



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN
ESTADÍSTICA APLICADA

CONDICIONES DE FINITUD EN RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
RODRIGO DOMÍNGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTA DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DRA HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, IMATE-CU

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, AGOSTO 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Biblioteca Central

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Dios me regaló una hermosa familia que me vio crecer y convertirme en el adulto que soy, quiero que sepan que hay una parte de ustedes en cada rincón de mi alma. Este trabajo va dedicado con mucho cariño a mis papás, María y Bladimir, gracias por todo el amor que me dan, por estar conmigo en todo momento, porque sé que cuento con ustedes para lo que se me cruce en la vida, siempre les voy a agradecer la oportunidad que me dieron para estudiar en la Ciudad de México y conocer la gloriosa UNAM, agradezco haber tenido su confianza, razón por la cual me hizo madurar y en cierta manera atesorar mis estudios universitarios. Culmino mi travesía como estudiante con este trabajo y va con todo mi cariño para ustedes, ¡Los amo papás!

A mi hermanita Jimena y a Mundin (bienvenido a la familia), siempre es bueno tener un (ahora dos) cómplice y una compañerita de travesuras, aventuras y regaños.

La cantidad de gente que recorre las calles de mi corazón con sus agradables momentos, las cuales pasaron a ser grandes amistades no caben en una hoja, pero tengan la certeza que agradezco al destino por ponerlos en mi camino, a todos ustedes les dedico este trabajo. Intentaré escribirlos por orden de aparición y si alguno se me escapa, sepan que fue por las debilidades de mi memoria:

En mi adolescencia aparecieron Huguito, Sammy, Leo, Bachita y San, Francisco, Ricky, Don Luis, siempre presumiré nuestra amistad por tantos años juntos.

Mis preciosos amigos de la universidad y ahora hermanos, la peor generación de medida, pero grande matemáticos locos, Franky, Serch, Alex-Fü, Pablin, mi niño Erick y Sebas, gracias por tan gratos momentos.

En el posgrado, formé parte de un excelente equipo de estudio, de convivencia, de

consejos (el Dream Team) y que ahora son entrañables amigos Oscar (Oga) y Artur (veder), esos dulces del DIF potenciaron nuestra mente. No puedo olvidar también los dulces momentos de la maestría con Rulito, Ferni y Lore.

Mi mentor, compañero de chamba y amigazo, gracias por la fuerza dada para afrontar esas batallas mi estimadísimo Charly.

Profe Alejandro, es curioso a donde me llevó el artículo sobre clases prenaturales que me dio para la tesis de licenciatura, pues sin pedirlo me enamoré de las clases naturales y le dediqué mi doctorado (y los últimos 7 años de mi vida) a estudiarlas. Muchas gracias por enseñarme álgebra moderna, gracias por darme un espacio en su cubículo y por su amistad.

Una de mis pasiones es la docencia, quienes me llevaron a descubrir ese gusto fueron mis profesores de geometría moderna Silvestre Cárdenas y Jorge Alonso Santos. Jamás olvidaré esa oportunidad que me dieron.

Gracias a mis profesores, ayudantes y alumnos, no sería nada sin sus enseñanzas y aportaciones, en especial agradezco a mi cuate César, por enamorarme de los misterios de la Teoría de la Medida.

A mi tutor el Dr. Hugo Alberto Rincón, me siento un matemático de la escuela pitagórica al dejarme pertenecer a su escuela y poder estudiar toda el álgebra mágica de la Teoría de módulos que pude aprender en esta etapa, hacen de mí un fiel seguidor muchas gracias por todas las reuniones que tuvimos en el cubículo (o laboratorio de un inventor), comidas, consejos, libros, ¡Muchas gracias profe!

La vida da muchas vueltas y en el momento en que escribo estas líneas, puedo dedicar esta tesis a las personas que me dieron la oportunidad de formar parte de un excelente equipo de trabajo a Víctor Silva, Jonathan Romero, Emmanuel Segura y Carlo Erasto, muchas gracias por los conocimientos compartidos.

Por último, quiero agradecer a mi segunda familia, la aventura que hemos tenido ha sido la experiencia más grata, gracias por dejarme ser parte de ustedes. Tú, mi preciosa y adorable Kimberly Fátima, muchas gracias por invitarme a ese concierto, gracias por recorrer conmigo esta parte de mi camino académico y gracias por tener un consejo certero, a veces duro, para mejorar como ser humano. A ti y sólo a ti te

dedico el capítulo 4 de este trabajo.

Resumen

El objetivo de este trabajo es aplicar diversas herramientas reticulares a colecciones de clases de módulos para obtener resultados sobre módulos, sobre la estructura interna del anillo asociado y algunas caracterizaciones de retículas de clases de módulos con respecto al anillo.

A lo largo de este trabajo, un anillo se entenderá como un anillo asociativo con 1 que denotaremos por R .

Las principales retículas de clases de módulos con las que trabajaremos son la retícula de clases naturales, la retícula de clases conaturales, la retícula de clases de torsión hereditarias y la retícula de clases libres de torsión, las cuales se definen y exponen sus propiedades más relevantes en el capítulo 1.

En el capítulo 2 se tratan resultados de finitud en las retículas antes mencionadas, veremos algunas relaciones y consecuencias con módulos y el anillo.

En el capítulo 3 relacionamos algunas retículas de clases de módulos. Aunque la palabra relacionar es muy general, cuando se trabaja en estos temas, las técnicas que se han ido desarrollando para obtener propiedades del anillo por medio de sus retículas de clases de módulos, es por medio de contenciones de clases, funciones de generación de clases de módulos o pidiendo alguna condición extra al anillo.

El capítulo 4, en mi opinión, es la parte principal del trabajo, obtenemos un teorema de caracterización del anillo por medio de una descomposición en productos de anillos de matrices usando la técnica de igualdad de retículas de clases de módulos.

Por último, concluimos este trabajo viendo a los prerradicales como operadores entre retículas de clases de módulos.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	IV
1. Algunas retículas de clases de módulos.	1
1.1. La retícula de clases naturales.	1
1.2. La retícula de clases conaturales.	7
1.3. La retícula de clases de Wisbauer.	13
1.4. Teorías de Torsión.	17
1.5. La (gran) retícula $\mathcal{L}_C$	22
2. Módulos y clases de módulos	24
2.1. Módulos de tipo	24
2.2. Atomicidad en $R\text{-Nat}$	26
2.3. Módulos isoneterianos e isoartinianos	31
2.4. Módulos E -isoneterianos	33
2.5. Condiciones de $\mathcal{L}$ -neterianidad.	35
2.6. Condiciones de $\mathcal{L}$ -coneterianidad.	39
2.7. Neterianidad en la retícula $R\text{-Wis}$	41
3. Relaciones entre retículas	43
3.1. Sobre V -anillos semiartinianos izquierdos.	43
3.2. Cogeneración en retículas de clases de módulos	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
4. Retractilidad y retículas	52
4.1. Módulos retráctiles	52
5. Operadores en retículas	62
5.1. Operadores en algunas retículas de clases de módulos	62
Bibliografía	71

Lista de Símbolos

$Sub_R(M)$	La retícula de submódulos del módulo M
$Rad(M)$	El radical de Jacobson de un módulo M
$N \leq M$	N es submódulo de M
$N \leq_e M$	N es un submódulo esencial de M
M/N	El módulo cociente de M sobre N
$E(M)$	Cápsula inyectiva de M
$Zoc(M)$	Zoclo de M
$\hookrightarrow$	Monomorfismo
$\twoheadrightarrow$	Epimorfismo
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto potencia del conjunto X
$N \leq_{\oplus} M$	N es un sumando directo de M
$Hom(M, N)$	Grupo de homomorfismos entre los módulos M y N

Capítulo 1

Algunas retículas de clases de módulos.

A lo largo de este trabajo se estudian diversas retículas de clases de módulos, definidas por medio de propiedades de cerradura, así como posibles relaciones entre las mismas. En cada sección de este capítulo estudiaremos las principales propiedades de las retículas.

1.1. La retícula de clases naturales.

La retícula de clases naturales fue introducida por John Dauns en [14], pero diversas propiedades reticulares aparecen en [16], así que vamos a revisar los resultados que nos interesan de este artículo. Empecemos con la definición de una clase natural.

Definición 1.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de R -módulos. Decimos que $\mathcal{A}$ es una **clase natural** si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas inyectivas.*

Notemos que las condiciones de cerradura que definen a una clase natural, permiten demostrar que esta clase también es cerrada bajo tomar extensiones esenciales y es cerrada bajo tomar extensiones.

Definición 1.1.2. Denotamos por $R\text{-Nat}$ la colección (también se le dice conglomerado) de clases naturales.

Vamos a ver que $R\text{-Nat}$ es cardinable usando conjuntos especiales de ideales izquierdos del anillo.

Definición 1.1.3. Decimos que un conjunto no vacío de ideales izquierdos $\mathfrak{U}$ es un **conjunto natural**, si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $I \in \mathfrak{U}$ e $I \leq J$, entonces $J \in \mathfrak{U}$.
2. Si $I \in \mathfrak{U}$ entonces $(I : a) \in \mathfrak{U}$, para cualquier $a \in R$. Recuerde que $(I : a) = \{r \in R : ra \in I\}$, es el ideal izquierdo trasladado de I mediante a .
3. Si $I \notin \mathfrak{U}$, entonces existe un ideal izquierdo J de R tal que $I < J$ y $(I : a) \notin \mathfrak{U}$, para cualquier $a \in J \setminus I$.

Por otro lado, a una clase natural $\mathcal{A}$ le asociamos el siguiente conjunto de ideales izquierdos del anillo $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(R) = \{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{A}\}$.

De la definición anterior tenemos el siguiente resultado que aparece en [24, Proposition 2.1] y [24, Proposition 2.2].

Proposición 1.1.1. Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto $\mathfrak{U}$ de ideales izquierdos de R :

1. $\mathfrak{U} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(R)$ para alguna clase natural $\mathcal{A}$.
2. $\mathfrak{U}$ es un conjunto natural.

Con los resultados anteriores, obtenemos el siguiente teorema que nos dice que $R\text{-Nat}$ es cardinable y además da una cota para la cardinalidad de $R\text{-Nat}$.

Teorema 1.1.1. La asignación $\Psi : R\text{-Nat} \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))$, definida como

$$\Psi(\mathcal{A}) = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(R), \text{ es inyectiva. Por lo tanto, } |R\text{-Nat}| \leq |\mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))|.$$

Para la demostración de este teorema, se puede consultar [24, Proposition 2.1]. Procedamos a dar la estructura reticular de $R\text{-Nat}$.

Observación 1.1.1. Para una familia de clases naturales, $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, tenemos que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una clase natural.

Definición 1.1.4. Para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$, definimos

$\xi_{nat}(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \in R\text{-Nat}\}$. La clase natural $\xi_{nat}(\mathcal{C})$, es la **clase natural generada** por $\mathcal{C}$, por lo que es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{C}$.

A partir de la definición anterior, es claro que $\mathcal{A}$ es una clase natural si y sólo si $\xi_{nat}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Por lo tanto, para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$ se cumple que $\xi_{nat}(\xi_{nat}(\mathcal{C})) = \xi_{nat}(\mathcal{C})$.

La clase natural generada por una clase de módulos tiene distintas descripciones, a lo largo del trabajo vamos a usar la descripción que mejor nos convenga. La demostración del siguiente lema es consecuencia de las propiedades de cerradura de una clase natural y de la definición de $\xi_{nat}(\mathcal{C})$. Para más detalles ver [16, Proposition 2.5].

Lema 1.1.1. Para una clase de módulos $\mathcal{C}$, tenemos las siguientes descripciones para la clase natural generada por $\mathcal{C}$:

1.

$$\xi_{nat}(\mathcal{C}) = \{M : \text{Existe una familia de módulos } \{N_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C} \text{ tal que}$$

$$M \twoheadrightarrow E\left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right)\}.$$

2.

$$\xi_{nat}(\mathcal{C}) = \{M : \text{Existe una familia de submódulos } \{L_i\}_{i \in I} \text{ tal que}$$

$$\bigoplus_{i \in I} L_i \leq_e M \text{ y } L_i \twoheadrightarrow N_i \in \mathcal{C}, \text{ para toda } i \in I\}.$$

3. $\xi_{nat}(\mathcal{C}) = \{M : \text{Para cualquier submódulo } W \leq M, \text{ existe un submódulo}$
distinto de cero $V \leq W$ *tal que* $V \twoheadrightarrow A$ *para alguna* $A \in \mathcal{C}\}$.

En el caso particular de que tengamos un módulo C , la clase natural generada por la clase $\{C\}$, la denotaremos por $\xi_{nat}(C)$.

Corolario 1.1.1. *Tenemos que $\xi_{nat}(C) = \{M : \text{Para cualquier submódulo no cero } W \leq M, \text{ existe un submódulo no cero } V \leq W \text{ tal que } V \cong N \leq C\}$*

Definición 1.1.5. *Dada una clase de módulos $\mathcal{C}$. Definimos la **clase natural complementaria** de $\mathcal{C}$ como $\xi_{nat}^c(\mathcal{C}) = \{M : \text{Para cualquier submódulo no cero } V \leq M, V \not\rightarrow A \text{ para cualquier } A \in \mathcal{C}\}$.*

El siguiente lema, que se puede consultar en [16, Lemma 2.8], muestra la relación que hay entre la clase natural generada y la clase natural complementaria de una clase de módulos.

Lema 1.1.2. *Para una clase de módulos $\mathcal{C}$ se cumple:*

1. $\xi_{nat}^c(\mathcal{C})$ es una clase natural.
2. $\xi_{nat}^c(\xi_{nat}^c(\mathcal{C})) = \xi_{nat}(\mathcal{C})$
3. $\xi_{nat}(\mathcal{C}) \cap \xi_{nat}^c(\mathcal{C}) = \{(0)\}$.
4. Para cualquier módulo M , existen submódulos $N, L \leq M$ tales que $N \in \xi_{nat}^c(\mathcal{C})$, $L \in \xi_{nat}(\mathcal{C})$ y $N \oplus L \leq_e M$.

Otra observación importante que debemos notar sobre las clases de módulos es que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\xi_{nat}(\mathcal{A}) \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{B})$ y $\xi_{nat}^c(\mathcal{B}) \subseteq \xi_{nat}^c(\mathcal{A})$.

Así, juntando los resultados anteriores obtenemos la propiedad principal de esta sección, que se puede consultar en [16, Proposition 2.8]. La propiedad es que **$R\text{-Nat}$** es una retícula de Boole.

Teorema 1.1.2. *Para cualquier anillo R , $R\text{-Nat}$ es una retícula completa de Boole, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, y los operadores están definidos como sigue:*

1. Para cualquier familia de clases naturales $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es
$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$
2. Para cualquier familia de clases naturales $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es
$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{nat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right).$$

3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.
4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.
5. Cualquier clase natural $\mathcal{A}$, cumple que $\mathcal{A} \wedge \xi_{nat}^c(\mathcal{A}) = \{(0)\}$ y $\mathcal{A} \vee \xi_{nat}^c(\mathcal{A}) = R\text{-Mod}$.
6. Para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in R\text{-Nat}$, tenemos que

$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}).$$

Así, $\langle R\text{-Nat}, \subseteq, \vee, \wedge, \mathbb{1}, \mathbb{0} \rangle$ es la retícula completa de Boole de clases naturales.

Un hecho relevante que cumplen las clases naturales, es que son *principales*, es decir, son generadas por un solo módulo. Conjuntos distintos de módulos pueden generar la misma clase natural, pero nos basta con que sean generadas por un solo módulo para obtener resultados interesantes. La siguiente proposición es útil.

Proposición 1.1.2. Sea $\mathcal{A}$ una clase natural y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{nat}(\{Rx_i\}_{i \in I})$.

Demostración. La demostración se sigue del Lema 1.1.1 □

Lema 1.1.3. Para una familia de módulos $\{M_i\}_{i \in I}$, tenemos que $\xi_{nat}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigvee_{i \in I} \xi_{nat}(M_i) = \xi_{nat}(\{M_i\}_{i \in I})$.

Demostración. Nuevamente usamos el Lema 1.1.1, junto con la definición del supremo de una familia de clases naturales. □

Los dos resultados previos permiten ver que cualquier clase natural es principal.

Teorema 1.1.3. Sea $\mathcal{A}$ una clase natural y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{nat}(\bigoplus_{i \in I} Rx_i)$.

Concluimos esta sección con una propiedad reticular que cumplen la retícula de clases naturales.

Definición 1.1.6. Decimos que una retícula L es un **marco**, si para cualquier subconjunto D de L y para cualquier elemento $a \in L$, tenemos que $(\bigvee_{d \in D} d) \wedge a = \bigvee_{d \in D} (d \wedge a)$.

Lema 1.1.4. La retícula $R\text{-Nat}$ es un marco.

Demostración. Sea $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases naturales y $\mathcal{A}$ otra clase natural. Es claro que $\bigvee_{i \in I} (\mathcal{C}_i \wedge \mathcal{A}) \leq (\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i) \wedge \mathcal{A}$. La otra desigualdad se sigue del hecho de que $\bigvee_{i \in I} (\mathcal{C}_i \wedge \mathcal{A}) = \xi_{nat}(\bigcup_{i \in I} (\mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}))$ y la última clase, por el Teorema 1.1.3, es generada por una familia de cíclicos.

□

Definición 1.1.7. Decimos que una retícula L es **superiormente continua**, si para cualquier subconjunto dirigido D de L y para cualquier elemento $a \in L$, tenemos que $(\bigvee_{d \in D} d) \wedge a = \bigvee_{d \in D} (d \wedge a)$.

Corolario 1.1.2. La retícula $R\text{-Nat}$ es superiormente continua.

Demostración. Es consecuencia del lema anterior.

□

1.2. La retícula de clases conaturales.

La forma en que se introdujeron las clases conaturales fue una cuestión meramente reticular, como veremos más adelante. Con las ideas que se exponen en esta sección, podemos ver a las clases naturales desde un punto de vista distinto al de la sección anterior. Los siguientes resultados aparecen en [4], que es el artículo donde se definen las clases conaturales. Revisemos los principales resultados del artículo.

Definición 1.2.1. *Sea L una (gran) retícula completa. Para un elemento $a \in L$, un **seudocomplemento** de a en L , es un elemento $b \in L$ que cumple que $a \wedge b = 0$ y b es máximo con respecto a esta propiedad, es decir, si $b \leq c$ y $a \wedge c = 0$ entonces $b = c$.*

Para una (gran) retícula L , definimos el **esqueleto de L** como sigue

$$\text{Skel}(L) = \{b \in L : b \text{ es pseudocomplemento de algún } a \in L\}$$

Para nuestros fines, nos interesa conocer los esqueletos de dos grandes retículas.

Definición 1.2.2. *Decimos que una clase de módulos $\mathcal{A}$ es una **clase hereditaria** si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas y submódulos. Denotamos a la colección de clases hereditarias por $R\text{-her}$.*

Proposición 1.2.1. *Para cualquier anillo R , $R\text{-her}$ es una gran retícula completa, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:*

1. Para cualquier familia de clases hereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

2. Para cualquier familia de clases hereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.

4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.

Un elemento de una retícula L puede tener varios pseudocomplementos. Cuando un elemento $a \in L$ tiene pseudocomplemento y es único, lo vamos a denotar por $a^\perp$. La siguiente proposición se puede consultar en [4, Proposition 3].

Proposición 1.2.2. *Sea $A \in R\text{-her}$. Tenemos que $\mathcal{A}^{\perp_{her}} = \{M : \text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ y } f : A \twoheadrightarrow M, \text{ entonces } A = 0\}$ es el único pseudocomplemento de $\mathcal{A}$ en $R\text{-her}$.*

Utilizando la descripción del pseudocomplemento de una clase hereditaria, tenemos la siguiente descripción para el doble pseudocomplemento de una clase hereditaria $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} = \{M : \text{Para cualquier monomorfismo no cero } W \twoheadrightarrow M, \text{ existe un monomorfismo no cero } V \twoheadrightarrow W \text{ con } V \in \mathcal{A}\}$$

El siguiente resultado muestra que el pseudocomplemento de una clase hereditaria es una clase natural.

Proposición 1.2.3. *Cualquier clase hereditaria $\mathcal{A}$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $(\mathcal{A}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} = \xi_{nat}(\mathcal{A})$.
2. $\mathcal{A}^{\perp_{her}} = \xi_{nat}^c(\mathcal{A})$.

Demostración. Es inmediato de la descripción de una clase natural generada por una clase de módulos que vimos en el Lema 1.1.1 y de la definición de una clase natural complementaria que vimos en el Lema 1.1.5, además usamos que $\mathcal{A}$ es una clase hereditaria. □

Corolario 1.2.1. *Una clase natural $\mathcal{A}$ cumple que $\mathcal{A}^{\perp_{her}} = \xi_{nat}^c(\mathcal{A})$*

El siguiente resultado es otra manera de entender a la retícula de clases naturales, la demostración se sigue de la proposición previa.

Teorema 1.2.1. *Tenemos que $Skel(R\text{-her}) = R\text{-Nat}$.*

Motivados por las ideas que se acaban de enunciar, vamos a dualizar los conceptos para obtener la retícula de clases conaturales.

Definición 1.2.3. Decimos que una clase de módulos $\mathcal{A}$ es una **clase cohereditaria**, si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo tomar isomorfismos y cocientes. Denotamos a la colección de clases cohereditarias por $R\text{-coher}$.

La siguiente proposición es inmediata de la definición anterior.

Proposición 1.2.4. Para cualquier anillo R , $R\text{-coher}$ es una gran retícula completa, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:

1. Para cualquier familia de clases cohereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
2. Para cualquier familia de clases cohereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.
4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.

Cualquier clase cohereditaria tiene un único pseudocomplemento. La descripción del pseudocomplemento aparece en la siguiente proposición, cuya demostración se puede consultar en [4, Theorem 18]

Proposición 1.2.5. Sea $A \in R\text{-coher}$. Tenemos que $\mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}} = \{M : \text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ y } f : M \twoheadrightarrow A, \text{ entonces } A = 0\}$ es el único pseudocomplemento de $\mathcal{A}$ en $R\text{-coher}$.

Utilizando la descripción del pseudocomplemento de una clase cohereditaria, tenemos la siguiente descripción para el doble pseudocomplemento de una clase cohereditaria $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}})^{\perp_{\text{coher}}} = \{M : \text{Para cualquier epimorfismo no cero } M \twoheadrightarrow W, \text{ existe un epimorfismo no cero } W \twoheadrightarrow V \text{ con } V \in \mathcal{A}\}$$

Corolario 1.2.2. Para una clase cohereditaria $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}})^{\perp_{\text{coher}}}$.

Demostración. La demostración se sigue de la definición de pseudocomplemento. $\square$

Definición 1.2.4. Definimos $\text{Skel}(R\text{-coher}) = R\text{-Conat}$. A los elementos de $R\text{-Conat}$ se les llama **clases conaturales**.

A diferencia de las clases naturales que están determinadas por propiedades de cerradura, para determinar que una clase de módulos es una clase conatural nos vamos a auxiliar de cierta propiedad, la cual queda determinada al describir el doble pseudocomplemento.

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathcal{A}$ cumple la **condición conatural (CN)** si cuando ocurre que para cualquier epimorfismo distinto de cero $M \twoheadrightarrow N$ existe un epimorfismo distinto de cero $N \twoheadrightarrow L$ tal que $A \twoheadrightarrow L$, para algún $A \in \mathcal{A}$, implica que $M \in \mathcal{A}$.

El siguiente teorema caracteriza a las clases conaturales por medio de la condición (CN), no olvidemos que dichas clases son los pseudocomplementos de las clases cohereditarias.

Teorema 1.2.2. Sea $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{A} \in R\text{-Conat}$.
2. $\mathcal{A}$ satisface la condición (CN).
3. $\mathcal{A} \in R\text{-coher}$ y $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}})^{\perp_{\text{coher}}}$.

Demostración. Ver [4, Theorem 23]. $\square$

Aunque no podamos caracterizar a las clases conaturales por medio de propiedades de cerradura, el siguiente resultado, que está en [4, Theorem 24], nos dice qué propiedades de cerradura tiene una clase conatural.

Proposición 1.2.6. Sea $\mathcal{A}$ una clase conatural, entonces $\mathcal{A}$ es cerrada bajo tomar cocientes y extensiones.

A diferencia de la demostración de que $R\text{-Nat}$ es cardinable, en la cual usamos familias de ideales izquierdos, para ver que $R\text{-Conat}$ es cardinable vamos a usar otra familia de módulos. Para ello, tomamos un módulo M y una clase conatural $\mathcal{A}$, y definimos $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(M) = \{N \leq M : N \in \mathcal{A}\}$.

Lema 1.2.1. *Sea E un cogenerador inyectivo de $R\text{-Mod}$. Para cualquier clase conatural $\mathcal{A}$ se tiene que $((\text{Sub}_{\mathcal{A}}(E))^{\perp_{\text{coher}}})^{\perp_{\text{coher}}} = \mathcal{A}$.*

Demostración. Ver [4, Lemma 7]. □

Teorema 1.2.3. *$R\text{-Conat}$ es cardinable.*

Demostración. Sea E un cogenerador inyectivo de $R\text{-Mod}$, la función $\Psi : R\text{-Conat} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, definida como $\Psi(\mathcal{A}) = \text{Sub}_{\mathcal{A}}(E)$, es inyectiva por el lema anterior. □

Definición 1.2.6. *Sea K un módulo. Decimos que K es un **módulo cocíclico** si contiene un submódulo simple esencial.*

Denotamos por $R\text{-Simp}$ a una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples. Para cada $S \in R\text{-Simp}$, $\{U : S \leq U \leq E(S)\}$ es un conjunto. Ahora, $\bigcup_{S \in R\text{-Simp}} \{U : S \leq U \leq E(S)\}$ es una familia de módulos cocíclicos que contiene una copia de cada módulo cocíclico.

Denotemos por $R\text{-cocic}$ la familia de módulos cocíclicos descrita anteriormente.

Notemos que cada clase conatural está determinada por sus módulos cocíclicos. Si $\mathcal{C}$ es una clase conatural, sea $\mathcal{C}\text{-cocic} = \{U \in R\text{-cocic} : U \in \mathcal{C}\}$.

Teorema 1.2.4. *Si $\mathcal{C}$ es una clase conatural, entonces $\mathcal{C} = \xi_{\text{conat}}(\mathcal{C}\text{-cocic})$.*

Demostración. Es claro que si $\mathcal{C}\text{-cocic} \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\xi_{\text{conat}}(\mathcal{C}\text{-cocic}) \subseteq \mathcal{C}$.

Por otro lado, es un hecho conocido que cualquier módulo distinto de cero, tiene un cociente cocíclico.

En el siguiente diagrama conmutativo observamos que Rx es un módulo cíclico distinto de cero, por lo que tiene un cociente simple S . Así, existe un homomorfismo distinto de cero φ , porque $E(S)$ es inyectivo.

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\varphi} & E(S) \\
\uparrow & & \uparrow \\
Rx & \xrightarrow{\quad} & S
\end{array}$$

Como $\varphi(M)$ es un cociente de M distinto de cero contenido en $E(S)$, tenemos que $\varphi(M)$ es cocíclico.

Sea $M \in \mathcal{C}$. Si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\theta} U$ son epimorfismos distintos de cero y U es un módulo cocíclico, entonces $U \in \mathcal{C}$ y U es isomorfo a un módulo en $\mathcal{C}\text{-cocic}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U \in \mathcal{C}\text{-cocic}$.

Por todo lo anterior, todo $M \in \mathcal{C}$ es tal que cualquiera de sus cocientes tiene un cociente en $\mathcal{C}\text{-cocic}$, por lo tanto $\mathcal{C} \subseteq \xi_{\text{conat}}(\mathcal{C}\text{-cocic})$. $\square$

Una clase conatural está generada por sus módulos cocíclicos. El siguiente teorema es interesante.

Teorema 1.2.5. *La correspondencia $\Psi : R\text{-Conat} \longrightarrow \mathcal{P}(R\text{-cocic})$, donde $\Psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\text{-cocic}$, muestra que $R\text{-Conat}$ es cardinable.*

Procedamos a dar la estructura reticular de $R\text{-Conat}$.

Proposición 1.2.7. *Para una familia de clases conaturales, $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, tenemos que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una clase conatural.*

Demostración. Es claro que la clase $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ cumple la condición (CN), porque cada clase $\mathcal{A}_i$ cumple la condición (CN). $\square$

Definición 1.2.7. *Para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$, definimos*

$\xi_{\text{conat}}(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \in R\text{-Conat}\}$. *La clase conatural $\xi_{\text{nat}}(\mathcal{C})$, es la **clase conatural generada** por $\mathcal{C}$, por lo que es la menor clase conatural que contiene a $\mathcal{C}$.*

Tenemos una descripción para la clase conatural generada por una clase cohereditaria.

Proposición 1.2.8. *Si $\mathcal{A} \in R\text{-coher}$ entonces $(\mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}})^{\perp_{\text{coher}}} = \xi_{\text{conat}}(\mathcal{A})$.*

En el caso de clases conaturales, tenemos que si dos clases cohereditarias cumplen que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\xi_{\text{conat}}(\mathcal{A}) \subseteq \xi_{\text{conat}}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B}^{\perp_{\text{coher}}} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}}$.

Terminamos esta sección con el siguiente teorema, la demostración se encuentra en [4, Theorem 28].

Teorema 1.2.6. *Para cualquier anillo R , $R\text{-Conat}$ es una retícula completa de Boole, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:*

1. Para cualquier familia de clases conaturales $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

2. Para cualquier familia de clases conaturales $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia

$$\text{es } \bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{\text{conat}}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right).$$

3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.
4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.
5. Cualquier clase conatural $\mathcal{A}$, cumple que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}} = \{(0)\}$ y $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}^{\perp_{\text{coher}}} = R\text{-Mod}$.

6. Para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in R\text{-Conat}$, tenemos que

$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}).$$

Así, $\langle R\text{-Conat}, \subseteq, \vee, \wedge, \mathbb{1}, \mathbb{0} \rangle$ es la retícula completa de Boole de clases conaturales.

1.3. La retícula de clases de Wisbauer.

Históricamente las clases de Wisbauer (en honor a Robert Wisbauer), también llamadas clases de pretorsión hereditarias, se definieron como clases de módulos subgeneradas por un módulo M , estas clases tienen la propiedad de que son subcategorías

plenas de $R\text{-Mod}$ y se denotan por $\sigma[M]$. Las propiedades categóricas se pueden consultar en [23, 15.1]. A nosotros, sólo nos interesan las propiedades de cerradura de estas clases.

Definición 1.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathcal{A}$ es una **clase de Wisbauer** si es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, cocientes y sumas directas arbitrarias.*

Definición 1.3.2. *Denotamos por $R\text{-Wis}$ la colección de clases de Wisbauer.*

De la misma manera en que vimos que $R\text{-Nat}$ es cardinable, veremos que $R\text{-Wis}$ es cardinable, usando ciertas familias de ideales izquierdos llamados *filtros*, la siguiente definición aparece en [22, Chapter VI, 4].

Definición 1.3.3. *Decimos que un conjunto no vacío de ideales izquierdos $\mathfrak{U}$ es un **filtro lineal**, si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $I \in \mathfrak{U}$ e $I \leq J$, entonces $J \in \mathfrak{U}$.*
2. *Si $I \in \mathfrak{U}$ entonces $(I : a) \in \mathfrak{U}$, para cualquier $a \in R$.*
3. *Si $I, J \in \mathfrak{U}$ entonces $I \cap J \in \mathfrak{U}$.*

Por otro lado, a una clase de Wisbauer $\mathcal{A}$ le asociamos el siguiente conjunto de ideales izquierdos del anillo, $\mathcal{W}_{\mathcal{A}}(R) = \{I \leq {}_R R : R/I \in \mathcal{A}\}$.

Por la definición anterior, tenemos el siguiente resultado que aparece en [22, Chapter VI, Proposition 4.2].

Proposición 1.3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto $\mathfrak{U}$ de ideales izquierdos de R :*

1. *$\mathfrak{U} = \mathcal{W}_{\mathcal{A}}(R)$ para alguna clase de Wisbauer $\mathcal{A}$.*
2. *$\mathfrak{U}$ es un filtro lineal.*

Con los resultados anteriores, obtenemos el siguiente teorema que nos dice que $R\text{-Wis}$ es cardinable y además da una cota para la cardinalidad de $R\text{-Wis}$.

Teorema 1.3.1. *La asignación $\Psi : R\text{-Wis} \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))$, definida como $\Psi(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{\mathcal{A}}(R)$, es inyectiva. Por lo tanto, $|R\text{-Wis}| \leq |\mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))|$.*

Procedamos a dar la estructura reticular de $R\text{-Wis}$.

Observación 1.3.1. *Para una familia de clases de Wisbauer, $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, tenemos que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una clase de Wisbauer.*

Definición 1.3.4. *Para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$, definimos*

$\xi_{\text{wis}}(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \in R\text{-Wis}\}$. *La clase de Wisbauer $\xi_{\text{wis}}(\mathcal{C})$, es la clase de Wisbauer generada por $\mathcal{C}$, por lo que es la menor clase de Wisbauer que contiene a $\mathcal{C}$.*

A partir de la definición anterior, es claro que $\mathcal{A}$ es una clase de Wisbauer si y sólo si $\xi_{\text{wis}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Por lo tanto, para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$ se cumple que $\xi_{\text{wis}}(\xi_{\text{wis}}(\mathcal{C})) = \xi_{\text{wis}}(\mathcal{C})$.

Tenemos la siguiente descripción para la clase de Wisbauer generada por una clase de módulos.

Teorema 1.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Tenemos que*

$$\xi_{\text{wis}}(\mathcal{A}) = \{M : \text{Existe un monomorfismo } M \hookrightarrow L \text{ y existe un epimorfismo } \bigoplus_{i \in I} A_i \twoheadrightarrow L, \text{ con } \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

En el caso particular que $\mathcal{A} = \{A\}$, Robert Wisbauer denotó $\xi_{\text{wis}}(\mathcal{A}) = \sigma[A]$, nosotros usaremos la notación $\xi_{\text{wis}}(\mathcal{A})$, porque es la notación para generar clases de módulos cerradas bajo ciertas propiedades.

Teorema 1.3.3. *Para cualquier anillo R , $R\text{-Wis}$ es una retícula completa, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:*

1. *Para cualquier familia de clases de Wisbauer $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es*

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

2. Para cualquier familia de clases de Wisbauer $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia

$$\text{es } \bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{\text{wis}}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right).$$

3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.

4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.

Así, $\langle R\text{-Wis}, \subseteq, \vee, \wedge, \mathbb{1}, \mathbb{0} \rangle$ es la retícula completa de clases de Wisbauer.

Las clases de Wisbauer guardan una relación similar con respecto a las clases naturales, éstas también son principales. La siguiente proposición es útil.

Proposición 1.3.2. Sea $\mathcal{A}$ una clase de Wisbauer y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{\text{wis}}(\{Rx_i\}_{i \in I})$.

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 1.3.2. □

Lema 1.3.1. Para una familia de módulos $\{M_i\}_{i \in I}$, tenemos que $\xi_{\text{wis}}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigvee_{i \in I} \xi_{\text{wis}}(M_i) = \xi_{\text{wis}}(\{M_i\}_{i \in I})$.

Demostración. Nuevamente usamos el Lema 1.3.2, junto con la definición del supremo de una familia de clases de Wisbauer. □

Los dos resultados previos permiten ver que cualquier clase de Wisbauer es principal.

Teorema 1.3.4. Sea $\mathcal{A}$ una clase de Wisbauer y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{\text{wis}}\left(\bigoplus_{i \in I} Rx_i\right)$.

1.4. Teorías de Torsión.

Definición 1.4.1. Una *teoría de torsión* de $R\text{-Mod}$ es una pareja ordenada de clases de módulos $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ que cumplen:

1. $\text{Hom}_R(T, F) = 0$, para cualesquiera $T \in \mathcal{T}$ y $F \in \mathcal{F}$.
2. Si $\text{Hom}_R(C, F) = 0$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$, entonces $C \in \mathcal{T}$.
3. Si $\text{Hom}_R(T, D) = 0$ para cualquier $T \in \mathcal{T}$, entonces $D \in \mathcal{F}$.

La clase $\mathcal{T}$ se llama **clase de torsión** y la clase $\mathcal{F}$ se llama **clase libre de torsión**.

Las clases de módulos de una teoría de torsión tienen propiedades de cerradura como lo muestra el siguiente resultado en dos incisos, que aparecen en [22, Chapter VI, Proposition 2.1] y [22, Chapter VI, Proposition 2.2]

Lema 1.4.1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ clases de módulos. Se cumple que:

1. Las siguientes propiedades son equivalentes para la clase $\mathcal{T}$:
 - a) $\mathcal{T}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión.
 - b) $\mathcal{T}$ es una clase cerrada bajo tomar copias isomorfas, cocientes, sumas directas arbitrarias y extensiones.
2. Las siguientes propiedades son equivalentes para la clase $\mathcal{F}$:
 - a) $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión.
 - b) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, productos directos arbitrarios y extensiones.

En este trabajo, nos interesa la colección de clases de torsión que denotamos por $R\text{-TORS}$.

Definición 1.4.2. Dada una clase de módulos $\mathcal{C}$, la *teoría de torsión generada* por $\mathcal{C}$ es la siguiente:

La clase $\mathcal{F} = \{F : \text{Hom}_R(C, F) = 0 \text{ para cualquier } C \in \mathcal{C}\}$.

La clase $\mathcal{T} = \{T : \text{Hom}_R(T, F) = 0 \text{ para cualquier } F \in \mathcal{F}\}$.

En este caso, denotamos por $\xi_{\text{TORS}}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$ y decimos que es la clase de torsión generada por $\mathcal{C}$, porque es la menor clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

Tenemos una descripción para la clase de torsión generada por una clase de módulos.

Proposición 1.4.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos. Tenemos que*

$\xi_{\text{TORS}}(\mathcal{C}) = \{M : \text{Para cualquier epimorfismo distinto de cero } M \twoheadrightarrow N, \text{ existe un monomorfismo } L \hookrightarrow N, \text{ y existe un epimorfismo distinto de cero } T \twoheadrightarrow L \text{ con } T \in \mathcal{C}\}$

Demostración. Ver [22, Chapter VI, Proposition 2.5] □

Proposición 1.4.2. *Para cualquier anillo R , $R\text{-TORS}$ es una gran retícula completa, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:*

1. *Para cualquier familia de clases de torsión $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es*

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

2. *Para cualquier familia de clases de torsión $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es*

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{\text{TORS}}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right).$$

3. *El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.*
4. *El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.*

Definición 1.4.3. *Decimos que una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, es una **teoría de torsión hereditaria**, si $\mathcal{T}$ es una clase cerrada bajo tomar submódulos. Equivalentemente, tenemos que $\mathcal{F}$ es una clase cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.*

*En este caso, diremos que $\mathcal{T}$ es una **clase de torsión hereditaria** y $\mathcal{F}$ es una **clase libre de torsión hereditaria**.*

Observación 1.4.1. *Notemos que si $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión hereditaria entonces $\mathcal{F}$ es una clase natural.*

La colección de clases de torsión hereditarias la vamos a denotar por $R\text{-tors}$, notemos que $R\text{-tors} \subseteq R\text{-TORS}$. Además, $R\text{-tors}$ es cardinable.

Los filtros lineales nos vuelven a ayudar para ver que $R\text{-tors}$ es cardinable, la razón es que las clases de torsión hereditarias son clases de pretorsión hereditarias, cumpliéndose así que $R\text{-tors} \subseteq R\text{-Wis}$.

Definición 1.4.4. *Decimos que un filtro lineal $\mathfrak{U}$ es un **filtro lineal de Gabriel**, si cumple lo siguiente:*

Si $I \leq_R R$ y existe $J \in \mathfrak{U}$ tal que $(J : a) \in \mathfrak{U}$ para todo $a \in J$, entonces $I \in \mathfrak{U}$.

Recordemos que a una clase de módulos $\mathcal{A}$, le asociamos la familia de ideales izquierdos del anillo, $\{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{A}\}$.

Por la definición anterior, tenemos el siguiente resultado que aparece en [22, Chapter VI, Theorem 5.1]

Proposición 1.4.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto $\mathfrak{U}$ de ideales izquierdos de R :*

1. $\mathfrak{U} = \{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{A}\}$ para alguna clase de torsión hereditaria $\mathcal{A}$.
2. $\mathfrak{U}$ es un filtro lineal de Gabriel.

Con los resultados anteriores, obtenemos el siguiente teorema que nos dice que $R\text{-tors}$ es cardinable y además da una cota para la cardinalidad de $R\text{-tors}$.

Teorema 1.4.1. *La asignación $\Psi : R\text{-tors} \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))$, definida como*

$\Psi(\mathcal{A}) = \{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{A}\}$, *es inyectiva. Por lo tanto, $|R\text{-tors}| \leq |\mathcal{P}(\text{Sub}_R(R))|$.*

Definición 1.4.5. *Para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$, definimos*

$\xi_{\text{tors}}(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \in R\text{-tors}\}$. *La clase de torsión hereditaria $\xi_{\text{tors}}(\mathcal{C})$, es la **clase de torsión hereditaria generada** por $\mathcal{C}$, por lo que es la menor clase de torsión hereditaria que contiene a $\mathcal{C}$.*

Para finalizar la discusión de las clases de torsión hereditarias, vamos a revisar un teorema que afirma que $R\text{-tors}$ es un marco. Recordemos que una retícula completa $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un *marco* si para cualquier elemento $a \in L$ y cualquier subconjunto no vacío $U \subseteq L$, tenemos que $a \wedge (\vee U) = \vee \{a \wedge u : u \in U\}$.

Proposición 1.4.4. *Para cualquier anillo R , $R\text{-tors}$ es un marco, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:*

1. *Para cualquier familia de clases de torsión hereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.*
2. *Para cualquier familia de clases de torsión hereditarias $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{tors}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)$.*
3. *El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.*
4. *El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.*

Así, $\langle R\text{-tors}, \subseteq, \vee, \wedge, \mathbb{1}, \mathbb{0} \rangle$ es el marco de las clases de torsión hereditarias. En particular tenemos que $R\text{-tors}$ es una retícula distributiva.

Las clases de torsión hereditaria, al igual que las clases de Wisbauer y las clases naturales cumplen que son principales. La siguiente proposición es útil y aparece en [22, Chapter VI, Proposition 3.6].

Proposición 1.4.5. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de torsión hereditaria y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{tors}(\{Rx_i\}_{i \in I})$.*

Lema 1.4.2. *Para una familia de módulos $\{M_i\}_{i \in I}$, tenemos que*

$$\xi_{tors}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigvee_{i \in I} \xi_{tors}(M_i) = \xi_{tors}(\{M_i\}_{i \in I}).$$

Los dos resultados previos permiten ver que cualquier clase de torsión hereditaria es principal.

Teorema 1.4.2. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de torsión hereditaria y $\{Rx_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \xi_{tors}(\bigoplus_{i \in I} Rx_i)$.*

1.5. La (gran) retícula $\mathcal{L}_C$

A lo largo de este capítulo hemos revisado diversas clases de módulos y retículas de clases de módulos, por el contexto en que se estudiaron recibieron nombres peculiares.

Las principales propiedades de cerradura que estudiamos son:

1. Submódulos ($\leq$).
2. Cocientes ($\twoheadrightarrow$).
3. Sumas directas arbitrarias ($\oplus$).
4. Productos directos arbitrarios ($\prod$).
5. Cápsulas inyectivas (E).
6. Extensiones (ext).

Si $C \subseteq \{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, \prod, E, ext\}$, entonces denotamos la colección de clases de módulos cerradas bajo tomar las propiedades de C como $\mathcal{L}_C$.

Con lo anterior en mente, tenemos estos “nombres” para las colecciones que hemos visto:

$$R\text{-}her = \mathcal{L}_{\leq}$$

$$R\text{-}coher = \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$$

$$R\text{-}Nat = \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$$

$$R\text{-}Wis = \mathcal{L}_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus}$$

$$R\text{-}TORS = \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow, \oplus, ext}$$

$$R\text{-}tors = \mathcal{L}_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}$$

Aunque no dimos un nombre para la colección de las clases libres de torsión y la colección de clases libres de torsión hereditarias, tenemos, usando esta notación, que dichas colecciones son: $\mathcal{L}_{\leq, \prod, ext}$ y $\mathcal{L}_{\leq, \prod, E, ext}$.

Hemos usado el símbolo ξ para generar clases de módulos por medio de propiedades de cerradura y así poder dar una estructura de (gran) retícula a la colección $\mathcal{L}_C$.

Definición 1.5.1. Dada una clase de módulos $\mathcal{C}$, $\xi_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\}$, es la menor clase en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 1.5.1. Para cualquier anillo R , $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ es una (gran) retícula, donde la relación de orden, $\leq$, es la contención entre clases, con los operadores definidos como sigue:

1. Para cualquier familia de clases de módulos en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$, $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el ínfimo de la familia es $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
2. Para cualquier familia de clases de módulos en $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$, $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, el supremo de la familia es $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i = \xi_{\mathcal{C}}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)$.
3. El elemento mayor, denotado por $\mathbb{1}$, es $\mathbb{1} = R\text{-Mod}$.
4. El elemento menor, denotado por $\mathbb{0}$, es $\mathbb{0} = \{(0)\}$, la clase que sólo tiene al módulo cero.

Así, $\langle \mathcal{L}_{\mathcal{C}}, \subseteq, \vee, \wedge, \mathbb{1}, \mathbb{0} \rangle$ es una (gran) retícula completa.

Capítulo 2

Módulos y clases de módulos

2.1. Módulos de tipo

Definición 2.1.1. Decimos que dos módulos M y M' son **ortogonales**, en notación $M \perp M'$, si para cualquier submódulo no cero N de M , se cumple que $N \nrightarrow M'$, es decir, M y M' no comparten submódulos distintos de cero isomorfos.

Decimos que dos módulos N y N' son **paralelos**, en notación $N \parallel N'$, si para cualquier $0 \neq L \leq N$, existen submódulos cíclicos $0 \neq Ra \leq L$ y $0 \neq Rb \leq N'$ tales que $Ra \cong Rb$, y también se cumple que para cualquier $0 \neq L' \leq N'$, existen $0 \neq Rc \leq L'$ y $0 \neq Rd \leq N$ tales que $Rc \cong Rd$.

Con estos conceptos, vamos a definir los submódulos de tipo, este concepto es una forma de relacionar clases naturales con módulos. La demostración de la siguiente definición se puede consultar en [15, Definition 4.1.2].

Definición 2.1.2. Decimos que un submódulo N de M es un **submódulo de tipo**, en notación $N \leq_t M$, si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:

1. Si $N \leq L \leq M$ con $N \parallel L$, entonces $N = L$.
2. Si $N < L \leq M$, entonces $N \perp K$, para algún $0 \neq K \leq L$.
3. Existe una clase natural $\mathcal{A}$ tal que, sobre todos los submódulos de M , N es máximo con respecto a que $N \in \mathcal{A}$.

Recordemos que en una retícula completa L , un elemento $a \neq 0$ es un **átomo**, si para cualquier elemento distinto de cero $b \leq a$, se cumple que $b = a$.

Definición 2.1.3. Decimos que un módulo M es **atómico**, si la clase natural que genera $\xi_{nat}(M)$, como elemento de la retícula $R\text{-Nat}$, es un átomo.

Es claro que una clase natural $\mathcal{A}$ es un átomo, si para cualquier clase de módulos $\mathcal{C}$, distinta de la clase cero, con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, se cumple que $\xi_{nat}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Así, para un módulo atómico M y $0 \neq N \leq M$, tenemos que $\xi_{nat}(N) = \xi_{nat}(M)$.

Lema 2.1.1. Supongamos que los submódulos $A_1, \dots, A_n \leq M$ son atómicos y ortogonales por pares con $A_1 \oplus \dots \oplus A_n \leq_e M$. Si $B_1, \dots, B_m$ son submódulos distintos de cero de M ortogonales por pares, entonces $m \leq n$.

Demostración. Ver [15, Lemma 4.1.7] □

El lema anterior permite definir el siguiente concepto de dimensión en módulos.

Definición 2.1.4. Decimos que un módulo M tiene **dimensión de tipo finita** n , denotado como $t.\dim(M) = n$, si existe una familia finita $\{N_i\}_{i=1}^n$ de submódulos atómicos y ortogonales por pares de M , tales que $\bigoplus_{i=1}^n N_i \leq_e M$. Si no existe tal n , decimos que la dimensión de tipo de M es infinita, en cuyo caso escribimos $t.\dim(M) = \infty$. Si $M = 0$, entonces $t.\dim(M) = 0$.

Para concluir esta sección, tenemos este resultado que aparece en [15, Proposition 4.1.12]

Proposición 2.1.1. Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo M :

1. La dimensión de tipo de M es finita.
2. M satisface la condición de cadena ascendente en submódulos de tipo.
3. M satisface la condición de cadena descendente en submódulos de tipo.

2.2. Atomicidad en $R\text{-Nat}$

Por la sección anterior, sabemos que si M tiene dimensión de tipo finita, entonces la clase natural que genera, $\xi_{nat}(M)$, contiene un átomo de $R\text{-Nat}$. La razón es que M contiene un submódulo atómico.

Definición 2.2.1. Sea L una retícula completa. Decimos que un elemento distinto de cero $a \in L$ es **semiatómico**, si a es un supremo de átomos de L .

Observación 2.2.1. Si M tiene dimensión de tipo finita, supongamos $t\text{-dim}(M) = n$, entonces $\bigoplus_{i=1}^n N_i \leq_e M$, donde los submódulos N_i son atómicos. Así, por la Proposición

1.1.3, tenemos que la clase natural $\xi_{nat}(\bigoplus_{i=1}^n N_i) = \bigvee_{i=1}^n \xi_{nat}(N_i)$, que es un supremo de átomos. Por otro lado, del hecho de que $\bigoplus_{i=1}^n N_i \leq_e M$, el Corolario **1.1.1** permite ver

que $\xi_{nat}(\bigoplus_{i=1}^n N_i) = \xi_{nat}(M)$. Por lo tanto, $\xi_{nat}(M)$ es un elemento semiatómico de la retícula $R\text{-Nat}$.

Revisemos algunas propiedades de las clases naturales de $R\text{-Nat}$ que son átomos. El siguiente teorema es útil.

Teorema 2.2.1. Una clase natural $\mathcal{A}$ es un átomo de $R\text{-Nat}$ si y sólo si para cualesquiera dos módulos cíclicos distintos de cero $Rx, Ry \in \mathcal{A}$, existe un módulo cíclico distinto de cero Rz tal que $Rz \rightarrowtail Rx$ y $Rz \rightarrowtail Ry$.

Demostración. $\Rightarrow$] Como $Rx, Ry \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es un átomo, tenemos que $\xi_{nat}(Rx) = \xi_{nat}(Ry) = \mathcal{A}$. Así, $Rx \in \xi_{nat}(Ry)$. Por el Lema **1.1.1**, tenemos la descripción

$$\xi_{nat}(Ry) = \{M : \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq L \leq N \text{ tal que } L \rightarrowtail Ry\}$$

Por lo tanto, existe $0 \neq L \leq Rx$ tal que $L \rightarrowtail Ry$. Considerando un elemento distinto de cero $z \in L$, tenemos que $Rz \leq Rx$ y $Rz \rightarrowtail Ry$.

$\Leftarrow$] Basta ver que $\xi_{nat}(Rx) = \mathcal{A}$, para cualquier módulo cíclico $Rx \in \mathcal{A}$.

Sean $Rx \in \mathcal{A}$ y $M \in \mathcal{A}$, vamos a ver que $M \in \xi_{nat}(Rx)$. Supongamos que $M \neq 0$, consideremos $0 \neq N \leq M$ y $0 \neq n \in N$. Así, $Rx, Rn \in \mathcal{A}$, por hipótesis existe $Rz \neq 0$ tal que $Rz \rightarrowtail Rn$ y $Rz \rightarrowtail Rx$. Por lo tanto, $M \in \xi_{nat}(Rx)$. En conclusión, $\xi_{nat}(Rx) = \mathcal{A}$. $\square$

Corolario 2.2.1. *Si M es un módulo uniforme entonces $\xi_{nat}(M)$ es un átomo de $R\text{-Nat}$.*

Demostración. Sean $Rx, Ry \in \mathcal{A} = \xi_{nat}(M)$ dos módulos cíclicos distintos de cero. Así, existen submódulos distintos de cero $Rz \leq Rx$ y $Rz' \leq Ry$ y monomorfismos $f : Rz \rightarrowtail M$ y $g : Rz' \rightarrowtail M$. Como $0 \neq f(Rz) \leq M$, $0 \neq g(Rz') \leq M$ y M es un módulo uniforme tenemos que $0 \neq f(Rz) \cap g(Rz')$. Si $0 \neq Rw \leq f(Rz) \cap g(Rz')$ entonces $Rw \leq f(Rz) \cong Rz \leq Rx$ y $Rw \leq g(Rz') \cong Rz' \leq Ry$. Por el lema anterior se sigue que $\mathcal{A}$ es un átomo. $\square$

Recordemos que una retícula es **atómica** si para cualquier elemento distinto de cero $a \in L$, existe un átomo $s \in L$ tal que $s \leq a$. El siguiente resultado es interesante.

Lema 2.2.1. *Si R es un anillo neteriano izquierdo entonces $R\text{-Nat}$ es una retícula atómica.*

Demostración. Sabemos que cualquier módulo inyectivo inescindible es uniforme, por el corolario anterior, tenemos que la clase natural generada por un módulo inyectivo inescindible es un átomo.

Por otro lado, por el Lema 1.1.3 sabemos que para cualquier clase natural $\mathcal{A}$, existe un módulo M tal que $\mathcal{A} = \xi_{nat}(M)$. Así mismo, $\xi_{nat}(M) = \xi_{nat}(E(M))$, porque $M \leq_e E(M)$. Pero el módulo $E(M)$ es inyectivo, como R es un anillo neteriano izquierdo tenemos la descomposición en submódulos $E(M) = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, donde Q_i es un submódulo inyectivo inescindible, para cada $i \in I$. Así, $\xi_{nat}(Q_i) \subseteq \xi_{nat}(E(M)) \subseteq \mathcal{A}$ y $\xi_{nat}(Q_i)$ es un átomo. $\square$

Notemos que si R es un anillo neteriano izquierdo entonces los átomos de $R\text{-Nat}$ son las clases naturales generadas por módulos inyectivos inescindibles.

Motivados por los resultados anteriores, los cuales corresponden a la propiedad de atomicidad en $R\text{-Nat}$, vamos a ver otro resultado con un tipo especial de anillo.

Definición 2.2.2. *Dada una retícula completa L y $a \in L$, decimos que a es **compacto** si siempre que $a \leq \bigvee_{d \in D} d$, con D un subconjunto dirigido de L , existe $d_0 \in D$ tal que $a \leq d_0$.*

Decimos que una retícula es **compactamente generada**, si cualquier elemento es un supremo de elementos compactos; decimos que una retícula es **localmente atómica**, si cualquier elemento es supremo de átomos; decimos que una retícula es **complementada** si cualquier elemento tiene complemento. El siguiente resultado aparece en [22, Proposición 5.5, Chapter III]

Teorema 2.2.2. *Son equivalentes para una retícula modular L :*

1. L es compactamente generada y localmente atómica.
2. L es compactamente generada y complementada.
3. L es superiormente continua y localmente atómica.

En el Teorema 1.1.2, vimos que la retícula $R\text{-Nat}$ es complementada y en el Corolario 1.1.2 vimos que es superiormente continua. El siguiente corolario es un resultado del teorema anterior para la retícula de clases naturales.

Corolario 2.2.2. *Para la retícula $R\text{-Nat}$ son equivalentes:*

1. $R\text{-Nat}$ es compactamente generada.
2. $R\text{-Nat}$ es localmente atómica.

Demostración. Ya demostramos que la retícula de clases naturales $R\text{-Nat}$ es complementada y superiormente continua, por lo que el corolario se sigue del teorema anterior. □

Vamos a ver cómo son los elementos compactos de $R\text{-Nat}$.

Observación 2.2.2. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase natural que como elemento de $R\text{-Nat}$ es compacto. Por el Lema 1.1.3 tenemos que si $\{Rx_i\}_{i \in I}$ es una familia de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C} = \xi_{\text{nat}}(\bigoplus_{i \in I} Rx_i)$. Consideremos $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I) = \{F : F \subseteq I \text{ y } F \text{ es finito}\}$, claramente $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ es un conjunto dirigido y se cumple que $\mathcal{C} = \xi_{\text{nat}}(\bigoplus_{i \in I} Rx_i) =$

$$\bigvee_{F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I)} \xi_{\text{nat}}(\bigoplus_{i \in F} Rx_i).$$

Como $R\text{-Nat}$ es una retícula superiormente continua, del hecho de que $\mathcal{C}$ sea compacto, tenemos que $\mathcal{C} = \xi_{\text{nat}}(\bigoplus_{i \in F} Rx_i)$, para algún $F \subseteq I$ finito. Así, la clase natural $\mathcal{C}$ es generada por el módulo $\bigoplus_{i \in F} Rx_i$, que es un módulo finitamente generado

Por la observación anterior, si una clase natural es compacta, entonces es generada por un módulo finitamente generado, vamos a revisar el concepto recíproco. Consideremos un módulo cíclico Rx , ¿Qué condiciones debe de cumplir Rx para que $\mathcal{C} = \xi_{\text{nat}}(Rx)$ sea un elemento compacto?

El siguiente lema nos muestra una condición necesaria.

Lema 2.2.2. Supongamos que Rx tiene dimensión de Goldie finita¹. Entonces

$\xi_{\text{nat}}(Rx) = \mathcal{C}$ es compacto.

Demostración. Sea I un conjunto dirigido y $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in I}$ una familia dirigida de clases naturales tales que $\mathcal{C} \leq \bigvee_{i \in I} \mathcal{N}_i$. Por el Teorema 1.1.2, tenemos que

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{N}_i = \xi_{\text{nat}}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{N}_i) = \{M : \exists \{L_j\}_{j \in J} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{N}_i \text{ tal que } \bigoplus_{j \in J} L_j \leq_e M\}.$$

Como $Rx \in \mathcal{C}$, se sigue que $Rx \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{N}_i$, por lo tanto existe una familia independiente $\{L_j\}_{j \in J} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{N}_i$, tal que $\bigoplus_{j \in J} L_j \leq_e Rx$.

Por hipótesis tenemos que la dimensión de Goldie de Rx es finita, por lo tanto la familia $\{L_j\}_{j \in J}$ es finita. Como I es un conjunto dirigido, existe $i_0 \in I$ tal que $\{L_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{N}_{i_0}$. Así, $\bigoplus_{j \in J} L_j \in \mathcal{N}_{i_0}$, por lo que $Rx \in \mathcal{N}_{i_0}$. Por lo tanto,

$$\xi_{\text{nat}}(Rx) = \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_{i_0}. \text{ Así, } \mathcal{C} \text{ es compacto.}$$

□

¹Un módulo M tiene dimensión de Goldie finita si existe una familia independiente finita de submódulos uniformes $N_1, N_2, \dots, N_r$ tal que $N_1 \oplus \dots \oplus N_r \leq_e M$

Recordemos que un anillo R es **QFD izquierdo** si cualquier módulo cíclico Rx tiene dimensión de Goldie finita (dimensión uniforme). Una de las propiedades importantes que cumplen los módulos con dimensión uniforme es que no existen familias independientes infinitas.

Teorema 2.2.3. *Si R es un anillo QFD izquierdo entonces $R\text{-Nat}$ es una retícula compactamente generada.*

Demostración. Como R es un anillo QFD izquierdo, se tiene que cualquier módulo cíclico Rx tiene dimensión de Goldie finita. Así, $\xi_{\text{nat}}(Rx)$ es un clase natural que es compacto en $R\text{-Nat}$. Por otro lado, para cualquier clase natural $\mathcal{A}$ existe una familia de módulos cíclicos $\{Rx_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = \xi_{\text{nat}}(\bigoplus_{i \in I} Rx_i) = \bigvee_{i \in I} \xi_{\text{nat}}(Rx_i)$. Por lo tanto, toda clase natural es un supremo de clases naturales que son compactos. $\square$

Por el Corolario 2.2.2, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.3. *Si R es un anillo QFD izquierdo entonces $R\text{-Nat}$ es una retícula localmente atómica.*

Juntando los resultados de esta sección, tenemos las siguientes implicaciones:

R anillo neteriano izquierdo $\Rightarrow R$ anillo QFD izquierdo $\Rightarrow R\text{-Nat}$ compactamente generada $\Leftrightarrow R\text{-Nat}$ es localmente atómica $\Leftrightarrow R\text{-Nat}$ es atómica.

Los resultados anteriores son interesantes, porque tenemos ejemplos de anillos cuyas retículas de clases naturales no son atómicas.

Ejemplo 2.2.1. 1. Sea $R = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \right) / \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \right)$. Consideremos $0 \neq x + \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$.

Como el soporte de x es infinito, podemos escribir $x = y + z$, con el soporte de y y z infinito. Así, $Ry \perp Rz$, por lo que Rx no es un módulo atómico.

2. Sea X un conjunto, el anillo de Boole, $\mathcal{P}(X)$, tiene como ideal

$\mathcal{F}(X) = \{A : A \subseteq X, |A| < \aleph_0\}$ el subconjunto de los elementos finitos. El anillo cociente $R = \mathcal{P}(X)/\mathcal{F}(X)$ no contiene submódulos atómicos. Notemos que si $X = \mathbb{N}$, entonces R es isomorfo al anillo del ejemplo 1.

2.3. Módulos isoneterianos e isoartinianos

Para obtener ejemplos de anillos cuya retícula de clases naturales sea atómica, revisemos la siguiente definición que aparece en [11].

Definición 2.3.1. *Un módulo M es **isoartiniano** (**isoneteriano**) si cumple que para cualquier cadena descendente (ascendente) de submódulos de M*

$\dots \leq M_2 \leq M_1 \leq M_0$ ($M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots$) existe $i \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier n con $i \leq n$, $M_i \cong M_n$, es decir, la cadena se estaciona en submódulos isomorfos.

Definición 2.3.2. *Sea $N \leq M$, decimos que N es **isoesencial** en M , en notación $N \leq_{\text{isoe}} M$, si para cualquier submódulo distinto de cero L de M existe un submódulo distinto de cero T de L tal que $T \hookrightarrow N$.*

Observación 2.3.1. *Por el Lema 1.1.1, tenemos que si $N \leq_{\text{isoe}} M$, entonces $\xi_{\text{nat}}(N) = \xi_{\text{nat}}(M)$.*

Definición 2.3.3. *Un módulo M distinto de cero es **isouniforme**, si para cualesquiera dos submódulos distintos de cero $N_1, N_2 \leq M$ se tiene que $N_1 \parallel N_2$, es decir, N_1 y N_2 son submódulos paralelos.*

La definición anterior corresponde al hecho de que si M es isouniforme y $0 \neq N \leq M$, entonces $N \leq_{\text{isoe}} M$.

Proposición 2.3.1. *Un módulo M es isouniforme si y sólo si $\xi_{\text{nat}}(M)$ es un átomo de $R\text{-Nat}$.*

Demostración. Se sigue de que $N \leq_{\text{isoe}} M$ si y sólo si $\xi_{\text{nat}}(M) = \xi_{\text{nat}}(N)$. □

Notemos que por la proposición previa, M es isouniforme si y sólo si M es atómico.

Lema 2.3.1. *Si M es un módulo isoneteriano distinto de cero, entonces M contiene un submódulo isouniforme.*

Demostración. La demostración es por contradicción. Supongamos que M no contiene un submódulo no cero isouniforme, en particular, M no es isouniforme. Por lo

tanto, existen $L_1, T_1 \leq M$ distintos de cero tales que $L_1 \perp T_1$. Como L_1 no es isouniforme, existen $L_2, T_2 \leq L_1$ distintos de cero tales que $L_2 \perp T_2$, repitiendo el proceso obtenemos una familia infinita de submódulos distintos de cero ortogonales por pares $\{T_i\}_{i=1}^\infty$.

Consideremos la cadena ascendente $T_1 \leq T_1 \oplus T_2 \leq T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \leq \dots$ de submódulos de M . Por hipótesis M es isoneteriano, por lo tanto existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $T_1 \oplus \dots \oplus T_r \cong T_1 \oplus \dots \oplus T_l$. En particular, tenemos que $T_1 \oplus \dots \oplus T_r \cong T_1 \oplus \dots \oplus T_r \oplus T_{r+1}$. Así, existen $Rx \leq T_{r+1}$ y $Ry \leq T_i$, con $1 \leq i \leq r$ tales que $Rx \cong Ry$. Contradiciendo que $T_{r+1} \perp T_i$. Por lo tanto, M contiene un submódulo distinto de cero isouniforme. $\square$

En la demostración del lema anterior, que es semejante a la demostración de que todo módulo neteriano contiene un submódulo uniforme, vimos que un módulo isoneteriano contiene un submódulo isouniforme, el cual es un módulo atómico por la Proposición 2.3.1, en [11][Proposition 5.1] tenemos una propiedad más fuerte y es que cualquier módulo isoneteriano tiene dimensión de Goldie finita.

Una consecuencia directa es el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1. *Si cualquier módulo cíclico es isoneteriano, entonces $R\text{-Nat}$ es una retícula atómica.*

Tenemos las siguientes implicaciones:

Cualquier módulo cíclico es isoneteriano $\Rightarrow R$ es QFD izquierdo $\Rightarrow R\text{-Nat}$ es compactamente generada $\Leftrightarrow R\text{-Nat}$ es localmente atómica $\Leftrightarrow R\text{-Nat}$ es atómica.

2.4. Módulos E -isoneterianos

Definición 2.4.1. Decimos que un módulo M es E -isoneteriano, si para cualquier cadena ascendente de submódulos $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de M existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $E(N_l) \cong E(N_r)$. Análogamente se tiene la condición de ser E -isoartiniano.

Observamos que la propiedad de ser E -isoneteriano es hereditaria.

Lema 2.4.1. Tenemos que M es E -isoneteriano si y sólo si $E(M)$ es E -isoneteriano.

Demostración. $\Leftarrow$] Es claro, porque la propiedad de ser E -isoneteriano es hereditaria.

$\Rightarrow$] Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de $E(M)$. Así, tenemos una cadena ascendente $N_1 \cap M \leq N_2 \cap M \leq \dots$ de submódulos de M . Como M es E -isoneteriano, tenemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $E(N_l \cap M) \cong E(N_r \cap M)$.

Notemos que si $N_i \neq 0$ entonces $M \cap N_i \neq 0$, por lo tanto $N_i \cap M \leq_e N_i \cap E(M) = N_i$ lo cual implica que $E(N_i \cap M) \cong E(N_i)$.

□

Observación 2.4.1. El hecho de que la cápsula inyectiva de un módulo E -isoneteriano sea E -isoneteriano, no implica que la cápsula inyectiva es un módulo neteriano, por ejemplo $\mathbb{Z}_{p^\infty} = E(\mathbb{Z}_p)$ no es neteriano.

Por [11][Proposition 5.1], tenemos que si M es isoneteriano, entonces M tiene dimensión de Goldie finita; en este trabajo presentamos una demostración en el Lema 2.3.1 acorde a nuestros fines de tener ejemplos de módulos atómicos. El siguiente resultado sigue con esta idea.

Lema 2.4.2. Si M es E -isoneteriano entonces M contiene un submódulo no cero isouniforme.

Demostración. La demostración es por contradicción. Supongamos que M no contiene un submódulo no cero isouniforme, en particular, M no es isouniforme. Por lo

tanto, existen $L_1, T_1 \leq M$ distintos de cero tales que $L_1 \perp T_1$. Como L_1 no es isouniforme, existen $L_2, T_2 \leq L_1$ distintos de cero tales que $L_2 \perp T_2$, repitiendo el proceso obtenemos una familia infinita de submódulos distintos de cero ortogonales por pares $\{T_i\}_{i=1}^\infty$.

Consideremos la cadena ascendente $T_1 \leq T_1 \oplus T_2 \leq T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \leq \dots$ de submódulos de M . Por hipótesis M es E -isoneteriano, por lo tanto existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $E(T_1 \oplus \dots \oplus T_r) \cong E(T_1 \oplus \dots \oplus T_l)$ con lo que $E(T_1) \oplus \dots \oplus E(T_r) \cong E(T_1) \oplus \dots \oplus E(T_l)$.

Como la familia de submódulos $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ son ortogonales por pares, tenemos que $\{E(T_i)\}_{i=1}^\infty$ es una familia de módulos ortogonales por pares. Pero eso contradice que $E(T_1) \oplus \dots \oplus E(T_r) \cong E(T_1) \oplus \dots \oplus E(T_r) \oplus E(T_{r+1})$, porque existen $0 \neq Rx \leq E(T_{r+1})$ y $0 \neq Ry \leq E(T_i)$ tales que $Rx \cong Ry$ y $E(T_{r+1}) \perp E(T_i)$, con $1 \leq i \leq r$. $\square$

Observación 2.4.2. *Notemos que en la demostración previa, si M es E -isoneteriano entonces no puede existir una familia infinita de submódulos ortogonales por pares.*

Teorema 2.4.1. *Si M es E -isoneteriano, entonces M tiene dimensión de tipo finita.*

Demostración. Consideremos una familia independiente máxima de submódulos isouniformes $\{N_i\}_{i \in I}$ de M , por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e M$.

Aunque los submódulos N_i son isouniformes, pueden generar la misma clase natural que es un átomo de $R\text{-Nat}$. Considerando los submódulos que generan el mismo átomo en $R\text{-Nat}$ y tomando la suma directa de estos submódulos, que vamos a denotar por T_j , obtenemos una familia independiente $\{T_j\}$ de submódulos ortogonales por pares, porque son atómicos y generan distintos átomos. Por la Observación 2.4.2 la familia debe ser finita, porque M es E -isoneteriano. Así, $\bigoplus_{i \in I} N_i = \bigoplus_{j=1}^m T_j \leq_e M$.

Por lo tanto, M tiene dimensión de tipo finita. $\square$

2.5. Condiciones de $\mathcal{L}$ -neterianidad.

Las condiciones de *isoneterianidad* y *E-isoneterianidad* se pueden plantear desde el punto de vista reticular de clases de módulos, recordar la Definición 1.5.1 para generar clases de módulos.

Definición 2.5.1. *Decimos que un módulo M es:*

1. $\mathcal{L}_{\leq}$ -**neteriano** (*hereditariamente neteriano*), si para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{\leq}(N_r) = \xi_{\leq}(N_l)$.
2. $\mathcal{L}_{\leq, E}$ -**neteriano**, si para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{\leq, E}(N_r) = \xi_{\leq, E}(N_l)$.
3. $\mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$ -**neteriano** (*es decir, naturalmente neteriano*) si para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{nat}(N_r) = \xi_{nat}(N_l)$.

De manera similar, se definen los conceptos de $\mathcal{L}_{\leq}$ -artiniano, $\mathcal{L}_{\leq, E}$ -artiniano y $\mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$ -artiniano para un módulo no cero M .

Lema 2.5.1. *Para un módulo M son equivalentes:*

1. M es $\mathcal{L}_{\leq, E}$ -neteriano.
2. M es E -isoneteriano.

Demostración. $\Rightarrow$] Tenemos que $\xi_{\leq, E}(L) = \{T : T \rightarrowtail E(L)\}$. Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M , como M es $\mathcal{L}_{\leq, E}$ -neteriano existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{\leq, E}(N_r) = \xi_{\leq, E}(N_l)$. Así, $E(N_l) \rightarrowtail E(N_r)$ y también $E(N_r) \rightarrowtail E(N_l)$, por lo tanto $E(N_l) \cong E(N_r)$.

$\Leftarrow$] Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M , por hipótesis existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$ se tiene que $E(N_r) \cong E(N_l)$. Por lo tanto $N_r \in \xi_{\leq, E}(N_l)$ y $N_l \in \xi_{\leq, E}(N_r)$, con lo que $\xi_{\leq, E}(N_r) = \xi_{\leq, E}(N_l)$. $\square$

Notemos que si un módulo M es hereditariamente neteriano, entonces la cadena ascendente de submódulos $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ cumple que existe $l \geq r$, tal que $N_r \leq N_l$ y $N_l \twoheadrightarrow N_r$. Por lo tanto, $E(N_r) \leq E(N_l)$ y $E(N_l) \twoheadrightarrow E(N_r)$. Como los módulos son inyectivos, tenemos que $E(N_r) \cong E(N_l)$. Así, M es E -isoneteriano. Sin embargo, los conceptos no son equivalentes, pues $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es E -isoneteriano, porque es uniforme, pero no es hereditariamente neteriano.

Proposición 2.5.1. *Sea M un módulo distinto de cero hereditariamente neteriano. Entonces existe $N \leq M$, con N finitamente generado, tal que para cualquier $x \in M$, $Rx \twoheadrightarrow N$.*

Demostración. Supongamos que no se cumple lo que se pide. Sea $x_1 \in M$, con $x_1 \neq 0$, tenemos $Rx_1 \not\twoheadrightarrow M$, como Rx_1 es finitamente generado existe $x_2 \in M$ tal que $Rx_2 \not\twoheadrightarrow Rx_1$. Así, $Rx_1 \not\leq Rx_1 + Rx_2$, pero $Rx_1 + Rx_2$ es finitamente generado por lo cual existe $x_3 \in M$ tal que $Rx_3 \not\twoheadrightarrow Rx_1 + Rx_2$. Continuando de esta manera obtenemos una cadena ascendente propia $Rx_1 < Rx_1 + Rx_2 < Rx_1 + Rx_2 + Rx_3 < \dots$, la cual, por construcción, no se puede estacionar hereditariamente, contradiciendo que M sea hereditariamente neteriano. $\square$

Proposición 2.5.2. *Si M es hereditariamente neteriano entonces para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier $l \geq r$, tenemos que $Zoc(N_r) \cong Zoc(N_l)$.*

Demostración. Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M , como M es hereditariamente neteriano existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$ tenemos que $N_l \twoheadrightarrow N_r$.

Sea $\psi_l : N_l \rightarrow N_r$ un monomorfismo (existe porque M es hereditariamente neteriano), con $l \geq r$. Así, $Zoc(N_l) \cong \psi_l(Zoc(N_l))$, pues ψ_l es monomorfismo y

$\psi_l(Zoc(N_l)) \leq Zoc(N_r) \leq Zoc(N_l)$, ya que $N_r \leq N_l$. Por el Teorema de Krull-Remak-Schmidt, tenemos que $Zoc(N_l) \cong Zoc(N_r)$, para cualquier $l \geq r$. $\square$

Teorema 2.5.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo M :*

1. M es naturalmente neteriano.

2. $t.\dim(M) < \infty$.

3. $\xi_{nat}(M)$ es un elemento compacto de $R\text{-Nat}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2] Por el Lema 2.1.1, recordemos que una condición equivalente para que el módulo M tenga dimensión de tipo finita es que M satisfaga la condición de cadena ascendente en submódulos de tipo de M .

Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de tipo de M , tal que $N_i \in \mathcal{C}_i$, con $\mathcal{C}_i \in R\text{-Nat}$. Como M es naturalmente neteriano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{nat}(N_l) = \xi_{nat}(N_r)$. Así, $\xi_{nat}(N_l) = \xi_{nat}(N_r) \subseteq \mathcal{C}_r$, por lo que $N_l \in \mathcal{C}_r$. Por otro lado, como $N_r \leq N_l$ y N_r es un submódulo de tipo de M con respecto a la clase $\mathcal{C}_r$, se cumple que $N_r = N_l$.

2) $\Rightarrow$ 3] Se sigue de [20][Theorem 3.2].

3) $\Rightarrow$ 1] Como $\xi_{nat}(M)$ es un elemento compacto de $R\text{-Nat}$, se tiene que la retícula $[0, \xi_{nat}(M)]$ es finita, por [20][Lemma 3.1]. Por lo que M es naturalmente neteriano.

□

Corolario 2.5.1. *Si M es E -isoneteriano entonces M es naturalmente neteriano.*

Demostración. En el Lema 2.4.1 se demostró que un módulo isoneteriano tiene dimensión de tipo finita, así por el teorema anterior concluimos que M es naturalmente neteriano.

□

Las propiedades enunciadas en el corolario anterior no son equivalentes, pues el $\mathbb{Z}$ -módulo $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ es naturalmente neteriano porque es un módulo atómico, pero no es E -isoneteriano, ya que la cadena ascendente $\mathbb{Q} < \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} < \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} < \dots$ no cumple la propiedad de que las cápsulas inyectivas se estacionan en isomorfismo.

Proposición 2.5.3. *Las siguientes propiedades son equivalentes para un módulo M :*

1. M es naturalmente neteriano.

2. M es naturalmente artinian.

Demostración. Tenemos que un módulo naturalmente neteriano satisface la condición de cadena ascendente en submódulos de tipo y de forma similar un módulo naturalmente artinianiano satisface la condición de cadena descendente en submódulos de tipo, pero ambas condiciones son equivalentes a que el módulo tenga dimensión de tipo finita por el Lema 2.1.1. $\square$

Corolario 2.5.2. *Tenemos que ${}_R R$ es naturalmente neteriano si y sólo si ${}_R R$ es naturalmente artinianiano.*

El siguiente resultado es una versión del Teorema de la Base de Hilbert:

Teorema 2.5.2. *Si ${}_R R$ es naturalmente neteriano (naturalmente artinianiano) entonces ${}_{R[x]} R[x]$ es naturalmente neteriano (naturalmente artinianiano).*

Demostración. Por [15][Corollary 4.2.9] tenemos que $t.\dim({}_R R) = t.\dim({}_{R[x]} R[x])$. La condición se sigue del Teorema 2.5.1 $\square$

Recordemos que un módulo L es **directamente finito**, si L no es isomorfo a un sumando directo propio de L .

Proposición 2.5.4. *Sea M un R -módulo tal que $E(M)$ es directamente finito. Tenemos que M es E -isoneteriano si y sólo si M es E -isoartiniano.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $N_1 \geq N_2 \geq \dots$ una cadena descendente de submódulos de M . Asociada a la cadena anterior, tenemos una cadena descendente de submódulos de $E(M)$, $E(N_1) \geq E(N_2) \geq \dots$, como los submódulos de la cadena son inyectivos, tenemos que $E(M) = E(N_1) \oplus L_1$, para algún $L_1 \leq E(M)$. También se tiene que $E(N_1) = E(N_2) \oplus L_2$, por lo que $E(M) = E(N_2) \oplus L_2 \oplus L_1$, repitiendo el proceso para $E(N_i)$, obtenemos una familia independiente $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ de submódulos de $E(M)$.

Consideremos la cadena ascendente $L_1 \leq L_1 \oplus L_2 \leq L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \leq \dots$, cada submódulo es inyectivo, como M es E -isoneteriano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, tenemos que $L_1 \oplus \dots \oplus L_r \cong L_1 \oplus \dots \oplus L_r \oplus L_{r+1} \oplus \dots \oplus L_l$.

Por otro lado, tenemos que

$$E(N_r) \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_r = E(M) = E(N_l) \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_r \oplus L_{r+1} \oplus \dots \oplus L_l$$

pero $E(M)$ es directamente finito y $L_1 \oplus \dots \oplus L_r \cong L_1 \oplus \dots \oplus L_r \oplus L_{r+1} \oplus \dots \oplus L_l$, por lo cual se sigue que $E(N_r) \cong E(N_l)$, para cualquier $l \geq r$.

Así, M es E -isoartiniano.

$\Leftarrow]$ La demostración es similar al caso anterior. $\square$

2.6. Condiciones de $\mathcal{L}$ -coneterianidad.

Para garantizar la existencia de cubiertas proyectivas, en esta sección vamos a suponer que el anillo R es perfecto. Para un módulo M vamos a denotar a la cubierta proyectiva como $P(M)$.

Definición 2.6.1. Decimos que M es **cohereditariamente neteriano**, si para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{\rightarrow}(M/N_r) = \xi_{\rightarrow}(M/N_l)$.

Decimos que M es **P -isoneteriano**, si para cualquier cadena ascendente $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ de submódulos de M , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $P(M/N_r) \cong P(M/N_l)$.

Lema 2.6.1. Sean P_1 y P_2 módulos proyectivos semiperfectos. Si existen epimorfismos $f : P_1 \rightarrow P_2$ y $g : P_2 \rightarrow P_1$ entonces $P_1 \cong P_2$.

Demostración. Tenemos que si P_1 es proyectivo y semiperfecto, entonces se puede descomponer en una suma directa de submódulos proyectivos directamente inescindibles tal que el anillo de endomorfismos de cada sumando es local, por el Teorema de Krull-Remak-Schmidt la descomposición es única salvo isomorfismo. Análogamente con P_2 .

Como f y g son epimorfismos y P_1, P_2 proyectivos, tenemos que existen descomposiciones $P_1 = Q_1 \oplus Q_2$ y $P_2 = T_1 \oplus T_2$, tales que $P_1 \cong T_1$ y $Q_2 \cong P_2$. De nuevo por la descomposición que da el Teorema de Krull-Remak-Schmidt y lo anterior comentado, tenemos que $P_1 \cong P_2$. $\square$

Teorema 2.6.1. Si M es cohereditariamente neteriano entonces M es P -isoneteriano.

Demostración. Sea $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M , por hipótesis M es cohereditariamente neteriano, por lo tanto existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $l \geq r$, $\xi_{\rightarrow}(M/N_r) = \xi_{\rightarrow}(M/N_l)$.

Sea $l \geq r$, existen epimorfismos $P(M/N_r) \twoheadrightarrow M/N_r \twoheadrightarrow M/N_l$ y $P(M/N_l) \twoheadrightarrow M/N_l \twoheadrightarrow M/N_r$. Como los módulos $P(M/N_r)$ y $P(M/N_l)$ son proyectivos semi-perfectos, tenemos que existen epimorfismos $P(M/N_r) \twoheadrightarrow P(M/N_l)$ y $P(M/N_l) \twoheadrightarrow P(M/N_r)$. Por el lema anterior se tiene que $P(M/N_r) \cong P(M/N_l)$. Por lo tanto, M es P -isoneteriano.

□

2.7. Neterianidad en la retícula $R\text{-Wis}$.

Definición 2.7.1. *Decimos que un R -módulo es Wis-neteriano si cumple que la subretícula $\xi_{\text{Wis}}(M)/0$ de $R\text{-Wis}$ es una retícula neteriana.*

Ejemplo 2.7.1. *En $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ tenemos que $\mathbb{Z}_{p^n}$ es Wis-neteriano, mientras que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es Wis-neteriano.*

Notemos que R es Wis-neteriano si y sólo si $R\text{-Wis}$ es una retícula neteriana. Esto se sigue porque todo módulo es cociente de un libre y así $\xi_{\text{Wis}}(R) = R\text{-Mod}$.

Usando los ejemplos anteriores, concluimos que $\mathbb{Z}$ no es Wis-neteriano.

Recordemos que cualquier clase de Wisbauer (clase de pretorsión hereditaria) tiene asociado un filtro lineal de ideales izquierdos. Para un ideal izquierdo $I \leq R$, denotamos al filtro generado por I como $\eta[I] = \{J : I \leq J \leq R\}$, este filtro se llama **filtro principal** generado por I . Los filtros lineales principales son cerrados bajo intersecciones arbitrarias, a la clase de Wisbauer asociada a un filtro lineal principal se le dice que es una clase jansiana, esto porque es cerrada bajo tomar productos arbitrarios. El regreso también es válido, cualquier clase de Wisbauer cerrada bajo tomar productos (clase jansiana) cumple que su filtro lineal asociado es cerrado bajo tomar intersecciones arbitrarias, por lo que es un filtro lineal principal.

Teorema 2.7.1. *Sea M un módulo. Tenemos que M es Wis-neteriano si y sólo si todo subfiltro del filtro asociado a la clase $\xi_{\text{Wis}}(M)$ es principal.*

Teorema 2.7.2. *Sea R un anillo. Tenemos que R es artinian izquierdo si y sólo si $R\text{-Wis}$ es una retícula neteriana.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como R es artinian izquierdo tenemos que todo filtro lineal es jansiano por lo cual todo filtro lineal es principal. Así, la clase de Wisbauer asociada a un filtro lineal principal $\eta[I]$ es $\xi_{\text{Wis}}(R/I)$, que es una clase generada por un módulo cíclico por lo tanto $\xi_{\text{Wis}}(R/I)$ es un elemento compacto de $R\text{-Wis}$. Por lo tanto, todo elemento de $R\text{-Wis}$ es compacto con lo que tenemos que $R\text{-Wis}$ es una retícula neteriana.

$\Leftarrow$) Como $R\text{-Wis}$ es neteriana tenemos que $R\text{-Fil}$ es neteriana. Así, todo elemento de $R\text{-Fil}$ es compacto, pero los elementos compactos de $R\text{-Fil}$ son los filtros lineales principales. Por lo tanto, todo filtro es jansiano por lo que toda clase de Wisbauer es cerrada bajo tomar productos. Por [15][6.3.15 Theorem], R es artiniiano izquierdo. $\square$

Capítulo 3

Relaciones entre retículas

3.1. Sobre V -anillos semiartinianos izquierdos.

En este capítulo, veremos algunas relaciones que existen entre la retícula de clases naturales $R\text{-Nat}$, con otras retículas de clases de módulos. Se verá cómo estas relaciones producen caracterizaciones del anillo, así como de la retícula $R\text{-Nat}$. Por ejemplo, cito dos resultados interesantes que aparecen en [15, Theorem 6.3.9 and Theorem 6.3.10].

Teorema 3.1.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

1. R es un anillo QI -izquierdo¹.
2. $R\text{-Wis} \subseteq R\text{-Nat}$.

Teorema 3.1.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

1. R es un anillo semiartiniano-izquierdo.
2. $R\text{-Nat} \subseteq \mathcal{L}_{\leq, \pi, E, \text{ext}}$.
3. La clase natural $\mathcal{K} = \{M : \text{Zoc}(M) \leq_e M\}$ pertenece a $\mathcal{L}_{\leq, \pi, E, \text{ext}}$.
4. $\mathcal{L}_{\leq, \pi, E, \text{ext}}$ es una retícula de Boole.

¹Un anillo R es QI -izquierdo si cualquier módulo casi inyectivo es inyectivo. Un módulo M es casi inyectivo si es M -inyectivo.

5. $R\text{-tors}$ es una retícula de Boole.

Recientemente, en [3, Theorem 2.9], se obtuvo la siguiente caracterización de los anillos semiartinianos izquierdos.

Teorema 3.1.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R*

1. R es un anillo semiartiniano izquierdo.
2. Las retículas de clases de módulos $R\text{-Nat}$ y $R\text{-tors}$ son isomorfas.

Comencemos a revisar los resultados de este capítulo.

Lema 3.1.1. *Si $\mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} \subseteq \mathcal{L}_{\leq, \pi}$ entonces R es semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Vamos a ver que para cualquier R -módulo M distinto de cero, $Zoc(M) \neq 0$. Por hipótesis, tenemos que para la clase natural generada por $R\text{-Simp}$, se tiene que $\xi_{nat}(R\text{-Simp}) \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$. Por lo tanto, tenemos que $C := \prod_{S \in R\text{-Simp}} E(S) \in \xi_{nat}(R\text{-Simp})$. Como sabemos, C es un cogenerador de $R\text{-Mod}$, por lo que $R\text{-Mod} = \xi_{nat}(R\text{-Simp})$.

Pero es claro que $\xi_{nat}(R\text{-Simp}) = \{M : Zoc(M) \leq_e M\}$ (ver el Lema 1.1.1). Así, R es semiartiniano izquierdo. $\square$

Lema 3.1.2. *Si $\mathcal{L}_{\leq, \pi} \subseteq \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$ entonces R es V -anillo izquierdo.*

Demostración. Vamos a demostrar que el radical de Jacobson es el radical cero, que es equivalente a que R sea V -anillo.

Denotemos $\mathbb{T}_{Rad}$ la clase de torsión y $\mathbb{F}_{Rad}$ la clase libre de torsión asociadas al radical de Jacobson. Por hipótesis $\mathbb{F}_{Rad}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas, en este caso el radical de Jacobson, es un radical exacto izquierdo (cita de Stenstrom), entonces el radical de Jacobson está determinado por su clase de torsión $\mathbb{T}_{Rad}$. Así que basta ver que $\mathbb{T}_{Rad} = \{0\}$.

Supongamos que $\mathbb{T}_{Rad} \neq \{0\}$, notemos que $\mathbb{T}_{Rad}$ es una clase hereditaria porque el radical de Jacobson es un radical exacto izquierdo por hipótesis.

Sea M un módulo distinto de cero en $\mathbb{T}_{Rad}$ y $x \in M$ con $x \neq 0$. Tenemos que $Rx \in \mathbb{T}_{Rad}$, por lo que $Rx = Rad(Rx) < Rx$, pues Rx es un módulo finitamente generado. Lo anterior es una contradicción. $\square$

El siguiente resultado, es un teorema de caracterización de anillos comparando clases de módulos definidas por medio de propiedades de cerradura.

Teorema 3.1.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R .*

1. $\mathcal{L}_{\leq, \pi} = \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$
2. R es V -anillo semiartiniano izquierdo.

Demostración. Sólo falta demostrar $2) \Rightarrow 1)$, porque la otra implicación se sigue de los resultados previos.

Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$, para ver que $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$, basta demostrar que es cerrada bajo tomar productos. Consideremos una familia de módulos $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$, como R es un anillo semiartiniano izquierdo, por el Lema 1.1.1 tenemos que $\mathcal{C}$ es una clase generada por una familia de simples. Para ver que $M = \prod_{i \in I} M_i \in \mathcal{C}$, basta con demostrar que cualquier submódulo simple de M está en $\mathcal{C}$, pues $Zoc(M) \leq_e M$ y $Zoc(M) \in \mathcal{C}$.

Sea $S \leq M$ un submódulo simple, por lo tanto existe $i \in I$ tal que $S \leq M_i$, pero $M_i \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es hereditaria, así $S \in \mathcal{C}$. Como todos los submódulos simples de M están en $\mathcal{C}$, se tiene que $Zoc(M) \in \mathcal{C}$, porque es cerrada bajo tomar sumas directas, así $M \in \mathcal{C}$, porque es cerrada bajo extensiones esenciales. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} \subseteq \mathcal{L}_{\leq, \pi}$.

Para la otra contención, consideremos una clase $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$. Tenemos que demostrar que $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$, por lo que basta ver que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

Sea $M \in \mathcal{C}$, por hipótesis tenemos que R es un anillo semiartiniano izquierdo, por lo que $Zoc(M) \leq_e M \leq_e E(M)$. Supongamos que $Zoc(M) = \bigoplus_{i \in I} S_i$, con S_i un submódulo simple, así $S_i \in \mathcal{C}$. Por otro lado, existe un monomorfismo $\gamma : \bigoplus_{i \in I} S_i \longrightarrow \prod_{i \in I} S_i$, donde el último módulo es inyectivo porque R es un V -anillo. Así, existe un homomorfismo $\bar{\gamma} : E(M) \longrightarrow \prod_{i \in I} S_i$ por la inyectividad de $\prod_{i \in I} S_i$, tal que $\bar{\gamma}|_{Zoc(M)} = \gamma$. Por la esencialidad de $Zoc(M) \leq_e E(M)$, tenemos que $\bar{\gamma}$ es un monomorfismo. Como $S_i \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$, tenemos que $\prod_{i \in I} S_i \in \mathcal{C}$, por lo tanto $E(M) \in \mathcal{C}$.

□

3.2. Cogeneración en retículas de clases de módulos

Dadas una clase de módulos $\mathcal{A}$ y un conjunto de propiedades de cerradura C , tenemos que la clase cogenerada por $\mathcal{A}$ en la retícula $\mathcal{L}_C$, si existe, es la mayor clase cerrada bajo las propiedades de C contenida en $\mathcal{A}$. Usamos la notación $\chi_C(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, para denotar a esta clase.

Dada una clase de módulos $\mathcal{A}$, podemos describir las siguientes clases cogeneradas.

$$\chi_{\leq}(\mathcal{A}) = \{M \in \mathcal{A} : \forall N \leq M, N \in \mathcal{A}\}.$$

$$\chi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) = \{M \in \mathcal{A} : \forall N \leq M, M/N \in \mathcal{A}\}.$$

$$\chi_E(\mathcal{A}) = \{M \in \mathcal{A} : E(M) \in \mathcal{A}\}.$$

Claramente se cumple que $\chi_{\leq}(\mathcal{A}), \chi_{\rightarrow}(\mathcal{A}), \chi_E(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ y además se tiene que $\chi_{\leq}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq}$, $\chi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\rightarrow}$ y $\chi_E(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_E$.

Más aún, tenemos los siguientes morfismos de retículas

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\chi_{\rightarrow}} & \\ R\text{-Nat} = \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} & & R\text{-tors} = \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus, ext} \\ & \xleftarrow{\xi_{\leq, E}} & \end{array}$$

Vamos a cogenerar clases de módulos en $\mathcal{L}_{\leq, E}$

Proposición 3.2.1. *Para una clase de módulos $\mathcal{A}$, tenemos que $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) = \{M \in \mathcal{A} : \forall L \leq E(M), L \in \mathcal{A}\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{A} : \forall L \leq E(M), L \in \mathcal{A}\}$, vamos a ver que

$$\mathcal{C} = \chi_{\leq, E}(\mathcal{A}). \text{ Primero veamos que } \mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, E}.$$

Sea $N \leq M$ con $M \in \mathcal{C}$. Tenemos que demostrar que $N \in \mathcal{C}$. Como $M \in \mathcal{C}$ y $N \leq M \leq E(M)$ se sigue que $N \in \mathcal{A}$. Por otro lado, si $L \leq E(N)$, como $E(N) \leq E(M)$, entonces $L \leq E(M)$ por lo que $L \in \mathcal{A}$. Así, $N \in \mathcal{C}$.

Es claro que si $M \in \mathcal{C}$ entonces $E(M) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, E}$.

Por último veamos que $\mathcal{C}$ es la mayor clase contenida en $\mathcal{A}$ cerrada bajo tomar submódulos y cápsulas inyectivas. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, con $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq, E}$, consideremos $M \in \mathcal{B}$, vamos a ver que $M \in \mathcal{C}$. Como $M \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se sigue que $M \in \mathcal{A}$; si $L \leq E(M)$, como $L, E(M) \in \mathcal{B}$, dado que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq, E}$, entonces $L \in \mathcal{A}$. Así $M \in \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. □

Proposición 3.2.2. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ entonces $\chi_E(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq}$.

Demostración. Sean $M \in \chi_E(\mathcal{A})$ y $N \leq M$, queremos demostrar que $N \in \chi_E(\mathcal{A})$. Como $M \in \chi_E(\mathcal{A})$ se sigue que $M \in \mathcal{A}$ y $E(M) \in \mathcal{A}$. Como $N \leq E(N) \leq E(M)$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ tenemos que $E(N) \in \mathcal{A}$, por lo tanto $N \in \chi_E(\mathcal{A})$. $\square$

Corolario 3.2.1. Para una clase $\mathcal{A}$ de módulos tenemos $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) \in \mathcal{L}_{\leq, E}$. Más aún, $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) = \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$.

Demostración. Ya sabemos que $\chi_{\leq}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq}$, usando la proposición anterior obtenemos que $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) \in \mathcal{L}_{\leq}$. Así $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) \in \mathcal{L}_{\leq, E}$.

Como $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) \subseteq \chi_{\leq}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, y $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$ es la mayor clase cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas contenida en $\mathcal{A}$, tenemos que $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) \subseteq \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$.

Ahora, sea $M \in \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$, queremos demostrar que $M \in \chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A}))$. Para eso tenemos que demostrar que $M \in \chi_{\leq}(\mathcal{A})$ y $E(M) \in \chi_{\leq}(\mathcal{A})$, esto último se demuestra viendo que $(M \in \mathcal{A} \text{ y } \forall N \leq M, N \in \mathcal{A})$ y que $(E(M) \in \mathcal{A} \text{ y } \forall L \leq E(M), L \in \mathcal{A})$. Lo anterior se sigue de que $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. $\square$

Notemos que $\chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{A})) = \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$

Proposición 3.2.3. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$ entonces $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq, \pi, E}$.

Demostración. Basta demostrar que $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\pi}$. Consideremos $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$, para demostrar que $\prod M_i \in \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$ tenemos que ver que $\prod M_i \in \mathcal{A}$ y $\forall T \leq E(\prod M_i), T \in \mathcal{A}$. Como $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq, \pi}$ se tiene que $\prod M_i \in \mathcal{A}$, más aún $\{E(M_i)\}_{i \in I} \subseteq \chi_{\leq, E}(\mathcal{A})$ y $\prod E(M_i) \in \mathcal{A}$.

Si $T \leq E(\prod M_i)$, como $E(\prod M_i) \leq \prod E(M_i)$, entonces $T \in \mathcal{A}$. Así, $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\pi}$. $\square$

Proposición 3.2.4. Sea R un anillo neteriano izquierdo. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus}$ entonces $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$.

Demostración. La demostración es análoga a la demostración anterior, viendo que $\chi_{\leq, E}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\oplus}$ y recordando que $E(\oplus M_i) \leq \oplus E(M_i)$, como el anillo es neteriano izquierdo, entonces $\oplus E(M_i)$ es inyectivo. $\square$

Notemos que hay dos asignaciones entre retículas de clases de módulos

$$\mathcal{L}_{\leq, \pi} \xrightarrow{\chi_{\leq, E}} \mathcal{L}_{\leq, \pi, E}$$

y

$$\mathcal{L}_{\leq, \oplus} \xrightarrow{\chi_{\leq, E}} \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$$

Ambas son suprayectivas. Notemos que la segunda está bien definida cuando el anillo es neteriano izquierdo.

Considerando la retícula de clases de Wisbauer, tenemos que $\mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus} \subseteq \mathcal{L}_{\leq, \oplus}$. Restringiendo el morfismo $\chi_{\leq, E}$ obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\chi_{\leq, \oplus}} & \\ \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus} & & \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} \\ & \xleftarrow{\xi_{\rightarrow}} & \end{array}$$

Queremos hallar relaciones entre cogenerar y generar clases. El siguiente teorema es útil.

Teorema 3.2.1. *Si R es un anillo QF entonces $\chi_{\leq, E} \circ \xi_{\rightarrow} = 1_{R-Nat}$.*

Demostración. Si $\mathcal{W} \in \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus}$ es una clase de Wisbauer entonces

$\chi_{\leq, E}(\mathcal{W}) = \chi_E(\chi_{\leq}(\mathcal{W})) = \chi_E(\mathcal{W})$, pues $\mathcal{W}$ es una clase hereditaria. Lo anterior nos dice lo siguiente:

$$\{M \in \mathcal{W} : E(M) \in \mathcal{W}\} = \chi_E(\mathcal{W}) = \chi_{\leq, E}(\mathcal{W}) = \{M \in \mathcal{W} : \forall T \leq E(M), T \in \mathcal{W}\}$$

Podemos caracterizar los elementos de $\chi_E(\mathcal{W})$ en términos de los módulos inyectivos inescindibles.

Consideremos los siguientes conjuntos, $R-II$ es el conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos inyectivos inescindibles; para una clase de módulos

$\mathcal{A}$, el conjunto $\mathcal{A}\text{-II} = \{T \in \mathcal{A} : \exists S \in R\text{-II} \text{ tal que } T \cong S\}$.

Como el anillo R es neteriano izquierdo, todo módulo inyectivo se descompone en una suma directa de módulos inyectivos inescindibles. Consideremos la clase

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{W} : \exists \{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{W}\text{-II} \text{ tal que } M \leq \oplus E_i\}.$$

Afirmamos que $\chi_{\leq, E}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}$. Sea $M \in \chi_{\leq, E}(\mathcal{W}) = \chi_E(\mathcal{W})$, así $M \leq E(M)$ con $E(M) \in \mathcal{W}$, como el anillo es neteriano se sigue que $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ con $E_i \in \mathcal{W}\text{-II}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{C}$.

Para la otra contención consideramos $M \in \mathcal{C}$, así existe $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{W}\text{-II}$ tal que $M \leq \oplus E_i$, como R es un anillo inyectivo se tiene que $\oplus E_i$ es un módulo inyectivo por lo tanto $E(M)$ es un sumando directo de $\oplus E_i$. Así, $E(M), M \in \mathcal{W}$ pues $\mathcal{W} \in \mathcal{L}_{\leq}$. Por lo tanto $M \in \chi_{\leq, E}(\mathcal{W})$.

Para una clase natural $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$ tenemos que $\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) = \{T : \exists A \in \mathcal{A} \text{ y } \exists f : A \rightarrow T\}$, recordemos que la clase $\mathcal{A}$ se puede describir en términos de sus módulos inyectivos inescindibles de la siguiente manera $\mathcal{A} = \{M : \exists f : M \rightarrow \oplus E_i \text{ tal que } E_i \in \mathcal{A}\text{-II}\}$ por lo tanto tenemos la siguiente descripción:

$$\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) = \{N : \begin{array}{c} M \twoheadrightarrow \xrightarrow{\exists f} \oplus E_i \\ \downarrow \exists g \\ N \end{array} \text{ tal que } E_i \in \mathcal{A}\text{-II}\}$$

¿Cómo son los módulos inyectivos inescindibles de $\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})$?

Sea $Q \in \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})$ un módulo inyectivo inescindible, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \twoheadrightarrow & \xrightarrow{f} \oplus E_i \\ \downarrow g & & \swarrow h \\ Q & & \end{array}$$

El homomorfismo h cumple que $hf = g$ pues Q es inyectivo; h es suprayectiva pues g es suprayectiva. Así, Q es cociente de una suma directa de módulos inyectivos inescindibles de $\mathcal{A}$.

Ahora, como el anillo R es QF y como Q es un cociente de $\oplus E_i$, se sigue que Q es isomorfo a un sumando directo de $\oplus E_i$, pues Q es proyectivo. Por el Teorema

de Krull-Remak-Schmidt tenemos que $Q \cong E_i$, para alguna i con $E_i \in \mathcal{W}\text{-II}$. En conclusión tenemos que si R es un anillo QF entonces los módulos inyectivos de una clase natural $\mathcal{A}$ y $\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})$ son los mismos.

En vista de lo anterior, tenemos lo siguiente

$$\chi_{\leq, E}(\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})) = \{M \in \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) : M \leq \oplus E_i \text{ tal que } E_i \in \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})\text{-II}\} =$$

$$\{M \in \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) : M \leq \oplus E_i \text{ tal que } E_i \in \mathcal{A}\text{-II}\}$$

Como $\mathcal{A} \subseteq \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq, E}$ se sigue que $\mathcal{A} \subseteq \chi_{\leq, E}(\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}))$. Por otro lado, si $M \in \chi_{\leq, E}(\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}))$ entonces $M \leq \oplus E_i$ con $E_i \in \mathcal{A}\text{-II}$, del hecho de que $\mathcal{A}$ es una clase natural tenemos que $M \in \mathcal{A}$. Así, $\mathcal{A} = \chi_{\leq, E}(\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}))$. $\square$

En el teorema anterior usamos la asignación $\xi_{\rightarrow} : \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} \longrightarrow \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus}$, vimos que si R es un anillo QF entonces $\xi_{\rightarrow}$ es una función inyectiva y $\chi_{\leq, E}$ es suprayectiva.

Sin embargo, bajo otras hipótesis seguimos obteniendo la inyectividad de la función $\xi_{\rightarrow}$.

Definición 3.2.1. *Un módulo simple S es **paraproyectivo** si cumple que para cualquier $f : M \rightarrow S$ existe $g : S \rightarrow M$.*

Lema 3.2.1. *Si R es un anillo en el que todo módulo simple es paraproyectivo entonces R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Sea M un módulo distinto de cero y $x \in M$ con $x \neq 0$, como Rx tiene un cociente simple S por ser finitamente generado se sigue, por hipótesis, que $S \rightarrow Rx$, por lo tanto M contiene un submódulo simple. Así, R es un anillo semiartiniano izquierdo. $\square$

Lema 3.2.2. *Si todo módulo simple es paraproyectivo, entonces*

$$\xi_{\rightarrow} : \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E} \longrightarrow \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus} \text{ es inyectiva.}$$

Demostración. Como R es un anillo semiartiniano izquierdo, tenemos que toda clase natural está generada por una familia de simples. Supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$

cumplen que $\xi_{\rightarrow}(\mathcal{A}) = \xi_{\rightarrow}(\mathcal{B})$, queremos demostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, basta con demostrar que tienen los mismos módulos simples.

Sea $S \in \mathcal{A}$ un módulo simple, tenemos que $S \in \xi_{\rightarrow}(\mathcal{B})$ pues $A \subseteq \xi_{\rightarrow}(\mathcal{A})$, por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ y existe $f : B \longrightarrow S$. Por hipótesis existe $g : S \rightarrowtail B$, así $S \in \mathcal{B}$.

Análogamente con los módulos simples de $\mathcal{B}$. Así $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. $\square$

Capítulo 4

Retractilidad y retículas

Los resultados que aparecen en este capítulo forman parte de la segunda sección del artículo *On retractability and its relationships with lattices associated to a ring* publicado en febrero de 2021 en la revista Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics, dicho artículo fue una colaboración conjunta con Oscar Alberto Garrido Jiménez, Hugo Alberto Rincón Mejía y Manuel Gerardo Zorrilla Noriega.

Estos resultados fueron fruto de un intercambio de ideas con mi compañero de estudio Oscar Alberto Garrido Jiménez en el último año de mis estudios de doctorado (año 2020), también se pueden consultar los resultados de la sección 3 y 4 del artículo en la tesis doctoral de Oscar Alberto que lleva por título *Caracterizaciones de anillos por medio de propiedades de finitud en sus retículas de clases de módulos asociadas* publicada en el portal de tesis UNAM.

4.1. Módulos retráctiles

Definición 4.1.1. Decimos que un módulo M es **retráctil**, si $\text{Hom}(M, N) \neq 0$ para cualquier submódulo no cero $N \leq M$. Decimos que un anillo R es **mod-retráctil izquierdo** (o simplemente **mod-retráctil**, si no hay ambigüedad) si cualquier módulo es retráctil.

Definición 4.1.2. Decimos que un módulo M es un módulo **parainyectivo** si para cualquier módulo N , siempre que exista un monomorfismo $f \in \text{Hom}(M, N)$, existe un

epimorfismo $g \in \text{Hom}(N, M)$. Decimos que un módulo M es un módulo **paraproyectivo** si para cualquier módulo N , siempre que exista un epimorfismo $f \in \text{Hom}(N, M)$, existe un monomorfismo $g \in \text{Hom}(M, N)$.

Recordemos que un módulo es **semiartiniano** si cualquiera de sus cocientes no nulos contiene un submódulo simple. Un módulo M es **coatómico** si cualquiera de sus submódulos propios está contenido en un submódulo máximo.

Un anillo R es **max izquierdo** si cualquier módulo es coatómico.

Observación 4.1.1. *Las siguientes propiedades se cumplen.*

1. *Si cualquier módulo simple es paraproyectivo, entonces el anillo es semiartiniano izquierdo.*
2. *Si cualquier módulo simple es parainyectivo, entonces el anillo es max izquierdo.*
3. *En cualquier anillo mod-retráctil, cualquier módulo simple es parainyectivo.*

Demostración.

1. Sea M un módulo no cero, tomamos un submódulo no cero cíclico de M , que denotamos por Rx . Este submódulo cíclico tiene un cociente simple S (porque es finitamente generado), como S es paraproyectivo, S se sumerge en Rx y por lo tanto M tiene un submódulo simple.
2. Análogamente a la idea del punto anterior, escogemos un submódulo cíclico no cero Rx de un módulo M y un cociente simple S de Rx . Componiendo con el homomorfismo inclusión de S en su cápsula inyectiva $E(S)$, obtenemos un homomorfismo no cero de Rx a $E(S)$, que se extiende a un homomorfismo no cero $f : M \rightarrow E(S)$. Como S es un submódulo esencial de su cápsula inyectiva, tenemos que S se sumerge en $f(M)$. Por hipótesis S es parainyectivo, entonces S es un cociente de $f(M)$, por lo tanto S es un cociente de M (porque $f(M)$ es un cociente de M)

Otra idea es la siguiente, como S es un cociente de un submódulo de M , el coproducto fibrado muestra que S se sumerge en un cociente de M , por la parainyectividad del módulo simple, tenemos que S es un cociente de M .

3. Si S es un submódulo simple de M , entonces existe un homomorfismo no cero de M a S , el cual necesariamente es un epimorfismo.

□

Recordemos que un V -anillo es un anillo en el que cualquier módulo simple es inyectivo.

Ejemplo 4.1.1. *Los siguientes ejemplos muestran que no se cumplen los recíprocos de la Observación 4.1.1.*

1. **Un anillo semiartiniano izquierdo con un simple que no es paraproyectivo.**

Consideremos el anillo $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ y sea R el subanillo generado por $(\mathbb{Z}_2)^{(\mathbb{N})}$ y 1, es decir, R consiste de todas las sucesiones que son eventualmente constantes de ceros y unos. Tenemos que R es un anillo conmutativo que cumple que $\text{zoc}(R) = (\mathbb{Z}_2)^{(\mathbb{N})}$ es un ideal esencial máximo de R . Así, $S = R/\text{zoc}(R)$ es un módulo simple singular. Como todos los módulos semisimples son semiartinianos, y la clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo tomar extensiones, la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \text{zoc}(R) \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow 0$ muestra que R es un anillo semiartiniano izquierdo.

Además, $\text{zoc}(R) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Re_i$, donde $e_i \in R$ tiene a 1 en el i -ésimo lugar y 0 en todo lo demás, cada Re_i es un sumando directo simple de R , por lo tanto $\text{zoc}(R)$ es un módulo proyectivo semisimple. Sabemos que cualquier módulo simple es o proyectivo o singular. Como $\text{zoc}(R)$ es proyectivo y esencial en R , entonces R es un anillo no singular. Por lo tanto, $\text{Hom}(S, R) = 0$. En particular, S es un cociente simple de R que no se sumerge en R , por lo tanto S no es un módulo paraproyectivo.

2. **Un anillo max izquierdo con un simple que no es parainyectivo.**

Sea R el anillo de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$. Tenemos que R es un anillo semiprimario (es decir $\text{Rad}(R)$ es un ideal nilpotente y

$R/\text{Rad}(R)$ es un anillo semisimple). Notemos que $\text{Rad}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ y $R/\text{Rad}(R) \cong \mathbb{Z}_2$.

Como R es un anillo semiprimario, entonces R es un anillo perfecto izquierdo y derecho. Por lo tanto, R es un anillo max izquierdo. Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{Z}_2$, son los elementos de un submódulo simple S que es proyectivo, pero no es inyectivo. Es proyectivo porque es un sumando directo de R y no es inyectivo, porque es un submódulo esencial propio del R -módulo $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

Supongamos que hay un homomorfismo no cero $f \in \text{Hom}(E(S), S)$, entonces

$S \cong E(S)/\ker(f)$. Como S no es inyectivo, se tiene que $\ker(f) \neq 0$. Se sigue que $\ker(f)$ es un submódulo esencial de $E(S)$, por lo tanto $S \cong E(S)/\ker(f)$ es un módulo singular. Esto es una contradicción porque un módulo simple no puede ser a la vez singular y proyectivo. Como S se sumerge en $E(S)$, pero no es un cociente, entonces S no es un módulo parainyectivo.

3. Un anillo en el que cualquier módulo simple es parainyectivo, pero no es mod-retráctil.

Sea R el dominio de polinomios diferenciales de Cozzens, descrito en [9] (también se puede consultar en [7, Example B.3]). Estas referencias nos dicen que R es un V -anillo izquierdo y es un dominio de ideales principales (ideales principales izquierdos e ideales principales derechos).

Como R es un V -anillo izquierdo, cualquier módulo simple es inyectivo, entonces cualquier módulo simple es parainyectivo.

Notemos que cualquier dominio de ideales principales izquierdos es un anillo hereditario izquierdo (todos los ideales izquierdos son proyectivos, pues para cualquier $0 \neq a \in R$, $R \cong Ra$).

Como R es un anillo hereditario izquierdo y derecho, cualquier cociente de un

módulo inyectivo es un módulo inyectivo.

Afirmamos que R no es un módulo izquierdo inyectivo (en este caso ${}_R R$ es inyectivo si y sólo si ${}_R R$ es divisible). Recordemos la noción de divisibilidad: sobre cualquier anillo S , decimos que un módulo M es divisible si se cumple que $sM = M$ para cualquier divisor no cero s .

Como R es un dominio, cualquier elemento no cero de R es un divisor no cero. Tomemos cualquier polinomio $g \in R$ de grado mayor que cero. Como $1 \notin gR$, $gR \neq R$, así ${}_R R$ no es divisible. Entonces, de acuerdo a [22, Chap. I, §6, Example 4], ${}_R R$ no es un módulo inyectivo. Si existiera $0 \neq f \in \text{Hom}(E(R), R)$, entonces $0 \neq \text{Im}(f)$ sería un sumando directo propio de R , pero esto es imposible porque R , siendo un dominio, es directamente inescindible (para un elemento idempotente $e \in R$, $e(1 - e) = 0$, así $e = 0$ o $e = 1$). Por lo anterior, $\text{Hom}(E(R), R) = 0$, así $E(R)$ no es retráctil y por lo tanto R no es mod-retráctil.

Definición 4.1.3. Decimos que un anillo R satisface la condición (HH) si para cualesquiera dos módulos M y N se cumple

$$\text{Hom}(M, N) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Hom}(N, M) \neq 0.$$

Ejemplo 4.1.2. Cualquier anillo semisimple cumple la condición (HH).

Recordemos que un anillo R es **local izquierdo** si hay un solo tipo de módulo simple, es decir, cualesquiera dos módulos simples son isomorfos.

Ejemplo 4.1.3. Un anillo que no es semisimple, pero que cumple la condición (HH). Por el Teorema 4.1.4 que aparece después, tenemos un ejemplo de un anillo local izquierdo que no es semisimple, pero que sí sea perfecto por ambos lados es suficiente para nuestros fines.

Consideremos el anillo conmutativo artinian local $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, donde p es un número primo y $n > 1$ es un número natural. Tenemos que R no es semisimple, porque $\text{Rad}(R) \neq 0$. Notemos que el ideal simple de este anillo es un ejemplo de un módulo

parainyectivo (porque R cumple la condición (HH)), que no es inyectivo, en caso de que sea inyectivo, R sería un V -anillo y por lo tanto $\text{Rad}(R) = 0$, lo cual no es cierto.

Observación 4.1.2. Sea R un anillo que cumple la condición (HH) . Entonces cualquier módulo simple es parainyectivo y paraproyectivo, por lo tanto R es un anillo max izquierdo y semiartiniano izquierdo. También se tiene que R es mod-retráctil.

El siguiente teorema se puede consultar en [18, Theorem 3.5].

Teorema 4.1.1. Un anillo es mod-retráctil izquierdo si y sólo si $R\text{-TORS} \subseteq R\text{-tors}$.

Tenemos el siguiente corolario

Corolario 4.1.1. Si R es un anillo que satisface la condición (HH) , entonces $R\text{-TORS} \subseteq R\text{-tors}$.

Lema 4.1.1. Si R es un anillo que satisface la condición (HH) , entonces cualquier clase libre de torsión $\mathbb{F}$ es cerrada bajo tomar cocientes.

Demostración. Supongamos que $M \in \mathbb{F}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo. Sea $\mathbb{T}$ la clase de módulos tal que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión. Si $N \notin \mathbb{F}$, entonces $t(N) \neq 0$, donde $t(N)$ es el mayor submódulo de N que está en $\mathbb{T}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ f^{-1}(t(N)) & \xrightarrow{f|} & t(N) \end{array}$$

Como $f| \neq 0$, entonces por la condición (HH) , existe un homomorfismo no cero $g \in \text{Hom}(t(N), f^{-1}(t(N)))$. Así, $g(t(N)) \subseteq t(f^{-1}(t(N))) \subseteq t(M) = 0$, lo cual es una contradicción. Así, $N \in \mathbb{F}$. $\square$

Teorema 4.1.2. Si R es un anillo que satisface la condición (HH) , entonces toda clase de torsión es una clase conatural.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una clase de torsión. Entonces existe una clase de módulos $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$, tal que $(\mathcal{C}, \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$ es una teoría de torsión. Denotamos por $t_{\mathcal{C}}$ al prerradical asociado a $(\mathcal{C}, \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$. Vamos a demostrar que $\mathcal{C}$ satisface la condición (CN) . Supongamos que un módulo M cumple que para cualquier epimorfismo no cero $M \twoheadrightarrow N$, existe un epimorfismo no cero $N \twoheadrightarrow K$, donde $K \in \mathcal{C}$.

Si $M \notin \mathcal{C}$, entonces $0 \neq M/t_{\mathcal{C}}(M) \in \mathbb{F}_{\mathcal{C}}$. Como $M/t_{\mathcal{C}}(M)$ es un cociente no cero de M , entonces, por hipótesis, existe un epimorfismo no cero $f : M/t_{\mathcal{C}}(M) \twoheadrightarrow K$, donde $K \in \mathcal{C}$.

Por otro lado, R satisface la condición (HH) , por lo que existe $0 \neq g \in \text{Hom}(K, M/t_{\mathcal{C}}(M))$. Así, $g(K) = g(t_{\mathcal{C}}(K)) \subseteq t_{\mathcal{C}}(M/t_{\mathcal{C}}(M)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $M \in \mathcal{C}$.

□

El siguiente resultado es parte de [1, Proposition 2.11].

Proposición 4.1.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R .*

1. *Cualquier módulo simple es un módulo parainyectivo.*
2. *Cualquier clase conatural es una clase de torsión hereditaria.*

Teorema 4.1.3. *Si R es un anillo que satisface la condición (HH) , entonces*

$$R\text{-TORS} = R\text{-Conat} = R\text{-tors}$$

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 4.1.2, la Observación 4.1.2 y la Proposición 4.1.1, además del hecho de que $R\text{-tors} \subseteq R\text{-TORS}$. □

Definición 4.1.4. Decimos que un anillo R es un *BKN*-anillo (en honor a Bican, Nêmec y Kepka), si $\text{Hom}(M, N) \neq 0$ para cualquiera dos módulos no cero M y N .

Lema 4.1.2. Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R .

1. R es un *BKN*-anillo.
2. R satisface la condición (HH) y es un anillo local izquierdo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es claro que R satisface la condición (HH) . Como hay homomorfismos no cero entre cualesquiera dos módulos simples, entonces todos los módulos simples son isomorfos.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean M y N dos módulos no cero. Por la Observación 4.1.2, R es un anillo semiartiano izquierdo, existe un submódulo simple S (resp. T) de M (resp. N). Como R es un anillo local izquierdo, $S \cong T$. Por la condición (HH) , existe un homomorfismo no cero $f : M \rightarrow S$. Con la composición $M \xrightarrow{f} S \cong T \hookrightarrow N$ obtenemos un homomorfismo no cero de M a N . $\square$

Recordemos que en las retículas de clases completas $R\text{-Nat}$ and $R\text{-Conat}$, para un módulo arbitrario M , la clase natural generada por M , $\xi_{nat}(M)$, y la clase conatural generado por M , $\xi_{conat}(M)$, tienen las siguientes descripciones (para más detalles consultar [15] y [21]):

$$\begin{aligned} \xi_{nat}(M) = \{ & U \in R\text{-Mod} : \text{cualquier submódulo distinto de cero de } U \\ & \text{comparte un submódulo distinto de cero con } M \} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \xi_{conat}(M) = \{ & U \in R\text{-Mod} : \text{cualquier cociente distinto de cero de } U \\ & \text{comparte un cociente distinto de cero con } M \}. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R .*

1. R satisface la condición (HH) .
2. R es mod-retráctil y cualquier módulo simple es paraproyectivo.
3. Cualquier módulo simple es paraproyectivo y parainyectivo.
4. $R\text{-Nat} = R\text{-Conat}$.
5. $R\text{-Nat} = R\text{-Conat} = R\text{-tors}$.
6. $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, donde cada R_i es un BKN -anillo.
7. $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, donde cada R_i es un anillo local izquierdo y perfecto por ambos lados.
8. $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, donde cada R_i es un anillo completo de matrices sobre un anillo local izquierdo y perfecto derecho.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue de la Observación 4.1.2.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se sigue de la observación 4.1.1.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $M, N \in R\text{-Mod}$ y $0 \neq f \in \text{Hom}(M, N)$. Por la Observación 4.1.1, R es un anillo semiartiano izquierdo, así, existe un módulo simple $S \leq \text{Im}(f)$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \iota_1 & & \uparrow \iota_2 \\ f^{-1}(S) & \xrightarrow{f|} & S \end{array}$$

Como S es paraproyectivo, existe un monomorfismo $g : S \longrightarrow f^{-1}(S)$. Por otro lado, como S se sumerge en N y S es parainyectivo, existe un epimorfismo $h : N \longrightarrow S$. Por lo tanto, $\iota_1 \circ g \circ h : N \longrightarrow M$ es un homomorfismo distinto de cero.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8) Se sigue de [2, Theorem 4.7].

Para (4) $\Rightarrow$ (3) notemos que si las retículas $R\text{-Nat}$ y $R\text{-Conat}$ coinciden, dado cualquier módulo M , la clase natural generada por M es la misma clase que la clase conatural generada por M . Así, si S es un submódulo simple de M , entonces

$S \in \xi_{nat}(M) = \xi_{conat}(M)$. Por la descripción de la clase conatural generada por M , tenemos que S es un cociente de M . Por lo tanto, S es un módulo parainyectivo. Análogamente, si S es un cociente simple de M , entonces S está en $\xi_{nat}(M)$, por lo que S se sumerge en M . Así, S es un módulo paraproyectivo.

(5) $\Rightarrow$ (4) Es claro.

□

Capítulo 5

Operadores en retículas

5.1. Operadores en algunas retículas de clases de módulos

Concluimos este trabajo exponiendo algunos resultados sobre una manera en que los prerradicales operan como funciones entre retículas de clases de módulos.

Definición 5.1.1. *Para una clase de módulos $\mathcal{C}$ y un prerradical σ , definimos la clase de módulos $\vec{\sigma}(\mathcal{C}) = \{\sigma(M) : M \in \mathcal{C}\}$.*

Teorema 5.1.1. *Sea σ un prerradical idempotente. Son equivalentes:*

1. σ es exacto izquierdo
2. σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathcal{C}$ una clase hereditaria, $M \in \mathcal{C}$ y $N \leq \sigma(M)$. Vamos a ver que $N \in \sigma(\mathcal{C})$.

Como σ es idempotente, tenemos que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_{\sigma}$ (la clase de torsión asociada al prerradical σ), como la clase anterior es hereditaria se sigue que $N \in \mathbb{T}_{\sigma}$. Así, $\sigma(N) = N$. Por otro lado $N \leq \sigma(M) \leq M$, como $\mathcal{C}$ es hereditaria tenemos que $N \in \mathcal{C}$ por lo tanto $N = \sigma(N) \in \vec{\sigma}(\mathcal{C})$.

2) $\Rightarrow$ 1) Para ver que σ es exacto izquierdo basta con ver que para cualquier módulo M y cualquier submódulo N de M se tiene que $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$. Supongamos

que σ no es un prerradical exacto izquierdo por lo que existe M módulo y N submódulo de M tales que $\sigma(N) < N \cap \sigma(M)$. Consideremos la clase hereditaria generada por M , $\xi_{\leq}(M)$, por hipótesis tenemos que σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq}$ por lo cual $\vec{\sigma}(\xi_{\leq}(M)) \in \mathcal{L}_{\leq}$. Como $\sigma(M) \in \vec{\sigma}(\xi_{\leq}(M))$ se sigue que $N \cap \sigma(M) \in \vec{\sigma}(\xi_{\leq}(M))$ por lo que $N \cap \sigma(M) = \sigma(L)$ para algún $L \leq M$. Pero $\sigma(L) \leq N$, así tenemos que $\sigma(L) = \sigma(\sigma(L)) \leq \sigma(N) < N \cap \sigma(M) = \sigma(L)$ lo cual es una contradicción. Así, σ es un prerradical exacto izquierdo. $\square$

Lema 5.1.1. *Sea σ un prerradical con la propiedad de que para cualquier $M \in R\text{-Mod}$ se tiene que $\vec{\sigma}(\xi_{\leq}(M)) \in \mathcal{L}_{\leq}$. Entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq}$, consideremos $N \leq \sigma(T)$ con $T \in \mathcal{C}$. Como $\vec{\sigma}(\xi_{\leq}(T)) \in \mathcal{L}_{\leq}$ se sigue que $\sigma(T) \in \sigma(\xi_{\leq}(T))$ por hipótesis se sigue que $N \in \sigma(\xi_{\leq}(T))$. Así, $N = \sigma(L)$ con $L \leq T$, como $T \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq}$ se sigue que $L \in \mathcal{C}$ por lo tanto $N = \sigma(L) \in \sigma(\mathcal{C})$. Así, $\sigma(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}_{\leq}$. $\square$

Lema 5.1.2. *Si σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq}$ entonces para cualquier $M \in R\text{-Mod}$ se tiene que $\sigma(\xi_{\leq}(M)) = \xi_{\leq}(\sigma(M))$.*

Demostración. Esta contención es clara $\sigma(\xi_{\leq}(M)) \subseteq \xi_{\leq}(\sigma(M))$. Sea $\sigma(N) \in \sigma(\xi_{\leq}(M))$ con $N \leq M$, como σ es un prerradical tenemos que $\sigma(N) \leq \sigma(M)$, por lo tanto $\sigma(N) \in \xi_{\leq}(\sigma(M))$.

Para la otra contención, sea $N \in \xi_{\leq}(\sigma(M))$, como $N \leq \sigma(M)$ y $\sigma(\xi_{\leq}(M)) \in \mathcal{L}_{\leq}$ se sigue que $N \in \sigma(\xi_{\leq}(M)) \in \mathcal{L}_{\leq}$. Así, $N = \sigma(L)$ con $L \in \xi_{\leq}(M)$ es decir $L \leq M$. Por lo tanto, $N \in \sigma(\xi_{\leq}(M))$. $\square$

Corolario 5.1.1. *Supongamos que para cualquier $M \in R\text{-Mod}$ se tiene que $\sigma(\xi_{\leq}(M)) \in \mathcal{L}_{\leq}$. Entonces $\sigma(\xi_{\leq}(M)) = \xi_{\leq}(\sigma(M))$.*

Corolario 5.1.2. *Tenemos que σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq}$ si y sólo si $\sigma \circ \xi_{\leq} = \xi_{\leq} \circ \sigma$.*

Definición 5.1.2. *Decimos que un prerradical σ se escinde si para cualquier módulo M , $\sigma(M) \leq_{\oplus} M$.*

Lema 5.1.3. *Sea σ un prerradical exacto izquierdo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\mathbb{T}_\sigma \in \mathcal{L}_E$.
2. Para cualquier módulo inyectivo Q se cumple $\sigma(Q) \leq_\oplus Q$ (es un sumando directo).
3. Para cualquier módulo M se cumple que $E(\sigma(M)) = \sigma(E(M))$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea Q un módulo inyectivo, como σ es un prerradical idempotente se sigue que $\sigma(Q) \in \mathbb{T}_\sigma$, por 1) tenemos que $\mathbb{T}_\sigma \in \mathcal{L}_E$ con lo cual $E(\sigma(Q)) \in \mathbb{T}_\sigma$. Por otro lado, $\sigma(Q) \leq Q$, por lo tanto $E(\sigma(Q)) \leq Q$, pues Q es inyectivo.

Así, $E(\sigma(Q)) = \sigma(E(\sigma(Q))) \leq \sigma(Q) \leq E(\sigma(Q))$ pues $E(\sigma(Q)) \in \mathbb{T}_\sigma$. Por lo tanto, $\sigma(Q) = E(\sigma(Q))$ con lo que $\sigma(Q)$ es inyectivo y con ello $\sigma(Q) \leq_\oplus Q$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $M \in \mathbb{T}_\sigma$, vamos a demostrar que $E(M) \in \mathbb{T}_\sigma$ es decir $\sigma(E(M)) = E(M)$.

Por hipótesis sabemos que $\sigma(E(M)) \leq_\oplus E(M)$, así $\sigma(E(M))$ es inyectivo. Por otro lado, $M \leq E(M)$ implica que $M = \sigma(M) \leq \sigma(E(M))$, al ser $\sigma(E(M))$ inyectivo se sigue que $E(M) \leq \sigma(E(M))$, por lo tanto $E(M) = \sigma(E(M))$.

3) $\Rightarrow$ 2) Sea Q un módulo inyectivo, tenemos que $E(\sigma(Q)) = \sigma(E(Q)) = \sigma(Q) \leq Q$ por lo tanto $\sigma(Q)$ es inyectivo y así $\sigma(Q) \leq_\oplus Q$.

1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow$ 3) Sea M un módulo. Por 2) tenemos que $\sigma(E(M)) \leq_\oplus E(M)$, como $M \leq E(M)$ se tiene que $\sigma(M) \leq \sigma(E(M))$, por ser este último inyectivo tenemos que $E(\sigma(M)) \leq \sigma(E(M))$. Así, existe $K \leq E(M)$ tal que $E(\sigma(M)) \oplus K = \sigma(E(M))$. Aplicando el prerradical σ obtenemos $\sigma(E(M)) = \sigma(\sigma(E(M))) = \sigma(E(\sigma(M)) \oplus K) = \sigma(E(\sigma(M))) \oplus \sigma(K) = E(\sigma(M)) \oplus \sigma(K)$, que se sigue porque $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$ y de 1) $E(\sigma(M)) \in \mathbb{T}_\sigma$.

Vamos a demostrar que $\sigma(K) = 0$ para concluir que $\sigma(E(M)) = E(\sigma(M))$. Afir-
mamos que $K = 0$.

Como tenemos que $\sigma(E(M)) = E(\sigma(M)) \oplus K$ se sigue que $E(\sigma(M)) \cap K = 0$, así $\sigma(M) \cap K = 0$. También tenemos que $K \leq \sigma(E(M))$ por lo tanto $K \cap M \leq$

$\sigma(E(M)) \cap M = \sigma(M)$, pues σ es un prerradical exacto izquierdo, como $K \cap M \leq K$ se sigue que $K \cap M \leq \sigma(M) \cap K = 0$ por lo tanto $K \cap M = 0$. Tenemos que $M \leq_e E(M)$ y $K \leq E(M)$, del hecho de que $K \cap M = 0$ se sigue que $K = 0$ por lo cual $\sigma(K) = 0$. $\square$

Definición 5.1.3. *Un prerradical exacto izquierdo que cumpla alguna de las condiciones equivalentes del lema previo se llama estable.*

Lema 5.1.4. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo estable entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_E$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_E$, $M \in \mathcal{A}$ y $\sigma(M) \in \sigma(\mathcal{A})$. Como σ cumple 3) del lema previo se sigue que $E(\sigma(M)) = \sigma(E(M)) \in \sigma(\mathcal{A})$ pues $E(M) \in \mathcal{A}$. $\square$

Corolario 5.1.3. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo estable entonces σ define un operador en $R\text{-Nat} = \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$.*

Definición 5.1.4. *Un prerradical σ satisface la condición *ext* si para cualquier sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow T \rightarrow \sigma(L) \rightarrow 0$ existe $K \in R\text{-Mod}$ tal que $T = \sigma(K)$.*

Corolario 5.1.4. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo estable entonces σ cumple la condición *ext*.*

Demostración. Sea $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow T \rightarrow \sigma(L) \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta, consideremos la clase natural $\xi_{nat}(\{N, L\})$. Por el corolario anterior tenemos que $\sigma(\xi_{nat}(\{N, L\})) \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$, pero cualquier clase natural es cerrada bajo extensiones, por lo tanto $T \in \sigma(\xi_{nat}(\{N, L\}))$. Así, $T = \sigma(K)$ con $K \in \xi_{nat}(\{N, L\})$. $\square$

Lema 5.1.5. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo que cumple *ext* entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, ext}$.*

Demostración. Por ser σ un prerradical exacto izquierdo tenemos que si $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, ext}$ entonces $\sigma(\mathcal{C})$ es una clase hereditaria, falta ver que es cerrada bajo extensiones.

Sean $N, L \in \mathcal{C}$ y $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow T \rightarrow \sigma(L) \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta, por demostrar que $T \in \sigma(\mathcal{C})$.

Tenemos que $\sigma(N) \leq N$, $\sigma(L) \leq L$ y $N, L \in \mathcal{C}$ por lo tanto $\sigma(N), \sigma(L) \in \sigma(\mathcal{C})$. Así, $T \in \mathcal{C}$ pues es una clase cerrada bajo extensiones. Como σ cumple $(*)$, existe K tal que $T = \sigma(K)$, por último tenemos que $\sigma(T) = \sigma(\sigma(K)) = \sigma(K) = T \in \sigma(\mathbb{C})$ pues σ es idempotente. Así, $\sigma(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}_{\leq, ext}$. $\square$

Ahora veamos un ejemplo de un prerradical que cumpla *ext*.

Lema 5.1.6. *Si σ es un radical idempotente entonces σ cumple *ext*.*

Demostración. Sea $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow T \rightarrow \sigma(L) \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta, como σ es idempotente se tiene que $\sigma(N), \sigma(L) \in \mathbb{T}_\sigma$, pero la clase de torsión de σ es cerrada bajo extensiones por lo que $T \in \mathbb{T}_\sigma$. Por lo tanto $T = \sigma(T)$. $\square$

Corolario 5.1.5. *Si σ es un radical exacto izquierdo entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, ext}$.*

Proposición 5.1.1. *Si σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, ext}$ entonces σ cumple *ext*.*

Demostración. Sean N y L módulos tales que $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow T \rightarrow \sigma(L) \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta. Consideremos $\xi_{ext}(\{N, L\}) \in \mathcal{L}_{ext}$, como σ define un operador en $\mathcal{L}_{ext}$ se sigue que $\sigma(\xi_{ext}(\{N, L\})) \in \mathcal{L}_{ext}$. Como $\sigma(N), \sigma(L) \in \sigma(\xi_{ext}(\{N, L\}))$ tenemos que $T \in \sigma(\xi_{ext}(\{N, L\}))$, por lo tanto $T = \sigma(K)$ con $K \in \sigma(\xi_{ext}(\{N, L\}))$. Así, σ cumple *ext*. $\square$

Definición 5.1.5. *Un prerradical σ preserva epimorfismos si para cualquier epimorfismo $f : M \rightarrow N$ se tiene que $\sigma(f) : \sigma(M) \rightarrow \sigma(N)$ es un epimorfismo.*

Lema 5.1.7. *Si σ preserva epimorfismos entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_{\rightarrow}$.*

Demostración. Sea $\sigma(M) \in \sigma(\mathcal{C})$, con $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\rightarrow}$, y $g : \sigma(M) \rightarrow T$, con $T \neq 0$.

Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo, sin pérdida de generalidad $T \leq N$ y h es la inclusión. Como f es un epimorfismo y σ preserva epimorfismos tenemos que $\sigma(f) : \sigma(M) \rightarrow \sigma(N)$ es un epimorfismo. Así, $\sigma(N) = \sigma(f)(\sigma(M)) = f(\iota(\sigma(M))) = h(g(\sigma(M))) = h(T) = T$ por lo tanto $T = \sigma(N)$. Pero $N \in \mathcal{C}$ pues es un clase cohereditaria, así $T \in \sigma(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\sigma(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}_{\rightarrow}$.

$$\begin{array}{ccc}
\sigma(M) & \xrightarrow{\iota} & M \\
g \downarrow & & \downarrow f \\
T & \xrightarrow{h} & N
\end{array}$$

□

Corolario 5.1.6. *Si σ es un prerradical exacto entonces σ define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus} = R\text{-}Wis$.*

Ya demostramos que un radical exacto izquierdo define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, ext, \oplus}$, el siguiente corolario es interesante.

Corolario 5.1.7. *Si σ es un radical exacto entonces σ define un operador en*

$$R\text{-}tors = \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus, ext}.$$

La siguiente definición es otra manera de ver a los prerradicales como funciones.

Definición 5.1.6. *Consideremos un prerradical σ y una clase de módulos $\mathcal{C}$, definimos $\sigma^{-1}(\mathcal{C}) = \{M : \sigma(M) \in \mathcal{C}\}$.*

Proposición 5.1.2. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo entonces σ^{-1} define un operador en $\mathcal{L}_{\leq, ext, \oplus}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, ext, \oplus}$, vamos a demostrar que $\sigma^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}_{\leq, ext, \oplus}$.

Sea $N \leq M$ con $\sigma(M) \in \mathcal{C}$, como σ es un prerradical tenemos que $\sigma(N) \leq \sigma(M)$ y como $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria se sigue que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$ por lo tanto $N \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$.

Consideremos una familia de módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ en $\sigma^{-1}(\mathcal{C})$, así $\sigma(M_i) \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I$, como σ es un prerradical se sigue que $\sigma(\oplus M_i) = \oplus \sigma(M_i) \in \mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias. Así, $\oplus M_i \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$. Notemos que hasta este punto sólo se ha usado que σ es un prerradical.

Sean $N, L \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$ y $0 \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow L \rightarrow 0$ una sucesión exacta, como σ es un prerradical exacto izquierdo se sigue que $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow \sigma(T) \rightarrow \sigma(L)$ es una sucesión exacta. Sea $g : T \rightarrow L$ el epimorfismo, por lo tanto podemos factorizar $\sigma(g)$ a través de $Im(\sigma(g))$ obteniendo una sucesión exacta corta $0 \rightarrow \sigma(N) \rightarrow \sigma(T) \rightarrow$

$Im(\sigma(g)) \rightarrow 0$. Por hipótesis, $N, L \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$, con lo que $\sigma(N), \sigma(L) \in \mathcal{C}$ y como la clase es hereditaria se sigue que $Im(\sigma(g)) \in \mathcal{C}$ pero como también es cerrada bajo extensiones obtenemos que $\sigma(T) \in \mathcal{C}$ por lo tanto $T \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$.

Observamos que σ^{-1} preserva ínfimos. $\square$

Proposición 5.1.3. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo estable entonces σ^{-1} define un endomorfismo de retículas en $R\text{-Nat} = \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$.*

Demostración. Tenemos que para cualquier $M \in R\text{-Mod}$ se cumple que $\sigma(E(M)) = E(\sigma(M))$, pues el prerradical es estable. Así, si $M \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$, con $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus, E}$ entonces $\sigma(M) \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $\sigma(E(M)) = E(\sigma(M)) \in \mathcal{C}$. Así, $E(M) \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$.

Es claro que σ^{-1} preserva ínfimos, vamos a demostrar que también preserva supremos.

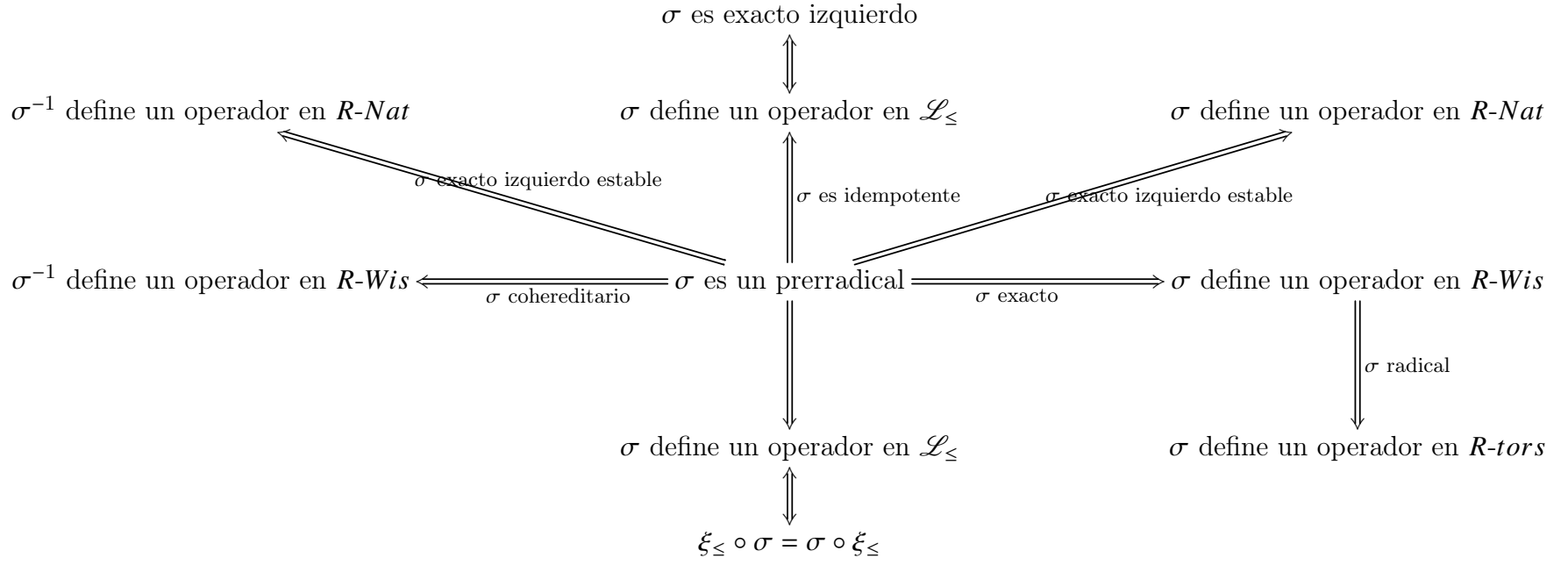
Consideremos una familia de clases naturales $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$. Sea $M \in \sigma^{-1}(\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i)$, así $\sigma(M) \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$, por lo tanto existe una familia de módulos $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ que cumple que $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \sigma(M)$, donde $N_i \in \mathcal{C}_i$ para todo $i \in I$. Como $N_i \leq \sigma(M)$ y σ es un prerradical exacto izquierdo se sigue que $\sigma(N_i) = N_i$, por lo tanto $\sigma(N_i) \in \mathcal{C}_i$ con lo que $N_i \in \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$. Así, $\sigma(M) \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$.

Consideremos un pseudocomplemento L de $\sigma(M)$ en M , así $\sigma(M) \oplus L \leq_e M$ y por lo tanto $\sigma(L) = 0$. Por lo anterior, tenemos que si $\sigma(M) \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$ entonces $\sigma(M) \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$. Falta ver que $\sigma(M), L \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$ para demostrar que $M \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$. Es claro que $L \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$ pues $\sigma(L) = 0 \in \mathcal{C}_i$ para cualquier $i \in I$. Tenemos que $\sigma(M) \in \sigma^{-1}(\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i)$, pues ya demostramos que es una clase natural y $M \in \sigma^{-1}(\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i)$, por lo tanto $\sigma(M) \in \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(\mathcal{C}_i)$. $\square$

Proposición 5.1.4. *Si σ es un prerradical cohereditario entonces σ^{-1} define un operador en $R\text{-Wis}$.*

Demostración. Por ser prerradical ya tenemos que si $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \rightarrow, \oplus}$ entonces $\sigma^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{L}_{\leq, \oplus}$. Falta ver que $\sigma^{-1}(\mathcal{C})$ es una clase cohereditaria.

Sea $M \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$ y $f : M \rightarrowtail N$, como σ es cohereditario se sigue que $\sigma(f) : \sigma(M) \rightarrowtail \sigma(N)$. Del hecho de que $\sigma(M) \in \mathcal{C}$, obtenemos que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $N \in \sigma^{-1}(\mathcal{C})$. $\square$



Bibliografía

- [1] Alvarado-García, A.; Cejudo-Castilla, C.; Rincón-Mejía, H.; Vilchis-Montalvo, I. F.; Zorrilla-Noriega, M. *On Boolean Lattices of Module Classes*, Algebra Colloquium 25 : 2 (2018) 285-294
- [2] Alvarado-García, A., Cejudo-Castilla, C., Rincón-Mejía, H., Vilchis-Montalvo, F.: *Pseudocomplements and strong pseudocomplements in lattices of module classes*. J. Algebra Appl. 17(1), 1850016 (2018)
- [3] Alvarado-García, Alejandro; Cejudo-Castilla, César; Rincón-Mejía, Hugo Alberto & Vilchis Montalvo, Ivan Fernando: *Rings for Which the Lattice of Hereditary Torsion Theories and the Lattice of Natural Classes are Isomorphic*, Communications in Algebra, 41:11, 4089-4097,(2013) DOI: 10.1080/00927872.2012.689589
- [4] Alvarado García, A.; Rincón-Mejía Hugo; Ríos Montes, José (2001). *On the lattices of natural and conatural classes in R-Mod*, 29:2, 541-556.
- [5] Alvarado García, A.; Rincón-Mejía Hugo; Ríos Montes, José (2001). *On some lattices of module classes*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 5, No. 1, (2006), 105-117.
- [6] Anderson, F. W., Fuller, K. R.; *Rings and Categories of Modules*, second edition; New York: Springer-Verlag, 1992
- [7] Bican, L.; Kepka T. and Němec, P. *Rings, Modules and Preradicals* (Marcel Dekker, New York, 1982).

- [8] Chiba, Katsuo; Tominaga, Hisao. *On strongly regular rings*. Proc. Japan Acad. 49 (1973), no. 6, 435–437.
- [9] Cozzens, J. H., *Homological properties of the ring of differential polynomials*, Bulletin of the American Mathematical Society **76**(1), 75–79, 1970.
- [10] Domínguez-López, R.; Garrido-Jiménez, O.; Rincón-Mejía, H.; Zorrilla-Noriega, M. *On Retractability and its relationships with lattices associated to a ring*, Hacet. J. Math. Stat. Volumen 50(4)(2021) 1079-1093.
- [11] Facchini, A. ;Nazemian, Z. *Modules with chain conditions up to isomorphism*. Journal of Algebra 453 (2016) 578-601.
- [12] Fernández-Alonso, R. ;Raggi, F. ; Ríos, J.; Rincón-Mejía, H. ; Signoret C. *The lattice structure of preradicals II*. Partitions, J. Algebra Appl. 1 (2) (2002) 201–214.
- [13] Garrido-Jiménez, O. *Caracterizaciones de anillos por medio de propiedades de finitud en sus retículas de clases de módulos asociadas*. Tesis UNAM (2022).
- [14] J. Dauns, Direct Sums and Subdirect Products. In *Methods in Module Theory*; Abrams, G.; Haetner, J.; Rangaswamy, K. M.; Marcel Dekker: New York, 1992; 39-65.
- [15] J. Dauns, Y. Zhou, Classes of Modules, Pure and Applied Mathematics, 281, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [16] J. Dauns, Module Types, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol 27, 2, (1997).
- [17] J. S. Golan, Torsion Theories, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 29 (Longman Scientific and Technical, Harlow; John Wiley and Sons, New York, 1986)
- [18] Koşan, M. Tamer & Žemlička, Jan (2014) *Mod-Retractable Rings*, Communications in Algebra, 42:3, 998-1010.

- [19] Ohtake, Koichiro (1980) *Commutative rings of which all radicals are left exact*, Communications in Algebra, 8:16, 1505-1512.
- [20] Hugo Alberto Rincón-Mejía, José Patricio Sánchez-Hernández, Martha Lizabeth Shaid Sandoval-Miranda & Manuel Zorrilla-Noriega (2019) *On compactness and cocompactness conditions for R -tors, R -pr and (big) lattices of classes of modules*, Communications in Algebra, 47:12, 5240-5260, DOI: 10.1080/00927872.2019.1617872.
- [21] Rincón-Mejía, Hugo & Zorrilla-Noriega, Manuel. (2013). *On some relations between the lattices R -nat, R -conat and R -tors and the rings they characterize*. Journal of Algebra and Its Applications. 12.
- [22] Stenström, B.; *Rings of Quotients*; Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975
- [23] Wisbauer, R.; *Foundations of Module and Ring Theory*; Gordon and Breach Science Publishers, Reading.
- [24] Zhou, Y. *The lattice of natural classes of modules*. Communications in Algebra, 24(5), 1637-1648 (1996).