



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y
SISTEMAS

CATEGORIZACIÓN DE POLÍGONOS 1-ORTOGONALES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:

DIEGO JESÚS FAVELA NAVA

TUTOR:
JORGE URRUTIA GALICIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CD. DE MÉXICO, ABRIL DE 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

*A mi olvido no volará tu sonrisa,
que con brochas de aire
pintan la mía.*

Quiero agradecer mi tutor, el Dr. Jorge Urrutia Galicia por toda su paciencia, por su gran apoyo por este largo proceso y sus palabras en momentos desconcertantes.

Agradezco también a mis sinodales, la Dra. Adriana Ramírez Vigueras, el Dr. Carlos Bruno Velarde Velázquez, el Dr. Criel Merino López y el Dr. Juan José Montellano Ballesteros, por su tiempo, sus comentarios y sus aportaciones al mejoramiento de este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por la beca otorgada con CVU:1148600, que ayudó en la conclusión satisfactoria de este proyecto, y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT), proyecto IN105221, por el apoyo económico brindado.

Dedicado a mi madre, quien me enseñó a amar y a ser amado, que sé que siempre me acompaña en cualquier camino que tome. A mi padre y mi hermano, quienes me han dado todo su cariño y me han permitido darles el mío. A mi familia que siempre me ha dado su apoyo más sincero.

A Caro por ser tanto para mí desde el principio y por hacer mi vida, por siempre y para siempre, una mejor.

A Daniel, Benjamín, Claudio, Silva, Odette, Melissa, José, Iván, Andrea, Óscar, Fernanda y Palmerín, mis personas tan amadas que, con mucho corazón, me han mostrado que vivir lo vale. Por último, a todos los que directa e indirectamente me han dado esos buenos momentos entre sueños.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Contribución del trabajo	7
1.2. Estructura del trabajo	8
2. Conceptos y Definiciones	9
2.1. Dualidad	12
2.1.1. Estudio del polígono dual	15
2.2. Polígonos similares	17
2.2.1. Trayectorias de vértices	18
2.2.2. Intervalos del Polígono Dual	21
3. Resultados Principales	24
3.1. Algoritmo para calcular similitud	32
3.1.1. Complejidad de similitud	33
3.2. Algoritmo para calcular <i>flip</i> -equivalencia	33
3.2.1. Complejidad de <i>flip</i> -equivalencia	34
3.3. Consideraciones en implementación	37
3.3.1. Optimizando el cálculo de <i>flip</i> -equivalencia	38
3.4. Algoritmo óptimo para calcular <i>flip</i> -equivalencia	40
3.4.1. Complejidad de <i>flip</i> -equivalencia óptima	41
4. Conclusiones	43
4.1. Trabajo a futuro	43
Bibliografía	47

Capítulo 1

Introducción

Los polígonos son elementos de gran relevancia en el campo de la geometría computacional. Su estructura permite la discretización de espacios continuos, como lo es el plano, lo que facilita soluciones eficientes para problemas geométricos. En general, se suele trabajar con polígonos simples, los cuales presentan intersecciones solamente en los extremos de aristas adyacentes y separan el plano en dos regiones conexas.

Por otro lado, las *triangulaciones* son otra manera de discretizar y particionar el plano en piezas sencillas para un manejo más fácil. Dada una colección de puntos P en el plano en posición general, una triangulación de P es una partición del cierre convexo de P en triángulos con interiores ajenos, tales que su unión es el cierre convexo de P , donde los vértices de los triángulos son puntos de P y sus aristas son segmentos de recta que unen parejas de puntos en P . Decimos que dos triángulos son adyacentes si ambos comparten una arista. Existen también triangulaciones con propiedades interesantes, por ejemplo, una triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos P es aquella en la que tres puntos de P definen un triángulo si y sólo si el círculo circunscrito que definen no contiene otros puntos de P . La triangulación de Delaunay puede ser calculada en tiempo $O(n)$ a través de su dual, el diagrama de Voronoi, el cual puede ser construido en tiempo $O(n \log n)$ [15].

Ahora, un polígono simple también puede ser triangulado. En este caso se busca particionar en triángulos el interior de un polígono, donde los vértices del polígono original se convierten en los vértices de los triángulos generados, las aristas del polígono son usadas como aristas de triángulos que tocan la frontera del polígono y el resto de las aristas se obtienen al generar diagonales internas entre vértices del

polígono. Chazelle [2] demuestra que es posible realizar la triangulación de un polígono en tiempo lineal, sin embargo el algoritmo que propone resulta difícil de llevar a la implementación. Dado esto, en la práctica se opta por usar otros algoritmos más sencillos pero de mayor complejidad, por ejemplo, en [9] se presenta un algoritmo que triangula un polígono en $O(n \log n)$ tiempo por medio de la descomposición del polígono en piezas monótonas.

El triangular es útil puesto que simplifica el espacio de trabajo, por esto se ha usado como herramienta para resolver varios problemas de geometría computacional. Un ejemplo clásico es el algoritmo de Kirkpatrick [12] el cual puede realizar búsquedas de puntos en subdivisiones planas en tiempo $O(\log n)$. Por otro lado, las triangulaciones tienen propiedades que por sí mismas son de interés estudiar, una propiedad sencilla es que existe una 3-coloración para cualquier triangulación de un polígono [14].

Lawson [13] presentó una transformación que trabaja sobre triangulaciones de puntos, esta lleva el nombre de intercambio (*exchange* en inglés). En publicaciones posteriores como en [10] y [4] los autores se han referido a esta operación como un *flip*. Esta transformación toma una arista de triángulos adyacentes tal que al eliminarla deja un cuadrilátero convexo, posteriormente conecta la pareja de vértices que no eran previamente adyacentes con una arista nueva. Esta operación nos produce una nueva triangulación y por ende, induce una gráfica conexa de *flips*, donde cada triangulación es un vértice de la gráfica y dos vértices están unidos por una arista si ambas triangulaciones asociadas están a un *flip* de distancia. En [7] Fortune prueba que se puede convertir a cualquier triangulación de un conjunto de puntos en una triangulación de Delaunay con un número cuadrático de *flips*.

Otro problema relacionado que ha sido estudiado de manera extensa es el *problema de la galería de arte*. En este se busca acotar el número máximo de guardias necesarios para vigilar el interior de un museo, este último modelado utilizando un polígono simple.

El teorema de Chvátal [3] dice que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar cualquier polígono simple de n vértices. Para probar este resultado se toma cualquier triangulación del polígono para después obtener un conjunto de vértices con a lo más $\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor$ elementos de tal forma que cada triángulo tiene un vértice del conjunto.

Poco después, Fisk [6] hace uso de una 3-coloración para dar una demostración alternativa pero similar al resultado de Chvátal. La demostración de Fisk es muy elegante y se presenta a continuación: Sea P un polígono simple con n vértices, si

a P lo triangulamos podemos colorear sus vértices con tres colores de tal manera en que cada par de vértices tendrán colores distintos si estos son adyacentes por medio de una arista de la triangulación. Sea C_t el conjunto de vértices de color t con $t \in \{1, 2, 3\}$. Sin perder generalidad, si sucede que $|C_1| \leq |C_2| \leq |C_3|$ entonces esto implica que $|C_1| \leq \frac{n}{3}$. Por esto, como todo triángulo tiene un vértice de color 1 si colocamos un guardia en cada vértice de C_1 estaríamos vigilando completamente a P . La demostración nos liga el problema de triangular un polígono simple con el de vigilarlo, en la Figura 1.1 podemos ver un pequeño ejemplo al utilizar el resultado.

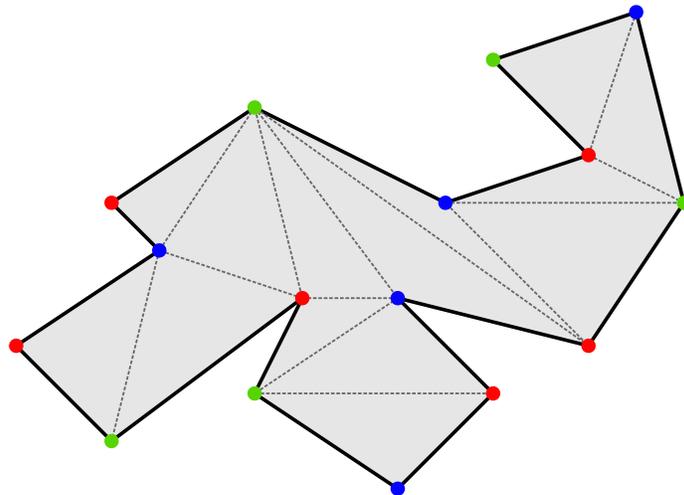


Figura 1.1: Coloración de los vértices de un polígono simple usando una triangulación, los conjuntos de vértices de un mismo color son suficientes para vigilar el polígono.

El problema de vigilar polígonos es interesante por si mismo, y se han estudiado otras variantes donde se busca vigilar objetos como: un arreglo de segmentos de recta, donde una recta puede ser iluminada por cualquiera de los dos lados; el interior de círculos que sólo se tocan entre si en sus fronteras; o estructuras que se asemejan más a galerías de arte, como lo son rectángulos subdivididos en cuartos rectangulares conectados por medio de puertas; entre otras, las cuales pueden encontrarse en el libro de O'Rourke [14] y los artículos de revisión de Shermer [16] y Urrutia [17]. Por ejemplo, el agregar propiedades nuevas a los polígonos nos permite estudiar subclases de polígonos interesantes; una frecuentemente estudiada son los polígonos ortogonales, cuyas aristas están alineadas con un par de ejes coordenados ortogonales. En su artículo, Khan, Klawa y Kleitman [11] resolvieron el problema de la galería de arte sobre polígonos ortogonales, mostrando que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son siempre suficientes

y a veces necesarios para vigilar el polígono, esta diferencia de cota resalta que restringir propiedades nos permite supuestos que objetos más generales no cumplen.

Para esto, se da una demostración compleja de que cualquier polígono ortogonal puede ser particionado en cuadriláteros convexos, donde los vértices de cada cuadrilátero son vértices del polígono y sus aristas están contenidas en el polígono [11]. A partir de esta cuadrilaterización del polígono se construye una gráfica que conecta los vértices opuestos de cada cuadrilátero por medio de diagonales (ver Figura 1.2). Dado que la gráfica generada es 4-coloreable, una clase cromática de la coloración puede vigilar el polígono ortogonal de manera similar a la que una clase cromática de una 3-coloración vigila un polígono simple.

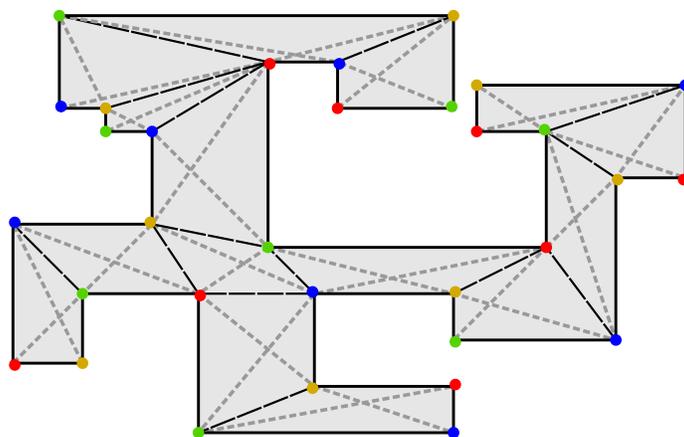


Figura 1.2: Partición en cuadriláteros de un polígono ortogonal, se puede generar una gráfica 4-coloreable al conectar parejas de vértices opuestos para cada cuadrilátero.

Por otro lado, en [5] se presenta una nueva variante del problema de la galería de arte, ahora aplicada a una nueva subclase que nombran *ortho-unit polygons*, en este trabajo se traducirá el término a polígonos 1-ortogonales. Estos son polígonos ortogonales simples, pero su característica distintiva es que todas sus aristas tienen longitud unitaria y sus vértices tienen coordenadas enteras. Para esta clase de polígonos logran mostrar que para $n \geq 12$ vértices, el polígono puede ser vigilado con a lo más $\lfloor \frac{n-4}{8} \rfloor$ guardias.

Para probar este resultado se hace uso de una partición del polígono en $\frac{n}{4}$ columnas de ancho unitario, posteriormente se representa esta partición con un árbol T donde cada vértice es una columna y dos vértices son adyacentes si la intersección de las fronteras de sus columnas correspondientes son no vacías (véase Figura 1.3). A partir de esto, se nota que vigilar parejas de vértices de T es posible si se puede

conectar sus respectivas columnas por medio de un corte horizontal que esté completamente contenido en el polígono, a partir de este emparejamiento de los vértices de T se sigue el resultado final.

Al final de su trabajo, presentan una conjetura para otra clase de polígonos, llamados *polígonos integrales ortogonales*, los cuales son polígonos simples ortogonales donde sus aristas tienen longitudes enteras. Se conjetura que estos polígonos pueden ser vigilados siempre con a lo más $\lfloor \frac{p}{6} \rfloor$ guardias, donde p es el perímetro del polígono.

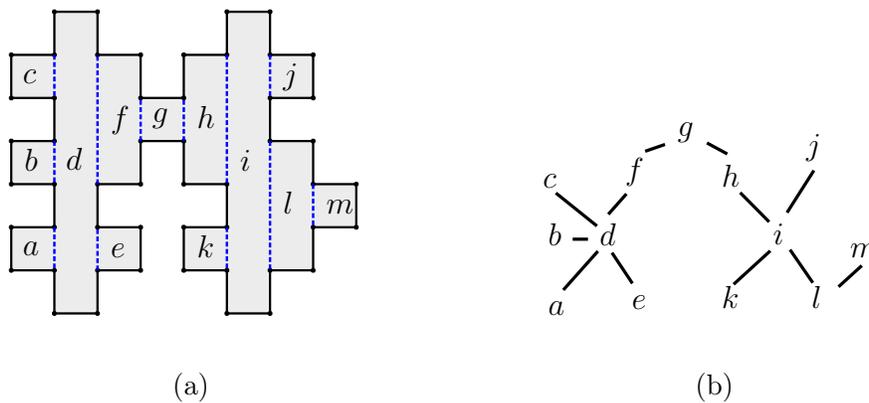


Figura 1.3: (a) Partición en columnas de un polígono 1-ortogonal. (b) El árbol correspondiente a la partición.

1.1. Contribución del trabajo

Nótese que los problemas que se han mencionado trabajan sobre polígonos estáticos, esto es, no cambian respecto al tiempo. Permitir que un polígono 1-ortogonal cambie ligeramente a lo largo del tiempo abre las puertas a nuevas variantes de los problemas que se han discutido a lo largo de este capítulo. Esto motiva a la construcción de una transformación que opere sobre los polígonos 1-ortogonales y que genere nuevos polígonos 1-ortogonales.

En este trabajo se presenta dicha transformación, la cual modifica las aristas de polígonos 1-ortogonales de tal manera en que nos genera nuevos polígonos de la misma clase, esto evoca recuerdos del operador *flip* para triangulaciones, por esta razón se reutiliza el nombre de *flip* para esta nueva transformación. La definición formal de un *flip* junto con una explicación más detallada de la transformación se presenta en el siguiente capítulo (ver Definición 1).

Continuando en esta la misma línea de pensamiento, consideremos que con una sucesión de *flips* se puede transformar un polígono 1-ortogonal en otro distinto, por lo que podemos agrupar de esta manera parejas polígonos entre si, estos grupos nos induce clases de equivalencias, donde dos polígonos son *flip*-equivalentes si existe una secuencia de *flips* que transforme uno en otro.

A partir de lo anterior, una pregunta que surge naturalmente es la siguiente:

Problema. Sean dos polígonos 1-ortogonales ¿Es posible llegar de un polígono al otro mediante *flips*? Es decir, ¿Serán ambos *flip*-equivalentes?

El principal objetivo de este trabajo es la obtención de un algoritmo que en tiempo $O(n^2)$ permita decidir si dos polígonos 1-ortogonales son *flip*-equivalentes, este será el Teorema 3 al final del Capítulo 3.

1.2. Estructura del trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan conceptos fundamentales, definiciones y propiedades que se usarán durante el estudio del problema, por otro lado se define nueva terminología relacionada a los polígonos 1-ortogonales y al operador *flip*.

En el Capítulo 3 se dan demostraciones para un conjunto de lemas y teoremas que son importantes para alcanzar la solución del problema. Seguido de esto se describen a detalle los algoritmos resultantes y se analizan sus complejidades. Para terminar el capítulo, se mencionan posibles estructuras de datos que sirven para modelar el problema.

Por último, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones obtenidas, junto con esto se mencionan variantes del problema y posibles extensiones futuras del trabajo.

Capítulo 2

Conceptos y Definiciones

En este capítulo se presentan y describen los conceptos fundamentales que permitirán comprender los objetos investigados. Estos serán de gran importancia para alcanzar los resultados del estudio. Algunos de los siguientes conceptos fueron extraídos del libro de O'Rourke [14] y del artículo de revisión de Urrutia [17].

Un punto en el plano $p = (x, y)$ es una pareja de números reales ordenados. Asimismo, dos puntos p y q delimitan un segmento de recta que es denotado como \overline{pq} .

Un *polígono simple* P se define como una sucesión de puntos en el plano $P = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ donde cada v_i es un vértice de P . Las aristas de P son segmentos cerrados de rectas que unen pares de vértices v_i, v_{i+1} con $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, donde la suma es módulo n . Sus aristas no se intersecan más que en sus extremos y solo entre aristas adyacentes. Nos referimos a P como la región delimitada por los vértices y aristas de P . Se dice que un vértice $v = (x_v, y_v)$ se encuentra en un punto $p = (x_p, y_p)$ si $x_v = x_p$ y $y_v = y_p$. Para propósitos de este trabajo se asume que los vértices de un polígono P lo rodearán en sentido antihorario con respecto al interior relativo de P .

A un polígono simple P se le llama *ortogonal* si sus aristas son paralelas a un par de ejes coordenados ortogonales. Estos ejes suelen ser los ejes cartesianos, así las aristas de P alternan entre aristas horizontales y verticales. Se pueden dividir los vértices de los polígonos ortogonales en dos clases: cóncavos y convexos. Un *vértice cóncavo* es aquel cuyas aristas incidentes a él forman un ángulo en el interior del polígono mayor a 180 grados. Un *vértice convexo* es aquel que no es cóncavo.

Ahora, se recuerda que en el capítulo anterior se definió el *polígono 1-ortogonal*, el cual tiene dos propiedades importantes, primero que todo vértice tiene coordenadas enteras, y segundo que la longitud de todas sus aristas se limita a que sean de tamaño unitario.

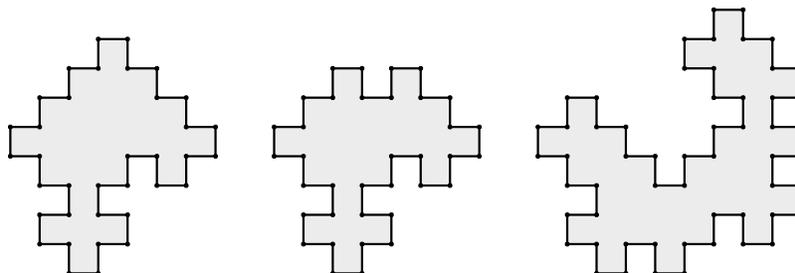


Figura 2.1: Ejemplos de polígonos 1-ortogonales.

Los polígonos 1-ortogonales presentan una estructura notablemente interesante, ya que podemos encontrar polígonos que son casi idénticos con respecto a sus aristas. En la Figura 2.1 se puede apreciar un claro ejemplo de esto, donde los dos polígonos de la izquierda difieren únicamente en tres aristas. Notemos la arista e más hacia arriba del polígono de la izquierda, si e es trasladada dos unidades hacia abajo, resultaría en el polígono de en medio. Este movimiento se puede definir como una transformación que opera sobre las aristas de un polígono 1-ortogonal que genera nuevos polígonos de la misma clase.

Definición 1. Sea $e = (v_0, v_1)$ una arista de un polígono 1-ortogonal P tal que los vértices u y w son adyacentes a v_0 y v_1 respectivamente, y la recta l generada por u y w es paralela a uno de los ejes coordenados. Se define el operador *flip* sobre e como una reflexión de e a través de la recta l de tal forma que genere un nuevo polígono 1-ortogonal.

Es de notar que no se puede realizar el *flip* sobre todas las aristas del polígono que cumplen con la estructura de la definición anterior. Si el realizar un *flip* sobre una arista generaría un polígono que no es simple, entonces decimos que el *flip* produce una *colisión* y por lo tanto no es realizable.

Se describirá a mayor detalle el funcionamiento del operador. Consideremos una arista horizontal e tal que los vértices u y w que son adyacentes a los extremos de e definen una recta horizontal l , por lo que un *flip* sobre e trasladaría a e dos unidades hacia arriba, además, si inmediatamente después se realiza un segundo *flip* sobre e ,

éste se trasladará dos unidades hacia abajo, véase la Figura 2.2; de manera análoga se puede definir el operador para aristas verticales.

Dado lo anterior es evidente que el *flip* es invertible. A pesar de esto, se pueden producir movimientos más complejos al realizar un conjunto secuencial de *flips* sobre aristas distintas del polígono. Por ejemplo, si aplicamos un *flip* sobre una arista e y luego modificamos las aristas adyacentes por medio de *flips*, al hacer un segundo *flip* sobre e , la alejaremos aún más de su posición original.

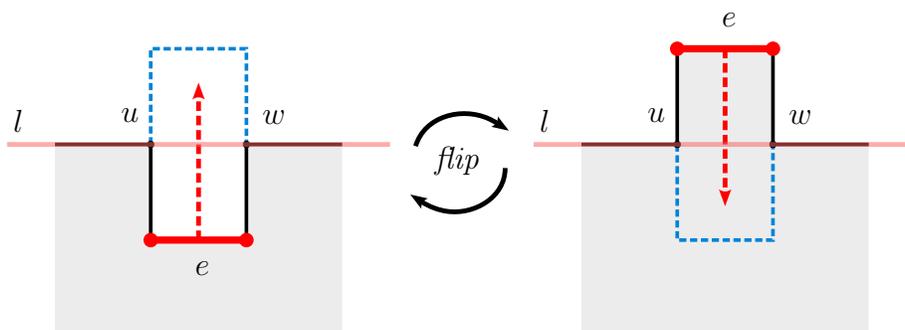


Figura 2.2: Ejemplo del *flip* aplicado sobre una arista horizontal e , esto es, se refleja e a través de la recta l definida por los vértices u y w . El *flip* izquierdo incrementa el área del polígono y el *flip* derecho lo decremента.

Considerando las observaciones anteriores, es posible asociar parejas de polígonos 1-ortogonales por medio de una serie de *flips*. Esto define la siguiente clase de equivalencia.

Sean P y Q dos polígonos 1-ortogonales. Se dice que P y Q son *flip-equivalentes* si existe una secuencia finita de *flips* S que transforme a P en Q , y se denota $P \stackrel{f}{\equiv} Q$. Se les llama el polígono inicial y el polígono objetivo a P y Q , respectivamente. Denotamos como $|S|$ al número de *flips* que se encuentran en la secuencia S , tendremos este valor en cuenta puesto que es de gran relevancia estudiar la longitud mínima que podría tener una secuencia de *flips*. Por último, si al sumar un vector constante a los los vértices de P , estos se encuentran en la misma posición que los vértices de Q , entonces decimos que P y Q son iguales y se denota por $P = Q$. Claramente polígonos que son iguales también son *flip-equivalentes*.

2.1. Dualidad

A cada polígono 1-ortogonal P se le puede asociar un único polígono no simple P^* usando el siguiente método: Primero, se particiona el polígono original en cuadrados unitarios. Luego, se genera una secuencia de vértices siguiendo el orden del polígono original, utilizando como coordenadas los centros de cada cuadrado que toca la frontera de P , nótese que un centro puede aparecer dos veces en la secuencia. Por último, se agrega a P^* una arista nueva por cada par de vértices consecutivos de la secuencia anterior (ver Figura 2.3).

Obsérvase que esta transformación es invertible, es decir, se puede obtener el polígono original P a partir del polígono P^* . En particular, sea G el conjunto de puntos en que intersecan a P^* con coordenadas de la forma $(x + 0.5, y + 0.5)$, con $x, y \in \mathbb{N}$. La unión de todos los cuadrados unitarios con centros en G produce la frontera del polígono original P . Con la transformación anterior se establece una dualidad entre ambos polígonos, donde P pertenece a un espacio primal y P^* al espacio dual, a P^* lo nombramos como el polígono dual asociado a P .

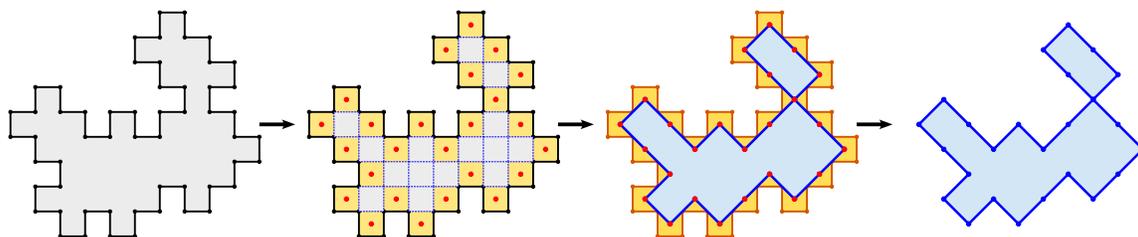


Figura 2.3: Transformación del polígono primal al polígono dual. Los polígonos duales se mostrarán con una frontera azul.

Los polígonos del espacio dual pueden ser descritos de manera sencilla si se les aplica una transformación afín que los rota 45 grados en sentido horario alrededor del origen y los escala por un factor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como se puede apreciar en la Figura 2.4. Por otro lado, si se desea que cada vértice tenga coordenadas enteras estos pueden ser trasladados.

Se puede notar que al aplicar la transformación afín anterior se obtienen polígonos con aristas ortogonales. Para reutilizar la terminología referente a polígonos ortogonales, se asume que todo polígono dual pasó por esta transformación. Cabe mencionar que los polígonos duales tienen un cierto parentesco a otros objetos geométricos, como los polígonos integrales ortogonales ya mencionados en [5] o a

los poliomínos simples (véase [1]). A pesar de esto, los polígonos del espacio dual presentan otras propiedades que los distinguen.

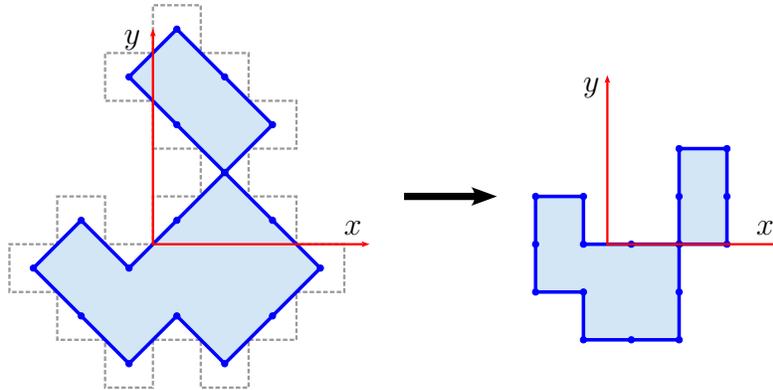


Figura 2.4: La transformación afín aplicada al polígono dual.

De manera inmediata, es claro que para los polígonos duales, cada una de sus aristas tiene una longitud de una unidad y puede suceder que existan aristas consecutivas colineales.

A la definición de polígono ortogonal, se le puede agregar una excepción para que se permitan intersecciones entre extremos de aristas no consecutivas. Con esto se pueden presentar dos tipos de intersecciones en la frontera del polígono, en la Figura 2.5 se muestra en el punto q lo que llamaremos un *contacto* y en el punto p un *cincho*.

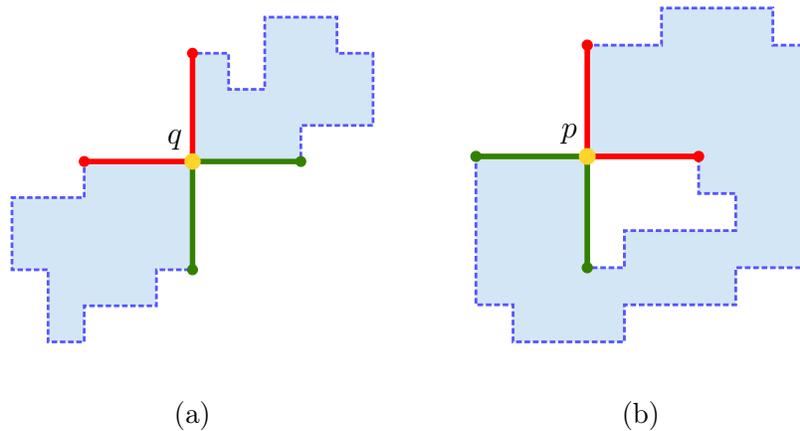


Figura 2.5: Si dos parejas de aristas adyacentes comparten un mismo punto, pueden producir un contacto en q (a) o un cincho en p (b).

Sea P un polígono ortogonal que permite que dos pares de aristas consecutivas compartan un mismo punto en sus extremos. Sea q un punto en P que cumple con la propiedad anterior. Sea $Int(P)$ el interior del polígono P , se dice que hay un contacto en q si el conjunto $Int(P) - q$ es un conjunto disconexo. De otro modo, decimos que existe un cincho en q .

Dado esto, el polígono dual puede presentar contactos en sus vértices. El polígono dual no presenta cinchos dado que al transformarlo al espacio primal produciría un polígono con hoyos. Los *flips* que producen colisiones en un polígono 1-ortogonal no se pueden aplicar en su polígono dual correspondiente y viceversa, por lo que otra propiedad que cumplen los polígonos duales es que si se trazan rayos ortogonales desde cada vértice convexo del polígono dual hacia su exterior relativo, hasta tocar la frontera del polígono, estos rayos tendrán una longitud mínima de dos unidades.

Ahora, un *flip* sobre una arista e de un polígono 1-ortogonal se puede traducir a una traslación diagonal de un vértice v correspondiente del polígono dual de tal manera que nos genera un nuevo polígono dual, esto se muestra en la Figura 2.6. La operación de *flip* se traduce de manera natural al espacio dual, por lo que reciclaremos el nombre de *flip* para esta operación sobre el polígono dual. Se puede notar que, en el caso de los polígonos duales, no se les puede aplicar un *flip* a los vértices que son colineales con sus vértices vecinos.

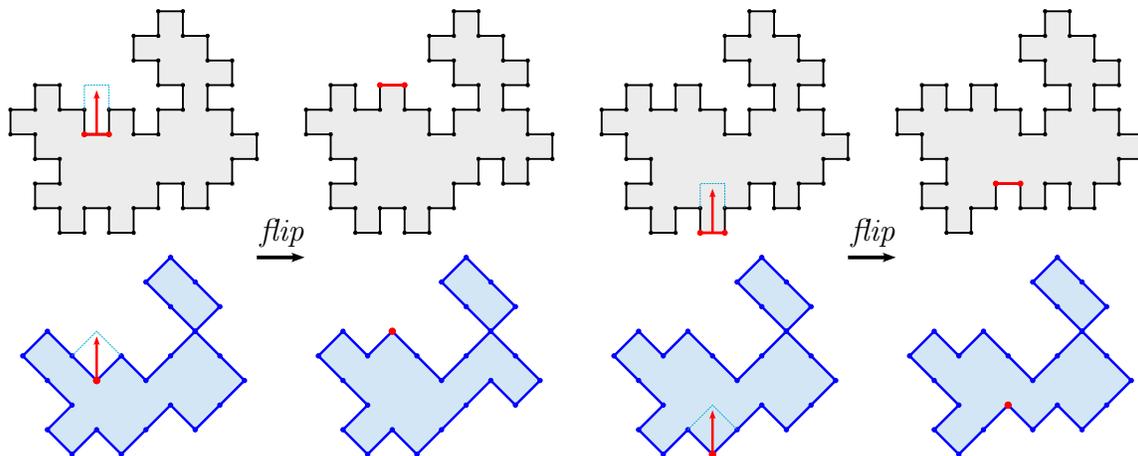


Figura 2.6: Un par de *flips* aplicados sobre los vértices de un polígono dual que corresponden a las aristas de su un polígono 1-ortogonal asociado.

El polígono dual tiene una menor cantidad de aristas y vértices que el polígono primal, esto hace que el manejo de los *flips* en el espacio dual sean más simple visualmente, por esta razón trabajaremos exclusivamente en el espacio dual. Dado que nos interesa la *flip*-equivalencia entre polígonos, es útil verificar que los resultados obtenidos del polígono dual se pueden reducir trivialmente al polígono 1-ortogonal.

Teorema 1. Sean P y Q dos polígonos 1-ortogonales, P y Q son *flip*-equivalentes si y sólo si sus respectivos polígonos duales son *flip*-equivalentes.

Demostración. $P \stackrel{f}{\equiv} Q$ si y sólo si existe una secuencia de *flips* S que convierte a P en Q . Sea f el primer *flip* en S que se aplica sobre una arista e de P , f existe si y sólo si existe un *flip* f' que se puede aplicar sobre un vértice correspondiente de P^* . Aplicar a f sobre P nos genera un polígono P' si y sólo si aplicar f' sobre el vértice de P^* nos genera un polígono P'^* . La arista y el vértice a los que se les aplicó el *flip* son correspondientes por lo tanto P'^* es el polígono dual de P' . Por lo tanto se tiene que $P \stackrel{f}{\equiv} P'$ si y sólo si $P'^* \stackrel{f'}{\equiv} P^*$. Iterando el argumento sobre el resto de los *flips* de S se llega a que $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$. \square

2.1.1. Estudio del polígono dual

Para resolver el problema de la *flip*-equivalencia entre polígonos duales, se utilizará un enfoque que consiste en analizar la estructura de los polígonos y establecer un conjunto de propiedades que permitan identificar la *flip*-equivalencia. A continuación se definen algunas componentes de los polígonos duales que son de gran interés: Las aristas esenciales, los rieles y las escaleras (ver Figura 2.7).

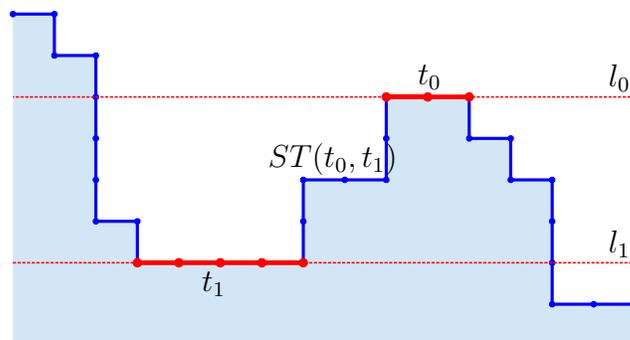


Figura 2.7: Dos rieles l_0 y l_1 que contienen a aristas esenciales t_0 y t_1 . Los vértices entre t_0 y t_1 componen a la escalera $ST(t_0, t_1)$.

Definición 2. Sea P^* un polígono dual.

- Una arista esencial t de P^* es una unión de aristas consecutivas colineales de P^* tal que las dos aristas vecinas de t se encuentran en el mismo semiplano delimitado por la recta que contiene a t . La arista esencial puede ser de tipo vertical u horizontal. Decimos que un vértice forma parte de una arista esencial si incide en alguna arista de t .
- Un riel de P^* es una recta vertical u horizontal que contiene a una o más aristas esenciales.
- Una escalera es un conjunto de vértices consecutivos de P^* que no pertenecen a aristas esenciales. Existe una escalera entre cada par de aristas esenciales consecutivas t y t' , y la denotamos como $ST(t, t')$.

A partir de estas definiciones se pueden hacer las siguientes observaciones: un *flip* puede hacer que un vértice forme parte de una arista esencial, esto nos dice que la arista esencial se puede alargar, encoger o “mover” a lo largo del riel al que pertenece, pero no puede ser eliminada. Esto es por el hecho de que el intentar eliminar una arista esencial utilizando *flips*, produce una colisión en el polígono primal. Por otro lado, una escalera puede ser vacía si sus aristas esenciales adyacentes se tocan en sus extremos, en este caso, un vértice formará parte de dos aristas esenciales (véase la Figura 2.8).

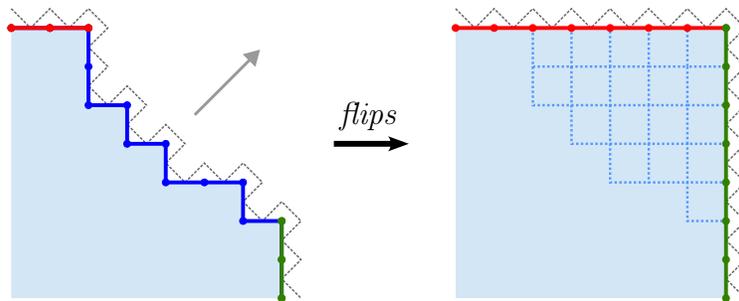


Figura 2.8: Polígono dual con su primal delineado. Por medio de varios *flips* se puede hacer vacía la escalera que se encuentra entre la arista esencial vertical (verde) y la arista esencial horizontal (rojo).

Por otro lado, la clasificación de aristas esenciales y escaleras implica una partición de los vértices del polígono, primero en el conjunto de vértices que se encuentran en alguna escalera, y segundo en el conjunto de vértices que pertenecen a las aristas esenciales del polígono; es claro que ambos conjuntos son disjuntos por definición.

Como observación, el *flip* no puede incrementar la altura de las aristas esenciales horizontales que se encuentran más arriba en el polígono pues solo pueden moverse sobre su riel, esto también aplica para las aristas esenciales que se encuentran más a la derecha, más a la izquierda y más abajo. Lo anterior implica que todos los polígonos de una misma clase de equivalencia estarán contenidos en una región delimitada, a esta región se le llama el *rectángulo contenedor* de un polígono dual.

Dado que los polígonos se pueden encontrar en cualquier parte del plano, por conveniencia supondremos que la esquina inferior izquierda de sus rectángulos contenedores se encuentran en el origen.

2.2. Polígonos similares

El hecho de que las aristas esenciales no pueden desaparecer del polígono dual, implica que éstas nos da una buena descripción del polígono. Además, es evidente que el perímetro es invariante bajo *flips*.

Definición 3. Sean P^* y Q^* dos polígonos duales. Decimos que P^* y Q^* son similares si cumplen lo siguiente:

1. P^* y Q^* comparten el mismo perímetro.
2. Siguiendo el orden de ambos polígonos, existe una correspondencia uno a uno entre las aristas esenciales de ambos polígonos, donde cada pareja correspondiente comparte un mismo riel.

Con el concepto de similitud a la mano se puede observar que esta no es una propiedad suficiente para que dos polígonos sean *flip*-equivalentes, pero sí es necesaria.

En la Figura 2.9 se muestran dos polígonos similares puesto que sus aristas esenciales cumplen con los postulados de similitud, pero no son *flip*-equivalentes. Al querer convertir el polígono inicial en el polígono objetivo, el realizar cualquiera de los *flips* marcados en rojo para el polígono inicial generaría colisiones en el primal, esto es, el primal dejaría de ser un polígono simple. Nótese que se tiene un conjunto de *flips* que dependen entre si de manera cíclica, por el momento se ha mantenido que un *flip* solo puede modificar un vértice a la vez, por lo que ninguno de esos *flips* se pueden aplicar, esto implica que los polígonos no son *flip*-equivalentes. Por otro lado, no es difícil ver que existen vértices donde se pueden realizar *flips*, dado que todos son ajenos al ciclo, un *flip* sobre estos solo alejará al polígono inicial del polígono objetivo.

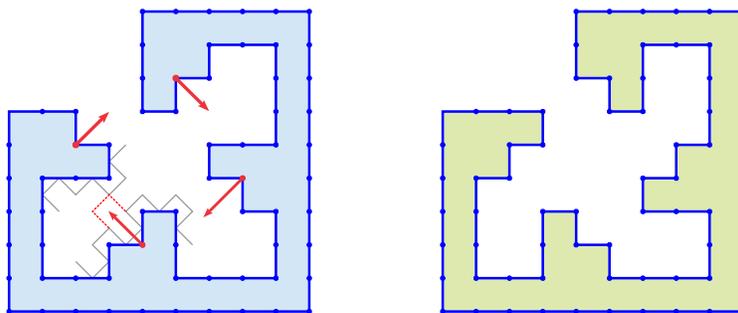


Figura 2.9: Pareja de polígonos que son similares pero no son *flip*-equivalentes.

El estudiar las estructuras de los polígonos para llegar a la solución del problema parece presentar un mayor reto de lo que inicialmente se podría pensar, en especial considerando la clara diferencia entre polígonos duales que parecen tener formas ajenas pero resultan ser *flip*-equivalentes. Un claro ejemplo de esto son los polígonos en la Figura 3.8c presentados en el siguiente capítulo, los cuales son *flip*-equivalentes por construcción.

Por estas razones se estudiará el problema utilizando la definición de *flip*-equivalencia, esto es, se buscará la construcción de la secuencia de *flips* que transforme el polígono inicial en el polígono objetivo. La similitud es de gran importancia para calcular esta secuencia ya que nos garantiza una correspondencia entre aristas esenciales y reduce considerablemente el número de polígonos potencialmente *flip*-equivalentes.

2.2.1. Trayectorias de vértices

A continuación, estudiaremos la trayectoria que tomarían los vértices al transformar del polígono inicial en el polígono objetivo. Para esto, primero se busca etiquetar a cada uno de los vértices de ambos polígonos de tal manera que esto nos genere una asociación entre sus posiciones iniciales y sus posiciones finales. Esta asociación es importante pues nos permitirá obtener la trayectoria que tomará un vértice para ir de su posición inicial a la posición final. Primero se observa el comportamiento de los vértices al aplicarles un único *flip*.

Sea v un vértice cualquiera de un polígono dual. A consecuencia de la prueba del Lema 1 mostrada en el capítulo siguiente, es claro que el número de aristas esenciales a las que pertenece v modifica los posibles puntos a los que éste se puede mover por medio de un *flip*. Puesto que v puede ser parte de a lo más dos aristas esenciales al mismo tiempo, tenemos tres casos (ver Figura 2.10):

- a) Si v se encuentra en los extremos de dos aristas esenciales de tipos distintos, entonces v solo se puede alejar de ambas aristas en una dirección.
- b) Si v pertenece a una escalera, entonces v se puede mover sobre una sola recta diagonal.
- c) Si v forma parte de una arista esencial t , entonces v solo puede alejarse diagonalmente de t en dos direcciones distintas.

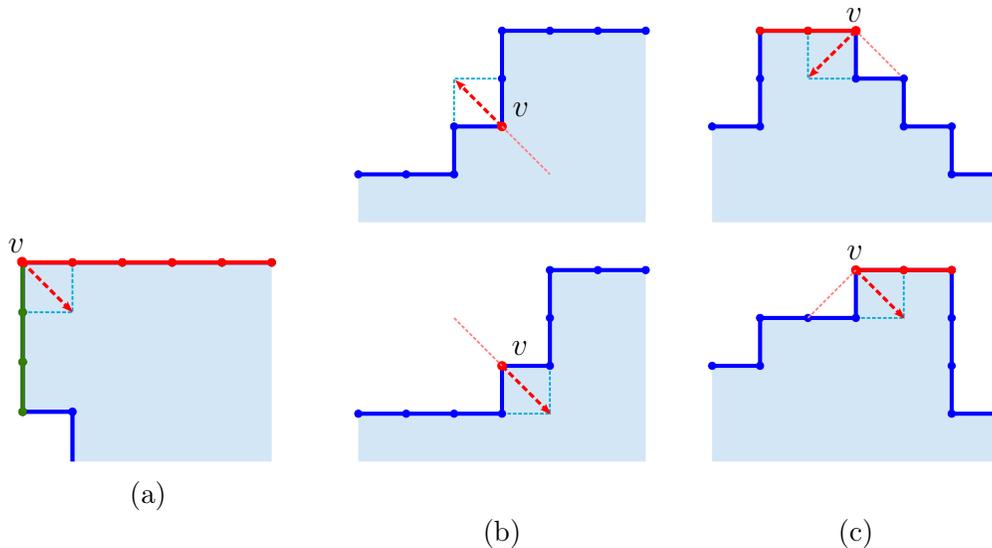


Figura 2.10: Los posibles *flips* (marcados en rojo) que se pueden aplicar sobre un vértice v dependiendo de su posición en el polígono: (a) v se encuentra en dos aristas esenciales; (b) v se encuentra en una escalera, un *flip* traslada a v sobre una misma diagonal; (c) v se encuentra en una arista esencial, un *flip* puede mover a v a lo largo de alguna de las dos diagonales marcadas.

En el caso c) se puede ver que la escalera a la que formará parte el vértice depende de la dirección del *flip* que se tome, por lo que se volvería un vértice del caso b).

El caso a) es el único en el que solo existe un *flip* que se puede realizar, este *flip* al aplicarlo a un vértice v hace que v se incorpore a una escalera delimitada por las aristas esenciales en las que incidía v , nótese que v sólo podrá ser parte de esta escalera puesto que solo puede moverse sobre una diagonal. Esta propiedad nos facilita encontrar a estos vértices dentro del polígono de la siguiente manera: Teniendo a P^* como un polígono dual, sean t y t' dos aristas esenciales consecutivas en P^* de donde una es una arista horizontal y la otra vertical. Sea r el punto de

intersección entre los rieles a los que pertenecen t y t' . Sea l una recta diagonal que contiene a r y que además interseca a la escalera $ST(t, t')$ en un vértice s , a s le llamamos un *vértice extremal*.

El hecho de que polígonos similares P^* y Q^* tienen sus aristas esenciales en correspondencia uno a uno, implica una correspondencia entre los vértices extremales que se encuentran entre parejas aristas esenciales correspondientes, véase la Figura 2.11. Con esto podemos generar una correspondencia uno a uno entre todos los vértices de ambos polígonos de la siguiente manera: siendo $s_p \in P^*$ y $s_q \in Q^*$ dos vértices extremales correspondientes, podemos definir la función $C : P^* \rightarrow Q^*$ que asocia vértices de P^* a vértices de Q^* empezando por $C(s_p) = s_q$ y para el resto de los vértices simplemente se sigue el orden de ambos polígonos.

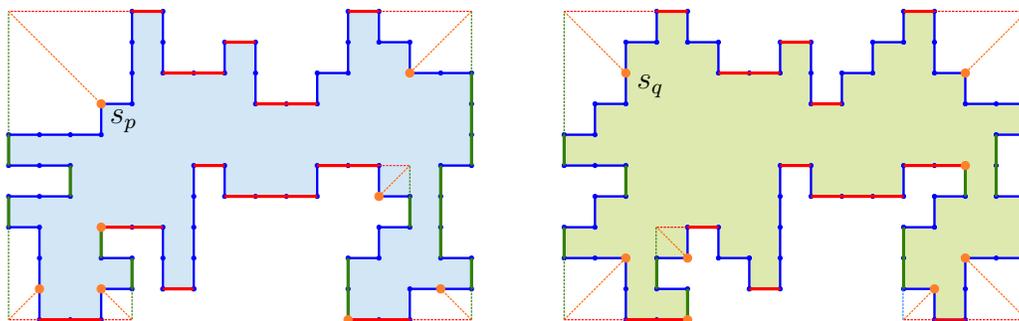
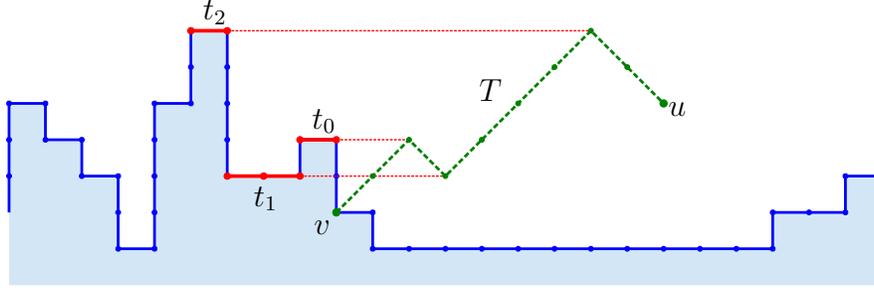


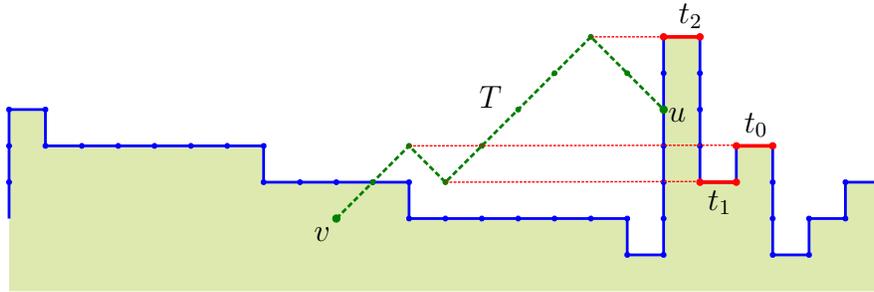
Figura 2.11: Dos polígonos similares con sus vértices extremales resaltados en anaranjado, con s_p y s_q siendo extremales correspondientes. Es de notar que algunos de ellos ya forman parte de dos aristas esenciales consecutivas.

Una vez que se tiene esta correspondencia C , cada vértice pasará por una sucesión de puntos en el plano al momento en el que transformamos el polígono P^* en Q^* . En la Figura 2.12 se puede observar la trayectoria que se forma desde un vértice resaltado $v \in P^*$ hasta su correspondiente $u \in Q^*$. Debido a la naturaleza del *flip*, la trayectoria se encuentra formada por segmentos diagonales que van cambiando de dirección cuando los vértices se incorporan a las aristas esenciales horizontales marcadas en rojo.

Sean P^* y Q^* dos polígonos *flip*-equivalentes. Sea $C(u_i) = v_i$ con $u_i \in P^*$ y $v_i \in Q^*$ la correspondencia entre los vértices de ambos polígonos. La trayectoria que tomará u_i para llegar a v_i por medio de *flips* es una sucesión de puntos $T = \langle p_0, p_1, \dots, p_l \rangle$ donde cada p_i está a un *flip* de distancia de p_{i+1} y tal que $v_i = p_0$ y $u_i = p_l$. A T se le llama la *trayectoria de vértices* dada por u_i y v_i .



(a)



(b)

Figura 2.12: Trayectoria de vértices T generada a partir de un vértice v y su correspondiente u . La trayectoria cambia de dirección cuando los vértices tocan en orden las aristas esenciales horizontales t_0 , t_1 y t_2 .

El Lema 2 que se demuestra en el capítulo siguiente nos garantiza que las trayectorias provenientes de vértices correspondientes son únicas. Este resultado es de gran utilidad dado que reduce considerablemente la complejidad de calcularlas.

2.2.2. Intervalos del Polígono Dual

Teniendo en cuenta la sección anterior se puede detallar un poco más el comportamiento de las trayectorias de vértices si solo se observa una sección de la frontera del polígono dual. En particular, es de notar que los vértices extremales consecutivos nos permiten partir el polígono en intervalos de segmentos ortogonales. Por las propiedades de vértice extremal es claro que las aristas esenciales que se encuentran en estos intervalos son o todas horizontales o todas verticales. Un ejemplo de esto se puede observar en la Figura 2.13.

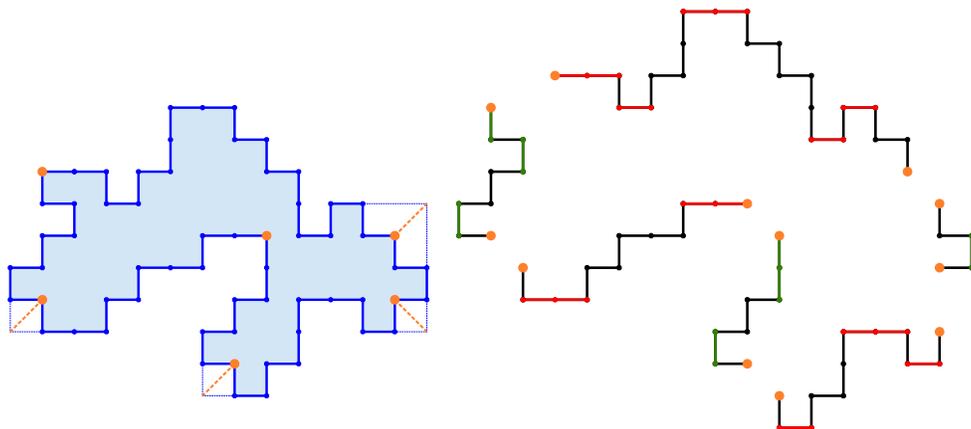


Figura 2.13: División en intervalos ortogonales de un polígono dual por medio de sus vértices extremales marcados en anaranjado. Cada intervalo tendrá solo aristas esenciales horizontales o solo aristas esenciales verticales.

Sea P^* un polígono dual, sean s_0 y s_1 dos vértices extremales consecutivos en P^* . Decimos que un *intervalo* de P^* es una sucesión de vértices delimitados por s_0 y s_1 . Si todas las aristas esenciales que se encuentran en el intervalo son horizontales le llamaremos un intervalo horizontal, de otro modo es un intervalo vertical. A los conjuntos de intervalos horizontales y de intervalos verticales los denotamos por I_H y I_V respectivamente.

Una observación que se debe resaltar es que, como el *flip* no modifica el perímetro ni el orden de los vértices respecto al polígono, entonces para toda pareja de vértices del polígono, el número de vértices que se encuentran entre ellos es invariante bajo *flips*. Por otro lado, esto implica que un vértice está fijado en su intervalo, esto es, no puede cambiar de un intervalo horizontal a otro vertical y viceversa. Nótese además que un vértice extremal será parte de los extremos de dos intervalos de tipos distintos.

Se busca simplificar el comportamiento de la trayectoria de un vértice. El Lema 3 presentado en el capítulo siguiente es útil pues muestra que la trayectoria generada por un par de vértices correspondientes es monótona respecto a uno de los ejes coordenados. Esto es, una trayectoria de vértices es x -monótona (y -monótona) respecto al eje x (eje y) si toda recta vertical (horizontal) interseca a la trayectoria en a lo más un punto. Por observaciones previas se puede notar que la trayectoria generada por vértices extremales es xy -monótona, estos vértices siempre se encuentran en ambos tipos de intervalos.

Por último, si v es un vértice no-extremal que se encuentra en un intervalo horizontal (vertical), por la monotonía de su trayectoria podemos simplemente preguntar si su correspondiente se encuentra a su derecha o a su izquierda (arriba o abajo). Con esto podemos dar un valor numérico a la separación entre dos polígonos respecto al número de *flips* que deben realizarse para transformar uno en otro, esto nos describe el concepto de una *flip*-distancia.

Definición 4. Sean P^* y Q^* dos polígonos similares. Sean $u = (u_x, u_y) \in P^*$ y $C(u) = v = (v_x, v_y) \in Q^*$ vértices correspondientes para ambos polígonos. Definimos la *flip*-distancia entre ambos vértices:

$$\text{dist}(u, v) = \begin{cases} |v_x - u_x| & \text{si } u, v \in I_H \\ |v_y - u_y| & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se denota como f_v a un *flip* que decrementa distancia entre v y su correspondiente, en cambio, si el *flip* incrementa distancia, este se denota por \overleftarrow{f}_v . Además, se extiende la definición de *flip*-distancia ahora para el par de polígonos similares:

$$\text{dist}(P^*, Q^*) = \sum_{u \in P^*, C(u) \in Q^*} \text{dist}(u, C(u))$$

Es importante recordar que, al hablar de polígonos similares, estas definiciones también se aplican sobre polígonos *flip*-equivalentes. Por otro lado, dado que solo se estará trabajando con *flip*-distancia, nos referiremos a este concepto simplemente con el término de *distancia*. Ahora, el aplicar un *flip* sobre un vértice solo puede decrementar o incrementar la distancia entre él y su correspondiente por una unidad. Con esta observación es posible conectar el concepto de distancia entre dos polígonos *flip*-equivalentes y la secuencia de *flips* que convierte un polígono en el otro.

En particular, sean P^* y Q^* dos polígonos duales tales que $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$. Sea S la secuencia de *flips* que convierte a P^* en Q^* tal que $\forall f \in S$ tenemos que f decrementa la distancia entre ambos polígonos, entonces decimos que S es una *secuencia decreciente*. De esto se sigue la siguiente observación:

Observación 1. Sea S una secuencia de *flips* para una pareja de polígonos *flip*-equivalentes, entonces S es una *secuencia decreciente* si y solo $\text{dist}(P^*, Q^*) = |S|$.

Capítulo 3

Resultados Principales

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos a partir de las observaciones y conceptos mencionados sobre los polígonos duales en el capítulo anterior. Primero se comienza mencionando los lemas que son necesarios para justificar los algoritmos obtenidos.

Un primer aspecto a considerar es el efecto que tiene sobre un vértice el ingresar a una arista esencial. Es decir, como el pasar por una arista esencial modifica la dirección que tomará un vértice al aplicar *flips* consecutivos, esto se muestra en el siguiente lema.

Lema 1. *Sea v un vértice de un polígono dual P^* tal que se realizó un flip f_v sobre él y después se aplicó un flip a cada uno de los vecinos de v . Si un segundo flip sobre v comparte la misma dirección que f_v , entonces v se encuentra en una escalera. De otro modo, v forma parte de una arista esencial.*

Demostración. Sea p el punto al que llega v al realizar el primer *flip* f_v . Ahora, para que v pueda moverse de nuevo necesitamos aplicar un *flip* sobre sus vecinos u y w . Sea l_1 la recta definida por los puntos p y u , sea l_2 la recta definida por los puntos p y w respectivamente. Por último, sean p' el punto obtenido al reflejar a v respecto a l_1 y p'' el punto al reflejar a v respecto a l_2 . Sin pérdida de generalidad la Figura 3.1 muestra lo recién descrito. Para el segundo *flip* sobre v se presentan dos casos:

- (a) Después de mover a sus vecinos, se aplicó un *flip* sobre v con la misma dirección del *flip* anterior f_v (ver Figura 3.2a). Con esto, es necesario que tanto u como w se hayan trasladado sobre la misma dirección que v , para que esto último

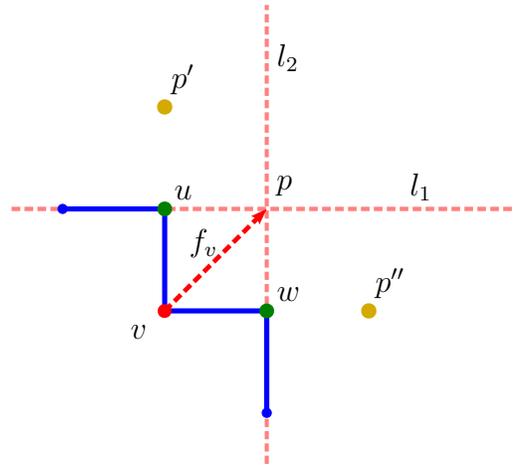


Figura 3.1: El punto p es al que llegará el vértice v al aplicar el *flip* f_v , las rectas l_1 y l_2 están definidas por los vecinos u y w y el punto p

suceda nos implica que el otro vecino de u debe estar en el punto p' y que el otro vecino de w debe encontrarse en el punto p'' . Dadas estas observaciones, es evidente que v es un elemento de una escalera cuando este se encuentra posicionado en p .

- (b) Después de mover a sus vecinos, se aplicó un *flip* sobre v con una dirección distinta al *flip* anterior f_v . Sin perder generalidad suponemos que v llega al punto p'' (ver Figura 3.2b). Se puede notar que para este segundo *flip* se requiere que su vecino w realice previamente el mismo *flip* que se presentó en el caso (a) anterior.

Además, el vecino u se debió haber movido a la posición previa de w , para que esto suceda se debe tener que tanto el vecino de u como el vecino de w tienen que estar por debajo de la recta l_1 . Esto implica que, cuando v se encuentra posicionado en p , la arista delimitada por los vértices v y u es una arista esencial cuyo riel es l_1 .

□

El comportamiento que tienen los vértices con las aristas esenciales ayudan a entender mejor las trayectorias que vértices correspondientes generarán, en particular, se puede garantizar que estas se pueden calcular de manera sencilla. Para esto, es de gran interés mostrar que la trayectoria de vértices es única. Por otra parte, se puede

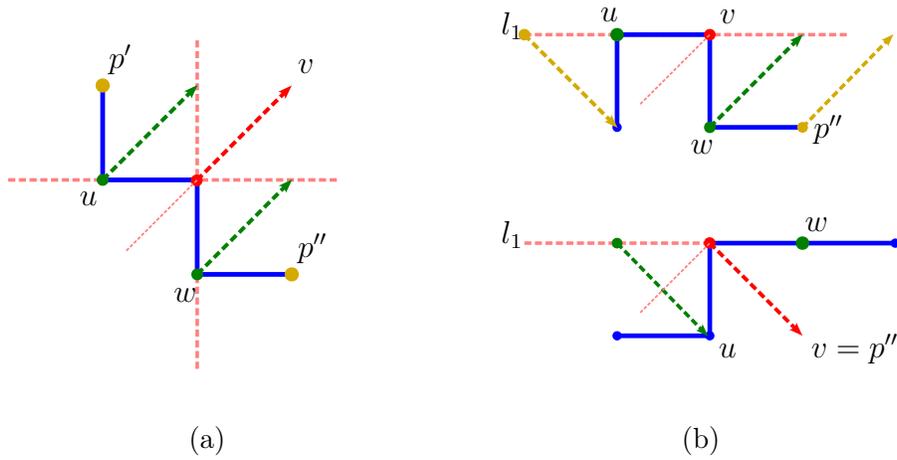


Figura 3.2: Segundo *flip* (rojo) que se aplica a v después de mover a sus vecinos. (a) La dirección de v se mantiene dado que la dirección que tomará cada vecino es la misma. (b) Para que se aplique un segundo *flip* sobre v primero se debe mover su vecino w y luego su vecino u , la dirección de v cambiará al aplicar un segundo *flip* por lo que v caerá por debajo del riel l_1 .

considerar también la propiedad de monotonía respecto a uno de los ejes coordenados. En los dos lemas siguientes se demuestran las propiedades mencionadas.

Lema 2. Sean P^* y Q^* dos polígonos *flip*-equivalentes. Sea $C(u_i) = v_i$ con $u_i \in P^*$ y $v_i \in Q^*$ entonces la trayectoria de vértices T entre u_i y v_i es única.

Demostración. Sean $u \in P^*$ y $v \in Q^*$ dos vértices correspondientes para una pareja de polígonos *flip*-equivalentes. Sean T y T' dos trayectorias de vértices entre u y v tales que $T' \neq T$.

Es fácil notar que el primer punto de T y el primer punto de T' deben ser el mismo, por lo que $p_0 \in T \cap T'$. Se recorre ahora a ambas trayectorias hasta alcanzar un punto p_i tal que para el sucesor en T tenemos que $p_{i+1} \in T$ pero $p_{i+1} \notin T'$. Sea p'_{i+1} el sucesor de p_i en T' .

Sin pérdida de generalidad se puede decir que la dirección cambió respecto al *flip* anterior para T pero no para T' . Esto implica que para T el vértice v se incorporó a una arista esencial, pero v se mantiene en una escalera en la trayectoria T' .

Como ambas trayectorias comparten los primeros i puntos, el aplicar un *flip* sobre v implica que sus vecinos se encuentran en las mismas posiciones respecto a v para ambas trayectorias. Considérese ahora el *flip* $i + 1$ sobre v que se podrá realizar al mover a los vecinos de v , el que v llegue a dos puntos distintos implica que sus vecinos se encontraban en posiciones distintas respecto a v . Esto implica que el vértice v forma parte de una arista esencial y una escalera al mismo tiempo. Esto no puede suceder puesto que son disjuntos el conjunto de vértices que pertenecen a escaleras y el conjunto de vértices que se encuentran en aristas esenciales. De esta contradicción se sigue la unicidad. □

Lema 3. *Sean P^* y Q^* dos polígonos flip-equivalentes. Sea $C(u_i) = v_i$ con $u_i \in P^*$ y $v_i \in Q^*$ entonces la trayectoria de vértices T entre u_i y v_i es x -monótona si los vértices pertenecen a un intervalo horizontal, de otro modo es y -monótona.*

Demostración. Se da una prueba constructiva de la x -monotonía, el proceso es análogo para la monotonía respecto al eje y . Sean $u \in P^*$ y $v \in Q^*$ dos vértices correspondientes para una pareja de polígonos *flip*-equivalentes, donde u y v se encuentran en un intervalo horizontal. Sin pérdida de generalidad se asume que v se encuentra a la derecha de u .

Por el Lema 1, el vértice u se moverá por una diagonal hasta llegar a v o hasta formar parte de una arista esencial. Es evidente que si u llega a v directamente entonces la trayectoria de vértices generada va de izquierda a derecha y es diagonal, esto implica que la trayectoria es x -monótona.

Se considera ahora el hecho de que u llegue a formar parte de una arista esencial horizontal t , esto sucederá cuando u y el riel que contiene a t compartan la componente y . La trayectoria que se genera de u hasta llegar a la arista t es diagonal pues u se mantiene en una escalera. Observe que t es horizontal, por lo que al aplicar un *flip* sobre u mientras este forma parte de t hará que el componente x de u se incremente y hará que u se encuentre en una nueva escalera, se puede repetir el mismo proceso hasta que u llegue a v .

El hecho de que los vértices se encuentran en un intervalo horizontal nos dice que el componente x siempre se estará incrementando con cada *flip* en la trayectoria. Dado lo anterior, la trayectoria de u a v es x -monótona. □

El hecho de que nuestras trayectorias de vértices sean únicas nos dice que un vértice llega a la posición de su vértice correspondiente por medio de una serie de puntos únicos. Por otro lado, esta serie de puntos se puede determinar al observar las aristas esenciales por las que va a pasar el vértice. Por lo anterior, es importante saber si existe la necesidad de que un vértice incremente la distancia a su vértice objetivo correspondiente para que sea posible transformar un polígono inicial en el polígono objetivo. En el siguiente teorema se demuestra que siempre existirá una secuencia decreciente para cualquier pareja de polígonos *flip*-equivalentes.

Teorema 2. *Sean P^* y Q^* dos polígonos duales. $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^* \iff \exists$ una secuencia de flips S que convierte a P^* en Q^* tal que S es una secuencia decreciente.*

Demostración.

\Leftarrow) Si existe S entonces por definición $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$.

\Rightarrow) Sea $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$, por definición existe una secuencia de *flips* S que convierte a P^* en Q^* . Suponiendo que S no es decreciente entonces existe un *flip* en S que incrementa la distancia entre P^* y Q^* , sea \overleftarrow{f}_v el último *flip* de S que cumple esto por medio de algún vértice v .

Por lo anterior, todos los *flips* después de \overleftarrow{f}_v decrementan distancia. Sea f_v el primer *flip* en S sobre v que decrementa distancia después de \overleftarrow{f}_v . Sea p el punto en el que se encontraba v antes de aplicar \overleftarrow{f}_v , sean a y b los dos vértices adyacentes a v , esto se muestra en la Figura 3.3. Es de notar primero que tanto a como b deben mantener su posición entre los *flips* \overleftarrow{f}_v y f_v pues si alguno de los dos vértices se moviera, entonces un *flip* inverso tendría que aplicarse para que f_v se pueda realizar, contradiciendo la elección de \overleftarrow{f}_v como el último *flip* que incrementa distancia. Esto también implica lo siguiente: primero, que v no puede alejarse más de p , y segundo, que los segmentos \overline{ap} y \overline{bp} no pueden ser cubiertos por ninguna otra arista que no sea adyacente a v .

Teniendo esto en cuenta se presentan tres casos:

1. Si ningún vértice pasa por p entonces no existe vértice que nos impida reordenar a f_v en S para que este se aplique inmediatamente después que \overleftarrow{f}_v , haciendo ambos *flips* innecesarios.
2. Supongamos que p se encuentra en el interior del polígono y algún vértice w llegará a p por medio de un *flip* f_w . Nótese que antes de que f_w se

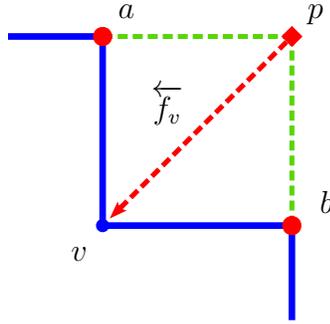


Figura 3.3: La posición nueva de v al aplicarle el *flip* \overleftarrow{f}_v . Es claro que los vértices vecinos a y b no pueden moverse hasta que se le aplique un *flip* f_v que regrese v al punto p .

aplique, el vértice w no debe ser vecino de a o de b ya que el movimiento f_w cubriría a \overline{ap} o a \overline{bp} , respectivamente, impidiendo que se aplique f_v ; véase la Figura 3.4. Esto implica que w debe ser colineal con v y p .

Ahora, el aplicar f_w aún permite que v regrese a p pues solo generaría un contacto sobre p , esto se permite en el polígono dual. Por otro lado, notemos que w no puede moverse más dado que, para que este realice cualquier movimiento, se debe aplicar un *flip* a ambos de sus vecinos, por la prueba del Lema 1 la arista conectada a alguno de los dos vecinos cubrirá el segmento \overline{ap} o \overline{bp} . Dado lo anterior, el punto w debe terminar su trayectoria en p , esto implica que los movimientos \overleftarrow{f}_v y f_v son superfluos puesto que pueden suceder uno inmediatamente después del otro.

3. Suponemos que el punto p se encuentra en el exterior del polígono, nótese que w no puede llegar a p por medio de un *flip* pues implicaría una colisión en el polígono primal. Sean r y q los puntos obtenidos al reflejar respectivamente a los vértices a y b a través de la recta paralela al segmento \overline{ab} que contiene a p . Se puede observar que si un vértice $w \in P^*$ se posiciona en q por medio de un *flip* f_w , entonces w debe de alejarse del punto q mediante otro *flip* antes de realizar f_v pues de lo contrario se generaría una colisión en el polígono primal, esto sucede de igual manera análoga si w se posiciona en r .

Sin pérdida de generalidad se asume el caso en el que w llega al punto q y

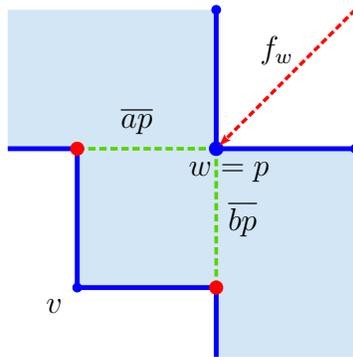


Figura 3.4: En este caso el punto p se encuentra en el interior del polígono y el vértice w llega a p por medio de un *flip* f_w .

se debe realizar otro *flip* sobre w que permita a v regresar a p . Para que el segundo *flip* se realice se deben aplicar *flips* correspondientes a los vecinos de w , esto no es posible dado que el vértice b produciría una colisión en el polígono primal con alguno de los vecinos de w (ver Figura 3.5). Lo anterior implica que ningún vértice del polígono puede posicionarse en q o r por medio de un *flip* que decremente la distancia entre ambos polígonos, por lo que el vértice v puede regresar al punto p por medio de f_v inmediatamente después del *flip* \overleftarrow{f}_v . Se sigue que tanto f_v como \overleftarrow{f}_v son superfluos.

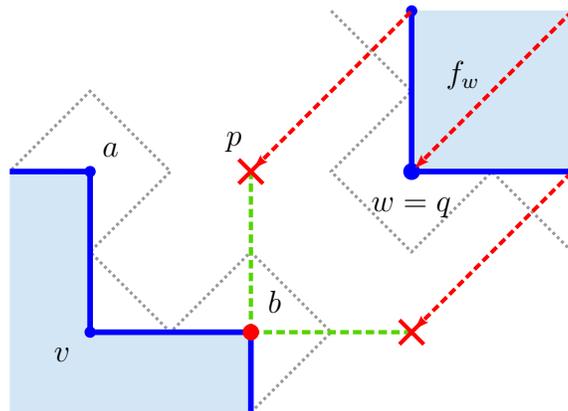


Figura 3.5: En este caso el punto p se encontraba en el exterior del polígono antes de que w llegara a él. El mover de nuevo a w implicaría, por algún vecino de w , una colisión en el polígono primal gracias al vértice b .

En los tres casos podemos eliminar a la pareja \overleftarrow{f}_v y f_v de la secuencia S , generando así una nueva secuencia S' que tiene menos *flips* que incrementen distancia. Renombrando a S' como S podemos continuar con este argumento de manera iterativa hasta llegar a una secuencia de *flips* tal que todos sus *flips* decrementan distancia entre ambos polígonos.

□

El resultado del Teorema 2 es sumamente importante pues confirma que no es necesario deshacer *flips* que ya se realizaron. Así, cambiará nuestro enfoque y limitamos a buscar una secuencia de *flips* decreciente para mostrar la *flip*-equivalencia de dos polígonos duales.

Para esto, nos interesa verificar que al construir una secuencia no se llegará a polígonos que solo tengan vértices que incrementen la distancia por medio de *flips*. En otras palabras, para polígonos duales *flip*-equivalentes siempre existirá un vértice que nos acerque ambos polígonos por medio de un *flip*.

Lema 4. Sean P^* y Q^* dos polígonos duales tal que $P^* \neq Q^*$. Si $P^* \stackrel{f}{\cong} Q^*$ entonces existe un vértice $v \in P^*$ tal que un *flip* sobre v nos da un polígono $P' \stackrel{f}{\cong} Q^*$ donde $\text{dist}(P', Q^*) = \text{dist}(P^*, Q^*) - 1$.

Demostración. Sea P^* algún polígono donde $P^* \neq Q^*$ tal que $P^* \stackrel{f}{\cong} Q^*$. Por el Teorema 2 existe una secuencia S sin *flips* que incrementan distancia y que convierte a P^* en Q^* . Sea f el primer *flip* de S , entonces al aplicar f sobre P^* se produce un P' tal que $\text{dist}(P', Q^*) = \text{dist}(P^*, Q^*) - 1$. Por lo tanto, el vértice sobre el que opera f es v .

□

Antes de continuar, recordemos que es importante generar una correspondencia entre aristas esenciales del polígono inicial con las aristas esenciales del polígono objetivo, si es que esta correspondencia existe. Esto es necesario para poder calcular la similitud entre dos polígonos de manera eficiente. La siguiente observación da un buen punto de referencia para encontrar esta correspondencia:

Observación 2. Si $v \in P^*$ es el vértice más a la izquierda que toca el lado inferior del rectángulo contenedor de P^* , entonces v se encuentra en la arista esencial horizontal más a la izquierda a esa altura.

En las siguientes secciones se mostrarán los algoritmos necesarios para resolver el problema de la *flip*-equivalencia. Se inicia por medio de un algoritmo para calcular la similitud entre dos polígonos, esto es necesario para poder garantizar que la pareja de polígonos es *flip*-equivalente ya que es indispensable generar una correspondencia entre los vértices del polígono inicial y los vértices del polígono objetivo si se quiere calcular la secuencia de *flips* que transforme uno en otro. Para que la descripción sea sencilla se asume que los polígonos se encuentran en el espacio dual, esto como veremos no afecta nuestras soluciones ya que se puede transformar trivialmente un polígono entre el espacio primal y dual en tiempo $O(n)$.

3.1. Algoritmo para calcular similitud

Sean P^* y Q^* dos polígonos duales. Como primer paso se verifica que ambos polígonos comparten el mismo perímetro, de no ser este el caso podemos descartar su similitud.

Después, se recorre cada polígono para obtener los vértices más a la izquierda que se encuentran en el lado inferior de sus respectivos rectángulos contenedores. Sean $t_p \in P^*$ y $t_q \in Q^*$ los vértices obtenidos del proceso anterior.

Recordando la Observación 2 se ve que t_p y t_q serán los vértices izquierdos de aristas esenciales para sus respectivos polígonos. Por otra parte, como en ambos casos son las aristas esenciales más a la izquierda de un supuesto riel correspondiente, podemos afirmar que ambas son aristas esenciales correspondientes si P^* y Q^* son similares.

A continuación, se recorren las fronteras de ambos polígonos para calcular sus aristas esenciales. Una arista esencial se puede identificar al considerar las vueltas producidas al recorrer una arista y su arista siguiente. Desglosando esto, sea una arista e que une a los vértices v_{i-1} y v_i , supongamos que el vértice siguiente v_{i+1} está a la izquierda de e . Si los $k - 1$ vértices siguientes a v_i son colineales a los vértices v_i y v_{i+1} pero en el vértice v_{i+k} se produce otra vuelta a la izquierda entonces se afirma que las aristas delimitadas por v_i y v_{i+k} definen una arista esencial (ver Figura 3.6).

Para cada pareja nueva de aristas esenciales identificadas se compara la componente y (componente x) de ambas si estas son aristas horizontales (verticales), si estos coinciden se guardan ambas aristas en una lista y se busca la siguiente arista esencial, de otro modo P^* y Q^* no son similares. Al recorrer ambos polígonos podemos también confirmar si la cantidad de aristas esenciales es la misma puesto que

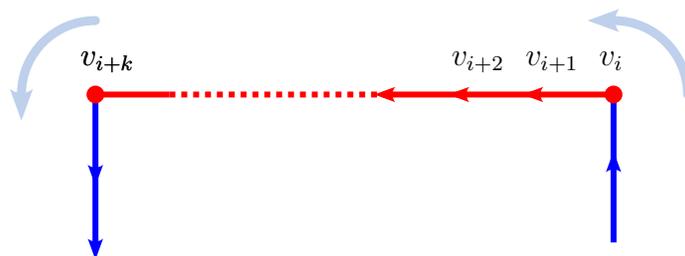


Figura 3.6: La arista esencial, delimitada por vértices v_i y v_{i+k} , se puede detectar al tomar en cuenta los cambios en dirección generados por vértices consecutivos en un polígono dual.

esto ya nos confirma que los polígonos son similares, de no ser este el caso podemos descartar la similitud inmediatamente.

Al terminar obtenemos la lista de parejas para las aristas esenciales donde cada arista esencial está descrita por los vértices que la delimitan.

3.1.1. Complejidad de similitud

Es claro que el algoritmo descrito sólo nos pide visitar a cada vértice de ambos polígonos un número constante de veces, uno para encontrar los vértices t_p y t_q , y otra para encontrar las aristas esenciales de ambos polígonos, por otro lado, la inserción en la lista L se realiza en tiempo constante puesto que las aristas esenciales se visitan en orden respecto a los polígonos. Si $|P^*| = n$ y $|Q^*| = m$ podemos ver que el algoritmo toma tiempo $O(n + m)$, es claro que si consideramos que $m \in O(n)$ entonces podemos decir que el algoritmo toma tiempo $O(n)$.

3.2. Algoritmo para calcular *flip*-equivalencia

Sean P^* y Q^* dos polígonos duales. En primer lugar se aplica el algoritmo para calcular similitud descrito anteriormente sobre P^* y Q^* para confirmar si estos son similares, de no ser el caso se puede afirmar que los polígonos no son *flip*-equivalentes.

Sea L la lista de parejas de aristas esenciales generadas por el cálculo de la similitud. Para nuestros objetivos debemos generar la correspondencia C entre vértices de ambos polígonos, por lo que requerimos detectar una pareja de vértices extremales correspondientes.

Describiremos el proceso para calcular uno de los vértices extremales. Primero obtenemos de L dos parejas de aristas esenciales consecutivas t_0 y t_1 tal que una sea horizontal y otra vertical, calculamos el punto de intersección r de los rieles en los que viven t_0 y t_1 , por ultimo recorreremos el polígono por la escalera $ST(t_0, t_1)$ hasta visitar un vértice tal que el segmento generado entre este y r sea un segmento diagonal, este será un vértice extremal.

Llamaremos $s_p \in P^*$ y $s_q \in Q^*$ a los vértices extremales obtenidos en el proceso anterior. A partir de ellos podemos generar la correspondencia C la cual representamos como una lista de parejas de vértices correspondientes, esta la construimos al recorrer los polígonos comenzando en s_p y s_q .

Teniendo ya esto, podemos realizar el siguiente proceso para generar a la secuencia de *flips* S :

- (I) Iteramos sobre todos los elementos de C de manera secuencial. Sea un elemento de C la pareja (v, u) donde $v \in P^*$ y $u \in Q^*$. Si sucede que $dist(v, u) = 0$ entonces v ya llegó a su posición final y podemos ignorarlo, en cambio, si $dist(v, u) > 0$ entonces revisamos si podemos realizar un *flip* f_v que decremente distancia entre u y v , esto es, queremos que f_v no genera colisiones. Si f_v se puede realizar entonces hacemos nota de que existió un cambio en este recorrido de C e insertamos a f_v en D . Continuamos con el siguiente elemento de C .
- (II) Al terminar (I) revisamos si $dist(P^*, Q^*) = 0$, evidentemente esto nos implica que terminamos de calcular a S y que $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$. En otro caso, revisamos si se logró realizar al menos un *flip* al iterar C , si no se realizó ninguno entonces no existió un vértice que disminuyera la distancia entre los polígonos y por el Lema 4 podemos afirmar que P^* y Q^* no son *flip*-equivalentes. Si logramos realizar al menos un *flip* entonces repetimos el paso (I) para intentar acercar P^* más a Q^* .

Al terminar lo anterior sabremos si ambos polígonos son *flip*-equivalentes y obtendremos la secuencia S de ser este el caso. Notemos que este algoritmo termina dado que en (I) se disminuye la distancia entre P^* y Q^* , de no ser este el caso podemos confirmar que no son *flip*-equivalentes.

3.2.1. Complejidad de *flip*-equivalencia

Recordemos que la manera de encontrar la *flip*-equivalencia es por medio del cálculo explícito de la secuencia de *flips* S , por lo que es necesario explorar el tamaño

que puede tener una secuencia decreciente. Esto es necesario ya que su afectará la complejidad de cualquier algoritmo que calcule a la secuencia S .

Lema 5. Sean P^* y Q^* polígonos duales flip-equivalentes con n vértices, sea S la secuencia decreciente de flips que convierte a P^* en Q^* , entonces $|S| \in O(n^2)$.

Demostración. Sea S una secuencia decreciente cualquiera, notemos que $|S| = \text{dist}(P^*, Q^*)$. Dado que P^* y Q^* comparten el mismo rectángulo contenedor, la distancia entre dos vértices correspondientes es a lo más un lado del rectángulo, esto es $O(n)$. Como esto es para cada vértice, se sigue que $\text{dist}(P^*, Q^*) = |S| \in O(n^2)$

□

Como ejemplo, en la Figura 3.7 se puede observar un polígono dual P^* de $4n$ vértices, en este caso se puede transformar a P^* en R^* usando $(n-1)^2$ flips, consecuentemente se transforma a R^* en Q^* con el mismo número de flips. De aquí, es claro que S es decreciente pues la distancia decrementa por cada flip realizado, por lo que $|S| = 2(n-1)^2 \in O(n^2)$

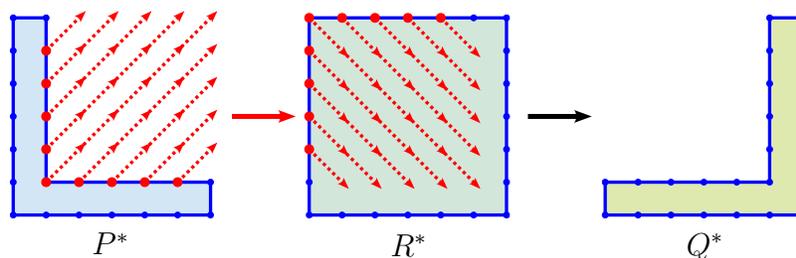


Figura 3.7: Ejemplo de polígonos duales flip-equivalentes P^* y Q^* con $4n$ vértices, donde todas las secuencias de flips decrecientes entre ellos tienen $O(n^2)$ flips.

Además de lo anterior, es necesario considerar el número de flips que podemos realizar en una vuelta alrededor del polígono. Consideremos la Figura 3.8a la cual muestra una sección de polígono donde se puede realizar un flip sobre el vértice v , notemos que para todo vértice entre los vértices v y v_t no podemos realizar ningún otro flip. Por otro lado, la Figura 3.8b muestra una arista esencial t que buscamos mover a la izquierda, el movimiento de t no solo está limitada por los vértices entre t y v , pero a pesar de que estos se puedan mover, t se encuentra limitada por la posición de v .

En ambos casos, se busca limitar los movimientos posibles por medio del polígono mismo. Al unir ambas ideas se construye el polígono izquierdo en la Figura 3.8c

donde se observa que para cada vuelta alrededor de su frontera podremos realizar solo un número constante de *flips* para llegar al polígono derecho. Es evidente que si invertimos el orden del polígono se realizan menos vueltas, en esencia el problema cae en la búsqueda de un *flip* que puede crecer la secuencia, este algoritmo es sencillo pues revisa cada vértice. Por último, esto implica que para el peor de los casos, este algoritmo realiza un número lineal de vueltas alrededor de P^* .

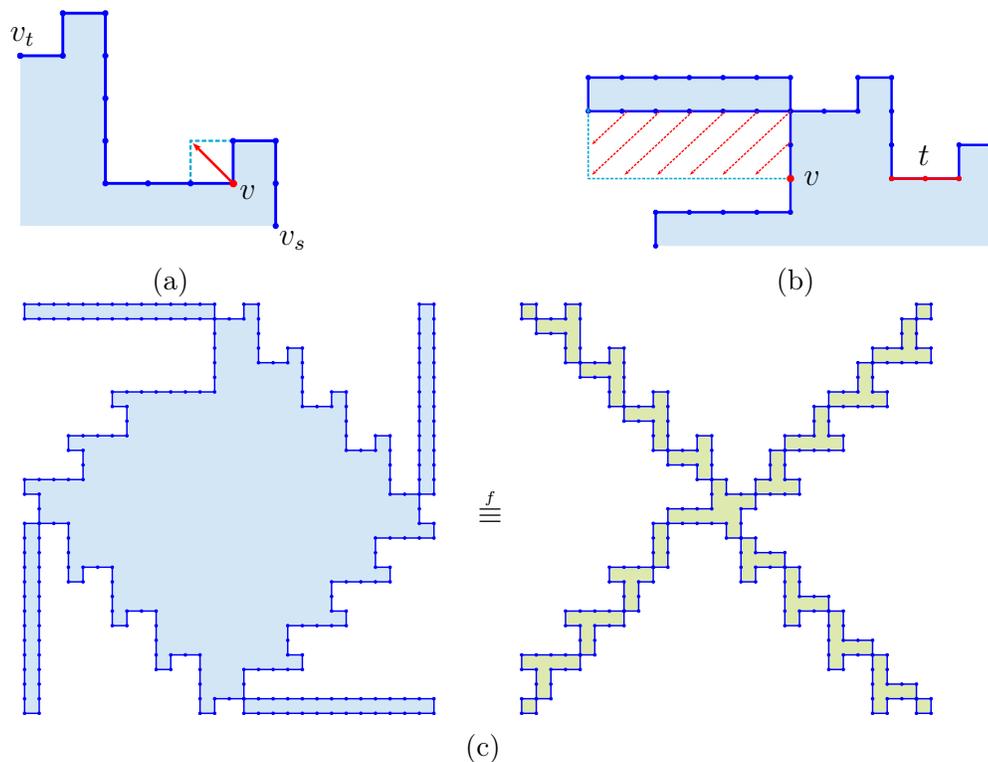


Figura 3.8: (a) El vértice v es el único que se puede realizar en la sección del polígono entre los vértices v_s y v_t . (b) El desplazamiento hacia la izquierda de la arista esencial t está limitado por el vértice v , a pesar de que se realicen los *flips* marcados en rojo, t solo podrá moverse más a la izquierda si se aplica un *flip* sobre v . (c) Pareja de polígonos duales de n vértices que requiere de $O(n)$ vueltas para calcular su secuencia de *flips*.

Por el Lema 5 y las observaciones anteriores se puede acotar la complejidad del algoritmo, donde este tomará tiempo $O(n^3)$ en calcular a la secuencia S dados dos polígonos de n vértices. Es evidente que el algoritmo utiliza un método muy ingenio

para encontrar el siguiente *flip* a realizar, en la siguiente sección se verá la manera en la que se puede evitar el revisar todos los vértices del polígono.

3.3. Consideraciones en implementación

Como ya se mencionó, para los algoritmos que se presentaron en las secciones anteriores se asume que los polígonos de entrada se encuentran en el espacio dual. Por otro lado, se debe considerar la estructura de datos en la que está almacenado el polígono y cómo el *flip* modifica esta estructura.

A lo largo del trabajo se ha dado por hecho que el operador *flip* se puede llevar a cabo en tiempo constante. Esto inicialmente suena muy evidente, pero la condición de que un *flip* no debe generar colisiones requiere un paso de verificación. Si el polígono dual está representada por una lista o arreglo circular tal que cada elemento representa un punto en el plano, entonces confirmar que el polígono resultante de un *flip* sobre un vértice v es un polígono dual requiere confirmar que ningún vértice genera colisiones con la nueva posición de v , esto toma tiempo lineal respecto al tamaño del polígono.

Dado que se está trabajando con polígonos ortogonales donde sus vértices son entradas enteras, un polígono dual P^* se pueden representar por medio de un arreglo bidimensional binario $M[1 \dots n][1 \dots m]$, donde n y m son respectivamente la anchura y la altura del rectángulo contenedor de P^* . Así, M representa la partición del rectángulo contenedor de P^* en cuadrados unitarios, si un cuadrado de M se encuentra completamente contenido en el polígono dual, entonces su valor es 1 en el arreglo, de otro modo tendrá un valor de 0. Un *flip* realiza la negación de un valor en M y para verificar si no hay una colisión basta con consultar las entradas vecinas, en la Figura 3.9 se puede observar un *flip* aplicado a un vértice del polígono y los vecinos que se deben de revisar para verificar que no hay colisiones, esto se extiende de manera análoga para el resto de las direcciones en las que un *flip* puede mover un vértice. Dado que solo se revisan un número constante de entradas de M , el proceso de verificación será constante.

Ahora, usar una lista para almacenar el polígono también es útil para recorrer los vértices del polígono dual y simplifica el cálculo de las aristas esenciales para calcular la similitud entre dos polígonos. Para esto se pueden agrupar ambas estructuras para obtener ambos beneficios, por supuesto, es importante que los cambios generados por un *flip* se deben ver reflejadas tanto la lista como en el arreglo M . Bajo estas

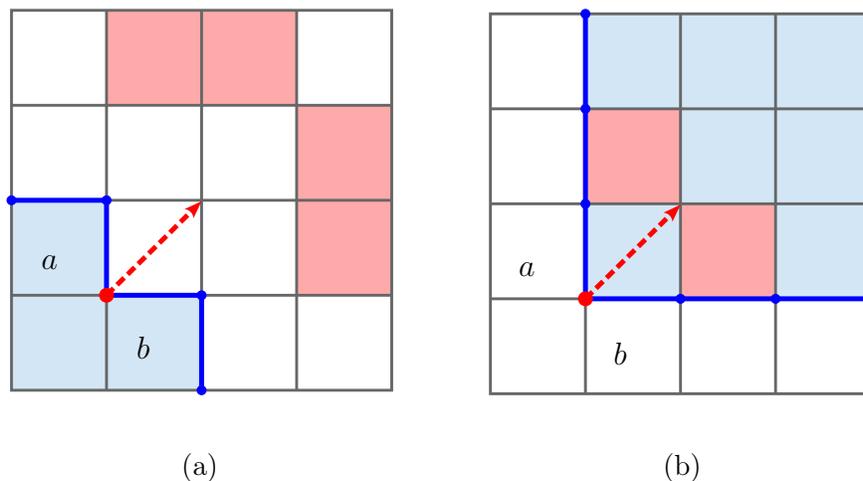


Figura 3.9: (a) Un *flip* que incrementa el área del polígono se puede detectar si las dos casillas a y b están dentro del polígono, las casillas en rojo deben estar fuera del interior del polígono para que el *flip* no genere colisiones en el primal. (b) Un *flip* que decrementa el área del polígono se puede detectar si las dos casillas a y b están fuera del interior del polígono, las casillas en rojo deben estar dentro del polígono para que el *flip* no genere colisiones en el primal.

estructuras, se puede garantizar las complejidades de los algoritmos de las secciones anteriores.

Cabe resaltar que la unión de estas estructuras requiere de espacio $O(n^2)$, esto viene de que el rectángulo contenedor es cuadrático respecto al tamaño del polígono dual.

3.3.1. Optimizando el cálculo de *flip*-equivalencia

Antes de continuar se define lo siguiente: sean dos polígonos duales *flip*-equivalentes P^* y Q^* , donde se tiene una pareja de vértices correspondientes $v \in P^*$ y $u \in Q^*$ tal que $dist(v, u) > 0$. Si no se puede aplicar un *flip* f_v sobre v , entonces decimos que v se encuentra *pendiente* puesto que eventualmente f_v será realizable. Si f_v se puede aplicar en ese momento entonces decimos que v es un vértice *libre*. Notemos que el aplicar f_v hará que v se convierta en un vértice pendiente pues para que v se pueda volver a mover, es necesario aplicar un *flip* sobre cada vecino de v . El siguiente lema muestra la manera en la que un *flip* afecta el estado de los vértices cercanos a un vértice v .

Lema 6. Sean P^* y Q^* dos polígonos duales flip-equivalentes. Si se aplica un flip f_v a un vértice libre $v \in P^*$, entonces a lo más cuatro vértices de P^* pasarán de ser vértices pendientes a ser vértices libres.

Demostración. Sea $v \in P^*$ un vértice libre al cual se le aplicó el flip f_v . Sean a y b los vértices vecinos de v , es evidente que ambos pueden cambiar a ser vértices libres dependiendo de la posición de sus respectivos vecinos distintos a v .

Por otro lado, al observar los posibles *flips* que no son posibles realizar previo a aplicar f_v , se puede notar que las aristas \overline{av} y \overline{bv} no permiten la realización de ciertos *flips*, se trabajará sobre el vecino a . Ahora, se tienen los siguientes dos casos:

1. Si a forma parte de una arista esencial t entonces v llegará a formar parte de t después de aplicar f_v . Esto implica que la arista \overline{av} no permite la aplicación de *flips* sobre los vértices marcados en rojo de la Figura 3.10 a menos de que el flip se aplique f_v . Si f_v incrementa el área de P^* entonces el vértice rojo es el vecino de a , de otro modo se trata del segundo vecino de a . Así, el aplicar f_v hace que a lo más un vértice pueda pasar de ser un vértice pendiente a ser un vértice libre.

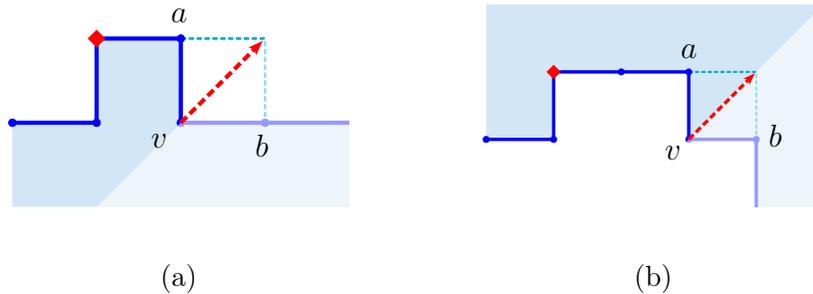


Figura 3.10: Si el vecino a del vértice v se encuentra en una arista esencial. El aplicar el *flip* rojo sobre v puede hacer que el vértice marcado en rojo se pueda mover por medio de otro *flip*.

2. Si a no forma parte de una arista esencial, es claro que aplicar f_v puede permitir que a se vuelva un vértice libre. Si f_v incrementa el área de P^* , entonces la arista \overline{av} no permite la aplicación de un *flip* sobre el vértice rojo de la Figura 3.11a. Por otro lado, si f_v decrementa el área de P^* , entonces el vértice v no permite la aplicación de un *flip* sobre el vértice rojo de la Figura 3.11b. Con esto, el aplicar f_v hace que a lo más dos vértices puedan pasar de ser vértices pendientes a ser vértices libres.

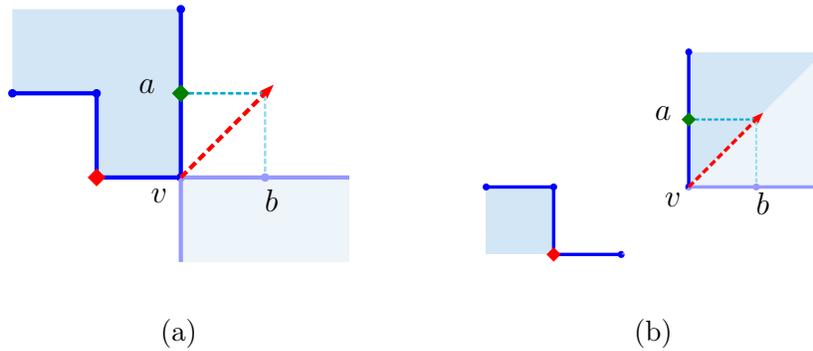


Figura 3.11: Si el vecino a del vértice v se encuentra en una escalera. El aplicar el *flip* rojo sobre v puede hacer que tanto el vértice a y el vértice marcado en rojo se puedan mover por medio de *flips* correspondientes.

Dado que ambos casos son análogos para el vértice b entonces el *flip* f_v puede hacer que a los más cuatro vértices puedan pasar de ser vértices pendientes a ser vértices libres, pues tanto el vértice a como el vértice b pueden caer en el segundo caso.

□

Suponga que se conoce el estado de todos los vértices de un polígono dual P^* , esto es, si son vértices libres o vértices pendientes. La prueba del Lema 6 dice que es suficiente actualizar el estado de solo cuatro vértices de P^* inmediatamente después de aplicar un *flip* para tener el estado actual de todos los vértices de P^* .

En cuanto a encontrar los cuatro vértices cercanos a v , se puede modificar la estructura que almacena el polígono dual, se añade una referencia adicional en cada entrada del arreglo M , la cual apunta a los vértices actualmente pendientes a cruzar esa entrada por medio de un *flip*. De esta manera, acceder y actualizar el estado de los posibles cuatro vértices cercanos a v puede realizarse en tiempo constante. A continuación se presenta el siguiente algoritmo para determinar la *flip*-equivalencia entre dos polígonos duales, el cual hace uso de las observaciones anteriores.

3.4. Algoritmo óptimo para calcular *flip*-equivalencia

Sean P^* y Q^* dos polígonos duales. Al igual que el primer algoritmo para calcular *flip*-equivalencia, calculamos la similitud entre P^* y Q^* para obtener la lista de aristas esenciales correspondientes L , de nuevo, si los polígonos no resultan ser similares, entonces no son *flip*-equivalentes y terminamos el algoritmo.

A partir de la lista L se llevará a cabo el mismo proceso de construcción de la correspondencia entre vértices C que se presentó en el primer algoritmo para calcular *flip*-equivalencia. A partir de lo anterior, se crean dos listas L_f y L_p donde L_f contiene los vértices libres del polígono, y L_p contiene los vértices pendientes del polígono.

Detallando esto más, estas listas se pueden calcular de manera sencilla al iterar por todos los elementos de C . Sea un elemento de C la pareja (v, u) donde $v \in P^*$ y $u \in Q^*$. Si sucede que $dist(v, u) = 0$ entonces v ya llegó a su posición final y se ignora, en cambio, si $dist(v, u) > 0$ entonces revisamos si se puede realizar un *flip* f_v que decremente distancia, si es el caso, se inserta a v en L_f , de otro modo se inserta en L_p .

A partir de las listas generadas, se realiza el siguiente proceso para construir a la secuencia de *flips* S :

- (I) Si la lista L_f se encuentra vacía y la lista L_p no, entonces no podemos realizar más *flips* y los dos polígonos no son iguales, en cuyo caso P^* no es *flip*-equivalente a Q^* . Por otro lado, si ambas listas son vacías entonces afirmamos que $P^* \stackrel{f}{\equiv} Q^*$. Por último, si ambas listas tienen elementos entonces se elimina el primer vértice v de la lista L_f , se realiza el *flip* f_v y se añade a la secuencia S . Si se tiene que $dist(v, u) > 0$ después de realizar f_v entonces insertamos a v en la lista L_p dado que v se ha vuelto un vértice pendiente, de otro modo se descarta a v pues este ya llegó a la misma posición que su correspondiente u .
- (II) Por el Lema 6 el realizar f_v pudo haber modificado el estado de a lo más cuatro vértices cercanos a v , se confirma para cada uno de estos vértices si se pueden mover por medio de un *flip*, de ser este el caso se eliminan de L_p y se insertan a L_f . Repetimos el paso (I) para continuar decrementando la distancia entre P^* y Q^* .

Es claro que el algoritmo termina dado que en (I) siempre se elimina un vértice de L_f , eventualmente esta lista se vuelve vacía y nos permite afirmar o negar la *flip*-equivalencia entre los polígonos.

3.4.1. Complejidad de *flip*-equivalencia óptima

La construcción de las dos listas L_f y L_p se puede hacer en tiempo lineal usando M pues es fácil comprobar si es posible realizar el *flip* de cada vértice. El punto (I) a lo más tarda tiempo constante dado que solo se elimina el primer vértice v de la lista L_f y su *flip* correspondiente se puede realizar inmediatamente pues sabemos de antemano que no generará colisiones.

Para el punto (II) sabemos que la última modificación del arreglo M nos permite saber si el estado de los cuatro vértices cercanos a v se pueden revisar en tiempo constante. Para poderla eliminar a un vértice cercano w de la lista en tiempo constante se puede guardar un apuntador al nodo de la lista L_p que corresponde a w , esto claramente implica que L_p se puede implementar con una lista doblemente ligada. Por supuesto, la inserción de w en L_f tomará tiempo constante pues el orden de inserción no es relevante.

Las observaciones anteriores muestran que el procesar cada *flip* que será agregado a la secuencia S se puede realizar en tiempo constante. Claramente, el hecho de construir a S implica que el algoritmo toma tiempo $O(n^2)$ en terminar si P^* es *flip*-equivalente a Q^* . Nótese que, dada la estrategia usada en calcular la *flip*-equivalencia, este algoritmo es óptimo pues $|S| \in O(n^2)$. Por lo tanto, se ha probado el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sean P y Q dos polígonos 1-ortogonales. Es posible determinar si P es flip-equivalente a Q en tiempo $O(n^2)$.*

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se mostró por medio de un algoritmo que el problema de encontrar si dos polígonos 1-ortogonales son *flip*-equivalentes se puede resolver en tiempo $O(n^2)$ y utilizando $O(n^2)$ espacio adicional, y dado que la secuencia de *flips* tiene tamaño $O(n^2)$, el algoritmo es óptimo. A continuación se presentan algunas variantes y problemas abiertos interesantes que pueden ser usados como motivación para investigación futura.

4.1. Trabajo a futuro

- La estrategia que se usó está basada en calcular la secuencia de *flips* S ¿Se podrá saber si dos polígonos son *flip*-equivalentes sin tener que calcular a S ? Es evidente que la similitud es una propiedad que se debe considerar al resolver este problema.
- En [8] se extiende el operador de *flip* para una triangulación tal que es posible realizar dos o más *flips* de manera simultánea. De manera análoga se puede extender el *flip* para un polígono 1-ortogonal a una variante paralela, donde un conjunto de *flips* es realizable si después de aplicar cada *flip* sobre su respectiva arista, el polígono resultante sigue siendo 1-ortogonal tal como muestra la Figura 4.1. Es claro que existen parejas de polígonos que se pueden transformar entre sí bajo *flips* paralelos que no se podían anteriormente, la Figura 2.9 del Capítulo 2 es un claro ejemplo de esto.

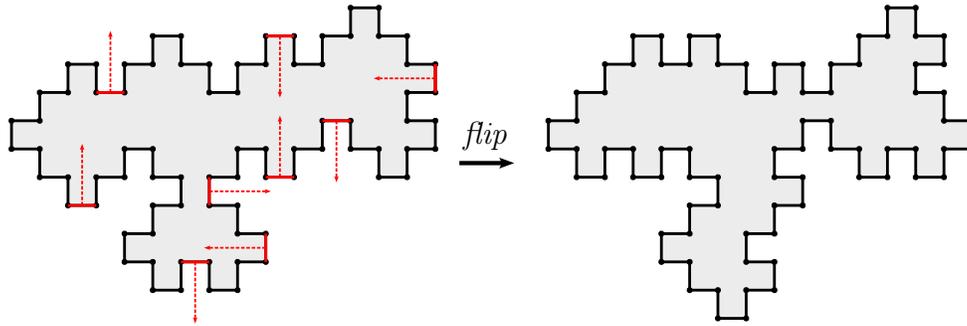


Figura 4.1: Los *flips* marcados en rojo se pueden realizar en paralelo si el polígono resultante es 1-ortogonal.

- Nótese que un *flip* puede incrementar o decrementar el área de un polígono por una constante. Sea un polígono 1-ortogonal P y sea $F(P)$ el conjunto de todos los polígonos 1-ortogonales que son *flip*-equivalentes a P . ¿Existe un algoritmo que lleve P a un polígono $Q \in F(P)$ por medio de *flips* tal que el área de Q sea la máxima respecto al resto de los polígonos en $F(P)$? Nótese que existen polígonos *flip*-equivalentes cuyos posibles *flips* solo decrementan su área, pero que no necesariamente tienen área máxima, un ejemplo sencillo se muestra en la Figura 4.2. Esto implica que una estrategia glotona no garantiza un polígono de área máxima.

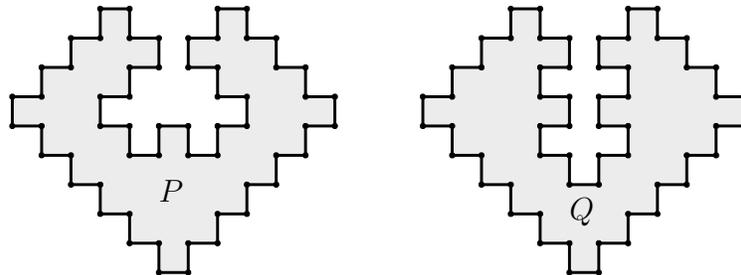


Figura 4.2: Los únicos *flips* que se pueden realizar en los polígonos *flip*-equivalentes P y Q decrementan sus áreas, a pesar de esto, solo el polígono Q tiene área máxima.

- Un polígono 1-ortogonal con hoyos es una extensión que agrega a la definición una o más fronteras internas que delimitan regiones 1-ortogonales que no forman parte del interior del polígono. Para esta variante se debe tener cuidado especial sobre la posición de los hoyos y sobre la transformación a un espacio dual. Como propuesta inicial de transformación dual se puede repetir para cada hoyo el proceso que se aplica a la frontera externa del polígono, donde el

interior de cada hoyo se trata como un polígono 1-ortogonal común. Es claro que esta transformación trae nuevos detalles que deben ser atendidos pues los hoyos en espacio dual pueden no tener coordenadas enteras a diferencia de la frontera externa del polígono. A pesar de esto, un *flip* modifica la frontera de estos hoyo de la misma manera que modifica la frontera externa del polígono. Es interesante el estudio del problema de *flip*-equivalencia aplicado a esta nueva familia de polígonos. Algo que se puede decir de este problema es que, si se tienen dos polígonos P y Q donde las fronteras de P tienen una correspondencia uno a uno con las fronteras de Q , tal que los polígonos 1-ortogonales descritos por cada pareja de fronteras correspondientes son *flip*-equivalentes, entonces P y Q no necesariamente son *flip*-equivalentes, un ejemplo de esto se puede ver en la Figura 4.3.

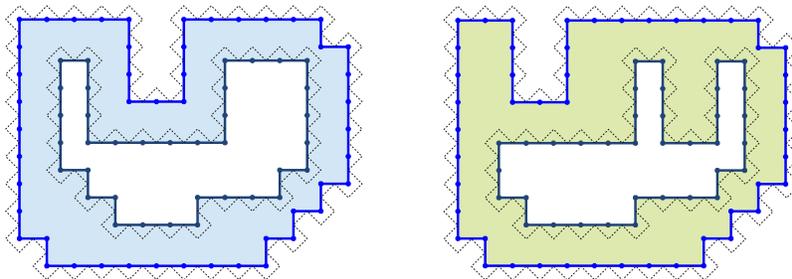


Figura 4.3: Dos polígonos duales con hoyos, el primal se ve delineado. Estos polígonos no son *flip*-equivalentes a pesar de que sus fronteras exteriores y sus hoyos correspondientes sí lo son.

- Retomando el problema de galerías de arte, es claro que un *flip* puede incrementar o disminuir el número de guardias necesarios para vigilar un polígono 1-ortogonal, de aquí es interesante ver cómo se comporta el *flip* respecto a la solución de este problema. Por ejemplo, sea un conjunto mínimo de guardias que vigilan el interior de un polígono 1-ortogonal P , suponiendo que P es alterado por medio de un *flip* para obtener otro polígono 1-ortogonal P' ¿Se podrá calcular de manera eficiente un conjunto mínimo de guardias que vigile a P' ?
- Otro problema interesante relacionado con galerías de arte es el siguiente: Sea un polígono 1-ortogonal P cuyo interior está siendo vigilado por un conjunto G de n guardias, si se realiza un *flip* sobre alguna arista de P tal que nos da un nuevo polígono P' entonces ¿El número de guardias suficientes para vigilar a P' se incrementará por un valor constante? Es claro que un *flip* que incremente el área del polígono genera una nueva región rectangular r en su interior, por

lo que añadir a G un guardia posicionado en r dejaría a P' completamente vigilado. En cambio, un *flip* que decreta el área del polígono elimina de su interior una región rectangular r por lo que se pueden presentar dos casos: que r no permita que un guardia g vigile puntos del polígono, esto se puede apreciar en la Figura 4.4a; o bien que dentro de r se encuentre un guardia $g \in G$ que debe ser eliminado como se muestra en la Figura 4.4b. En ambos casos se puede generar un número no constante de regiones no vigiladas, es importante notar que las regiones de la Figura 4.4 pueden ser vigiladas al agregar uno o dos guardias nuevos, se requiere de un estudio más profundo para confirmar que con un número constante de guardias es suficiente cubrir ambos casos.

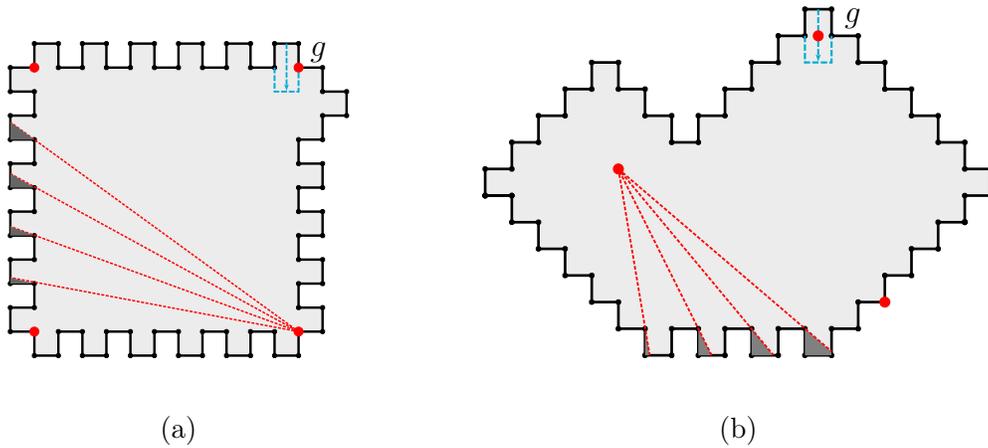


Figura 4.4: (a) El *flip* azul no permite que el guardia g vigile las cuatro regiones sombreadas. (b) El *flip* azul deja fuera del polígono al guardia g , por lo que dejaría las cuatro regiones sombreadas sin vigilar.

Bibliografía

- [1] T. C. Biedl, M. T. Irfan, J. Iwerks, J. Kim, and J. S. B. Mitchell. The art gallery theorem for polyominoes. *Discrete & Computational Geometry*, 48:711–720, 2012.
- [2] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete & Computational Geometry*, 6:485–524, 1991.
- [3] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(1):39–41, 1975.
- [4] J. De Loera, J. Rambau, and F. Santos. *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [5] J. Díaz-Báñez, P. Horn, M. Lopez, N. Marín, A. Ramírez-Vigueras, O. Solé-Pi, A. Stevens, and J. Urrutia. Ortho-unit polygons can be guarded with at most $\lfloor \frac{n-4}{8} \rfloor$ guards. *arXiv preprint arXiv:2208.12864*, 2022.
- [6] S. Fisk. A short proof of Chvátal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3):374, 1978.
- [7] S. Fortune. *Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations*. Handbook of Discrete and Computational Geometry. CRC Press, Inc., USA, 1997.
- [8] J. Galtier, F. Hurtado, M. Noy, S. Pérennes, and J. Urrutia. Simultaneous edge flipping in triangulations. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 13(02):113–133, 2003.
- [9] M. R. Garey, D. S. Johnson, F. P. Preparata, and R. E. Tarjan. Triangulating a simple polygon. *Information Processing Letters*, 7(4):175–179, 1978.

- [10] F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete & Computational Geometry*, 22:333–346, 1999.
- [11] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):194–206, 1983.
- [12] D. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM Journal on Computing*, 12(1):28–35, 1983.
- [13] C. L. Lawson. Transforming triangulations. *Discrete Mathematics*, 3(4):365–372, 1972.
- [14] J. O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*, volume 57. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [15] F. Preparata and M. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Monographs in Computer Science. Springer New York, 2012.
- [16] T. C. Shermer. Recent results in art galleries (geometry). *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, 1992.
- [17] J. Urrutia. Art gallery and illumination problems. In *Handbook of Computational Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 2000.