathcal{F}}$. Recordemos que tenemos un encaje $i : X \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$, donde al dominio se le da la topología discreta.

Notas: a) Un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X$ si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades, i.e. si para cada vecindad V de x en X existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $V \subseteq F$.
b) Un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si ningún filtro en X tiene más de un punto límite ([2] I§8.1, p.75.).

Lema 2.1.9 *Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en X. Una función $h : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow Y$ es continua si y solo si para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $h(\infty) \in \overline{h(F)}$.*

Demostración. Supongamos que $h : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow Y$ es continua, y tomemos $F \in \mathcal{F}$. Si $h(\infty) \in W$, con W un abierto de Y, entonces $\infty \in h^{-1}(W)$ que es abierto por la continuidad de h. Como F y $h^{-1}(W)\backslash\{\infty\}$ pertenecen a $\mathcal{F}$, existe un $x \in F \cap h^{-1}(W)$. Por tanto $h(x) \in h(F) \cap W$, y $h(\infty) \in \overline{h(F)}$.

En el otro sentido, supongamos que para cada $F \in \mathcal{F}$, $h(\infty) \in \overline{h(F)}$. Es suficiente probar que $h^{-1}(W) \setminus \{\infty\} \in \mathcal{F}$ para cualquier abierto W de Y con $h(\infty) \in W$. Asumamos que $h^{-1}(W) \setminus \{\infty\} \notin \mathcal{F}$, entonces $L := X \setminus (h^{-1}(W) \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{F}$. Como $L \cap (h^{-1}(W) \setminus \{\infty\}) = \emptyset$ entonces $h(L) \cap W = \emptyset$, así $h(\infty) \notin \overline{h(L)}$, contradicción. $\square$

Teorema 2.1.10 ([2], I§10.2, p.101.) *Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es propio si y solo si para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ de X se tiene que $X \longrightarrow X_{\mathcal{F}} \perp f$.*

El siguiente teorema caracteriza la familia de morfismos propios con dominio regular, con esto damos una respuesta parcial a la conjetura planteada por Gavrilovich en [9].

Teorema 2.1.11 *Sean X y Y espacios topológicos con X espacio regular. Entonces, $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo propio si y solo si $f \in ((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^{lr}$.*

Demostración. Aplicando la observación 2.1.8 a la familia $\mathfrak{C} = \{\{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow \{a = b\}, \{a \searrow b\} \longrightarrow \{a = b\}, \{b\} \longrightarrow \{a \searrow b\}, \{a \swarrow o \searrow b\} \longrightarrow \{a = o = b\}\}$, tenemos que $\mathfrak{C} \subseteq (\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5}$, entonces $((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^l \subseteq \mathfrak{C}^l$.

Tomemos $g : A \longrightarrow B \in ((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^l \subseteq \mathfrak{C}^l$ y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo propio con X un espacio regular. Entonces, por los lemas 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4 tenemos que g es la inclusión de un subespacio denso A de B. Necesitamos probar que $g \perp f$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Por [7, Teo. 5.3, p.216], Para definir una $h : B \longrightarrow X$ tal que $fh = j$, es suficiente probar que el filtro generado por la base de filtro $\{i(A \cap U)\}_{U \in \mathfrak{U}_b}$ converge para cada $b \in B$, donde $\mathfrak{U}_b$ es la familia de subconjuntos abiertos U de B tal que $b \in U$.

Como $jg = fi$, $\overline{g(A)} = B$ y j es continua, entonces $j(B) = j(\overline{g(A)}) \subseteq \overline{j(g(A))} = \overline{fi(A)} = f(\overline{i(A)}) \subseteq f(X)$.

Para cada $b \in B$, sea $K_b := f^{-1}(j(b))$ y $\mathcal{F}(b) = \{\overline{i(A \cap U)} \cap K_b\}_{U \in \mathfrak{U}_b}$. Ya que K_b es compacto y $\mathcal{F}(b)$ es una base de filtro en K_b, entonces $\cap\mathcal{F}(b) \neq \emptyset$.

Mostraremos ahora que $\cap\mathcal{F}(b)$ es un único punto.

En efecto, supongamos que $x_1, x_2 \in \cap\mathcal{F}(b)$ y $x_1 \neq x_2$. Como X es regular existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de x_1 y x_2 respectivamente, tales que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Ya que $g \in \mathfrak{C}^l$ entonces $\overline{i^{-1}(\overline{V_1})^B} \cap \overline{i^{-1}(\overline{V_2})^B} = \emptyset$. Suponiendo que $b \notin \overline{i^{-1}(V_1)^B}$, entonces $b \in B \setminus \overline{i^{-1}(V_1)^B}$, de modo que $B \setminus \overline{i^{-1}(V_1)^B} \in \mathfrak{U}_b$ y $x_1 \in \cap\mathcal{F}(b) \subseteq \overline{i(A \setminus \overline{i^{-1}(V_1)^B})} \cap K_b$.

Por otro lado, como $V_1 \cap (i(A \setminus \overline{i^{-1}(V_1)^B}) \cap K_b) = \emptyset$, entonces $x_1 \notin \overline{i(A \setminus \overline{i^{-1}(V_1)^B})} \cap K_b$, contradicción. Por tanto $\cap\mathcal{F}(b) = \{x_b\}$ para algún $x_b \in X$.

Sean $b \in B$ y $\mathcal{F}_b$ el filtro generado por $\{i(A \cap U)\}_{U \in \mathfrak{U}_b}$. Probemos que $\mathcal{F}_b$ converge a x_b.

Primero notemos que $f(\mathcal{F}_b)$ converge a $j(b)$.

Por supuesto, como j es continua, si V es un subconjunto abierto de Y tal que $j(b) \in V$ existe W subconjunto abierto de B tal que $b \in W$ y $j(W) \subset V$, entonces $f(i(A\cap W)) = jg(A\cap W) \subset j(W) \subset V$, por tanto $f(\mathcal{F}_b)$ converge a $j(b)$.

En consecuencia, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}_b$, entonces $f(\mathcal{U})$ converge a $j(b)$.
Sabemos que un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio X converge a un punto x si y solo si cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que $\mathcal{F}$ converge a x (ver [2, I§7.2, p.69.]).

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}_b$. Ya que f es un morfismo propio y $j(b)$ es un punto límite de $f(\mathcal{U})$, existe un punto límite x de $\mathcal{U}$ tal que $f(x) = j(b)$, entonces $x \in K_b$. Veamos que $x = x_b$.

Es suficiente probar que para cada $U \in \mathcal{U}_b$ se tiene que $x \in \overline{i(A\cap U)}$.

Sea $U \in \mathcal{U}_b$. Como $\mathcal{U}$ converge a x entonces para cada subconjunto abierto W de X tal que $x \in W$ tenemos que $W \in \mathcal{U}$, más aún, ya que $\mathcal{U}$ es más fino que $\mathcal{F}_b$ entonces $i(A\cap U) \in \mathcal{U}$, por lo que $W \cap i(A\cap U) \neq \emptyset$, así que $x \in \overline{i(A\cap U)}$, por tanto $\mathcal{F}_b$ converge a x_b.

Así la función $h : B \longrightarrow X$ definida como $h(b) = x_b$ es una extensión continua de i tal que $fh = j$. Por lo tanto $g \perp f$.

Nos resta probar que si $f \in ((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^{lr}$ entonces f es un morfismo propio.

Sea $\mathcal{P}$ la clase de morfismos propios, por la observación 2.1.8 $(\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5} \subseteq \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}^l \subseteq ((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^r_{<5})^l$.

Probaremos que $(D \longrightarrow D_{\mathcal{F}}) \in \mathcal{P}^l$ para cualquier ultrafiltro $\mathcal{F}$ en un espacio discreto D. Tomemos $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{P}$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ D_{\mathcal{F}} \arrow[r, "k"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Sea $H = \{h(U) : U \in \mathcal{F}\}$; como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en D tenemos que H tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ de X tal que $H \subseteq \mathcal{G}$. Definimos $h_0 : D \longrightarrow \widehat{X}$ como $h_0(d) = h(d)$, donde $\widehat{X}$ es discreto en los puntos de X. Así, definimos $\hat{h} : D_{\mathcal{F}} \longrightarrow X_{\mathcal{G}}$ como sigue:

$$\hat{h}(d) = \begin{cases} h_0(d) & si\ d \neq \infty \\ \infty & si\ d = \infty. \end{cases}$$

Es claro que $jh_0 = \hat{h}l$. Mostraremos a continuación que $\hat{h}$ es continua.

Sea $G \in \mathcal{G}$; entonces $G \cup \{\infty\}$ es un conjunto abierto en $X_{\mathcal{G}}$, y para cualquier $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $\hat{h}(F) = h_0(F) = h(F)$, así $(G \cup \{\infty\}) \cap \hat{h}(F) = G \cap h(F) \neq \emptyset$. Por tanto $\hat{h}$ es continua.

Ahora, tomemos la función identidad $i : \widehat{X} \longrightarrow X$ y definamos $\hat{i} : X_{\mathcal{G}} \longrightarrow Y$ como sigue:

$$\hat{i}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \infty \\ k(\infty) & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_0"] \arrow[dd, "l"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& \widehat{X} \arrow[ur, "i"] \arrow[dd, "j"] & \\
D_{\mathcal{F}} \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "\hat{h}"'] & & Y. \\
& X_{\mathcal{G}} \arrow[ur, "\hat{i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\hat{i}$ es continua. En efecto, sea $W \subseteq Y$ subconjunto abierto tal que $\hat{i}(\infty) \in W$ y sea $U \in \mathcal{G}$. Entonces $\infty \in k^{-1}(W)$ que es un subconjunto abierto, así que $k^{-1}(W) \setminus \{\infty\} \in \mathcal{F}$, de donde $h(k^{-1}(W) \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{G}$, entonces $h(k^{-1}(W) \setminus \{\infty\}) \cap U \neq \emptyset$. Veamos que $\hat{i}(h(k^{-1}(W) \setminus \{\infty\})) \subseteq W$. Sea $x \in h(k^{-1}(W) \setminus \{\infty\})$. Entonces, existe $d \in k^{-1}(W) \setminus \{\infty\}$ tal que $x = h(d)$, como $d \in k^{-1}(W)$ tenemos que $\hat{i}(x) = \hat{i}h_0(d) = \hat{i}jh_0(d) = f(ih_0(d)) = f(h(d)) = k(l(d)) = k(d) \in W$. De este modo $\hat{i}(h(k^{-1}(W) \setminus \{\infty\})) \subseteq W$, por lo tanto $\hat{i}$ es continua.

Ya que $f \in \mathcal{P}$ y $fi = \hat{i}j$, existe una función continua $\tau : X_{\mathcal{G}} \longrightarrow X$ tal que $\tau j = i$ y $f\tau = \hat{i}$.

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\hat{i}"'] \arrow[ur, "\tau"] & Y. \end{tikzcd}$$

Entonces $\tau\hat{h} : D_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ es continua y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "f"] \\ D_{\mathcal{F}} \arrow[r, "k"'] \arrow[ur, "\tau\hat{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $D \longrightarrow D_{\mathcal{F}} \perp f$. $\square$

Corolario 2.1.12 *Un espacio Hausdorff K es compacto si y solo si $K \longrightarrow \{*\}$ está en $((\{a\} \longrightarrow \{a \searrow b\})^{r}_{<5})^{lr}$.* $\square$

La pregunta natural que nos queda es la siguiente.

Pregunta 2.1.13 *¿Se puede quitar la condición de regularidad para X?*

Al abordar esta pregunta el camino nos llevó a estudiar [12] y posteriormente [1]. El teorema 8.14 de [12] es, en cierto modo, un resultado que se tiene de debilitar la condición de regularidad.

2.2. Generalizaciones del Teorema de Taimanov

En esta sección daremos las definiciones necesarias para presentar los resultados que generalizan el teorema de Taimanov.

Comenzaremos enunciando dicho teorema, una desmotración de este se encuentra en [8].

Teorema 2.2.1 *Sea A un subespacio denso de un espacio topológico X y sea f una función continua de A en un espacio compacto Y. La función f tiene una extensión continua sobre X si y solo si para cada par B_1, B_2 de subconjuntos cerrados disjuntos de Y las imágenes inversas $f^{-1}(B_1)$ y $f^{-1}(B_2)$ tienen cerraduras disjuntas en X.*

A continuación daremos las definiciones necesarias para enunciar el teorema 2.2.6.

Definición 2.2.2 [8] *Sean X un espacio topológico y U un subconjunto de X. U es un abierto-regular de X si $U = int(\overline{U})$; y U es un cerrado-regular de X si $U = \overline{int(U)}$.*

Definición 2.2.3 [18] *Una función $f : X \longrightarrow Y$ es casi-continua si y solo si la imagen inversa de cada abierto-regular de Y es un abierto de X.*

Es claro que toda función continua es casi-continua, sin embargo (y más nos vale) el reciproco no siempre es cierto, un ejemplo de esto lo podemos encontrar en [18].

Definición 2.2.4 [20] *Sea $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ es un punto de δ adherencia (δ-interior) de A si para cada $U \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $int(\overline{U}) \cap A \neq \emptyset$ (si existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $int(\overline{U}) \subseteq A$).*
Denotamos por $\overline{A}^{\delta}$ al conjunto de todos los puntos de δ adherencia de A, y por $int_{\delta}(A)$ al conjunto de todos los puntos δ-interiores de A.
Decimos que A es un conjunto δ-cerrado si $A = \overline{A}^{\delta}$, y que A es un conjunto δ-abierto si A=$int_{\delta}(A)$.

Se sabe que la familia de todos los conjuntos δ-abiertos de un espacio topológico (X, τ) forman una topología más gruesa que τ llamada la δ-topología de X [3]. Si consideramos la semiregularización de τ [8], es decir, la topología en X que resulta de tomar como base los abiertos regulares de (X, τ), tenemos que la δ-topología de X es igual a esta, por lo que entonces cada δ-abierto (δ-cerrado) de (X, τ) es la unión (intersección) de abiertos regulares (cerrados regulares) de (X, τ) [3]. Cuando τ coincide con su semiregularización decimos que (X, τ) es un espacio *semiregular* [8].

Definición 2.2.5 [2] *Un espacio topológico X es cercanamente-compacto si y solo si cada cubierta abierta $\{A_i\}_{i \in I}$ de X tiene una subfamilia finita $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{n} int(\overline{A_{i_k}}) = X$.*

El siguiente resultado es una versión del teorema de Taimanov para funciones casi-continuas, su demostración se encuentran en [1].

Teorema 2.2.6 *Sean A un subespacio denso de un espacio topológico X y f una función casi-continua de A en un espacio cercanamente-compacto Y. Entonces, los siguientes son equivalentes:*

i) f tiene una extensión casi-continua a X.

ii) Para cada par B_1, B_2 de subconjuntos disjuntos δ-cerrados de Y las imágenes inversas $f^{-1}(B_1)$ y $f^{-1}(B_2)$ tienen cerraduras disjuntas en X.

iii) Para cada par C_1, C_2 de subconjuntos disjuntos regularmente-cerrados de Y las imágenes inversas $f^{-1}(C_1)$ y $f^{-1}(C_2)$ tienen cerraduras disjuntas en X.

A continuación presentamos las definiciones de topología fibrada, estas las hemos tomado de [10]. Recordemos que esta construcción viene de la teoría de categorías, denominada "categoría rebanada".

Para introducir el concepto de conjunto fibrado es necesario dar un conjunto fijo B que llamaremos base.

Definición 2.2.7 *Un conjunto fibrado X sobre B es un conjunto X junto con una función $p : X \longrightarrow B$ que llamaremos proyección.*

En adelante llamaremos conjunto sobre B o conjunto fibrado (si no hay ambigüedad en la base) a un conjunto fibrado sobre B.

Para cada $B' \subseteq B$ denotaremos por $X_{B'}$ al subconjunto $p^{-1}(B')$ de X.

Ahora, si tomamos un espacio topológico B como base, podemos definir el concepto de espacio topológico fibrado.

Definición 2.2.8 *Sean B un espacio topológico y $p : X \longrightarrow B$ un conjunto fibrado. Una topología τ en X es una topología fibrada si $p : (X, \tau) \longrightarrow B$ es continua.*

De este modo, diremos que un conjunto fibrado X es un espacio topológico fibrado si X está equipado con una topología fibrada.

Los espacios topológicos fibrados forman una categoría con la siguiente definición de morfismos entre estos.

Definición 2.2.9 *Sean $p : X \longrightarrow B$ y $q : Y \longrightarrow B$ espacios topológicos fibrados. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua fibrada si f es continua y $fq = p$.*

De este modo resulta claro que estamos hablando de la "categoría rebanada" Top/B.

Definición 2.2.10 *Un espacio topológico fibrado X es compacto fibrado si su proyección es un morfismo propio.*

Las definiciones 2.2.11, 2.2.14 y 2.2.15 las hemos tomado de [4] y [5].

Consideremos una función continua $f : X \longrightarrow Y$.

Definición 2.2.11 *f es Hausdorff si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$ existen U y V vecindades abiertas de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.*

La siguiente definición de espacio T_2 fibrado es equivalente a la que se presenta en [10].

Definición 2.2.12 *Un espacio topológico fibrado X es Hausdorff (T_2) fibrado si su proyección es Hausdorff.*

En adelante supondremos que B es un espacio topológico regular y que los espacios fibrados que tomemos tienen como base al espacio B.

El siguiente resultado es la versión del teorema de Taimanov en la topología fibrada, su demostración se encuentra en [12].

Teorema 2.2.13 *Sea A un subespacio denso de un espacio topológico fibrado X y sea Y un espacio compacto fibrado y T_2 fibrado. Una función continua fibrada $f : A \longrightarrow Y$ se extiende sobre X si y solo si $\overline{f^{-1}(C)}^X \cap \overline{f^{-1}(D)}^X = \emptyset$ para cualquier $W \in \tau_B$ y cualesquiera subconjuntos cerrados disjuntos C y D de Y_W.*

Definición 2.2.14 *Una función $f : X \longrightarrow B$ es Urysohn si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$ existen U y V vecindades abiertas de x y y respectivamente tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Recordemos que una función $g : Z \longrightarrow Y$ extiende a $f : X \longrightarrow Y$ si $X \subset Z$ y $g|_X = f$.

Definición 2.2.15 *Una función Hausdorff $f : X \longrightarrow Y$ es H-cerrada si siempre que $g : Z \longrightarrow Y$ sea Hausdorff y extienda a f se tiene que X es cerrado en Z.*

En vista de los teoremas 2.2.6 y 2.2.13 planteamos la siguiente conjetura.

Conjetura 2.2.16 *Sea A un subespacio denso de un espacio topológico fibrado X y sea $f : A \longrightarrow Y$ una función casi-continua fibrada. Consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

con i la inclusión natural de A en X, p y q las proyecciones de Y y X respectivamente.
Si p es una función H-cerrada y de Urysohn, entonces los siguientes son equivalentes:

i) *Existe una extensión casi-continua fibrada* $F : X \longrightarrow Y$ *de* f.

ii) *Para cualesquiera subconjuntos disjuntos* δ*-cerrados* C_1 *y* C_2 *de* Y_W, *con* $W \in \tau_B$, *se tiene que* $\overline{f^{-1}(C_1)}^X \cap \overline{f^{-1}(C_2)}^X = \emptyset$.

iii) *Para cualesquiera subconjuntos disjuntos regularmente-cerrados* D_1 *y* D_2 *de* Y_W, *con* $W \in \tau_B$, *se tiene que* $\overline{f^{-1}(D_1)}^X \cap \overline{f^{-1}(D_2)}^X = \emptyset$.

De esta conjetura he podido probar la equivalencia entre $i)$ y $ii)$, a continuación presentaré algunas proposiciones que se ocuparán en la demostración de dicha equivalencia.

Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, consideremos el conjunto $S = \{int_X\overline{U}^X \cap f^{-1}(O) : U \in \tau(X) \text{ y } O \in \tau(Y)\}$. Denotaremos con $X(S, f)$ al espacio topológico en X equipado con la topología generada por S, y por f^* a la función $f^* : X(S, f) \longrightarrow Y$ definida como $f^*(x) = f(x)$.

Observación 2.2.17 *En* [6] *se prueba que* $\tau(X(S, f)) \subseteq \tau(X)$, *sin embargo, por la definición de* S *se tiene que* f^* *es continua.*

Proposición 2.2.18 [5] *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es* H*-cerrada,* σ *una topología en* X *tal que* $\sigma \subseteq \tau(X)$ *y* $f : (X, \sigma) \longrightarrow Y$ *es Hausdorff, entonces* $f : (X, \sigma) \longrightarrow Y$ *también es* H*-cerrada.*

Proposición 2.2.19 [6] *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua. Se tiene que* f *es Urysohn si y solo si* f^* *es Urysohn.*

En [6] F. Cammaroto y G. Nordo presentan las siguientes definiciónes.

Definición 2.2.20 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua.*

a) f *es semiregular si para cada* $U \in \tau(X)$ *y* $x \in U$ *existen* O *una vecindad abierta de* $f(x)$ *y* R *un abierto regular de* $f^{-1}(O)$ *tales que* $x \in R \subset U \cap f^{-1}(O)$.

b) f es regular si para cada subconjunto cerrado $F \subseteq X$ y $x \in X \setminus F$, existe una vecindad abierta V de $f(x)$ tal que x y $F \cap f^{-1}(V)$ pueden ser separados por abiertos disjuntos de $f^{-1}(V)$.

Proposición 2.2.21 [5] *Si $f : X \longrightarrow Y$ es Hausdorff, entonces $f^* : X(S,f) \to Y$ es semiregular y Hausdorff.*

Observación 2.2.22 *En* [5] *llaman función perfecta a lo que nosotros entendemos por función propia, en dicho artículo enuncian el siguiente resultado con esa terminología, aquí he cambiado la palabra perfecta por propia para evitar alguna confusión*

Proposición 2.2.23 [5] *Una función Hausdorff es propia y regular si y solo si es H-cerrada, semiregular y Urysohn.*

Observación 2.2.24 [5] *Si $f : X \longrightarrow Y$ es regular y Y es regular, entonces X también es regular.*

El siguiente resultado es la versión fibrada del teorema 2.2.6, de tal modo que generaliza dicho resultado y también al teorema 2.2.13.

Recordemos que estamos considerando al espacio base B como un espacio topológico regular.

Teorema 2.2.25 *Sea A un subespacio denso de un espacio topológico fibrado X y sea $f : A \longrightarrow Y$ una función casi-continua fibrada.*
Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

con i la inclusión natural, p y q las proyecciones de Y y X respectivamente.

Si p es una función H-cerrada y Urysohn, entonces los siguientes son equivalentes:

i) Existe una extensión casi-continua fibrada $F : X \longrightarrow Y$ *de* f.

ii) $\overline{f^{-1}(C)}^X \cap \overline{f^{-1}(D)}^X = \emptyset$ *para cualquier* $W \in \tau_B$ *y cualesquiera subconjuntos* δ*-cerrados disjuntos* C *y* D *de* Y_W.

Demostración. Tomemos $S = \{int_Y \overline{U^Y} \cap p^{-1}(O) : U \in \tau(Y) \text{ y } O \in \tau(B)\}$ y consideremos el espacio topológico $Y(S,p)$ y la función $p^* : Y(S,p) \longrightarrow B$ definida como $p^*(y) = p(y)$. Por la proposición 2.2.21 p^* es una función semiregular y Hausdorff, además, como $\tau(Y(S,p)) \subseteq \tau(Y)$, por la proposición 2.2.18 p^* es una función *H-cerrada*. Por otro lado, ya que p es Urysohn entonces p^* es Urysohn y, por la proposición 2.2.23, p^* es una función regular y propia. Por tanto $Y(S,p)$ es un espacio regular, lo que implica que $\hat{f} : A \longrightarrow Y(S,p) : a \longmapsto f(a)$ es una función continua.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\hat{f}"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "id"] \arrow[d, "p"] & Y(S,p) \arrow[dl, "p^*"] \\ X \arrow[r, "q"'] & B & \end{tikzcd}$$

Más aún, $\hat{f}$ es una función continua fibrada y $Y(S,p)$ es un espacio compacto fibrado y T_2 fibrado. Entonces, por el teorema 2.2.13 existe una extensión continua fibrada $\widehat{F} : X \longrightarrow Y(S,p)$ de $\hat{f}$ si y solo si $\overline{\hat{f}^{-1}(C)}^X \cap \overline{\hat{f}^{-1}(D)}^X = \emptyset$ para cualesquiera subconjuntos cerrados disjuntos C y D de $Y(S,p)_W$, con $W \in \tau(B)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\hat{f}"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "id"] \arrow[d, "p"] & Y(S,p) \arrow[dl, "p^*"] \\ X \arrow[r, "q"'] \arrow[urr, "\widehat{F}"] & B & \end{tikzcd}$$

Así, cuando regresamos a la topología de Y, tenemos que $F : X \longrightarrow Y$ definida como: $F(x) = \widehat{F}(x)$ es una extensión casi-continua fibrada de f si y solo si $\overline{f^{-1}(C)}^X \cap \overline{f^{-1}(D)}^X = \emptyset$ para cualesquiera subconjuntos δ-*cerrados* disjuntos C y D de Y_W, con $W \in \tau(B)$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\hat{f}"] & Y \arrow[r, "id"] \arrow[d, "p"] & Y(S,p) \arrow[dl, "p^*"] \\
X \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, "F"] \arrow[urr, "\widehat{F}"] & B &
\end{tikzcd}
$$

□

Como habíamos dicho, esto demuestra la equivalencia entre $i)$ y $ii)$ de la conjetura 2.2.16 que planteamos, nos queda por responder si $iii)$ implica $ii)$.

Ahora daremos otra versión del teorema anterior, esta se puede tomar como la versión fibrada de un teorema dado por Velichko en [21] para funciones ϑ-continuas.

Definición 2.2.26 *Sean X y Y espacios topológicos fibrados; dos subconjuntos disjuntos B_1 y B_2 contenidos en X se dice que son Y_δ-separables fibrados si y solo si existen $f : X \longrightarrow Y$ una función casi-continua fibrada y $W \in \tau(B)$ tales que $B_1 = f^{-1}(C_1)$ y $B_2 = f^{-1}(C_2)$ para algunos C_1 y C_2 subconjuntos δ-cerrados de Y_W.*

Teorema 2.2.27 *Cada función casi-continua fibrada de un subespacio denso A del espacio fibrado X en un espacio fibrado $p : Y \longrightarrow B$, con p una función H-cerrada y Urysohn, admite una extensión casi-continua fibrada a X si y solo si cada par de subconjuntos Y_δ-separables fibrados de A tienen cerraduras disjuntas en X.*

Demostración. Sean B_1 y B_2 subconjuntos Y_δ-*separables* fibrados de A y supongamos que $\overline{B_1^X} \cap \overline{B_2^X} \neq \emptyset$. Por la definición de conjuntos Y_δ-*separables* fibrados, existen $f : A \longrightarrow Y$ una función casi-continua fibrada y $W \in \tau(B)$ tales que $B_1 = f^{-1}(C_1)$ y $B_2 = f^{-1}(C_2)$ para algunos C_1 y C_2 δ-*cerrados* de Y_W. Por el teorema 2.2.25, como existen dos subconjuntos disjuntos *δ-cerrados* de Y_W, C_1 y C_2, tales que $\overline{f^{-1}(C_1)}^X \cap \overline{f^{-1}(C_2)}^X \neq \emptyset$, entonces f no admite una extensión casi-continua fibrada a X, contradicción.

Por otra parte, sea $f : A \longrightarrow Y$ una función casi-continua fibrada. Si $W \in \tau(B)$ y C_1 y C_2 son subconjuntos disjuntos *δ-cerrados* de Y_W, entonces $f^{-1}(C_1)$ y $f^{-1}(C_2)$ son subconjuntos Y_δ-*separables* fibrados de A. Por hipótesis $\overline{f^{-1}(C_1)}^X \cap \overline{f^{-1}(C_2)}^X = \emptyset$, entonces por el teorema 2.2.25 *ii*) tenemos que existe una extensión casi-continua fibrada $F : X \longrightarrow Y$ de f. □

El resutado más reciente y más general (hasta el momento) sobre extensión de funciones continuas es el dado por Osipov en [14], en ese trabajo se dan condiciones necesarias y suficientes para que exista dicha extensión cuando el codominio de la función tiene un tipo de axioma de separación que se introduce previamente. El corolario 3.4 de [14] nos da condiciones necesarias y suficientes para que una función tenga una extensión continua si el codominio de la función es un espacio Urysohn.

En lo que resta de este capítulo nos dedicaremos a dar las definiciones necesarias para enunciar y demostrar una versión en la topología fibrada de dicho corolario.

Recordemos que las definiciones y conceptos sobre topoloía fibrada los hemos tomado de [10], salvo aquellos que hemos tenido que desarrollar por la inexistencia de los mismos en su versión fibrada.

Definición 2.2.28 *Sean B un espacio topológico y $p : X \longrightarrow B$ un conjunto fibrado sobre B. Un b-filtro en X es un par $(b, \mathcal{F})$, con b un punto en B y $\mathcal{F}$ un filtro en X tal que b es punto límite del filtro $p_*\mathcal{F}$ en B.*

Note que si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una función fibrada, donde X y Y son conjuntos fibrados sobre B, entonces las imágenes directas de miembros de un b-filtro $\mathcal{F}$ en X generan un b-filtro $\varphi_*\mathcal{F}$ en Y.

Si X es un espacio topológico fibrado sobre B tenemos lo siguiente.

Definición 2.2.29 *Un punto de adherencia de un b-filtro $\mathcal{F}$ en X es un* *punto en la fibra X_b que es de adherencia del filtro $\mathcal{F}$ en X. Puntos fuera de X_b no serán considerados como puntos de adherencia.*

Sea f una función continua de un subconjunto denso S de X a un espacio topológico Y, definimos la siguiente condición.

($*$) Si $\{A_\beta\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de Y tal que $\bigcap_\beta A_\beta = \emptyset$, entonces $\bigcap_\beta \overline{f^{-1}(A_\beta)} = \emptyset$.

La siguiente proposición nos muestra que la condición ($*$) es necesaria para que exista una extensión continua de una función f en cualquier espacio Y.

Proposición 2.2.30 *Sea f una función continua de un subconjunto denso S de X a un espacio topológico Y. Si f tiene una extensión continua a X entonces la condición ($*$) se cumple.*

Demostración. Supongamos que $F : X \longrightarrow Y$ es una extensión continua de f. Sea $\{A_\beta\}$ una familia de subconjuntos cerrados de Y tal que $\bigcap_\beta A_\beta = \emptyset$. Tomemos $x \in X$, entonces existe β tal que $F(x) \notin A_\beta$, de modo que existe una vecindad abierta V de $F(x)$ tal que $V \cap A_\beta = \emptyset$. Luego, $F^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x tal que $F^{-1}(V) \cap F^{-1}(A_\beta) = \emptyset$. Por tanto, $x \notin \overline{f^{-1}(A_\beta)}$. □

En [22] Velichko demuestra que si el espacio Y es regular, entonces la condicion ($*$) es suficiente para que exista una extensión continua de f.

Definición 2.2.31 [14] *Sea M un subconjunto de un espacio topológico X, la θ-cerradura de M es el conjunto de puntos $x \in X$ tal que cualquier vecindad cerrada de x intersecta M, la denotaremos como $\overline{M}^\theta$.*

Proposición 2.2.32 *Sean S un subconjunto denso del espacio topológico fibrado $q : X \longrightarrow B$, $p : Y \longrightarrow B$ un espacio topológico fibrado Urysohn, $f : S \longrightarrow Y$ una función continua fibrada, $x \in X$ y V un subconjunto abierto de Y. Si la condición ($*$) se cumple, tenemos lo siguiente:*

1. $\cap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \neq \emptyset$.

2. *Si* $\cap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\cap p^{-1}(q(x))\neq\emptyset$, *entonces* $\cap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\cap p^{-1}(q(x))=\{y\}$ *para algún* $y\in p^{-1}(q(x))$.

Demostración. 1) Como $x\in\cap\{\overline{N\cap S} : N\in\mathcal{N}(x)\}$, entonces $\cap\{\overline{f(N\cap S)} : N\in\mathcal{N}(x)\}\neq\emptyset$, y ya que la condición $(*)$ se cumple, se tiene que $\cap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\neq\emptyset$.

2) Sean $y\in\cap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\cap p^{-1}(q(x))$ y $z\in p^{-1}(q(x))$ con $z\neq y$. Como Y es Urysohn, existen U_y y U_z vecindades abiertas de y y z respectivamente tales que $\overline{U_y}\cap\overline{U_z}=\emptyset$. Entonces $\overline{f^{-1}(\overline{U_y})}\cap\overline{f^{-1}(\overline{U_z})}=\emptyset$, luego, como $x\in\overline{f^{-1}(\overline{U_y})}$ existe W vecindad abierta de x tal que $W\cap\overline{f^{-1}(\overline{U_z})}=\emptyset$. Se sigue entonces que $f(W\cap S)\cap\overline{U_z}=\emptyset$. Por tanto $z\notin\overline{f(W\cap S)}^{\theta}$. $\square$

La siguiente definición es nuestra versión fibrada de lo que se define en [14] como punto X_θ-*interior*.

Definición 2.2.33 *Sean* $q: X\longrightarrow B$ *y* $p: Y\longrightarrow B$ *espacios topológicos fibrados,* S *un subconjunto denso de* X, $f: S\longrightarrow Y$ *una función continua fibrada y* V *un subconjunto de* Y. *Diremos que* $x\in X$ *es un punto* X_θ*-interior fibrado de* $f^{-1}(V)$ *si*

$$\bigcap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\cap p^{-1}(q(x))\subset V.$$

Denotaremos por $X_\theta(f^{-1}(V))$ *el conjunto de todos los puntos* X_θ*-interiores fibrados de* $f^{-1}(V)$.

Definamos la siguiente condición.

$(*_1)$ $X_\theta(f^{-1}(V))$ es un subconjunto abierto de X para cada V subconjunto abierto de Y.

El resultado que a continuación damos es la versión fibrada del corolario 3.4 de [14].

Teorema 2.2.34 *Sean* S *un subconjunto denso del espacio topológico fibrado* $q: X\longrightarrow B$, $p: Y\longrightarrow B$ *un espacio topológico fibrado Urysohn y* $f: S\longrightarrow Y$ *una función continua fibrada. Si* $\bigcap\{\overline{f(N\cap S)}^{\theta} : N\in\mathcal{N}(x)\}\cap p^{-1}(q(x))\neq\emptyset$ *entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una extensión continua fibrada* $F : X \longrightarrow Y$ *de* f.

2. *Las condiciones* $(*)$ *y* $(*_1)$ *se cumplen.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$. Por la proposición 2.2.30 la condición $(*)$ se cumple. Sean V un subconjunto abierto de Y y $x \in X_\theta(f^{-1}(V))$. Como F es una función continua fibrada y el conjunto $\{N \cap S : N \in \mathcal{N}(x)\}$ es una base de filtro de un $q(x)$-filtro que converge a x, entonces $\mathcal{F} = \{f(N \cap S) : N \in \mathcal{N}(x)\}$ converge a $F(x) \in p^{-1}(q(x))$. Como Y es Urysohn, $\bigcap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \cap p^{-1}(q(x)) = F(x) \in V$, así $x \in F^{-1}(V)$.

Por otro lado, si $x \in F^{-1}(V)$, entonces $F(x) \in V$. Por la unicidad de los puntos de adherencia de la base de filtro $\mathcal{F} = \{f(N \cap S) : N \in \mathcal{N}(x)\}$ de un $q(x)$-filtro, tenemos que $\bigcap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \cap p^{-1}(q(x)) = F(x) \in V$, entonces $x \in X_\theta(f^{-1}(V))$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Definimos $F : X \longrightarrow Y$ como: $F(x) = \bigcap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \cap p^{-1}(q(x))$. Por la proposición 2.2.32 F está bien definida y es una extensión fibrada de f. Sea V un subconjunto abierto de Y. Como la condición $(*_1)$ se cumple, $X_\theta(f^{-1}(V))$ es un subconjunto abierto de X. Para probar que F es continua demostraremos que $X_\theta(f^{-1}(V)) = F^{-1}(V)$.

Sea $x \in X_\theta(f^{-1}(V))$, entonces $F(x) = \bigcap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \cap p^{-1}(q(x)) \subset V$, entonces $x \in F^{-1}(V)$. Por otro lado, si $x \in F^{-1}(V)$, $F(x) = \bigcap\{\overline{f(N \cap S)}^\theta : N \in \mathcal{N}(x)\} \cap p^{-1}(q(x)) \subset V$, por lo tanto $x \in X_\theta(f^{-1}(V))$. $\square$

De esta manera hemos obtenido el resultado más general hasta el momento sobre la extensión de una función continua.

Conclusiones y preguntas

Con el trabajo desarrollado en esta tesis podemos dar algunas conclusiones: la primera es que la propiedad de levantamiento de morfismos nos da una buena manera de reformular conceptos básicos de la topología general en un lenguaje categórico, esto por su puesto nos ofrece un camino para definir los conceptos correspondientes en otras categorías, eso, como cualquier otra teoría, puede o no ser fructífero. La segunda conclusión que tenemos es que en la topología fibrada hay mucho trabajo por hacer, como ya vimos, muchos resultados que se tienen en la topología general pueden extenderse a este contexto fibrado, además, esta naturaleza fibrada nos susurra fuertemente que apliquemos la propiedad de levantamiento de morfismos.

Además de las preguntas que ya hemos puesto tenemos otras que a continuación enunciamos.

Referente a la clase de funciones *H-cerradas* tenemos la siguiente.

Pregunta 2.2.35 *¿Existe una clase de morfismos $\mathcal{M}$ en Top tal que $\mathcal{M}^l$ o $\mathcal{M}^r$ sea la clase de funciones H-cerradas?*

En [4] se da la siguiente definición.

Definición 2.2.36 *Una función Urysohn $f : X \longrightarrow Y$ es U-cerrada si siempre que $g : Z \longrightarrow Y$ sea Urysohn y extienda a f se tiene que X es cerrado en Z.*

Análogamente a las funciones *H-cerradas*, tenemos la siguiente pregunta.

Pregunta 2.2.37 *¿Existe una clase de morfismos $\mathcal{M}$ en Top tal que $\mathcal{M}^l$ o $\mathcal{M}^r$ sea la clase de funciones U-cerradas?*

En [14] Osipov da las siguientes definiciones.

Definición 2.2.38 *Sea $\alpha > 0$ un ordinal. Una vecindad U de un conjunto A es llamada α-vecindad de A si existe $\{U_\beta\}_{\beta\leq\alpha}$ una familia de vecindades de A tales que $\overline{U_\beta} \subseteq U_{\beta+1}$ para cualquier $\beta + 1 \leq \alpha$, y $U = U_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} U_\beta$.*

Definición 2.2.39 *Un espacio topológico X es llamado $U(\alpha)$-espacio si para cualesquiera $x, y \in X$ existen U_x y U_y α-vecindades de x y y respectivamente, tales que $\overline{U_x} \cap \overline{U_y} = \emptyset$.*

Un trabajo que nos parece factible hacer es dar la versión fibrada de estos espacios y estudiar sus propiedades, también pensamos que podemos generalizar el teorema 2.2.34 a la posible versión fibrada de esos espacios. Todo esto queda como un trabajo a futuro.

Apéndice A

Propiedades algebraicas

En este apéndice desarrollamos algunos conceptos algebraicos por medio de la propiedad de levantamiento de morfismos, algunos de estos los hemos hecho más generales de lo que se enuncian en [9].

Como habitualmente se hace denotaremos por 0 el objeto inicial y por 1 el objeto terminal de una categoría.

A.1. Morfismos suprayectivos

Proposición A.1.1 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto inicial y A un objeto en $\mathcal{C}$. Entonces $(0 \longrightarrow A)^r$ es la clase de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ que inducen una función suprayectiva $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, Y)$.*

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y \in (0 \longrightarrow A)^r$.

Observemos que para cada $j : A \longrightarrow Y$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces, para cada j existe $h : A \longrightarrow X$ tal que $hg =!$ y $fh = j$, de este modo tenemos que $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, Y)$ es suprayectiva.

Supongamos ahora que $f : X \longrightarrow Y$ induce una función suprayectiva $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, Y)$.

Sean $i : 0 \longrightarrow X$ y $j : A \longrightarrow Y$ tales que $fi = jg$. Como $\mathcal{C}(A, f)$ es suprayectiva, existe $h \in \mathcal{C}(A, X)$ tal que $fh = j$, además, ya que 0 es inicial se cumple que $hg = i$. Por lo tanto, $f \in (0 \longrightarrow A)^r$. $\square$

Definición A.1.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que un objeto $A \in \mathcal{C}$ es proyectivo si el funtor $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow$ Con preserva los epimorfismos.*

Proposición A.1.3 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto inicial. Si $A \in \mathcal{C}$ es proyectivo tal que el funtor $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow$ Con refleja epimorfismos, entonces $(0 \longrightarrow A)^r$ es la clase de epimorfismos de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea A objeto proyectivo de $\mathcal{C}$ tal que el funtor $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Con}$ refleja epimorfismos.

Supongamos que $f : X \longrightarrow Y \in (0 \longrightarrow A)^r$. Entoces, f induce un epimorfismo $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, Y)$, y ya que el funtor $\mathcal{C}(A, -)$ refleja empimorfismos, entonces f es un epimorfismo.

Consideremos ahora $f : X \longrightarrow Y$ un epimorfismo de $\mathcal{C}$. Supongamos que $i : 0 \longrightarrow X$ y $j : A \longrightarrow Y$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Como A es proyectivo, $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, Y)$ es un epimorfismo, entonces existe $h : A \longrightarrow X$ tal que $fh = j$, además $hg = i$ pues 0 es inicial. Por lo tanto,$f \in (0 \longrightarrow A)^r$. $\square$

Observación A.1.4 *En Con, 1 es un objeto proyectivo y el funtor Con$(1, -)$: Con $\longrightarrow$ Con refleja epimorfismos.*

Demostración. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un epimorfismo, entonces para cada $y \in Y$ existe $x_y \in X$ tal que $f(x) = y$, de este modo $\text{Con}(1, f) : \text{Con}(1, X) \longrightarrow \text{Con}(1, Y)$ es suprayectivo. Por tanto 1 es proyectivo.

Ahora, si $\mathrm{Con}(1, f) : \mathrm{Con}(1, X) \longrightarrow \mathrm{Con}(1, Y)$ es suprayectivo para $f : X \longrightarrow Y$, entonces para cada $\overline{y} : 1 \longrightarrow Y$ existe $\overline{x} : 1 \longrightarrow X$ tal que $f\overline{x} = \overline{y}$, lo que implica que f es suprayectivo. Por lo tanto, $\mathrm{Con}(1, -)$ refleja epimorfismos. $\square$

Corolario A.1.5 *En Con,* $(0 \longrightarrow 1)^r$ *es la clase de funciones suprayectivas.* $\square$

Corolario A.1.6 *En Top,* $(0 \longrightarrow 1)^r$ *es la clase de funciones suprayectivas.*

Demostración. En Top, el objeto terminal 1 es proyectivo y el funtor $\mathrm{Top}(1, -) : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Con}$ refleja epimorfismos, la prueba de esto es igual que en Con. $\square$

Corolario A.1.7 *En la categoría de R-módulos,* $(0 \longrightarrow R)^r$ *es la clase de morfismos suprayectivos.*

Demostración. Sabemos que R es proyectivo en R-Mod, luego, ya que R es el R-Módulo libre en un generador, tenemos que el funtor $\mathrm{R\text{-}Mod}(R, -) : \mathrm{R\text{-}Mod} \longrightarrow \mathrm{Con}$ refleja epimorfismos. Por lo tanto, $(0 \longrightarrow R)^r$ es la clase de morfismos suprayectivos. $\square$

A.2. Morfismos inyectivos

Proposición A.2.1 *En la categoría de R-módulos,* $(R \longrightarrow 0)^r$ *es la clase de morfismos inyectivos.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $i : R \longrightarrow X$ y $j : 0 \longrightarrow Y$ morfismos de R-módulos. Supongamos que f es un morfismo inyectivo y que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{0}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces, $i(R)$ es un submódulo del núcleo de f, y ya que f es inyectivo su núcleo es trivial, de donde concluimos que i es idénticamente neutro, es decir, para cada $r \in R$, $i(r) = 0$. De tal modo que el único morfismo $h : 0 \longrightarrow X$ cumple que $h\overline{0} = i$ y $fh = j$. Por lo tanto $f \in (R \longrightarrow 0)^r$.

Supongamos ahora que $f \in (R \longrightarrow 0)^r$. Todo morfismo de R-módulos $i : R \longrightarrow X$ cuya imagen esté contenida en el núcleo de f cumple que $j\overline{0} = fi$.

Sea $x \in Nuc(f)$. Definimos $i : R \longrightarrow X$ como: $i(1_R) = x$. De este modo $i(R) \subseteq Nuc(f)$, entonces para el único morfismo $h : 0 \longrightarrow X$ se cumple que $h\overline{0} = i$ y $fh = j$, de donde concluimos que $x = i(1_R) = 0$. Por lo tanto, f es inyectivo. $\square$

A.3. Módulos proyectivos y módulos inyectivos.

Proposición A.3.1 *En la categoría de R-módulos, un módulo P es proyectivo si y solo si* $0 \longrightarrow P \in (0 \longrightarrow R)^{rl}$.

Demostración. Sean P un R-módulo, $f : X \longrightarrow Y \in (0 \longrightarrow R)^r$, $i : 0 \longrightarrow X$ y $j : P \longrightarrow Y$ morfismos de R-módulos.

Supongamos que P es proyectivo. Como f es suprayectivo y $j : P \longrightarrow Y$, entonces existe un morfismo de R-módulos $h : P \longrightarrow X$ tal que $fh = j$. Así, para cada diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{0}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

$h : P \longrightarrow X$ cumple que $h\overline{0} = i$ y $fh = j$. Por lo tanto, $0 \longrightarrow P \in (0 \longrightarrow R)^{rl}$.

Supongamos ahora que $0 \longrightarrow P \in (0 \longrightarrow R)^{rl}$. Como $fi = j\overline{0}$, entonces existe $h : P \longrightarrow X$ morfismo de R-módulos tal que $h\overline{0} = i$ y $fh = j$. Por lo tanto, P es proyectivo. $\square$

De manera dual tenemos que en la categoría de R-módulos, un módulo I es inyectivo si y solo si $I \longrightarrow 0 \in (R \longrightarrow 0)^{rr}$.

Apéndice B

Contraejemplos

En este capítulo recopilamos los contraejemplos que hemos encontrado de afirmaciones que se hacen en [9] que resultan no ser correctas.

Consideremos la clase de morfismos $\mathcal{M} = \{\emptyset \longrightarrow \{*\}\}$ en Top.

Ejemplo B.0.1 *Un espacio topológico* K *es vacío si y solo si* $K \longrightarrow \{*\}$ *está en* $\mathcal{M}^{ll}$.

Basta observar que $\overline{a} : \{a\} \longrightarrow \{a, b\}$ está en $\mathcal{M}^l$ y que para el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \{a\} \arrow[d, "\overline{a}"] \\ \{*\} \arrow[r, "\overline{b}"'] & \{a, b\} \end{tikzcd}$$

no existe $h : \{*\} \longrightarrow \{a\}$ tal que $\overline{a}h = \overline{b}$. Por lo que $K \longrightarrow \{*\}$ no está en $\mathcal{M}^{ll}$.
Por otra parte, si consideramos $K = \{*\}$, entonces $id_K : K \longrightarrow \{*\} \perp f$ para cada $f \in \mathcal{M}^l$, por lo que $id_K \in \mathcal{M}^{ll}$ y $K \neq \emptyset$.

Ejemplo B.0.2 $(\{a\} \longrightarrow \{a, b\})^l$ *es la clase de morfismos suprayectivos.*

Para probar que es falso, consideremos el morfismo $\{c\} \longrightarrow \{c \searrow d\}$, dicho morfismo es claramente continuo y si $j : \{c \searrow d\} \longrightarrow \{a, b\}$ es continuo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\{c\} \arrow[r, "cte"] \arrow[d, "\overline{c}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{a\} \arrow[d, "\overline{a}"] \\
\{c \searrow d\} \arrow[r, "j"'] & \{a, b\}
\end{tikzcd}$$

entonces j es constante, de este modo el único morfismo $h : \{c \searrow d\} \longrightarrow \{a\}$ cumple que $h\overline{c} = i$ y $\overline{a}h = j$. Por tanto $\overline{c} \in (\{a\} \longrightarrow \{a, b\})^l$ pero no es suprayectivo.

Ejemplo B.0.3 $(\{a\} \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\})^r$ *es la clase de morfismos suprayectivos.*

Consideremos el morfismo suprayectivo $g : \{a, b\} \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\}$. Notemos que cualquier morfismo $h : \{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow \{a, b\}$ que sea continuo necesariamente es constante. Entonces, para el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{a\} \arrow[r, "cte_a"] \arrow[d, "\overline{a}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{a, b\} \arrow[d, "g"] \\
\{a \leftrightarrow b\} \arrow[r, "id"'] & \{a \leftrightarrow b\}
\end{tikzcd}$$

no existe $h : \{a \leftrightarrow b\} \longrightarrow \{a, b\}$ continuo, tal que $gh = id$. Por lo tanto $g \notin (\{a\} \longrightarrow \{a \leftrightarrow b\})^r$.

Bibliografía

[1] M.B. Agnello and F. Cammaroto, Taimanov's theorem for almost continuous functions, Glasnik Matematički. Vol.28 (48) (1993), 123-129.

[2] N. Bourbaki, Elements of Mathematics: General Topology Part I, Addisons-Wesley, 1966.

[3] F. Cammaroto, On δ-continuous and δ-open functions, Kyungpook K. Math. Journal, 28 (1) (1988).

[4] F. Cammaroto, A. Catalioto and J. Porter. On H-closed and U-closed functions, Quaestiones Mathematicae, 35:2 (2012), 181-194.

[5] F. Cammaroto, V.V. Fedorchuk and J.R. Porter, H-closed functions, Comment.Math.Univ.Carolinae, 39,3 (1998), 563-572.

[6] F. Cammaroto and G. Nordo, On Urysohn, almost regular and semiregular functions, Filomat (Niš) 8 (1994), 71-80.

[7] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, 1978.

[8] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[9] M. Gavrilovich. The unreasonable power of the lifting property in elementary mathematics. Arxiv arXiv: submit/1955606.

[10] I.M. James, Fibrewise Topology, Cambridge University Press, 1989.

[11] H. Juárez Anguiano, F. Marmolejo and C. Oldair Renteria, A characterization of proper morphisms by the lifting property, Topology and its Applications, Volume 312, 2022, 108087.

[12] Y. Konami and T. Miwa, Fibrewise extensions, Shanin compactification and extensions of fibrewise maps, Acta Math.Hungarica, 122(1-2) (2009), 1-28.

[13] C. Oldair-Rentería, On extension of fibrewise continuous and fibrewise almost-continuous functions, Topology and its Applications, https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108615. (2023).

[14] A.V. Osipov, On extension functions for image space with different separation axioms, Topology and its Applications, 222 (2017), 70-76.

[15] B.A. Pasynkov, On extension to mappings of certain notions and assertions concerning spaces, Mappings and Functors, Izdat. MGU, Moscow (1984), 72-102.

[16] D. Quillen, Homotopical Algebra, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, 1967.

[17] C.O. Rentería García, Caracterización de algunos conceptos topológicos por medio de ortogonalidad, Tesina de maestría, Ciudad de México, 2019.

[18] M.K. Singal and A. Rani, On almost-continuous mappings, The Yokohama Math. Journal, 16 (1968), 63-73.

[19] A.D. Taimanov, On extension of continuous mappings of topological spaces, Mat. Sb. (N.S.) 31(73) (1952) 2, 459-463.

[20] N. Velichko, H-closed topological spaces, Mat. Sb. 70 112 (1966), 98-122.

[21] N. Velichko, On extension of mappings on topological spaces, A.M.S. Transl. 92 (1970), 41-47.

[22] N. Velichko, O prodolgenii otobragenii topologicheskih prostranstv, Sib. Mat. Zh. 6 (1) (1965), 64-69.