



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SUPERFICIES TEMPORALES CON UNA DIRECCIÓN NULA CANÓNICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
FERNANDO VALDEZ ORTEGA

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, JURQUILLA.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JOSÉ MATÍAS NAVARRO SOZA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UADY.

DR. EUGENIO GARNICA VIGIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), a través de la beca 757286. También agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, con clave PAPIIT IN102423, por su respaldo. Quiero expresar mi gratitud a DGAPA-UNAM por la beca recibida, a mi familia por su apoyo incondicional y a mis sinodales, quienes con paciencia y esmero revisaron mi tesis.

SUPERFICIES TEMPORALES CON UNA DIRECCIÓN NULA CANÓNICA

Fernando Valdez Ortega

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Conceptos básicos de Geometría de Lorentz	1
1.2. Superficies con DPC, regladas y casi umbílicas	4
1.3. Campo radial, campo CC y producto alabeado	9
1.4. Gráfica e imagen inversa de funciones	13
2. DNC respecto de un campo paralelo	17
2.1. Propiedades básicas y primeros resultados	17
2.2. Relaciones entre curvaturas	22
2.3. Construcción de superficies con DNC	27
2.4. HDNC respecto a un campo paralelo	35
3. DNC respecto de un campo CC	37
3.1. Propiedades básicas	37
3.2. DNC Respecto de un campo radial	41
3.3. DNC en el espacio de De Sitter	44
3.4. DNC en un producto alabeado	47
3.5. SDNC como imagen inversa de una función	54

Símbolos

M	Variedad de Lorentz de dimensión tres o dimensión n
N	Superficie de Lorentz o variedad de Lorentz de dimensión $n - 1$
Σ	Superficie temporal o hipersuperficie temporal
$N \times \mathbb{R}$	Variedad producto Lorentziana de dimensión tres o dimensión n
g_N	Métrica de N
g	Métrica de Σ
$\bar{\nabla}$	Conexión de Levi-Civita de M
∇^N	Conexión de Levi-Civita de N
∇	Conexión de Levi-Civita de Σ
∂_t	Campo vectorial tangente al factor $\mathbb{R}$ del producto $N \times \mathbb{R}$
$\mathfrak{F}(\tilde{M})$	Conjunto de todas las funciones $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que son C^∞
$\text{grad}f$	Gradiente de $f \in \mathfrak{F}(M)$ tangente a M
∇f	Gradiente de $f \in \mathfrak{F}(N)$ tangente a N

Introducción

Consideremos una superficie con métrica no degenerada inmersa en un espacio ambiente riemanniano o semi riemanniano de dimensión tres. Dado un campo vectorial Z del espacio ambiente, existe una descomposición natural $Z = Z^\top + Z^\perp$, donde $Z^\top$ denota la proyección del campo vectorial Z sobre el espacio tangente a la superficie, y $Z^\perp$ es la proyección en su espacio normal.

Conceptos como superficies de ángulo constante con respecto a un campo vectorial de norma constante Z pueden describirse en términos de tal descomposición. Estas superficies son aquellas en las que el ángulo entre cada plano tangente de la superficie y Z es constante. Aquí, Z y $Z^\perp$ también tienen norma constante. El estudio de este tipo de superficies fue introducido en [7] para $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como espacio ambiente, donde Z es ∂_t . También se investigó en diferentes espacios ambiente como en el espacio euclidiano de dimensión tres $\mathbb{E}^3$ en [1, 19]. Este tipo de superficies son modelos que describen algunos fenómenos físicos de interfaces en cristales líquidos, ver [1]. Las superficies de ángulo constante en $\mathbb{R}^3$ generalizan el concepto de hélice, que son curvas cuya línea tangente forma un ángulo constante con un vector fijo de $\mathbb{R}^3$, véase [5, 26]. Más tarde se siguió el desarrollo de estas superficies en diferentes espacios ambiente, como por ejemplo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en [8], y en el grupo de Heisenberg en [11]. Posteriormente, se estudió este concepto para hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$ [15]. De manera natural, se realizaron trabajos en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$, donde estas se definen como aquellas superficies espaciales cuyo campo vectorial normal unitario forma un ángulo hiperbólico constante con un vector de tipo tiempo del ambiente. Se puede consultar en [18, 16].

Otro concepto que ha sido estudiado en la literatura son las superficies con dirección principal canónica (DPC), que son superficies en las cuales $Z^\top$ es una dirección principal; es decir, el campo vectorial $Z^\top$ es un vector propio del operador de forma. Estas superficies tuvieron sus inicios en [9], donde Dillen, Munteanu y Van der Veken las estudiaron inmersas en el espacio ambiente $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. También se exploraron superficies con dirección principal canónica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ [10]. En ambos trabajos, la dirección se eligió como un vector unitario

tangente a $\mathbb{R}$. Posteriormente, se investigó la naturaleza de estas superficies en el espacio euclidiano y semi-euclidianos, véase [20, 12, 21].

Como era de esperar, se exploraron hipersuperficies con DPC considerando diferentes espacios ambientes [6, 14]. Un ejemplo común de este tipo de hipersuperficies son las hipersuperficies rotacionales en espacios euclidianos, que tienen dirección principal canónica con respecto a un campo vectorial paralelo a su eje de rotación [13].

Más tarde, en [2], Bang-Yen Chen y Sharief Deshmukh estudiaron superficies, en el espacio euclidiano $\mathbb{E}^m$, con un campo vectorial *conforme canónico*. Esto es, dado un campo vectorial Z y una subvariedad de $\mathbb{E}^n$, entonces $Z^\top$, la parte tangente de Z a la subvariedad, es un campo vectorial conforme. Caracterizaron tales subvariedades y mostraron algunas aplicaciones.

Inspirándose en estos estudios, a Gabriel Ruiz y Víctor Hugo Patty les surgió la idea de cuestionar el carácter causal de $Z^\top$. Para ello, consideraron superficies temporales inmersas en el espacio de Minkowski de dimensión tres y cuatro. Analizaron cuándo la proyección $Z^\top$, de un campo tipo espacio Z , es tipo luz. Así surge el concepto de superficie con una *dirección nula canónica* (DNC). Este concepto es estudiado en [25]. Uno de los hallazgos destacados es que las superficies con DNC inmersas en $\mathbb{R}_1^3$ resultan ser mínimas y planas.

En tiempos recientes, Víctor Hugo Patty en [24] estudió las superficies espaciales en el espacio de Minkowski de dimensión cuatro con *dirección normal nula canónica* (DNNC). Esto es, una superficie espacial en $\mathbb{R}_1^4$ tiene una dirección normal nula canónica respecto de un campo vectorial espacial $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^4)$ si la parte normal de Z sobre la superficie, es tipo luz. En este trabajo se describen las propiedades geométricas de estas superficies y se obtienen algunas caracterizaciones. Por ejemplo, el autor muestra que bajo ciertas condiciones las superficies con DNNC respecto de Z pueden ser parametrizadas por $\phi(x, y) = \alpha(y) + xZ^\perp(y)$, donde α es una curva en $\mathbb{R}_1^3$ y $Z^\top(y)$ denota la restricción de $Z^\top$ en α .

El objetivo de este trabajo es extender el estudio realizado en [25], considerando ahora diferentes espacios ambiente y campos vectoriales tipo espacio, por ejemplo:

Espacio ambiente	Campo vectorial
$N \times \mathbb{R}$	paralelo ∂_t
$\mathbb{R}_1^3$	radial
$\mathbb{S}_1^3$	cerrado conforme
M	cerrado conforme
$N \times_\rho \mathbb{R}$	cerrado conforme $\rho\partial_t$

Donde M es una variedad de Lorentz de dimension tres, N es una superficie de Lorentz y $\mathbb{S}_1^3$ es el espacio de De Sitter de dimensión tres.

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos cuyas descripciones presentamos a continuación:

En el capítulo 1, iniciamos con los preliminares que se utilizarán a lo largo de este trabajo y que nos ayudarán en su desarrollo. Este está dividido en cuatro secciones.

Comenzamos en la sección uno con los conceptos básicos de Geometría de Lorentz, donde se describen nociones como la Fórmula de Gauss, la Ecuación de Gauss, la segunda forma fundamental, el operador de forma, entre otras.

En la sección dos se abordan las superficies con dirección principal canónica (DPC), superficies regladas y superficies casi umbílicas (CU). Estos tres tipos de superficies, como se verá a lo largo del trabajo, guardan estrecha relación con las superficies con DNC. Daremos énfasis a las superficies CU, las cuales nos ayudarán a generar ejemplos gracias al Teorema 1.36.

En la sección tres se abordan las definiciones, propiedades y ejemplos de los conceptos de campo vectorial radial, cerrado conforme y productos alabeados. Además, mostramos cómo se relacionan entre sí (ver Propositiones 1.40 y 1.52).

Finalmente, la cuarta y última sección aborda las superficies que pueden describirse como gráficas de funciones y como imagen inversa de una función. Remarcamos algunas características de interés y determinamos los criterios para definir el carácter causal de cada tipo de superficie.

En el capítulo 2, abordaremos las superficies con DNC con respecto al campo vectorial paralelo ∂_t , inmersas en $N \times \mathbb{R}$, donde N es una superficie de Lorentz.

En la sección uno, empezaremos con propiedades elementales como el cálculo del operador de forma, la segunda forma fundamental, el vector de curvatura media y la descripción de la conexión de Levi-Civita. De las primeras propiedades que encontramos son por ejemplo que este tipo de superficies son mínimas y regladas, cuyas reglas son geodésicas tipo luz del espacio ambiente y líneas de curvatura de Σ . También presentamos un resultado que consiste en cinco condiciones equivalentes que se satisfacen en una superficie Σ con DNC respecto a ∂_t , las cuales son:

1. *El operador de forma A_{∂_t} es diagonalizable en $p \in \Sigma$.*
2. *Σ es totalmente geodésica.*
3. *$II(W, W) = 0$, donde $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ es un campo tipo luz.*
4. *∂_t es un campo vectorial de Killing.*
5. *Σ es umbílica.*

Además, si la superficie satisface cualquiera de estas condiciones, entonces también es plana. Posteriormente, en la sección dos, se desarrolla la relación que hay entre la curvatura Gaussiana K de una superficie Σ con DNC, la curvatura seccional K del espacio ambiente $N \times \mathbb{R}$ y la curvatura Gaussiana K_N de la superficie N . Se muestra primero que $K = K_N$ haciendo uso de la Ecuación de Gauss. Incluimos la Proposición 2.15 que fue demostrada en [25], a saber:

Sea N una superficie de Lorentz y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Consideremos la superficie obtenida como la gráfica de la función

$$\Sigma = \{(u, f(u)) \in N \times \mathbb{R} : (u) \in N\},$$

con métrica inducida. Entonces, Σ tiene una dirección nula canónica respecto a ∂_t si y solo si ∇f es tipo luz.

Con ayuda de esta proposición demostramos el Teorema 2.17 el cual dice:

Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Sea Σ una superficie temporal que es imagen de $\psi : N \rightarrow N \times \mathbb{R}$ definido por $\psi(u) = (u, f(u))$, con métrica inducida $g = g_N + df^2$. Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces $K = K_N$, donde K y K_N denotan la curvatura Gaussiana de Σ y N respectivamente.

Esto nos lleva a la conclusión de que las tres curvaturas son iguales, a lo largo de planos tangentes a Σ . En particular, si la superficie está inmersa en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ entonces su curvatura Gaussiana es constante igual a uno.

En la sección tres, aplicamos la Proposición 2.15 para construir ejemplos de superficies con DNC respecto a ∂_t , como gráfica de una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ con gradiente tipo luz. Primero exploramos el caso en que la métrica de N es de la forma $g = -\alpha(u, v)^2 du^2 + \beta(u, v)^2 dv^2$, que es el caso más general. Posteriormente, demostramos la existencia de tales superficies, es decir, que existe un abierto $U \subseteq N$ y una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que ∇f es tipo luz. Luego consideramos cuando la métrica de N tiene la forma $g = -\alpha(u)^2 du^2 + \beta(u)^2 dv^2$ y con esto se deducen ejemplos específicos para cuando $N = \mathbb{S}_1^2$ y $N = \mathbb{R}_1^2$.

Finalmente, en la sección cuatro, hacemos una generalización de la Proposición 2.15 para hipersuperficies inmersas en $N \times \mathbb{R}$, donde N es una variedad de Lorentz de dimensión n , e incluimos un ejemplo.

En el Capítulo 3, se estudian las superficies temporales Σ , inmersas en una variedad de Lorentz tridimensional M , con DNC respecto a un campo vectorial cerrado conforme (CC), Definición 1.41.

En la primera sección, comenzamos desarrollando los conceptos necesarios para este capítulo, similarmente al Capítulo 2. Entre las propiedades está que el vector de curvatura media siempre es distinto de cero, es decir, las

superficies con DNC respecto a un campo vectorial CC nunca son mínimas, aunque conservan la propiedad de ser regladas.

En la segunda sección, estudiamos las superficies con DNC en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ con respecto de un campo vectorial radial, que es el caso particular de campo CC con $\nu = 1$. Mostramos que estas superficies son casi umbílicas (CU), ver Definición 1.22. Gracias a este hecho y al Teorema 1.36 (véase [3]), logramos establecer una condición para determinar qué superficies CU son de DNC respecto a un campo radial, a saber:

Sea Σ una superficie temporal casi umbílica que es imagen de

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + vT(u),$$

con α y T como en el Teorema 1.36. Si $\langle \alpha, T \rangle = 0$, entonces Σ tiene dirección nula canónica respecto a un campo vectorial radial Z .

Con esto, logramos establecer una forma de construir ejemplos de estas superficies.

Posteriormente, en la sección tres, nos enfocamos en estudiar superficies con DNC inmersas en el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ con respecto a un campo CC. Aquí deducimos que las superficies bajo estas características no son de curvatura media constante ni planas.

En la sección cuatro, estudiamos las superficies con DNC en un producto alabeado de la forma $I \times_\rho N$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un abierto y N es una superficie de Lorentz, respecto a un campo CC. Aquí logramos una extensión de la Proposición 2.15, a saber:

Sea N una superficie de Lorentz y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Consideremos la superficie obtenida como la gráfica de la función f

$$\Sigma = \{(f(u), u) \in I \times_\rho N \mid (u) \in N\},$$

con métrica inducida $g = df^2 + \rho^2(t)g_N$. Entonces, Σ tiene una dirección nula canónica respecto a $Z = \rho\partial_t$ si y solo si ∇f es tipo luz.

Esto nos sirve para construir ejemplos de estas superficies, de manera similar al proceso de construcción del Ejemplo 2.25. Además, encontramos que la relación entre la curvatura Gaussiana de Σ y la curvatura seccional de N , que puede expresarse como sigue: *Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Sea Σ una superficie temporal que es imagen de $\psi : N \rightarrow I \times_\rho N$ definida por $\psi(u) = (f(u), u)$, cuya métrica inducida es $g = df^2 + \rho^2 g_N$. Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a $\rho\partial_t$, entonces $K = \frac{1}{\rho^2}K_N$. Donde K y K_N denotan la curvatura Gaussiana de Σ y N respectivamente.*

Finalmente, en la sección cinco, abordamos las superficies con DNC vistas como imagen inversa de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Aquí determinamos una

condición que debe cumplir una superficie, que es la imagen inversa de una función, para tener DNC respecto a un campo vectorial espacial del espacio ambiente M . De esto, obtenemos condiciones para que estas superficies tengan DNC respecto a un campo vectorial: paralelo, radial y cerrado conforme. También obtenemos fórmulas para calcular la curvatura Gaussiana y la curvatura media de estas superficies.

Antes de comenzar con la exposición de esta tesis es necesario hacer algunas observaciones:

- La mayor parte de la teoría de los capítulos uno, dos y tres estaba basada en [23], por lo que la notación, definiciones, proposiciones y teoremas serán análogos. De cualquier forma en cada sección se irá fijando la notación que se utilizará. En el caso de varias demostraciones solo se darán referencias. Si se considera importante la demostración para el desarrollo de conceptos posteriores o no aparece explícitamente en la bibliografía consultada, entonces se incluirá en esta tesis.
- En este trabajo se asumirá la teoría referente a la geometría lorentziana. Por ejemplo se omitirán conceptos como: variedades y funciones C^∞ (por ende se omitirá el símbolo C^∞ cada vez que se mencione el término variedad y función), campos vectoriales, conexión de Levi-Civita, tensores, gradiente, hessiano, divergencia, etcétera.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo, asumiremos la mayor parte de la teoría de Geometría de Lorentz. A continuación, se presentan los conceptos más relevantes que serán fundamentales para el desarrollo de la tesis.

1.1. Conceptos básicos de Geometría de Lorentz

Se utilizará para denotar una superficie (hipersuperficie) temporal inmersa en M , donde M es una variedad de Lorentz de dimensión tres (dimensión n). Los símbolos ∇ y $\bar{\nabla}$ representarán las conexiones de Levi-Civita de M y Σ , respectivamente. Asimismo, R y $\bar{R}$ se utilizarán para simbolizar los tensores de curvatura de M y Σ , respectivamente.

Proposición 1.1. Sean X, Y en $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Se denomina *Fórmula de Gauss* a la expresión

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

donde $\nabla_X Y$ es la parte tangente de $\bar{\nabla}_X Y$ y $II(X, Y)$ representa la parte normal de $\bar{\nabla}_X Y$, la cual es llamada *segunda forma fundamental*.

Proposición 1.2. Dados X, Y, Z y W en $\mathfrak{X}(\Sigma)$, se satisface la siguiente relación

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

A esta ecuación se le llama *Ecuación de Gauss*.

Corolario 1.3. Si los vectores v y w forman una base de un plano no degenerado tangente a Σ , entonces

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w) \rangle - \langle II(v, w), II(v, w) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

Definición 1.4. Sea ξ campo vectorial normal unitario en $\Sigma \subset M$. El $(1, 1)$ -tensor A en Σ tal que

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle II(X, Y), \xi \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, es llamado *operador de forma* de $\Sigma \subset M$ relativo de ξ .

Observación 1.5. Sea A_ξ el operador de forma relativo a ξ , entonces se satisface

$$-A_\xi(X) = (\bar{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Proposición 1.6. Para todo X, Y y Z en $\mathfrak{X}(\Sigma)$ se satisface

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp II)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp II)(X, Z),$$

donde

$$(\nabla_X^\perp II)(Y, Z) = \nabla_X^\perp II(Y, Z) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z).$$

A esta ecuación se le llama *Ecuación de Codazzi*.

Corolario 1.7. Consideremos a M con curvatura seccional constante. Entonces:

1. La Ecuación de Codazzi para $\Sigma \subset M$ es

$$(\tilde{\nabla}_X II)(Y, Z) = (\tilde{\nabla}_Y II)(X, Z) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

2. Si Σ es una hipersuperficie en M con operador de forma A_ξ , entonces

$$(\nabla_X A_\xi)(Y) = (\nabla_Y A_\xi)(X) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Definición 1.8. Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ se dice que es de *Killing*, si la derivada de Lie del tensor métrico en la dirección de Z se anula, es decir, $L_Z \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica en M .

Proposición 1.9. Un campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es de Killing si y solo si $\langle \bar{\nabla}_X Z, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y Z, X \rangle = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.10. Sea $p \in \Sigma \subset M$. Entonces definimos el *campo vectorial de curvatura media* como

$$\vec{H}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(e_i, e_i)$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ forma una base ortonormal de $T_p(\Sigma)$ para cada $p \in \Sigma$, y $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición 1.11. Sea ξ campo vectorial normal unitario en Σ . Entonces definimos la *curvatura media* como

$$H = \langle \vec{H}, \xi \rangle.$$

Una superficie temporal se dice que es *mínima* si su curvatura media es cero.

Definición 1.12. Una superficie temporal $\Sigma \subset M$ se dice que es *umbílica* si su operador de forma satisface la igualdad $A_\xi(X) = \lambda X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, donde $\lambda \in \mathfrak{F}(\Sigma)$.

Proposición 1.13. Sean X en $\mathfrak{X}(\Sigma)$ y ξ un campo vectorial normal unitario en Σ . Se denominan *Fórmula de Weingarten* a la expresión

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi$$

donde $\nabla^\perp$ representa la *conexión normal* de $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$.

Observación 1.14. Todo espacio vectorial tipo tiempo tiene dos vectores tipo luz linealmente independientes.

Definición 1.15. Sean Σ una superficie temporal y $T, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ campos vectoriales. El conjunto $\{T, W\}$ se dice que es un *marco tipo luz* en Σ , si $\langle T(p), T(p) \rangle = 0 = \langle W(p), W(p) \rangle$ y $\langle T(p), W(p) \rangle = -1$, para todo $p \in \Sigma$.

Proposición 1.16. El campo vectorial de curvatura media de Σ , representado en términos del marco tipo luz $\{T, W\}$, es

$$\vec{H} = -II(T, W).$$

Demostración. Sea $e_1 = \frac{T+W}{\sqrt{2}}$ y $e_2 = \frac{T-W}{\sqrt{2}}$ base ortonormal de $\mathfrak{X}(\Sigma)$, tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ y $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$. Con esta base calculamos

$$-II(e_1, e_1) = \frac{1}{2} [-II(T, T) - 2II(T, W) - II(W, W)]$$

y

$$II(e_2, e_2) = \frac{1}{2} [II(T, T) - 2II(T, W) + II(W, W)].$$

De la Definición 1.10 y las igualdades anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2} [-II(e_1, e_1) + II(e_2, e_2)] \\ &= -II(T, W). \end{aligned}$$

□

1.2. Superficies con DPC, superficies regladas y superficies casi umbílicas

Como veremos más adelante en el desarrollo de este trabajo, se evidenciará la relación estrecha que existe entre las superficies (hipersuperficies) con dirección nula canónica y las superficies (hipersuperficies) con dirección principal canónica (DPC), regladas y casi umbílicas. Por lo tanto, en esta sección abordaremos las definiciones de estas últimas tres superficies, así como algunos resultados relevantes para concretar dichas relaciones.

Definición 1.17. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ es *dirección principal* de Σ si $A_\xi(X) = \lambda X$, donde $\lambda \in \mathfrak{F}(\Sigma)$ es la curvatura principal de Σ en la dirección de X .

Definición 1.18. Una superficie $\Sigma \subset M$ tiene *dirección principal canónica*, relativa al campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$, si la parte tangente de Z a Σ es dirección principal, es decir, si $Z^\top$ es dirección principal.

Ejemplo 1.19. Una parametrización para las superficies con DPC en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma $x(u, v) = \gamma(u) + f(v)n(u) + g(v)d$, donde n y d son vectores ortogonales. Por lo que un ejemplo en particular se obtiene al considerar a $\gamma(u)$ una recta paralela al eje x , $f(v) = v$, $g(v) = 2\cos(2v)$, $n = (1, 1, 0)$ y $d = (0, 0, 1)$, es decir, $x(u, v) = (2u, u + v, 2\cos(2v))$. Para más detalles ver [20].

Definición 1.20. Una hipersuperficie temporal $\Sigma \subset M$, se dice que es *reglada* si para cada punto $p \in \Sigma$ existe una geodésica de M contenida en Σ .

Ejemplo 1.21. Una superficie reglada en $\mathbb{R}^3$ se puede parametrizar como $x(u, v) = \alpha(u) + vz(u)$, donde la curva $\alpha(u)$ es llamada *curva directriz* y $z(u)$ es una recta. Un ejemplo específico en $\mathbb{R}^3$ se obtiene considerando $\alpha(u) = (u, 0, 0)$ y $z(u) = \frac{(0, 1, u)}{\sqrt{1+u^2}}$. Así obtenemos $x(u, v) = (u, \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{vu}{\sqrt{1+u^2}})$ que parametriza un paraboloides hiperbólico.

Definición 1.22. Sea Σ una superficie temporal en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$. Un punto $p \in \Sigma$ se llama *casi umbílico* si el operador de forma $A_\xi|_p$ es no diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 1.23. Sea V un plano tipo tiempo en $\mathbb{R}_1^3$ y $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta. Entonces A tiene alguna de las siguientes representaciones para alguna base β de V :

1. $[A]_\beta$ es una matriz diagonal para alguna base ortogonal β .

$$2. [A]_{\beta} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} \text{ para alguna base tipo luz } \beta.$$

$$3. [A]_{\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ para alguna base ortogonal } \beta.$$

Demostración. Primer caso. Supongamos que A tiene al menos un vector propio. Sea $v \in V$ dicho vector propio, es decir, $A(v) = \lambda v$. Como estamos en un plano tipo tiempo, entonces se pueden dar las dos siguientes posibilidades: $\langle v, v \rangle \neq 0$ o $\langle v, v \rangle = 0$.

Si $\langle v, v \rangle \neq 0$, entonces podemos construir una base ortonormal conformada por $\beta = \{v, w\}$ para V , donde $\epsilon_2 = \langle w, w \rangle = -\langle v, v \rangle = -\epsilon_1$. Así,

$$\begin{aligned} A(w) &= \epsilon_1 \langle A(w), v \rangle v + \epsilon_2 \langle A(w), w \rangle w \\ &= \epsilon_1 \langle w, A(v) \rangle v + \epsilon_2 \langle A(w), w \rangle w \\ &= \lambda \epsilon_1 \langle w, v \rangle v + \epsilon_2 \langle A(w), w \rangle w = hw, \end{aligned}$$

donde $h = \epsilon_2 \langle A(w), w \rangle$. Esto quiere decir que w también es vector propio de A , en consecuencia

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

Si $\langle v, v \rangle = 0$, entonces podemos construir una base tipo luz conformada por $\{v, w\}$ tales que $\langle v, w \rangle = 1$. De aquí

$$\begin{aligned} A(w) &= \langle A(w), w \rangle v + \langle A(w), v \rangle w \\ &= \langle A(w), w \rangle v + \langle w, A(v) \rangle w \\ &= \langle A(w), w \rangle v + \lambda \langle w, v \rangle w \\ &= \langle A(w), w \rangle v + \lambda w. \end{aligned}$$

Si $\langle A(w), w \rangle = 0$, entonces $A(w) = \lambda w$ lo cual implica que

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\langle A(w), w \rangle \neq 0$, definimos otra base tipo luz formada por los vectores

$$x = \frac{w}{\sqrt{|\langle A(w), w \rangle|}} \quad y = \sqrt{|\langle A(w), w \rangle|} v$$

De aquí, tenemos que

$$A(x) = \frac{A(w)}{\sqrt{|\langle A(w), w \rangle|}} = \frac{\langle A(w), w \rangle}{\sqrt{|\langle A(w), w \rangle|}}v + \frac{\lambda}{\sqrt{|\langle A(w), w \rangle|}}w = \lambda x \pm y;$$

$$A(y) = \sqrt{|\langle A(w), w \rangle|}A(v) = \lambda y.$$

Así, podemos concluir

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\beta = \{x, y\}$.

Segundo caso. Supongamos que A no tiene ningún valor propio. Sea $p(x)$ el polinomio característico de A , el cual tiene sus dos raíces en los complejos. Sean $\lambda = a + ib$ y su conjugado $\bar{\lambda} = a - ib$ dichas raíces. Por tanto, la matriz asociada a A , en la base ortogonal β , con entradas enteras es

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

La cual es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$. □

Observación 1.24. Sea V un plano tipo tiempo, $A : V \rightarrow V$ una transformación autoadjunta.

1. Si A admite un vector propio tipo tiempo o tipo espacio v , entonces no admite un vector propio tipo luz linealmente independiente de v y $[A]_{\beta}$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

en una base ortonormal β .

2. Si A tiene dos vectores propios tipo luz, entonces $[A]_{\beta}$ es un múltiplo de la identidad, en alguna base tipo luz β .
3. Si A admite a v como único vector propio tipo luz, entonces A tiene una matriz asociada $[A]_{\beta}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

en alguna base tipo luz β .

Observación 1.25. De la teoría básica del Álgebra Lineal se sabe que una matriz como la del inciso 3 de la Observación 1.24 es no diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

Corolario 1.26. Sean H y K la curvatura media y curvatura Gaussiana de Σ , respectivamente. Un punto $p \in \Sigma$ es casi umbílico si y solo si $H^2 = K$ y $A_\xi|_p$ admite una única dirección principal, la cual es tipo luz.

Demostración. Un punto $p \in \Sigma$ es casi umbílico si y solo si la matriz asociada al operador de forma $A_\xi|_p$ tiene la forma de la matriz del inciso 3, de la Proposición 1.23 si y solo si $H^2 = K$ y $A_\xi|_p$ admite una única dirección tipo luz. $\square$

Observación 1.27. Una superficie temporal Σ en $\mathbb{R}_1^3$ se dice que es casi umbílica si todo punto $p \in \Sigma$ es casi umbílico.

Observación 1.28. Las superficies umbílicas son ejemplos de superficies en las que su operador de forma es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y $H^2 = K$.

Definición 1.29. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva y $u_0 \in I$. Entonces α es:

<i>tipo espacio o espacial</i>	si	$\alpha'(u_0)$	es tipo espacio,
<i>tipo luz o nulo</i>	si	$\alpha'(u_0)$	es tipo luz,
<i>tipo tiempo o temporal</i>	si	$\alpha'(u_0)$	es tipo tiempo.

Si el carácter causal de $\alpha'(u)$ es el mismo para toda $u \in I$, este se definirá como el carácter causal de la curva α .

Observación 1.30. Sea p un punto en $\mathbb{R}_1^3$. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tal que $\alpha(u) = p$, y por consiguiente $\alpha'(u) = 0$, se le considera tipo espacio.

Definición 1.31. Una curva tipo luz $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ se dice que es no degenerada si α no es una recta.

Definición 1.32. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ se dice que es *regular* si $\alpha'(u) \neq 0$, para todo $u \in I$.

Proposición 1.33. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva. Si α es tipo luz o tipo tiempo, entonces α es regular.

Demostración. Sea $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$ una curva tipo luz o tipo tiempo. Sea $u_0 \in I$ tal que $x'(u_0) = 0$. Como

$$-x'(u_0)^2 + y'(u_0)^2 + z'(u_0)^2 \leq 0,$$

entonces $y'(u_0) = 0 = z'(u_0)$ y $\alpha'(u_0) = 0$. En consecuencia, por la Observación 1.30, α es tipo espacio en u_0 . Por lo tanto $\alpha(u)' \neq 0$, para toda $u \in I$. $\square$

Corolario 1.34. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva tipo luz, definida por $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$. Entonces $x'(u) \neq 0$, para toda $u \in I$. Además, existe un abierto $U \subset I$ tal que $y'(u) \neq 0$, o bien, $z'(u) \neq 0$, para toda $u \in U$.

Demostración. De la Proposición 1.33 es claro que $x'(u) \neq 0$, para toda $u \in I$. Ahora, sea $U \subset I$ un abierto y supongamos que existe $u_0 \in U$ tal que $y'(u_0) = 0$ y $z'(u_0) = 0$. Pero como α es tipo luz, esto implica que $x'(u_0) = 0$. $\square$

Proposición 1.35. Una curva tipo luz $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es no degenerada si y solo si α' y α'' son linealmente independientes.

Demostración. Sea $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$ una curva tipo luz en $\mathbb{R}_1^3$. Supongamos que α' y α'' no son linealmente independientes, es decir,

$$\alpha''(u) = r(u)\alpha'(u), \quad (1.1)$$

para una función real $r(u)$.

Del Corolario 1.34, tenemos que $x'(u) \neq 0$, para toda $u \in I$, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $y'(u) \neq 0$ para toda $u \in U$, donde U es un abierto de I .

De las hipótesis y la Ecuación 1.1, se tiene que para todo $u \in U$

$$r(u) = \frac{x''(u)}{x'(u)} \quad \text{y} \quad r(u) = \frac{y''(u)}{y'(u)},$$

o equivalentemente

$$r(u) = \frac{d}{du} \log(x'(u)) \quad \text{y} \quad r(u) = \frac{d}{du} \log(y'(u)).$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos:

$$x'(u) = c_1 e^{\int r(u) du} \Leftrightarrow x(u) = c_1 h(u) + k_1$$

y

$$y'(u) = c_2 e^{\int r(u) du} \Leftrightarrow y(u) = c_2 h(u) + k_2,$$

donde $h(u) = \int e^{\int r(u) du} du$.

Ahora, como α es tipo luz, entonces

$$\begin{aligned} z'(u)^2 = x'(u)^2 - y'(u)^2 &\Leftrightarrow z'(u) = \sqrt{c_1^2 - c_2^2} h'(u) \\ &\Leftrightarrow z(u) = c_3 h(u) + k_3, \end{aligned}$$

con $c_3 = \sqrt{c_1^2 - c_2^2}$.

Por lo tanto

$$\alpha(u) = h(u)C + K,$$

donde $C = (c_1, c_2, c_3)$ y $K = (k_1, k_2, k_3)$. $\square$

El siguiente resultado, demostrado por Jeanne N. Clelland (véase [3]), nos da una clasificación de las superficies temporales casi umbílicas.

Teorema 1.36. *Sea Σ una superficie temporal casi umbílica en $\mathbb{R}_1^3$. Entonces Σ es una superficie reglada cuyas reglas son líneas tipo luz, con la propiedad adicional de que cualquier curva tipo luz α en Σ que sea transversal a las reglas es no degenerada, es decir, α no es una recta. Inversamente, dada cualquier curva tipo luz no degenerada $\alpha(u)$ en $\mathbb{R}_1^3$ y cualquier campo vectorial tipo luz $T(u)$ a lo largo de α , que es linealmente independiente de $\alpha'(u)$, para toda u , la superficie reglada inmersa*

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + vT(u)$$

es casi umbílica, posiblemente conteniendo una curva de puntos umbílicos.

La siguiente observación será de importancia para la demostración de la Proposición 3.21.

Observación 1.37. Sean α y T como en el Teorema 1.36, entonces:

1. Como α' y α'' son linealmente independientes, entonces $\langle \alpha, \alpha' \rangle \neq 0$.
2. De la igualdad

$$\frac{d}{du} \langle \alpha(u), T(u) \rangle = \langle \alpha'(u), T(u) \rangle + \langle \alpha(u), T'(u) \rangle$$

y el hecho que α' y T son linealmente independientes, se deduce que $\langle \alpha, T' \rangle \neq 0$.

1.3. Campo vectorial radial, cerrado conforme y producto alabeado

En esta parte abordaremos los campos vectoriales radiales, definidos en $\mathbb{R}_1^3$, que son aquellos cuyos vectores apuntan hacia o desde cualquier punto fijo del sistema de coordenadas, y su magnitud depende únicamente de la distancia a dicho punto. También se mencionan los campos vectoriales cerrados conformes, definidos en una variedad de Lorentz, que son aquellos cuya divergencia es nula y su comportamiento se preserva bajo transformaciones conformes. Así como el ampliamente estudiado en Geometría de Lorentz, producto alabeado. Además, se presenta cómo se relacionan estos conceptos entre sí.

Definición 1.38. Sean $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ campos coordenados estándar de $\mathbb{R}_1^3$. Un campo vectorial, no nulo, tal que $Z(x, y, z) = (x, y, z) - (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3$, equivalentemente

$$Z = (x - a_1)\partial_x + (y - a_2)\partial_y + (z - a_3)\partial_z;$$

se llama campo vectorial *radial*. A (a_1, a_2, a_3) se le llama centro del campo vectorial radial Z .

Observación 1.39. Un campo vectorial *radial estándar* se refiere a que su centro es el origen $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}_1^3$. En lo sucesivo, se considerará a Z un campo vectorial radial estándar aunque solo nos referiremos a él como campo vectorial radial.

Proposición 1.40. Sea Z un campo vectorial radial, entonces satisface

$$\nabla_X Z = X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^3)$.

Definición 1.41. Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es cerrado conforme (CC) si y solo si existe una función $\mu \in \mathfrak{F}(M)$ tal que

$$\nabla_X Z = \mu X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.42. De la Proposición 1.40 y la Definición 1.41 notamos que un campo vectorial radial es un campo cerrado conforme con $\mu = 1$.

Proposición 1.43. Sea Σ^{m-1} una hipersuperficie umbílica y orientable en la variedad de Lorentz M^m , y sea $Z \in \mathfrak{X}(M^{m-1})$ un campo vectorial cerrado conforme en M^{m-1} . Entonces $Z^\top$ es cerrado conforme en N^{m-1} .

Demostración. Sea ξ un campo vectorial normal unitario sobre la hipersuperficie Σ^{m-1} . Por lo tanto, podemos escribir $Z = Z^\top + f\xi$. Dado que Z es cerrado conforme sobre M^{m-1} , tenemos

$$\mu X = \bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z^\top + II(X, Z^\top) - fA_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi$$

Al tomar la parte tangente, obtenemos la siguiente igualdad

$$\nabla_X Z^\top = \mu X + fA_\xi(X).$$

Por otra parte, como Σ^{m-1} es umbílica, tenemos

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle II(X, Y), \xi \rangle = h\langle X, Y \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^{m-1})$ y alguna función $h \in \mathfrak{F}(\Sigma^{m-1})$. Por lo tanto,

$$\nabla_X Z^\top = (\mu + hf)X,$$

es decir, $Z^\top$ es cerrado conforme sobre Σ^{m-1} . $\square$

Observación 1.44. Recodemos que el espacio de *De Sitter* $\mathbb{S}_1^{m-1} \subset \mathbb{R}_1^m$ se define por

$$\mathbb{S}_1^{m-1}(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^m : \langle p, p \rangle = r^2\},$$

donde $r > 0$.

Ejemplo 1.45. Consideremos el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$, que es una hipersuperficie umbílica, y el campo vectorial paralelo $e^4 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}_1^4$. Denotaremos por x, y, z, w a las coordenadas de $\mathbb{R}_1^4$. Ahora vamos a calcular $e_4^\top$. Para esto, notemos que $e_4^\top = e_4 - e_4^\perp$. El campo vectorial normal unitario sobre $\mathbb{S}_1^3$ lo podemos calcular mediante el gradiente de la función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{S}_1^3)$, definida por $f(x, y, z, w) = -x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, el cual está dado por $\text{grad} f = 2(-x, y, z, w)$. Así,

$$\xi = \frac{\text{grad} f}{\sqrt{\langle \text{grad}, \text{grad} \rangle}} = \frac{\text{grad} f}{2}.$$

En consecuencia,

$$e_4^\perp = \langle e_4, \xi \rangle \xi = \frac{w}{2} \text{grad} f.$$

Por lo tanto, de la Proposición 1.43, el campo vectorial

$$e_4^\top = (0, 0, 0, 1) - w(-x, y, z, w) = (wx, -wy, -wz, 1 - w^2),$$

es cerrado conforme en $\mathbb{S}_1^3$.

Ejemplo 1.46. Consideremos nuevamente el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ como una hipersuperficie umbílica. Sea $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}_1^4$ un campo vectorial radial. Ahora vamos a calcular $v^\top$. Para esto, procedemos de manera similar que en el ejemplo anterior. Al calcular $v^\perp$, obtenemos

$$\begin{aligned} v^\perp &= \langle v, \xi \rangle \xi \\ &= \langle (x, y, z, w), (-x, y, z, w) \rangle \frac{\text{grad} f}{2} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \frac{\text{grad} f}{2} \\ &= (2x^2 + 1) \frac{\text{grad} f}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v^\top &= v - (2x^2 + 1) \frac{\text{grad} f}{2} \\ &= (x, y, z, w) - (2x^2 + 1) (-x, y, z, w) \\ &= [-[1 + (2x^2 + 1)]x, [1 - (2x^2 + 1)]y, [1 - (2x^2 + 1)]z, [1 - (2x^2 + 1)]w]. \end{aligned}$$

El cual es cerrado conforme en $\mathbb{S}_1^3$, por la Proposición 1.43.

Observación 1.47. Recordemos que dada una variedad producto $A \times B$ y $(p, q) \in A \times B$, el *levantamiento* $\tilde{x}$ del vector $x \in T_p(A)$ a (p, q) es el único vector en $T_{(p,q)}(A)$ tal que $d\pi(\tilde{x}) = x$, donde π es la proyección de $A \times B$ en A . Así, el *levantamiento del campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(A)$ a $A \times B$ es el campo vectorial $\tilde{X}$ cuyo valor en cada (p, q) es el levantamiento de $X(p)$ a (p, q) . El conjunto de todos los *levantamientos horizontales* $\tilde{X}$ se define como $\mathfrak{L}(A)$. De manera análoga, se puede definir el conjunto de *levantamientos verticales* $\mathfrak{L}(B)$ usando la proyección σ de $A \times B$ a B . En lo sucesivo, denotaremos al campo y su levantamiento (horizontal o vertical) de la misma manera.

Definición 1.48. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con la métrica usual, denotada por dt^2 , (N, g_N) variedad de Lorentz y $\rho \in \mathfrak{F}(I)$. El *producto alabeado* es la variedad $M = I \times_\rho N$ con métrica g_M , la cual se define como

$$g_M = \pi^*(dt^2) + (\rho \circ \pi)^2 \sigma^*(g_N)$$

donde π y σ son las proyecciones de $I \times N$ en I y N , respectivamente.

Observación 1.49. El producto alabeado está caracterizado por lo siguiente

- (1) Para cada $q \in N$, la transformación $\pi|_{I \times \{q\}}$ es una *isometría* sobre I .
- (2) Para cada $p \in I$, la transformación $\sigma|_{\{p\} \times N}$ es una *homotecia* positiva de N con factor $\frac{1}{\rho(p)}$.
- (3) Para cada $(p, q) \in M$, la hoja $I \times q$ y la fibra $p \times N$ son ortogonales en (p, q) .

Lema 1.50. Consideremos el producto alabeado $I \times_\rho N$, si $X, Y \in \mathfrak{L}(I)$ y $V, W \in \mathfrak{L}(N)$ entonces se satisface

- (1) $\bar{\nabla}_X Y \in \mathfrak{L}(I)$ es el levantamiento de $\nabla_X Y$ en I .
- (2) $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = (\frac{X \cdot \rho}{\rho}) V$.
- (3) $(\bar{\nabla}_V W)^\perp = II(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{\rho} \text{grad} \rho$.

(4) $(\bar{\nabla}_V W)^\top \in \mathfrak{L}(N)$ es el levantamiento de $\nabla_V^N W$ en N .

Ejemplo 1.51. Haciendo $N = \mathbb{S}_1^2$ y $\rho = t$ formamos el producto alabeado $I \times_t \mathbb{S}_1^2$. Si consideramos las coordenadas

$$x = t \sinh \theta, \quad y = t \cosh \theta \cos \phi \quad \text{y} \quad z = t \cosh \theta \sin \phi,$$

obtenemos

$$ds^2 = dt^2 + t^2(-d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\phi),$$

la métrica inducida sobre $I \times_t \mathbb{S}_1^2$.

Proposición 1.52. *El campo vectorial $Z = \rho \partial_t \in \mathfrak{X}(I \times_\rho N)$ es cerrado conforme sobre $I \times_\rho N$.*

Demostración. Sea $X_1 \in \mathfrak{L}(I)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $X_1 = \partial_t$. Así

$$\bar{\nabla}_{X_1} Z = \bar{\nabla}_{\partial_t}(\rho \partial_t) = \rho' \partial_t + \rho \nabla_{\partial_t}^{\mathbb{R}} \partial_t = \rho' \partial_t = \rho' X_1.$$

Ahora, tomamos $X_2 \in \mathfrak{L}(N)$. Como ρ es constante a lo largo de N , Definición 1.48, y por el Lema 1.50, se tiene

$$\bar{\nabla}_{X_2} Z = \bar{\nabla}_{X_2}(\rho \partial_t) = (X_2 \cdot \rho) \partial_t + \rho \bar{\nabla}_{X_2} \partial_t = \rho \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \partial_t = \rho' X_2.$$

Esto implica que $\bar{\nabla}_X Z = \rho' X$, para toda $X \in \mathfrak{X}(I \times_\rho N)$. $\square$

Proposición 1.53. *Sea M una variedad de Lorentz de dimensión tres con curvatura seccional constante $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Si $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial cerrado conforme, entonces $Z = -\varepsilon \operatorname{grad} \mu$, donde μ es como en la Definición 1.41. Por otra parte, si $Z \in \mathbb{R}^3$, entonces μ es constante, es decir, Z es paralelo o radial.*

Una demostración puede encontrarse en [14].

Ejemplo 1.54. Considerando a M como $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ y $\mu = t$, obtenemos

$$Z = t \partial_t = -\varepsilon \operatorname{grad} t.$$

1.4. Superficies como gráfica de una función y como imagen inversa de una función

En esta sección vamos a analizar brevemente el comportamiento de las superficies que se expresan como gráficas de funciones y como imagen inversa de valores regulares, en un ambiente Lorentziano.

Primero vamos a definir el carácter causal de superficies regulares inmersas en un espacio ambiente Lorentziano.

Definición 1.55. Sea $\Sigma \subset M$ una superficie regular. Decimos que Σ es:

tipo espacio o espacial si $T_p(M)$ es tipo espacio, para todo $p \in \Sigma$,
tipo luz o nulo si $T_p(M)$ es tipo luz, para todo $p \in \Sigma$,
tipo tiempo o temporal si $T_p(M)$ es tipo tiempo, para todo $p \in \Sigma$.

Definición 1.56. Sea $f : N^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces su gráfica se define como:

$$\text{graf}(f) = \{(u, f(u)) \in N^n \times \mathbb{R} \mid u \in N^n\}.$$

Observación 1.57. La gráfica de una función es una hipersuperficie regular en $N^n \times \mathbb{R}$. Esto se puede ver considerando la parametrización $\psi(u) = (u, f(u))$ cuya imagen es la gráfica de f .

Observación 1.58. Denotamos por ∂_t al campo vectorial unitario tangente a $\{q\} \times \mathbb{R}$, donde $q \in N$.

Observación 1.59. El campo vectorial normal unitario a la gráfica de f es

$$\xi = \frac{\nabla f - \partial_t}{\sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1}}.$$

Proposición 1.60. Sea $\Sigma \subset N^n \times \mathbb{R}$ una superficie y $p \in \Sigma$. Entonces, existe un abierto $U \subset \Sigma$ alrededor de p tal que U es la gráfica de una función f cuyo dominio está en N^n .

Proposición 1.61. Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función y Σ una hipersuperficie parametrizada por $\psi(u) = (u, f(u))$. Entonces Σ es:

tipo espacio o espacial si y solo si $\langle \nabla f, \nabla f \rangle < -1$,
tipo luz o nulo si y solo si $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = -1$,
tipo tiempo o temporal si y solo si $\langle \nabla f, \nabla f \rangle > -1$.

Observación 1.62. De la Proposición 1.61 notamos que si ∇f es tipo luz, entonces la gráfica de f es tipo tiempo.

Definición 1.63. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *valor regular* para f si para todo $q \in f^{-1}(a)$ la derivada $df_q : T_q(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva.

Teorema 1.64. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si a es un valor regular para f entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

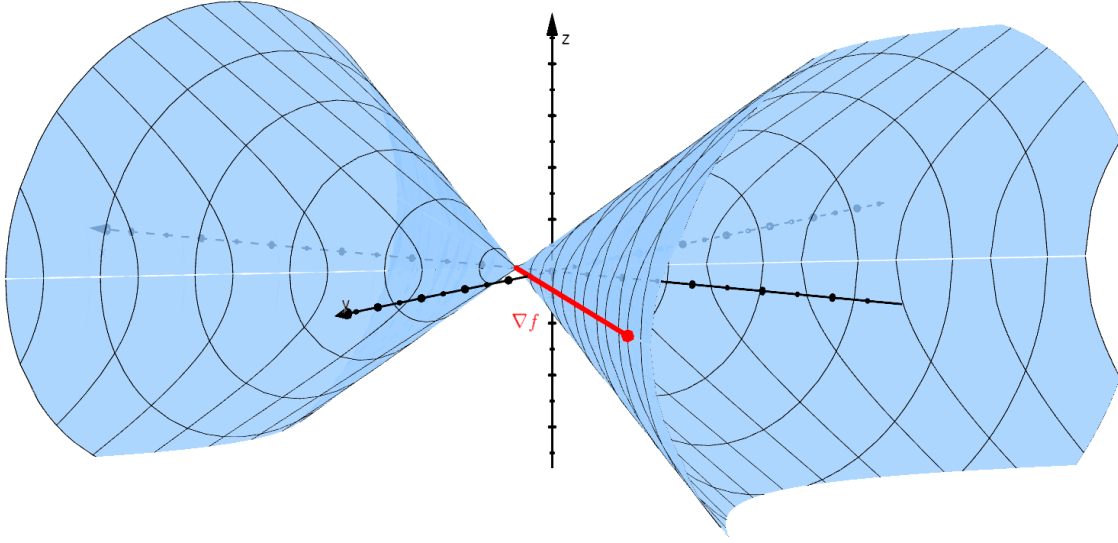


Figura 1.1: Superficie de nivel $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2 + x} = 1$ con gradiente tipo luz.

Proposición 1.65. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular para f . Entonces $\Sigma = f^{-1}(a)$ es:

tipo espacio o espacial si y solo si ∇f es tipo tiempo,
tipo luz o nulo si y solo si ∇f es tipo luz,
tipo tiempo o temporal si y solo si ∇f es tipo espacio.

Observación 1.66. Para más detalles respecto a la teoría de superficies de Lorentz consulte [4].

Ejemplo 1.67. Consideremos el espacio ambiente $M = \mathbb{R}_1^3$ con la métrica estándar y la función $f : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2 + x}$. Observamos que la gráfica de f es una hipersuperficie tipo tiempo, ya que ∇f es tipo luz. Además, consideremos el valor regular $a = 1$ para f . Entonces, la superficie de nivel $\Sigma = f^{-1}(1)$ es tipo luz. Es decir, la gráfica de f está foliada por superficies de nivel tipo luz (véase Figura 1.1).

Capítulo 2

Superficie con DNC respecto de un campo vectorial paralelo

En este capítulo abordaremos el estudio de las superficies temporales con dirección nula canónica (DNC) respecto a un campo vectorial paralelo inmersas en $N \times \mathbb{R}$. Después de desarrollar la teoría básica necesaria, se mostrará la relación que existe entre la curvatura Gaussiana de Σ , la curvatura Gaussiana de N , y la curvatura seccional de $N \times \mathbb{R}$. Además, se construirá una familia de ejemplos de este tipo de superficies. Finalmente, abordaremos de manera breve la construcción de hipersuperficies, en una variedad de dimensión n , con DNC respecto a un campo vectorial paralelo.

2.1. Propiedades básicas y primeros resultados

Sea Σ una superficie (hipersuperficie) temporal inmersa en el espacio ambiente de Lorentz $N \times \mathbb{R}$ equipada con la métrica producto, donde N es una superficie de Lorentz (variedad de Lorentz). Los símbolos $\overline{\nabla}$ y ∇ denotan a las conexiones de Levi-Civita de $N \times \mathbb{R}$ y Σ , respectivamente.

Definición 2.1. Decimos que una hipersuperficie temporal Σ en $N \times \mathbb{R}$ tiene una *dirección nula canónica* con respecto al campo vectorial $\partial_t \in \mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$, si la parte tangente $\partial_t^\top$ es un campo vectorial tipo luz a lo largo de Σ , es decir, $\langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle = 0$ para $\partial_t^\top \neq 0$.

Observación 2.2. El campo vectorial ∂_t satisface que $\overline{\nabla}_X \partial_t = 0$, para toda X en $\mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$, es decir, el campo ∂_t es *paralelo*.

Los siguientes lemas son una extensión de los resultados desarrollados por Victor H. Patty-Yujra y Gabriel Ruiz-Hernández (véase [25]).

Lema 2.3. *Como ∂_t es paralelo, entonces se satisface lo siguiente*

- 1) $\nabla_X \partial_t^\top = A_{\partial_t^\perp}(X),$
- 2) $\nabla_X^\perp \partial_t^\perp = -II(\partial_t^\top, X),$

para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$ Usando las fórmulas de Gauss y Weingarten, junto con la descomposición $\partial_t = \partial_t^\top + \partial_t^\perp$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\nabla}_X \partial_t &= \overline{\nabla}_X \partial_t^\top + \overline{\nabla}_X \partial_t^\perp \\ &= \nabla_X \partial_t^\top - A_{\partial_t^\perp}(X) + II(\partial_t^\top, X) + \nabla_X^\perp \partial_t^\perp, \end{aligned}$$

los incisos 1) y 2) se obtienen al tomar parte tangente y parte normal, respectivamente. $\square$

Proposición 2.4. *Si la hipersuperficie Σ tiene una dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces:*

- 1) $A_{\partial_t^\perp}(\partial_t^\top) = 0,$
- 2) $II(\partial_t^\top, X) = 0,$ para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$
- 3) $\nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0.$

Demostración. De lo demostrado en el Lema 2.3 y el hecho de que $\partial_t^\perp$ es de norma constante, se deduce

$$\langle A_{\partial_t^\perp}(\partial_t^\top), X \rangle = \langle II(\partial_t^\top, X), \partial_t^\perp \rangle = -\langle \nabla_X^\perp \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle = -\frac{1}{2} X \langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle = 0,$$

para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$ Este cálculo implica el inciso 1). El inciso 2) se sigue de los cálculos anteriores y el hecho de que la codimensión de Σ es uno. Finalmente, el tercer inciso se deduce del inciso 1) del Lema 2.3 y el inciso 1) de esta Proposición, es decir, $\nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = A_{\partial_t^\perp}(\partial_t^\top) = 0.$ $\square$

Definición 2.5. Una hipersuperficie temporal $\Sigma \subset N \times \mathbb{R}$, con dirección nula canónica respecto al campo vectorial ∂_t se dice que es *reglada* si las curvas integrales del campo vectorial $\partial_t^\top$ son geodésicas de $N \times \mathbb{R}$, es decir, $\overline{\nabla}_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0.$

Observación 2.6. Las siguientes observaciones son consecuencia de la Proposición 2.4.

1. Del inciso 1) de la Proposición 2.4 y la Definición 1.18 se deduce que $\partial_t^\top$ es una dirección principal de Σ , es decir, la superficie Σ tiene una dirección principal canónica respecto a ∂_t .
2. Del inciso 3) y de la Proposición 2.4 notamos que las curvas integrales de $\partial_t^\top$ son geodésicas de Σ .

Observación 2.7. Sea $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo vectorial tipo luz tal que $\langle \partial_t^\top, W \rangle = -1$. Entonces el conjunto $\{\partial_t^\top, W\}$ representa un marco tipo luz cuando se hable de superficies (véase Definición 1.15).

Corolario 2.8. Si una superficie temporal en $N \times \mathbb{R}$ tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces es mínima y reglada.

Demostración. De la Proposición 2.4 tenemos que $II(\partial_t^\top, \partial_t^\top) = 0$ y $\nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0$. Por lo tanto $\bar{\nabla}_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0$. Por otra parte, de la Proposición 2.4 sabemos que $II(\partial_t^\top, X) = 0$, para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Por lo tanto $\vec{H} = -II(\partial_t^\top, W) = 0$. $\square$

Lema 2.9. La conexión de Levi-Civita de Σ satisface las siguientes relaciones:

- 1) $\nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0 = \nabla_{\partial_t^\top} W$,
- 2) $\nabla_W \partial_t^\top = -a \partial_t^\top$,
- 3) $\nabla_W W = aW$,
- 4) $[\partial_t^\top, W] = a \partial_t^\top$,

donde $a := \langle II(W, W), \partial_t^\perp \rangle$.

Demostración. 1) Del Lema 2.4 sabemos que $\nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top = 0$. Ahora, como W es tipo luz entonces $0 = \partial_t^\top \langle W, W \rangle = 2 \langle \nabla_{\partial_t^\top} W, W \rangle$. Recordando que $\langle \partial_t^\top, W \rangle = -1$, se obtiene

$$0 = \partial_t^\top \langle \partial_t^\top, W \rangle = \langle \nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top, W \rangle + \langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_t^\top} W \rangle = \langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_t^\top} W \rangle.$$

En consecuencia, al escribir $\nabla_{\partial_t^\top} W$ en términos del marco nulo $\{\partial_t^\top, W\}$, concluimos

$$\nabla_{\partial_t^\top} W = -\langle \nabla_{\partial_t^\top} W, W \rangle \partial_t^\top - \langle \nabla_{\partial_t^\top} W, \partial_t^\top \rangle W = 0.$$

2) Dado que $Z^\top$ es tipo luz, se cumple la igualdad $\langle \nabla_W \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle = 0$. Por otra parte, al ser W tipo luz también, se tiene

$$\langle \nabla_W \partial_t^\top, W \rangle = \langle A_{\partial_t^\perp}(W), W \rangle = \langle II(W, W), \partial_t^\perp \rangle = a.$$

Por consiguiente

$$\nabla_W \partial_t^\top = -\langle \nabla_W \partial_t^\top, W \rangle \partial_t^\top - \langle \nabla_W \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle W = -a \partial_t^\top.$$

3) Del carácter causal del campo W se deduce que $\langle \nabla_W W, W \rangle = 0$. Ahora, de la igualdad $\langle \partial_t^\top, W \rangle = -1$ se llega a

$$\langle \nabla_W W, \partial_t^\top \rangle = -\langle W, \nabla_W \partial_t^\top \rangle = a \langle W, \partial_t^\top \rangle = -a.$$

Por lo tanto

$$\nabla_W W = -\langle \nabla_W W, W \rangle \partial_t^\top - \langle \nabla_W W, \partial_t^\top \rangle W = aW.$$

Finalmente, combinando 1) y 2) conseguimos el resultado $[\partial_t^\top, W] = \nabla_{\partial_t^\top} W - \nabla_W \partial_t^\top = a \partial_t^\top$. $\square$

Observación 2.10. Como $\partial_t^\perp$ es de norma constante igual a uno, entonces para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se tiene

$$2\langle \nabla_X^\perp \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle = X \langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle = 0.$$

Dado que Σ es de codimensión uno y $\nabla_X^\perp \partial_t^\perp$ es un múltiplo escalar de $\partial_t^\perp$, deducimos la igualdad $\nabla_X^\perp \partial_t^\perp = 0$, es decir, $\partial_t^\perp$ es normal paralelo.

Proposición 2.11. Sea Σ una superficie temporal con dirección nula canónica respecto de ∂_t y $p \in \Sigma$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1) El operador de forma $A_{\partial_t^\perp}|_p$ es diagonalizable,
- 2) Σ es totalmente geodésica en p ,
- 3) $II(W(p), W(p)) = 0$,
- 4) $\partial_t^\top(p)$ es de Killing.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que A es diagonalizable. Sean $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $T_p(\Sigma)$ tal que $A_{\partial_t^\perp}(e_i) = \lambda_i e_i$. Escribimos a esta base en términos del marco tipo luz $\{\partial_t^\top(p), W(p)\}$, es decir,

$$e_i = r_i \partial_t^\top(p) + s_i W(p) \tag{2.1}$$

donde $r_i, s_i \in \mathfrak{F}(\Sigma)$. Como consecuencia se satisface

$$\lambda_i e_i = A_{\partial_t^\perp}(e_i) = r_i A_{\partial_t^\perp}(\partial_t^\top(p)) + s_i A_{\partial_t^\perp}(W(p)) = s_i A_{\partial_t^\perp}(W(p)), \tag{2.2}$$

ya que $A_{\partial_t^\perp}(\partial_t^\top(p)) = 0$. Por otra parte, del inciso 1) del Lema 2.3 y el inciso 2) del Lema 2.9, se deduce lo siguiente

$$A_{\partial_t^\perp}(W(p)) = \nabla_W \partial_t^\top(p) = -a \partial_t^\top(p). \quad (2.3)$$

Sustituyendo lo obtenido en (2.1) y (2.3) en (2.2), tenemos

$$\lambda_i r_i \partial_t^\top(p) + \lambda_i r_i W(p) = \lambda_i e_i = -s_i a \partial_t^\top(p).$$

De aquí se siguen las siguientes ecuaciones

$$\lambda_i r_i = -s_i a \quad \text{y} \quad \lambda_i s_i = 0.$$

Ahora, notemos que; como $s_i \neq 0$ entonces $\lambda_i = 0$, con $i = 1, 2$. Se sigue de (2.2) que $A_{\partial_t^\perp}(W(p)) = 0$. Así

$$a = \langle II(W(p), W(p)), \partial_t^\perp(p) \rangle = \langle A_{\partial_t^\perp}(W(p)), W(p) \rangle = 0.$$

Lo cual implica que $II(W(p), W(p)) = 0$. Si combinamos lo anterior con el hecho de que $II(\partial_t^\top, X) = 0$, para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, obtenemos el resultado deseado.

2) $\Rightarrow$ 3). Si Σ es totalmente geodésica en p , entonces $II|_p \equiv 0$, por lo que el resultado se deduce de las igualdades $a = \langle II(W(p), W(p)), \partial_t^\perp(p) \rangle = 0$.

3) $\Rightarrow$ 4). Notemos que $\langle \nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top(p), \partial_t^\top(p) \rangle = 0$. Además,

$$\langle \nabla_W \partial_t^\top(p), W(p) \rangle = \langle A_{\partial_t^\perp}(W(p)), W(p) \rangle = \langle II(W(p), W(p)), \partial_t^\perp(p) \rangle = 0$$

y

$$\langle \nabla_W \partial_t^\top(p), \partial_t^\top(p) \rangle = 0 = \langle \nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top(p), W(p) \rangle$$

implica, por la Proposición 1.9, que $\partial_t^\top(p)$ es de Killing.

4) $\Rightarrow$ 1). Finalmente, si $\partial_t^\top$ es de Killing en p , entonces

$$\langle II(W(p), W(p)), \partial_t^\perp(p) \rangle = \langle A_{\partial_t^\perp}(W(p)), W(p) \rangle = \langle \nabla_W \partial_t^\top(p), W(p) \rangle = 0.$$

Combinando lo anterior con el hecho de que $II(\partial_t^\top, X) = 0$, nos conduce a

$$0 = \langle II(X(p), Y(p)), \partial_t^\perp(p) \rangle = \langle A_{\partial_t^\perp}(X(p)), Y(p) \rangle,$$

para todo $X(p), Y(p) \in T_p(\Sigma)$. Con lo cual concluimos que $A_{\partial_t^\perp}|_p \equiv 0$, es decir, $A_{\partial_t^\perp}$ es diagonalizable en p . $\square$

Proposición 2.12. *Sea Σ una superficie con dirección nula canónica respecto de ∂_t . Entonces el tensor de curvatura R está dado por $R(\partial_t^\top, W)\partial_t^\top = \partial_t^\top(a)\partial_t^\top$. Además, la curvatura Gaussiana de Σ es $K = \partial_t^\top(a)$.*

Demostración. Del Lema 2.9, tenemos

$$\begin{aligned}
 R(\partial_t^\top, W)\partial_t^\top &= \nabla_W \nabla_{\partial_t^\top} \partial_t^\top - \nabla_{\partial_t^\top} \nabla_W \partial_t^\top + \nabla_{[\partial_t^\top, W]} \partial_t^\top \\
 &= -\nabla_{\partial_t^\top} (-a\partial_t^\top) + \nabla_{a\partial_t^\top} \partial_t^\top \\
 &= \partial_t^\top(a)\partial_t^\top
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$K = \frac{\langle R(\partial_t^\top, W)\partial_t^\top, W \rangle}{|\partial_t^\top|^2 |W|^2 - \langle \partial_t^\top, W \rangle^2} = \partial_t^\top(a).$$

□

Corolario 2.13. *Si Σ satisface cualquiera de las cinco condiciones de la Proposición 2.11, entonces también es plana.*

Demostración. De la Proposición 2.11 se tiene que la función $a = \langle II(W, W), \partial_t^\perp \rangle$ es igual a cero. Por lo tanto, de la Proposición anterior, se concluye $K = 0$. □

2.2. Relaciones entre curvaturas

Lo siguiente que uno se puede preguntar es: ¿qué relación hay entre la curvatura Gaussiana de Σ y la curvatura seccional del espacio ambiente $N \times \mathbb{R}$? Además, ¿existe alguna expresión que relacione la curvatura de $N \times \mathbb{R}$, N y Σ ? La respuesta es que resultan ser iguales. En este capítulo desarrollaremos este resultado, así como algunas de sus consecuencias.

Primero se hallará la relación entre la curvatura Gaussiana de Σ y $N \times \mathbb{R}$. Posteriormente, se encontrará una relación entre la conexión de Levi-Civita de Σ y N , lo cual nos llevará a demostrar la igualdad entre sus curvaturas Gaussianas. Finalmente, como corolario se mostrará la igualdad entre las tres curvaturas, a lo largo de planos tangentes a Σ .

Recuérdese que los símbolos $\bar{\nabla}$ y ∇ denotan a las conexiones de Levi-Civita de $N \times \mathbb{R}$ y M , respectivamente. Además, ∇_N denotará la conexión de Levi-Civita de N .

Proposición 2.14. *Sea Σ una superficie con dirección nula canónica respecto a ∂_t , $\bar{K}$ la curvatura seccional de $N \times \mathbb{R}$ a lo largo de planos tangentes a Σ y, K la curvatura Gaussiana de Σ . Entonces $\bar{K} = K$.*

Demostración. Por el Corolario 1.3 en el marco tipo luz $\{\partial_t^\top, W\}$ y la Proposición 2.4 inciso 2), tenemos

$$\begin{aligned} K(\partial_t^\top, W) &= \overline{K}(\partial_t^\top, W) \\ &+ \frac{\langle II(\partial_t^\top, \partial_t^\top), II(W, W) \rangle - \langle II(\partial_t^\top, W), II(\partial_t^\top, W) \rangle}{\langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle \langle W, W \rangle - \langle \partial_t^\top, W \rangle^2} \\ &= \overline{K}(\partial_t^\top, W). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado fue desarrollado por Gabriel Ruiz Hernández y Victor H. Patty Yujra, considerando como espacio ambiente al espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ (véase [25]). Por lo tanto, la prueba es similar a la presentada en el trabajo antes mencionado.

Proposición 2.15. *Sea N una superficie de Lorentz y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Consideremos a la superficie obtenida como la gráfica de f*

$$\Sigma = \{(u, f(u)) : u \in N\} \subset N \times \mathbb{R},$$

con métrica inducida. Entonces Σ tiene una dirección nula canónica respecto a ∂_t si y solo si ∇f es tipo luz.

Lema 2.16. *Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N , conexión de Levi-Civita ∇^N y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Si la superficie temporal Σ es la imagen de $\psi : N \rightarrow N \times \mathbb{R}$, definida como $\psi(u) = (u, f(u))$, cuya métrica inducida es $g = g_N + df^2$, entonces la conexión de Levi-Civita ∇ de Σ satisface la siguiente relación*

$$\nabla_X Y = \nabla_X^N Y + \frac{\text{Hess}f(X, Y)}{1 + |\nabla f|^2} \nabla f,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{L}(N)$. Donde ∇f denota el gradiente de f bajo g_N y Hess denota el Hessiano sobre la superficie N .

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(N)$. Por la fórmula de Koszul y la relación

de las métricas $g = g_N + df^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y, Z) + (X \cdot Y \cdot f)(Z \cdot f) + (Y \cdot Z \cdot f)(X \cdot f) \\
&\quad - (Z \cdot X \cdot f)(Y \cdot f) - (X \cdot f)[Y, Z] \cdot f + (Y \cdot f)[Z, X] \cdot f \\
&\quad + (Z \cdot f)[X, Y] \cdot f \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y, Z) + (Z \cdot f)[X \cdot Y \cdot f + Y \cdot X \cdot f] \\
&\quad + (Y \cdot f)[X \cdot Z \cdot f - Z \cdot X \cdot f] + (X \cdot f)[Y \cdot Z \cdot f - Z \cdot Y \cdot f] \\
&\quad - (X \cdot f)[Y, Z] \cdot f + (Y \cdot f)[Z, X] \cdot f + (Z \cdot f)[X, Y] \cdot f \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y, Z) + (Z \cdot f)[X \cdot Y \cdot f + Y \cdot X \cdot f + [X, Y] \cdot f] \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y, Z) + 2(X \cdot Y \cdot f)(Z \cdot f) \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y, Z) + 2(X \cdot Y \cdot f)g_N(\nabla f, Z) \\
&= 2g_N(\nabla_X^N Y + (X \cdot Y \cdot f)\nabla f, Z)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$g(\nabla_X Y, Z) = g_N(\nabla_X Y, Z) + (\nabla_X Y \cdot f)(Z \cdot f).$$

De las igualdades anteriores obtenemos

$$\nabla_X Y = \nabla_X^N Y + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f]\nabla f \quad (2.4)$$

Ahora vamos a determinar $\nabla_X Y \cdot f$, para esto usamos la igualdad (1.3)

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y \cdot f &= \nabla_X^N Y \cdot f + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f]\nabla f(f) \\
&= \nabla_X^N Y \cdot f + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f]|\nabla f|^2 \\
&= \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} [\nabla_X^N Y \cdot f + (X \cdot Y \cdot f)|\nabla f|^2]
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta ecuación en la fórmula (1.3)

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X^N Y + (X \cdot Y \cdot f)\nabla f - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} [\nabla_X^N Y \cdot f + (X \cdot Y \cdot f)|\nabla f|^2] \nabla f \\
&= \nabla_X^N Y - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (\nabla_X^N Y \cdot f) \nabla f + \left[1 - \frac{|\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} \right] (X \cdot Y \cdot f) \nabla f \\
&= \nabla_X^N Y - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (\nabla_X^N Y \cdot f) \nabla f + \frac{X \cdot Y \cdot f}{1 + |\nabla f|^2} \nabla f \\
&= \nabla_X^N Y - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X^N Y \cdot f] \nabla f. \\
&= \nabla_X^N Y + \frac{Hess f(X, Y)}{1 + |\nabla f|^2} \nabla f.
\end{aligned}$$

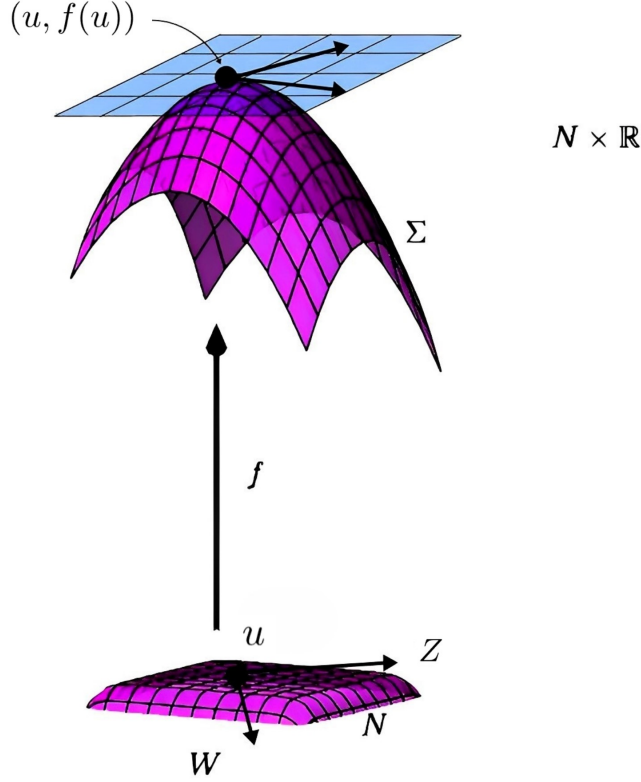


Figura 2.1: Curvatura Gaussiana de Σ en el punto $(u, f(u))$ y curvatura Gaussiana de N en u .

□

Teorema 2.17. *Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Sea Σ una superficie temporal que es imagen de $\psi : N \rightarrow N \times \mathbb{R}$ definida como $\psi(u) = (u, f(u))$, con métrica inducida $g = g_N + df^2$. Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces $K = K_N$, donde K y K_N denotan la curvatura Gaussiana de Σ y N respectivamente.*

Demostración. Los símbolos R_N y R denotarán el tensor de curvatura de N y Σ , respectivamente. Primero, de la Proposición 2.15 sabemos que ∇f es tipo luz. Sea $\{Z, W = \nabla f\}$ un marco tipo luz en $\mathfrak{L}(N)$ tal que $g_N(Z, W) = -1$. Entonces, obtenemos

$$g_N(Z, Z)g_N(Z, Z) - g_N(Z, W)^2 = -1,$$

y

$$g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2 = -1;$$

ya que $df(\nabla f) = g_N(\nabla f, \nabla f) = 0$. En particular

$$K(Z, W) = \frac{g(R(Z, W)Z, W)}{g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2} = -g(R(Z, W)Z, W)g(Z, Z).$$

Ahora calcularemos $R(Z, W)Z = \nabla_{[Z, W]}Z - [\nabla_Z, \nabla_W]Z$. Para esto, observamos que

$$0 = Xg_N(\nabla f, \nabla f) = 2g_N(\nabla_X^N \nabla f, Z) = 2Hessf(X, \nabla f) = 2Hessf(X, W),$$

para toda $X \in \mathfrak{L}(N)$.

De aquí, el Lema 2.16 y $W = \nabla f$ tenemos $\nabla_X W = \nabla_X^N W$, $\nabla_W X = \nabla_W^N X$;

$$\nabla_{\nabla_Z W} Z = \nabla_{\nabla_Z^N W} Z = \nabla_{\nabla_Z^N W}^N Z + Hessf(\nabla_Z^N W, Z)\nabla f$$

y

$$\nabla_{\nabla_W Z} Z = \nabla_{\nabla_W^N Z} Z = \nabla_{\nabla_W^N Z}^N Z + Hessf(\nabla_W^N Z, Z)\nabla f.$$

Con lo cual obtenemos el término

$$\nabla_{[Z, W]} Z = \nabla_{[Z, W]}^N Z + Hessf([Z, W], Z)\nabla f. \quad (2.5)$$

Por otra parte, calculamos

$$\nabla_Z \nabla_W Z = \nabla_Z \nabla_W^N Z = \nabla_Z^N \nabla_W^N Z + Hessf(Z, \nabla_W^N Z)\nabla f,$$

y

$$\begin{aligned} \nabla_W \nabla_Z Z &= \nabla_W (\nabla_Z^N Z + Hessf(Z, Z)\nabla f) \\ &= \nabla_W^N (\nabla_Z^N Z + Hessf(Z, Z)\nabla f) \\ &= \nabla_W^N \nabla_Z^N Z + Hessf(Z, Z)\nabla_W^N \nabla f + W(Hessf(Z, Z))\nabla f. \end{aligned}$$

Así

$$[\nabla_Z, \nabla_W]Z = [\nabla_Z^N, \nabla_W^N]Z - Hessf(Z, Z)\nabla_W^N \nabla f + h_1 \nabla f, \quad (2.6)$$

donde $h_1 = Hessf(Z, \nabla_W^N Z) - W(Hessf(Z, Z))$. De las Ecuaciones 2.5 y 2.6 obtenemos el tensor de curvatura en Σ , el cual está dado por

$$R(Z, W)Z = R_N(Z, W)Z + Hessf(Z, Z)\nabla_W^N \nabla f + h_2 \nabla f,$$

donde $h_2 = Hessf([Z, W], Z) - h_1$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) &= g_N(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) + df^2(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) \\ &= df(\nabla_X^N \nabla f)g_N(\nabla f, \nabla f) = 0, \end{aligned}$$

para toda $X \in \mathfrak{L}(N)$. Recordemos que $W = \nabla f$. Dado que $g_N(Z, Z)g_N(Z, Z) - g_N(Z, W)^2 = -1$ y $g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2 = -1$, la curvatura Gaussiana de Σ es

$$\begin{aligned}
-K(Z, W) &= g(R(Z, W)Z, W) \\
&= g(R_N(Z, W)Z, W) + \text{Hess}f(Z, Z)g(\nabla_W^N \nabla f, W) \\
&\quad + h_2 g(\nabla f, W) \\
&= g(R_N(Z, W)Z, W) + h_2 (df(\nabla f))^2 \\
&= g(R_N(Z, W)Z, W) \\
&= g_N(R_N(Z, W)Z, W) + df(R_N(Z, W)Z)g_N(\nabla f, W) \\
&= g_N(R_N(Z, W)Z, W) = -K_N(Z, W).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.18. *Sea Σ una superficie temporal con dirección nula canónica respecto a ∂_t inmersa en el espacio producto $N \times \mathbb{R}$, donde N es una superficie de Lorentz. La superficie Σ tiene curvatura Gaussiana constante c si y solo si N tiene curvatura Gaussiana constante igual a c . En particular, una superficie temporal inmersa en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3 = \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}$ o en el espacio $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$, tiene curvatura Gaussiana igual a cero o uno, respectivamente.*

Demostración. Según el Teorema 2.17, la primera parte de este corolario es inmediata. Finalmente, dado que la curvatura Gaussiana de $\mathbb{R}_1^2$ es cero y la de $\mathbb{S}_1^2$ es uno, se deduce que la curvatura Gaussiana de Σ inmersa en $\mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}$ es cero, y si está inmersa en $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ es uno. □

Corolario 2.19. *Consideremos N una superficie de Lorentz y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Sea Σ una superficie temporal que es imagen de $\psi : N \rightarrow N \times \mathbb{R}$, definida como $\psi(u) = (u, f(u))$, con curvatura Gaussiana K . Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces $\bar{K} = K = K_N$, donde K_N y $\bar{K}$ denotan la curvatura Gaussiana de N y la curvatura seccional de $N \times \mathbb{R}$, respectivamente, ambas a lo largo de planos tangentes a Σ .*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.14 y el Teorema 2.17. □

2.3. Construcción de superficies con DNC respecto de un campo paralelo

Gracias a la Proposición 2.15, tenemos una forma de construir ejemplos de superficies, que se pueden ver como gráficas de funciones, con DNC respecto

a ∂_t . La construcción se reduce a resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

Desarrollaremos primero el caso cuando la superficie de Lorentz N tiene métrica de la forma $-\alpha^2(u, v)du^2 + \beta^2(u, v)dv^2$, que es el caso más general. Posteriormente, se establece el caso cuando N tiene métrica $-\alpha^2(u)du^2 + \beta^2(u)dv^2$, el cual nos ayudará a obtener ejemplos explícitos de superficies con DNC.

Proposición 2.20. *Sea N una superficie de Lorentz con métrica*

$$g_N = -\alpha^2(u, v)du^2 + \beta^2(u, v)dv^2,$$

y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Entonces la superficie temporal

$$\Sigma = \{(u, v, F(\rho(u, v))) : (u, v) \in N\}$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t . Donde las curvas de nivel $\rho(u, v) = k$ representan las soluciones de la EDO

$$\frac{dv}{du} = \varepsilon \frac{\alpha(u, v)}{\beta(u, v)}, \quad \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

Demostración. Tomando los campos coordenados ∂_u y ∂_v de $\mathfrak{X}(N)$, calculamos la matriz inversa de la matriz asociada a la métrica g_N , la cual es

$$(g_N)^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2(u, v)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2(u, v)} \end{pmatrix}.$$

De esta manera, podemos expresar el gradiente de f como sigue:

$$\nabla f = -\frac{f_u}{\alpha^2(u, v)}\partial_u + \frac{f_v}{\beta^2(u, v)}\partial_v.$$

De aquí tenemos que $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$ si y solo si

$$-\frac{f_u^2}{\alpha^2(u, v)} + \frac{f_v^2}{\beta^2(u, v)} = 0.$$

Para resolver esta EDP homogénea no lineal la podemos descomponer en dos EDP lineales homogéneas:

$$f_u \pm \frac{\alpha(u, v)}{\beta(u, v)}f_v = 0. \tag{2.7}$$

Así, sea $v(u)$ la curva característica con velocidad

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{\alpha(u, v)}{\beta(u, v)}.$$

Resolver esta EDO es equivalente a resolver

$$0 = \alpha(u, v)du + \beta(u, v)dv = \sigma(u, v)du + \sigma(u, v)dv = d\sigma(u, v),$$

cuyas soluciones se encuentran de manera implícita en las curvas de nivel $\sigma(u, v) = k$, con k una constante. Por lo que $f(u, v) = F(\sigma(u, v))$ define la solución general de la Ecuación 2.7, para cualquier función $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Y por tanto, el gradiente de f satisface la igualdad $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$. Con lo que se concluye que la superficie

$$\Sigma = \{(u, v, F(\sigma(u, v))) : (u, v) \in N\},$$

donde F es no constante, tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t . $\square$

Antes de continuar, debemos preguntarnos si dada una superficie de Lorentz N , ¿siempre existe una función $f \in \mathfrak{F}(N)$ tal que ∇f sea tipo luz? Para responder esta pregunta necesitamos un resultado respecto a la existencia de las coordenadas isothermas Lorentzianas, el cual puede ser consultado en [17].

Lema 2.21. *(Coordenadas Isothermas Lorentzianas). Sea N una superficie de Lorentz C^∞ con métrica g y cualquier punto $p \in N$. Entonces existe una carta (U, ϕ) alrededor de p tal que*

$$-g_{11} = g_{22} = \alpha \quad y \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

para alguna función positiva $\alpha \in \mathfrak{F}(U)$.

Proposición 2.22. *Sea N una superficie de Lorentz. Entonces existe un abierto $U \subset N$ y una función $f \in \mathfrak{F}(U)$ tal que ∇f es tipo luz.*

Demostración. Sea $\{u, v\}$ un sistema de coordenadas isothermas, como en Lema 2.21, sobre un abierto U de N alrededor de un punto p , entonces la métrica sobre U es

$$g_N = \alpha(u, v)(-du^2 + dv^2),$$

donde $\alpha \in \mathfrak{F}(U)$ es una función positiva. Definimos la función $f \in \mathfrak{F}(U)$ por $f(u, v) = u + v$ cuyo gradiente es

$$\nabla f = g_N^{11}\partial_u + g_N^{22}\partial_v = \frac{1}{\alpha}(-\partial_u + \partial_v),$$

con $g_N^{11} = -\frac{1}{\alpha}$, $g_N^{12} = g_N^{21} = 0$ y $g_N^{22} = \frac{1}{\alpha}$. Con lo que se concluye

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \frac{1}{\alpha} [\langle \partial_u, \partial_u \rangle + \langle \partial_v, \partial_v \rangle] = \frac{1}{\alpha} [\alpha - \alpha] = 0.$$

□

Observación 2.23. Sea $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función tal que ∇f es tipo luz, entonces $\nabla(h \circ f)$ también es tipo luz, donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto se sigue de la igualdad $\nabla(h \circ f)(u, v) = h'(f(u, v))\nabla f$.

La siguiente proposición es un caso particular de la proposición anterior, en donde la métrica de N es de la forma $-\alpha^2(u)du^2 + \beta^2(u)dv^2$. La ventaja de este caso es que tenemos una forma integral para la solución de la EDP, y por ende, podemos deducir ejemplos de superficies más específicos.

Proposición 2.24. Sea N una superficie de Lorentz con métrica

$$g_N = -\alpha^2(u)du^2 + \beta^2(u)dv^2,$$

y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Entonces la superficie temporal

$$\Sigma = \{(u, v, F(v + \varepsilon H(u))) : (u, v) \in N\},$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , donde $H(u) = \int \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} du$ y $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Demostración. De manera análoga a la prueba de la Proposición 2.20, llegamos a que la condición $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$ es equivalente a resolver las siguientes EDP:

$$f_u \pm \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} f_v = 0. \quad (2.8)$$

La curva característica es $v(u)$ con velocidad

$$\frac{dv(u)}{du} = \pm \frac{\alpha(u)}{\beta(u)}.$$

La solución de esta EDO de primer orden y de variables separables es $v(u) = \pm H(u) + k$, con

$$H(u) = \int \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} du.$$

De esta manera, la *variable característica* es $\sigma(u, v) = v \mp H(u) = k$. De aquí obtenemos la solución de la Ecuación 2.8, la cual se expresa como $f(u, v) = F(v \mp H(u))$, para cualquier función $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, el gradiente de f es

$$\nabla f = \varepsilon \frac{F'(\sigma)}{\alpha(u)\beta(u)} \partial_u + \frac{F'(\sigma)}{\beta^2(u)} \partial_v, \quad \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

El cual claramente satisface $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$. Finalmente, por la Proposición 2.24, concluimos que la superficie

$$\Sigma = \{(u, v, F(v + \varepsilon H(u))) : (u, v) \in N\}$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t . $\square$

Ahora presentamos el caso $N = \mathbb{S}_1^2$ (Espacio de De Sitter), vista como superficie de revolución, con métrica $-d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\phi^2$. Posteriormente se da un ejemplo para el caso de $N = \mathbb{R}_1^2$ (Espacio de Minkowski), con métrica estándar. Estos ejemplos se deducen fácilmente de la Proposición 2.24.

Ejemplo 2.25. Consideremos $N = \mathbb{S}_1^2$, el espacio de De Sitter. Vamos a parametrizarlo como una superficie de revolución de la siguiente manera: consideremos las coordenadas

$$x = \sinh \theta, \quad y = \cosh \theta \cos \phi \quad \text{y} \quad z = \cosh \theta \sin \phi,$$

tales que satisfacen $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$. De la métrica

$$-dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

obtenemos la métrica inducida en N

$$g_N = -d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\phi^2,$$

con matriz inversa asociada

$$(g_N)^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \text{sech}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Ahora escribimos al gradiente de la función $f \in \mathfrak{F}(N)$ en términos de los campos coordenados $\{\partial_\theta, \partial_\phi\}$

$$\nabla f = -f_\theta \partial_\theta + \text{sech}^2 \theta f_\phi \partial_\phi.$$

Aplicando la condición de causalidad del campo ∇f nos da como resultado la siguiente EDP no lineal

$$0 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = -f_\theta^2 + \text{sech}^2 \theta f_\phi^2,$$

o bien

$$f_\theta \pm \operatorname{sech} \theta f_\phi = 0.$$

Procedamos a resolverla: consideremos la *curva característica* $\phi(\theta)$ con velocidad

$$\frac{d\phi(\theta)}{d\theta} = \pm \operatorname{sech} \theta.$$

La solución de esta EDO es $\phi(\theta) = \mp \arctan(\sinh \theta) + k$. De esta manera obtenemos la *variable característica* $\sigma(\theta, \phi) = \phi \mp \arctan(\sinh \theta) = k$. Por lo tanto la solución general de $f_\theta \pm \operatorname{sech} \theta f_\phi = 0$ está determinada por la función $f(\theta, \phi) = F(\phi \mp \arctan(\sinh \theta))$, para cualquier función $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Así, obtenemos que

$$\nabla f = \varepsilon F'(\rho) \operatorname{sech} \theta \partial_\theta + F'(\rho) \partial_\phi, \quad \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

Esto implica, por la Proposición 2.24, que la superficie

$$\Sigma = \{(\theta, \phi, F(\phi + \varepsilon \arctan(\sinh \theta)))\}$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t .

El método que se usó para resolver las EDP del ejemplo anterior, puede ser consultado en [3] página 24.

Observación 2.26. Del Ejemplo 2.25 se pueden deducir las siguientes consecuencias:

- Del Corolario 2.8, Σ es mínima y reglada.
- Del Corolario 2.18, la curvatura Gaussiana de Σ es uno.
- De la Proposición 2.14, la curvatura seccional de $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ es igual a uno, a lo largo de planos tangentes a Σ .
- Del Corolario 2.13, como Σ no es plana entonces no es totalmente geodésica ni umbílica.

Ejemplo 2.27. Ahora consideremos $N = \mathbb{R}_1^2$, con su métrica estándar $-du^2 + dv^2$, y la función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1^2)$. De la Proposición 2.24, la superficie temporal

$$\Sigma = \{(u, v, F(v - u)) : (u, v) \in \mathbb{R}_1^2\}$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t . Una superficie en particular de este tipo se puede ver en la Figura 2.2, la cual se obtiene considerando la función $F(u + v) = (u + v)^4$.

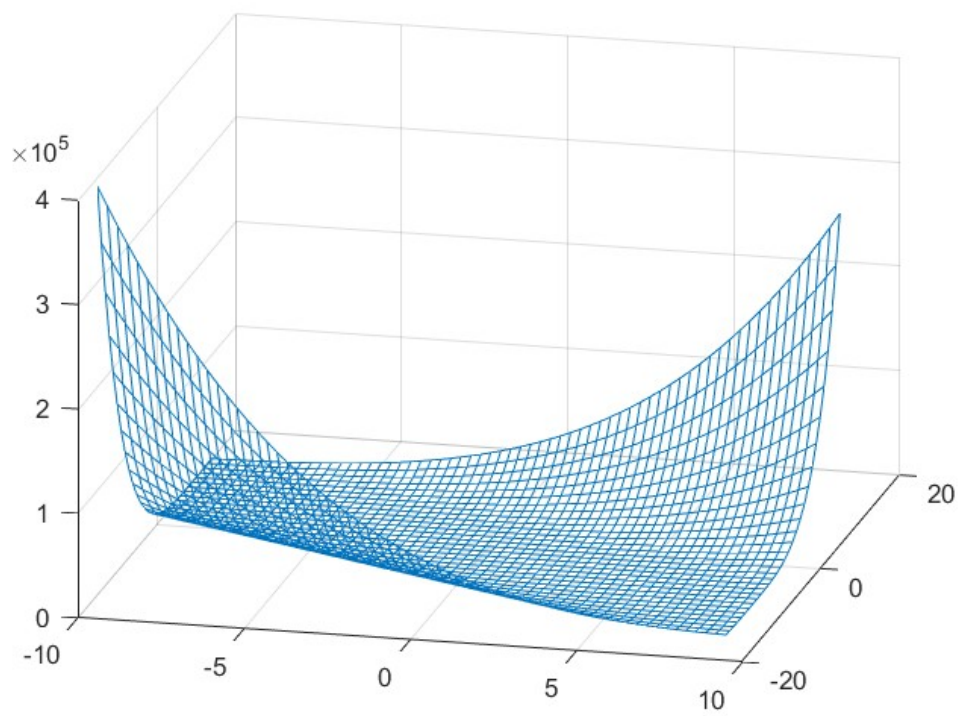


Figura 2.2: Superficie con DNC respecto a ∂_t en el espacio de Minkowski.

Observación 2.28. Las superficies temporales con DNC respecto a ∂_t en el espacio de Minkowski son mínimas y planas. Para más detalles, consulte [25].

Proposición 2.29. Sea N una superficie de Lorentz con métrica

$$g_N = -\alpha^2(u, v)du^2 + \beta^2(u, v)dv^2.$$

Si Σ es una superficie temporal parametrizada por

$$\psi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

donde $f \in \mathfrak{F}(N)$. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} a) \quad \partial_t^\top &= \frac{\left(-\frac{f_u}{\alpha^2(u, v)}\psi_u + \frac{f_v}{\beta^2(u, v)}\psi_v\right)}{1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle}. \\ b) \quad \langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle &= \frac{\left(\frac{f_v^2}{\beta^2(u, v)} - \frac{f_u^2}{\alpha^2(u, v)}\right)\left(1 + \frac{f_v^2}{\beta^2(u, v)} - \frac{f_u^2}{\alpha^2(u, v)}\right)}{(1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle)^2}. \end{aligned}$$

Demostración. La matriz asociada a la métrica de Σ es

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \langle \psi_u, \psi_u \rangle & \langle \psi_u, \psi_v \rangle \\ \langle \psi_u, \psi_v \rangle & \langle \psi_v, \psi_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \partial_u, \partial_u \rangle + f_u^2 & \langle \partial_u, \partial_v \rangle + f_u f_v \\ \langle \partial_u, \partial_v \rangle + f_u f_v & \langle \partial_v, \partial_v \rangle + f_v^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha^2 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & \beta^2 + f_v^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $\det g = \det \tilde{g}(1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle) = -\alpha^2 \beta^2 (1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle)$, entonces

$$g^{-1} = \frac{1}{1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{f_v^2}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} \\ \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{1}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2 \beta^2} \end{pmatrix}.$$

Ahora expresamos al campo vectorial $\partial_t^\top$ en términos de la base ψ_u, ψ_v , con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} a) \quad \partial_t^\top &= (g^{11}\langle \partial_t, \psi_u \rangle + g^{21}\langle \partial_t, \psi_v \rangle)\psi_u + (g^{22}\langle \partial_t, \psi_v \rangle + g^{12}\langle \partial_t, \psi_u \rangle)\psi_v \\ &= \frac{1}{1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle} \left[\left(\left(-\frac{1}{\alpha^2} - \frac{f_v^2}{\alpha^2 \beta^2} \right) f_u + \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} f_v \right) \psi_u \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2 \beta^2} \right) f_v + \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} f_u \right) \psi_v \right] \\ &= \frac{1}{1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle} \left(-\frac{f_u}{\alpha^2} \psi_u + \frac{f_v}{\beta^2} \psi_v \right). \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}
 b) \quad (1 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle)^2 \langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle &= \frac{f_u^2}{\alpha^4} \langle \psi_u, \psi_u \rangle - 2 \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \frac{f_v^2}{\beta^4} \langle \psi_v, \psi_v \rangle \\
 &= \frac{f_u^2}{\alpha^4} (-\alpha^2 + f_u^2) - 2 \frac{f_u f_v}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{f_v^2}{\beta^4} (\beta^2 + f_v^2) \\
 &= \frac{f_v^2}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2} + \left(\frac{f_v^2}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{f_v^2}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2} \right) \left(1 + \frac{f_v^2}{\beta^2} - \frac{f_u^2}{\alpha^2} \right).
 \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Corolario 2.30. *Si la superficie Σ , de la Proposición 2.29, tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t , entonces*

$$a) \quad \partial_t^\top = -\frac{f_u}{\alpha^2(u, v)} \psi_u + \frac{f_v}{\beta^2(u, v)} \psi_v.$$

$$b) \quad f_u = \pm \frac{\beta(u, v)}{\alpha(u, v)} f_v \quad o \quad \frac{f_u^2}{\alpha(u, v)^2} - \frac{f_v^2}{\beta(u, v)^2} = 1.$$

Demostración. a) Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t entonces $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$, por lo que a) se sigue del inciso a) de la Proposición 2.29. Finalmente, b) se obtiene del inciso b) de la Proposición 2.29 y el hecho de que $\partial_t^\top$ es tipo luz. $\square$

2.4. Hipersuperficie temporal con DNC respecto de un campo vectorial paralelo

En esta parte vamos a generalizar la Proposición 2.16 para hipersuperficies inmersas en una variedad de Lorentz de dimensión n .

Proposición 2.31. *Sea N una variedad de Lorentz de dimensión n y una función $f \in \mathfrak{F}(N)$. Consideremos a la hipersuperficie obtenida como la gráfica de la función f , es decir,*

$$\Sigma = \{(u, f(u)) \in N \times \mathbb{R} : u \in N\}.$$

Entonces Σ tiene una dirección nula canónica respecto a ∂_t si y solo si ∇f es tipo luz.

Demostración. Sea ξ el campo vectorial unitario normal a Σ dado por

$$\xi = \frac{\nabla f - \partial_t}{\sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1}},$$

donde $\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1 > 0$ si y solo si Σ es una superficie temporal. De aquí

$$\langle \partial_t, \xi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1}}.$$

Con lo anterior calculamos la proyección de $\partial_t^\perp$ sobre ξ

$$\partial_t^\perp = \langle \partial_t, \xi \rangle \xi = \frac{\partial_t - \nabla f}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle - 1}.$$

Así, obtenemos la parte tangente de ∂_t

$$\partial_t^\top = \partial_t - \partial_t^\perp = \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle \partial_t + \nabla f}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1}.$$

Entonces, obtenemos

$$\langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle = \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle^2 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle}{(\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1)^2} = \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle + 1}.$$

Por lo tanto $\partial_t^\top$ es tipo luz si y solo si ∇f es tipo luz en N . $\square$

Ejemplo 2.32. Consideremos $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1^n)$ una función, cuyo gradiente está dado por

$$\nabla f = -f_{x_1} \partial_{x_1} + f_{x_2} \partial_{x_2} + \dots + f_{x_n} \partial_{x_n}.$$

Si imponemos la condición de que sea tipo luz, tenemos

$$0 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = -f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2.$$

Una solución de esta ecuación diferencial parcial es

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}.$$

Por lo tanto, de la Proposición 2.31, la hipersuperficie

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n \setminus \{0\}\}$$

tiene dirección nula canónica respecto a ∂_t .

Capítulo 3

Superficie con DNC respecto de un campo vectorial cerrado conforme

En este capítulo se estudiarán las superficies con DNC respecto a un campo vectorial cerrado conforme. Dichas superficies son una generalización de las superficies con DNC respecto a un campo vectorial radial, las cuales se verán en la segunda sección de este capítulo. Empezaremos con conceptos preliminares que nos servirán para el desarrollo de este tipo de superficies. Posteriormente se hará un análisis de la superficie Σ inmersa en diferentes espacios ambiente. Finalmente, se estudiará a Σ vista como imagen inversa de una función.

3.1. Propiedades básicas

Ahora consideremos la superficie temporal Σ en una variedad de Lorentz M de dimensión tres y Z un campo vectorial cerrado conforme tipo espacio (véase Definición 1.41). Denotamos como $\overline{\nabla}$ y ∇ a las conexiones de Levi-Civita de la variedad M y la superficie Σ , respectivamente.

Definición 3.1. Decimos que una superficie temporal Σ en M tiene una dirección nula canónica con respecto al campo vectorial cerrado conforme Z , si la parte tangente $Z^\top$ es un campo vectorial tipo luz a lo largo de Σ , es decir, $\langle Z^\top, Z^\top \rangle = 0$ para $Z^\top \neq 0$.

Observación 3.2. Recordemos que, de la Definición 2.31, un campo vectorial no paralelo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ satisface $\nabla_X Z = \mu X$, para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y $\mu \neq 0$.

Observación 3.3. Un campo vectorial cerrado conforme, no paralelo, es de *norma no constante*. Esto es evidente de la siguiente sucesión de desigualdades

$$0 = X|Z|^2 = X\langle Z, Z \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_X Z, Z \rangle = \mu\langle X, Z \rangle,$$

para toda $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^3)$. Lo cual implicaría que $Z = 0$, pero esto no es posible.

Observación 3.4. Nótese que el hecho de que Z no es paralelo implica que si Σ tiene una dirección nula canónica respecto a Z , entonces Z *no puede ser tangente* a Σ .

Proposición 3.5. Sea $Z \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial cerrado conforme. Entonces:

$$1) \nabla_X Z^\top = A_{Z^\perp}(X) + \mu X,$$

$$2) \nabla_X^\perp Z^\perp = -II(Z^\top, X),$$

para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando las fórmulas de Gauss y Weingarten, junto con la descomposición $Z = Z^\top + Z^\perp$, obtenemos

$$\mu X = \bar{\nabla}_X Z = \bar{\nabla}_X Z^\top + \bar{\nabla}_X Z^\perp = \nabla_X Z^\top + II(X, Z^\top) - A_{Z^\perp}(X) + \nabla_X^\perp Z^\perp.$$

Tomando parte tangente y parte normal a Σ , se tienen las igualdades deseadas. $\square$

Proposición 3.6. Si Σ tiene una dirección nula canónica respecto a Z . Entonces

$$1) A_{Z^\perp}(Z^\top) = -\mu Z^\top,$$

$$2) \nabla_{Z^\top} Z^\top = 0,$$

$$3) II(Z^\top, Z^\top) = 0.$$

Demostración. La primera igualdad se deduce del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \langle A_{Z^\perp}(Z^\top), X \rangle &= \langle II(Z^\top, X), Z^\perp \rangle = -\langle \nabla_X^\perp Z^\perp, Z^\perp \rangle \\ &= -\frac{1}{2}X\langle Z^\perp, Z^\perp \rangle = -\frac{1}{2}X\langle Z, Z \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_X Z, Z \rangle = -\langle \mu X, Z \rangle \\ &= -\langle \mu Z^\top, X \rangle, \end{aligned}$$

para toda $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Para la segunda igualdad consideramos 1) de la Proposición 3.5 y el inciso anterior, con lo cual obtenemos

$$\nabla_{Z^\top} Z^\top = A_{Z^\top}(Z^\top) + Z^\top = -\mu Z^\top + \mu Z^\top = 0.$$

Finalmente, de la expresión

$$\langle II(Z^\top, Z^\top), Z^\perp \rangle = \langle A_{Z^\perp}(Z^\top), Z^\top \rangle = -\mu \langle Z^\top, Z^\top \rangle = 0,$$

y dado que Σ es de codimensión uno, se concluye la igualdad 3. $\square$

Definición 3.7. Una superficie temporal $\Sigma \subset M$, con dirección nula canónica respecto de un campo vectorial cerrado conforme Z , se dice que es *reglada* si las curvas integrales del campo vectorial $Z^\top$ son geodésicas de M , es decir, $\bar{\nabla}_{Z^\top} Z^\top = 0$.

Observación 3.8. Del Lema 3.6 se deduce lo siguiente:

1. Del inciso 1) y la Definición 1.18, $Z^\top$ es una curvatura principal de Σ , es decir, la superficie Σ tiene una dirección principal canónica respecto a Z .
2. De inciso 2), las curvas integrales de $Z^\top$ son geodésicas de Σ .
3. De inciso 3) y la Definición 3.7, Σ es reglada.

Observación 3.9. Sea $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo vectorial tipo luz. El conjunto $\{Z^\top, W\}$ representa un marco tipo luz (véase Definición 1.15).

Observación 3.10. De la Definición 1.10, el vector de curvatura media de Σ está dado por $\vec{H} = -II(Z^\top, W)$.

Proposición 3.11. Si la superficie temporal Σ tiene dirección nula canónica respecto al campo vectorial cerrado conforme Z , entonces $H = -\frac{\mu}{|Z|}$. En particular, Σ nunca es mínima.

Demostración. Notemos que el campo vectorial normal unitario a Σ es

$$\xi = \frac{Z^\perp}{|Z^\perp|}.$$

Por lo tanto, de la Definición 1.11 y la Proposición 1.16, se tiene que

$$\begin{aligned} H &= \langle \vec{H}, \xi \rangle = -\langle II(Z^\top, W), \xi \rangle \\ &= -\langle A_\xi(Z^\top), W \rangle = -\frac{1}{|Z^\perp|} \langle A_{Z^\perp}(Z^\top), W \rangle \\ &= \frac{1}{|Z^\perp|} \langle \mu Z^\top, W \rangle = -\frac{\mu}{|Z^\perp|} = -\frac{\mu}{|Z|}, \end{aligned}$$

donde $|Z^\perp| = |Z| \neq 0$. $\square$

Proposición 3.12. *La conexión de Levi-Civita de Σ satisface las siguientes relaciones*

$$1) \nabla_{Z^\top} Z^\top = 0 = \nabla_{Z^\top} W,$$

$$2) \nabla_W Z^\top = -aZ^\top,$$

$$3) \nabla_W W = aW,$$

$$4) [Z^\top, W] = aZ^\top,$$

donde $a = \langle II(W, W), Z^\top \rangle$.

Demostración. 1) De la Proposición 3.6 sabemos que $\nabla_{Z^\top} Z^\top = 0$. Como $\langle W, W \rangle = 0$, entonces $0 = Z^\top \langle W, W \rangle = 2\langle \nabla_{Z^\top} W, W \rangle$. Y dado que $\langle Z^\top, W \rangle = -1$, se obtiene

$$0 = Z^\top \langle Z^\top, W \rangle = \langle \nabla_{Z^\top} Z^\top, W \rangle + \langle Z^\top, \nabla_{Z^\top} W \rangle = \langle Z^\top, \nabla_{Z^\top} W \rangle.$$

Por lo que inferimos

$$\nabla_{Z^\top} W = -\langle \nabla_{Z^\top} W, W \rangle Z^\top - \langle \nabla_{Z^\top} W, Z^\top \rangle W = 0.$$

2) Dado que $\langle Z^\top, Z^\top \rangle = 0$, tenemos la igualdad $\langle \nabla_W Z^\top, Z^\top \rangle = 0$. Por otra parte, como W es nulo

$$\langle \nabla_W Z^\top, W \rangle = \langle A_{Z^\perp}(W) + W, W \rangle = \langle A_{Z^\perp}(W), W \rangle = \langle II(W, W), Z^\perp \rangle = a.$$

Concluimos

$$\nabla_W Z^\top = -\langle \nabla_W Z^\top, W \rangle Z^\top - \langle \nabla_W Z^\top, Z^\top \rangle W = -aZ^\top.$$

3) De la nulidad del campo W se deduce que $\langle \nabla_W W, W \rangle = 0$. Ahora, de la igualdad $\langle Z^\top, W \rangle = -1$ se llega a

$$\langle \nabla_W W, Z^\top \rangle = -\langle W, \nabla_W Z^\top \rangle = a\langle W, Z^\top \rangle = -a.$$

Por lo tanto

$$\nabla_W W = -\langle \nabla_W W, W \rangle Z^\top - \langle \nabla_W W, Z^\top \rangle W = aW.$$

Finalmente, combinando 1) y 2) se deduce $[Z^\top, W] = \nabla_{Z^\top} W - \nabla_W Z^\top = aZ^\top$. $\square$

Proposición 3.13. *El tensor de curvatura R de Σ en M satisface la siguiente igualdad*

$$R(Z^\top, W)Z^\top = Z^\top(a)Z^\top.$$

En consecuencia, la curvatura Gaussiana de Σ es $K = Z^\top \cdot a$.

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la Proposición 2.12. $\square$

Proposición 3.14. Sean $\overline{K}$ y K la curvatura seccional y curvatura Gaussiana de M y Σ , respectivamente. Entonces, se satisface

$$K = \overline{K} + |\vec{H}|^2.$$

Demostración. Sustituyendo $II(Z^\top, Z^\top) = 0$ y $H = -\langle Z^\top, W \rangle$ en la Ecuación de Gauss

$$\begin{aligned} K(Z^\top, W) &= \overline{K}(Z^\top, W) \\ &+ \frac{\langle II(Z^\top, Z^\top), II(W, W) \rangle - \langle II(Z^\top, W), II(Z^\top, W) \rangle}{\langle Z^\top, Z^\top \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z^\top, W \rangle^2} \\ &= \overline{K} + |\vec{H}|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Observación 3.15. Si $\overline{K} = 0$ en la proposición anterior, las Proposiciones 3.11 y 3.13 nos conducen a la siguiente sucesión de igualdades

$$Z^\top \cdot a = K = |\vec{H}|^2 = \frac{\mu^2}{|Z|^2}.$$

Lo anterior implica que a no puede ser la función constante cero.

3.2. Superficies con DNC respecto a un campo vectorial radial

En esta parte vamos a considerar a Σ inmersa en el espacio de Minkowski de dimensión tres $\mathbb{R}_1^3$ y a $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^3)$ un campo vectorial radial (véase Definición 1.38). Aquí, ∇ denotará la conexión de $\mathbb{R}_1^3$ y ∇ representará la conexión de Σ .

Definición 3.16. Decimos que una superficie temporal Σ en $\mathbb{R}_1^3$ tiene una dirección nula canónica con respecto al campo vectorial radial Z , si la parte tangente $Z^\top$ es un campo vectorial tipo luz a lo largo de Σ , es decir, $\langle Z^\top, Z^\top \rangle = 0$ para $Z^\top \neq 0$.

Observación 3.17. Los conceptos desarrollados en la sección anterior son válidos para campos vectoriales radiales considerando $\mu = 1$.

Las superficies casi umbílicas (CU) son desarrolladas en [3], donde se construye una forma de parametrizarlas. Por lo que resulta interesante y útil, para la determinación de ejemplos, encontrar una relación entre las superficies con DNC y las superficies CU. Dicha relación se desarrolla a continuación.

Teorema 3.18. *Sea Σ una superficie temporal en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ con dirección nula canónica respecto de un campo vectorial radial Z . Entonces Σ es una superficie casi umbílica.*

Demostración. De la Proposición 3.14 y el hecho de que la curvatura seccional de $\mathbb{R}_1^3$ es cero, tenemos que $K = |\bar{H}|^2$. Así, del Corolario 1.26, solo falta demostrar que $A_{Z^\perp}$ admite solo un vector propio. La Proposición 3.6 nos dice que $Z^\top$ es un vector propio de $A_{Z^\perp}$. Sea $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ otro vector propio de $A_{Z^\perp}$ linealmente independiente de $Z^\top$.

Dado que $Z^\top$ es tipo luz, V no puede ser tipo tiempo o tipo espacio, véase la Observación 1.24 inciso 1.

Ahora, supongamos que V es tipo luz, entonces podemos suponer que V es el campo vectorial W de la Definición 1.15. Note que $\langle A_{Z^\perp}(W), W \rangle = 0$ si y solo si $A_{Z^\perp}(W) = rW$, para alguna función $r \in \mathfrak{F}(\Sigma)$. Por lo que basta con demostrar que $\langle A_{Z^\perp}(W), W \rangle \neq 0$ para concluir la demostración. En efecto, de las Proposiciones 3.5 y 3.12 y la Observación 3.15 tenemos que

$$\langle A_{Z^\perp}(W), W \rangle = \langle \nabla_W Z^\top - W, W \rangle = -a \langle Z^\top, W \rangle = a \neq 0.$$

□

Corolario 3.19. *Una superficie temporal Σ en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ con dirección nula canónica respecto de un campo vectorial radial Z , no es plana.*

Demostración. Se sigue de la igualdad $H = -\frac{1}{|Z|}$ y el Teorema 3.18. □

Lema 3.20. *Dado un campo vectorial espacial X en $\mathbb{R}_1^3$ existen dos campos vectoriales nulos ortogonales a X , a saber*

$$\left(\frac{ac + b|X|}{a^2 - b^2}, \frac{bc + a|X|}{a^2 - b^2}, 1\right) \quad y \quad \left(\frac{ac - b|X|}{a^2 - b^2}, \frac{bc - a|X|}{a^2 - b^2}, 1\right).$$

Proposición 3.21. *Sea Σ una superficie temporal totalmente casi umbílica parametrizada por*

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + vT(u),$$

con α y T como en el Teorema 1.36. Si $\langle \alpha, T \rangle = 0$, entonces Σ tiene dirección nula canónica respecto a un campo vectorial radial Z .

Demostración. Supongamos que $\langle \alpha, T \rangle = 0$. Dada la parametrización $\psi(u, v)$ los campos coordenados inducidos son

$$\psi_u = \alpha' + vT' \quad \text{y} \quad \psi_v = T.$$

Con los cuales calculamos

$$E = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = 2v\langle \alpha', T' \rangle + v^2\langle T', T' \rangle, \quad F = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \langle \alpha', T \rangle \quad \text{y} \quad G = 0.$$

Por otra parte, si $\alpha^\top$ representa la parte tangente de α a la superficie Σ , entonces

$$\langle \alpha^\top, \psi_u \rangle = \langle \alpha, \psi_u \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle + v\langle \alpha, T' \rangle \quad \text{y} \quad \langle \alpha^\top, \psi_v \rangle = \langle \alpha, \psi_v \rangle = \langle \alpha, T \rangle = 0.$$

Ahora, escribimos a $\alpha^\top$ en términos de los campos coordenados inducidos

$$\alpha^\top = a(u, v)\psi_u + b(u, v)\psi_v.$$

Como $\langle \alpha', T \rangle \neq 0$, dado que α' y T son vectores linealmente independientes. Entonces, los coeficientes de $\alpha^\top$ son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \alpha^\top, \psi_u \rangle \\ \langle \alpha^\top, \psi_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\langle \alpha', T \rangle^2} \begin{pmatrix} 0 & -\langle \alpha', T \rangle \\ -\langle \alpha', T \rangle & 2v\langle \alpha', T' \rangle + v^2\langle T', T' \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha, \alpha' \rangle + v\langle \alpha, T' \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle + v\langle \alpha, T' \rangle}{\langle \alpha', T \rangle} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos que

$$\alpha^\top = \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle + v\langle \alpha, T' \rangle}{\langle \alpha', T \rangle} T,$$

es decir, $\alpha^\top$ es tipo luz (véase Observación 1.37).

Puesto que el campo vectorial radial es $Z = \psi(u, v)$, se concluye que

$$\begin{aligned} \langle Z^\top, Z^\top \rangle &= \langle \psi^\top, \psi^\top \rangle \\ &= \langle \alpha^\top, \alpha^\top \rangle + 2y\langle \alpha^\top, T \rangle + y^2\langle T, T \rangle \\ &= 2y\langle \alpha, T \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.22. Consideremos la *hélice* $\alpha(u) = (u, \cos u, \sin u)$. Existe U un abierto, suficientemente pequeño, tal que $\alpha(u)$ es tipo espacio. También notemos que $\alpha'(u)$ es tipo luz. Ahora, sea $T(u) = (f(u), g(u), 1)$ un campo vectorial tipo luz tal que sea ortogonal a $\alpha(u)$, es decir $\langle \alpha, T \rangle = 0$. Por el Lema 3.20 se sabe que hay dos posibles vectores que satisfacen estas condiciones, por lo que elegimos uno para ser el campo vectorial T , a saber,

$$T(u) = \left(\frac{u \sin u + \cos u \sqrt{1 - u^2}}{u^2 - \cos^2 u}, \frac{\cos u \sin u + u \sqrt{1 - u^2}}{u^2 - \cos^2 u}, 1 \right).$$

Por lo tanto, de la Proposición 3.21, la superficie casi umbílica.

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \alpha(u) + vT(u) \\ &= \left(u + v \frac{u \sin u + \cos u \sqrt{1 - u^2}}{u^2 - \cos^2 u}, \cos u + v \frac{\cos u \sin u + u \sqrt{1 - u^2}}{u^2 - \cos^2 u}, \right. \\ &\quad \left. \sin u + v \right) \end{aligned}$$

tiene dirección nula canónica respecto a $Z = \psi(u, v)$. Véase la Figura 3.1.

3.3. Superficies con DNC en el espacio de De Sitter

En esta parte vamos a considerar superficies inmersas en el espacio de De Sitter de dimensión tres $\mathbb{S}_1^3$, uno de los llamados *espacios modelo*.

Lema 3.23. Sea $\Sigma \subset \mathbb{S}_1^3$ una superficie temporal, Z un campo cerrado conforme en $\mathbb{S}_1^3$ y $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo vectorial tipo luz tal que $\{Z^\top, W\}$ es un marco tipo luz adaptado a Σ . Entonces la función μ es constante en la dirección de $Z^\top$. Además, $W \cdot \mu = 1$.

Demostración. De la Proposición 1.53 y el hecho de que $Z^\top$ es tipo luz

$$0 = \langle Z^\top, Z^\top \rangle = \langle Z^\top, Z \rangle = -\langle Z^\top, \text{grad} \mu \rangle = -Z^\top \cdot \mu,$$

lo cual demuestra la primera afirmación. La segunda se deduce de las siguientes igualdades

$$-1 = \langle Z^\top, W \rangle = \langle Z, W \rangle = -\langle \text{grad} \mu, W \rangle = -W \cdot \mu.$$

□

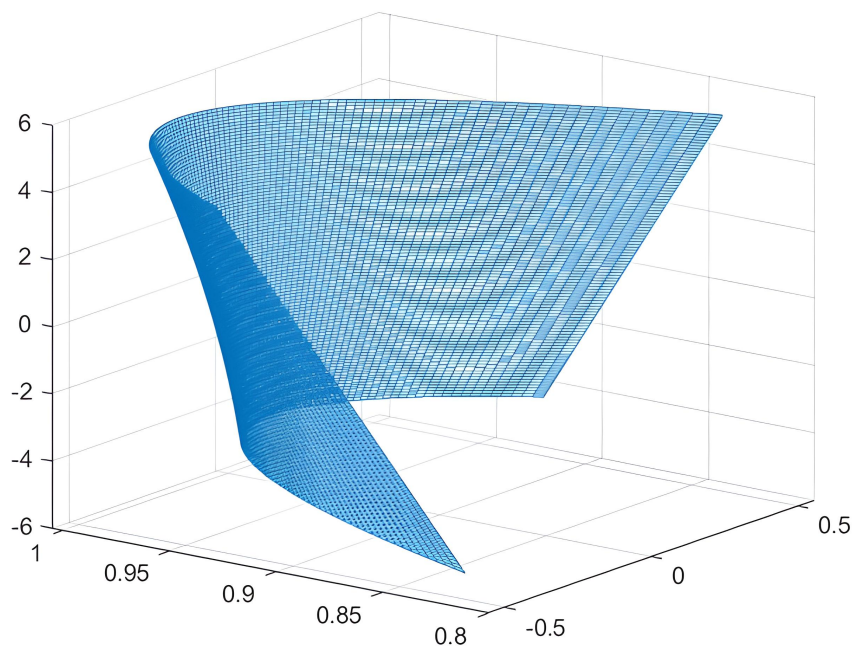


Figura 3.1: Superficie casi umbílica con dirección nula canónica.

Proposición 3.24. *Sea Σ superficie temporal en $\mathbb{S}_1^3$, con dirección nula canónica respecto a un campo vectorial cerrado conforme Z . Entonces se satisfacen las siguiente igualdades*

- 1) $\nabla_{Z^\top}^\perp \vec{H} = 0$,
- 2) $|\vec{H}|^2 = -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle - 1$,
- 3) $\nabla_{Z^\top}^\perp II(W, W) = \nabla_W^\perp \vec{H}$.

Demostración. Primero notemos que

$$\langle \vec{H}, Z^\top \rangle = -\langle II(Z^\top, W), Z^\top \rangle = -\langle A_{Z^\top}(Z^\top), W \rangle = \mu \langle Z^\top, W \rangle = -\mu.$$

Por consiguiente, de las Proposiciones 3.5 y 3.6 se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= Z^\top \cdot \mu \\ &= -Z^\top \langle \vec{H}, Z^\top \rangle \\ &= -\langle \nabla_{Z^\top}^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle - \langle \vec{H}, \nabla_{Z^\top}^\perp Z^\top \rangle \\ &= -\langle \nabla_{Z^\top}^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle + \langle \vec{H}, II(Z^\top, Z^\top) \rangle \\ &= -\langle \nabla_{Z^\top}^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle. \end{aligned}$$

Dado que la codimensión de Σ es uno, se deduce la primea igualdad. La segunda igualdad se deduce del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= W \cdot \mu \\ &= -W \langle \vec{H}, Z^\top \rangle \\ &= -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle - \langle \vec{H}, \nabla_W^\perp Z^\top \rangle \\ &= -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle + \langle \vec{H}, II(Z^\top, W) \rangle \\ &= -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\top \rangle - |\vec{H}|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la última igualdad se obtiene de lo siguiente

$$\begin{aligned} \nabla_{Z^\top}^\perp II(W, W) &= (\nabla_{Z^\top}^\perp II)(W, W) + 2II(\nabla_{Z^\top} W, W) \\ &= (\nabla_W^\perp II)(Z^\top, W) \\ &= \nabla_W^\perp II(Z^\top, W) - II(\nabla_W Z^\top, W) - II(Z^\top, \nabla_W W) \\ &= -\nabla_W^\perp \vec{H} + aII(Z^\top, W) - aII(Z^\top, W) \\ &= -\nabla_W^\perp \vec{H}, \end{aligned}$$

donde $a = \langle II(W, W), Z^\top \rangle$.

□

Corolario 3.25. Sean K y $\vec{H}$ la curvatura Gaussiana y el campo vectorial de curvatura media de Σ , respectivamente. Entonces

$$K = -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\perp \rangle.$$

Demostración. De las Proposiciones 3.13, 3.5 y 3.6, obtenemos

$$\begin{aligned} K &= Z^\top(a) \\ &= Z^\top \langle II(W, W), Z^\perp \rangle \\ &= \langle \nabla_{Z^\top}^\perp II(W, W), Z^\perp \rangle + \langle II(W, W), \nabla_{Z^\top}^\perp Z^\perp \rangle \\ &= -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\perp \rangle - \langle II(W, W), II(Z^\top, Z^\top) \rangle \\ &= -\langle \nabla_W^\perp \vec{H}, Z^\perp \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.26. Las superficies con dirección nula canónica en $\mathbb{S}_1^3$ no son de curvatura media constante ni planas.

Demostración. Si Σ fuera de curvatura media constante entonces, del inciso 2) de la Proposición 3.24, se tendría que $|\vec{H}|^2 = -1$, lo cual es imposible. Además, como Σ es de codimensión uno, el Corolario 3.25 implica que no puede ser plana. □

3.4. Superficies con DNC en un producto alabeado

Ahora vamos a considerar al espacio ambiente como el producto alabeado $I \times_\rho N$, donde N es una superficie de Lorentz, I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $\rho \in \mathfrak{F}(I)$ una función positiva. Con estas consideraciones, la métrica en el producto alabeado es $dt^2 + \rho^2(t)g_N$, donde g_N representa la métrica inducida en N .

Proposición 3.27. Sea N una superficie de Lorentz y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Consideremos a la superficie obtenida como la gráfica de la función f , es decir,

$$\Sigma = \{(f(u), u) \in I \times_\rho N : u \in N\},$$

con métrica inducida $g = df^2 + \rho^2(t)g_N$. Entonces Σ tiene una dirección nula canónica respecto de $Z = \rho \partial_t$ si y solo si ∇f es tipo luz.

Demostración. Sea $\psi : N \rightarrow I \times_\rho N$ definida por

$$\psi(u) = (f(u), u),$$

tal que su imagen es Σ . Denotamos en esta ocasión a la métrica en N por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, $g_N = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $\{X_1, X_2\}$ un marco ortonormal local en N tal que $\langle X_j, X_j \rangle = \varepsilon_j$ y $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$. Además, notemos que X_1 y X_2 son ortogonales a ∂_t . Usando a ψ obtenemos un marco ortonormal local inducido en $\mathfrak{X}(\Sigma)$

$$Y_j = df(X_j)\partial_t + X_j, \quad j = 1, 2.$$

Así, la métrica inducida en Σ es

$$g = \begin{pmatrix} g(Y_1, Y_1) & g(Y_1, Y_2) \\ g(Y_2, Y_1) & g(Y_2, Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 \varepsilon_1 + \langle \nabla f, X_1 \rangle^2 & \langle \nabla f, X_1 \rangle \langle \nabla f, X_2 \rangle \\ \langle \nabla f, X_1 \rangle \langle \nabla f, X_2 \rangle & \rho^2 \varepsilon_2 + \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, notemos que si $\nabla f = \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle X_1 + \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle X_2$, entonces

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 + \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle^2.$$

Usando la igualdad anterior y que $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \det(g) &= -\rho^2 (\rho^2 - \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 - \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_1 \rangle^2) \\ &= -\rho^2 (\rho^2 + \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 + \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle^2) \\ &= -\rho^2 (\rho^2 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle). \end{aligned}$$

Esto implica que Σ es temporal si y solo si $\langle \nabla f, \nabla f \rangle > -\rho$.

Por otra parte, escribamos $\partial_t^\top = aY_1 + bY_2$. Ahora, notemos que $g(\partial_t, Y_j) = g(\partial_t, df(X_1)\partial_t + X_j) = \langle \nabla f, X_j \rangle$. Entonces los coeficientes de ∂_t son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} \rho^2 \varepsilon_2 + \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 & -\langle \nabla f, X_1 \rangle \langle \nabla f, X_2 \rangle \\ -\langle \nabla f, X_1 \rangle \langle \nabla f, X_2 \rangle & \rho^2 \varepsilon_1 + \langle \nabla f, X_1 \rangle^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\partial_t, Y_1) \\ g(\partial_t, Y_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} \rho^2 \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_1 \rangle \\ \rho^2 \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_2 \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} \rho^2 \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle \\ \rho^2 \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la representación de ∂_t

$$\begin{aligned} \partial_t &= -\frac{\rho^2}{\det(g)} (\varepsilon_2 \langle \nabla f, X_1 \rangle Y_1 + \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle Y_2) \\ &= -\frac{\rho^2}{\det(g)} (\varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle^2 \partial_t + \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle^2 \partial_t \\ &\quad + \varepsilon_1 \langle \nabla f, X_1 \rangle X_1 + \varepsilon_2 \langle \nabla f, X_2 \rangle X_2) \\ &= -\frac{\rho^2}{\det(g)} (\langle \nabla f, \nabla f \rangle^2 \partial_t + \nabla f). \end{aligned}$$

Tomando el producto escalar de $\partial_t^\top$ consigo mismo, se tiene

$$\langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle = \frac{\rho^4}{\det(g)^2} (\langle \nabla f, \nabla f \rangle^2 + \rho^2 \langle \nabla f, \nabla f \rangle) = \frac{\rho^4 \langle \nabla f, \nabla f \rangle}{\det(g)^2} (\rho^2 + \langle \nabla f, \nabla f \rangle).$$

Como $\langle \nabla f, \nabla f \rangle \neq \rho^2$, pues $\det(g)$ es distinto de cero, se concluye que $\rho \partial_t^\top$ es tipo luz si y solo si $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$. $\square$

Ejemplo 3.28. Consideremos $N = \mathbb{S}_1^2$ y $\rho = t$. La métrica de $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ es

$$dt^2 + t^2(-d\theta + \cosh^2 \theta d\phi^2).$$

Procediendo de manera similar como en el Ejemplo 2.25, obtenemos que la superficie

$$\Sigma = \{(F(\phi + \varepsilon \arctan(\sinh(\theta))), \theta, \phi)\} \subset I \times_t \mathbb{S}_1^2,$$

donde $\varepsilon \in \{1, -1\}$, tiene DNC respecto a ∂_t .

Lema 3.29. Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N , conexión de Levi-Civita ∇ y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Si la superficie temporal Σ es la imagen de $\psi : N \rightarrow I \times_\rho N$, definida por $\psi(u) = (f(u), u)$, cuya métrica inducida es $g = df^2 + \rho^2 g_N$. Entonces la conexión de Levi-Civita ∇ de Σ satisface la siguiente relación

$$\nabla_X Y = \nabla_X^N Y + \frac{\text{Hess}f(X, Y)}{\rho^2 + |\nabla f|^2} \nabla f,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{L}(N)$. Aquí ∇f denota el gradiente de f bajo g_N y Hess denota el Hessiano sobre la superficie N .

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(N)$. Por la fórmula de Koszul y la relación de las métricas $g = df^2 + \rho^2 g_N$, tenemos

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\ &= 2\rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) + X \cdot ((Y \cdot f)(Z \cdot f)) + Y \cdot ((Z \cdot f)(X \cdot f)) \\ &\quad - Z \cdot ((X \cdot f)(Y \cdot f)) - (X \cdot f)[Y, Z] \cdot f + (Y \cdot f)[Z, X] \cdot f \\ &\quad + Z(f)[X, Y](f) \\ &= 2\rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) + (Z \cdot f)[X \cdot Y \cdot f + Y \cdot X \cdot f] \\ &\quad + (Y \cdot f)[X \cdot Z \cdot f - Z \cdot X \cdot f] + (X \cdot f)[Y \cdot Z \cdot f - Z \cdot Y \cdot f] \\ &\quad - (X \cdot f)[Y, Z] \cdot f + (Y \cdot f)[Z, X] \cdot f + (Z \cdot f)[X, Y] \cdot f \\ &= 2\rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) + (Z \cdot f)[X \cdot Y \cdot f + Y \cdot X \cdot f + [X, Y] \cdot f] \\ &= 2\rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) + 2(X \cdot Y \cdot f)(Z \cdot f) \\ &= 2\rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) + 2(X \cdot Y \cdot f)g_N(\nabla f, Z) \\ &= 2g_N(\rho^2 \nabla_X Y + (X \cdot Y \cdot f)\nabla f, Z). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= (\nabla_X Y \cdot f)(Z \cdot f) + \rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) \\
&= (\nabla_X Y \cdot f)g_N(\nabla f, Z) + \rho^2 g_N(\nabla_X Y, Z) \\
&= g_N((\nabla_X Y \cdot f)\nabla f + \rho^2 \nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

De las igualdades anteriores obtenemos

$$\rho^2 \nabla_X Y = \rho^2 \nabla_X^N Y + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f] \nabla f. \quad (3.1)$$

Ahora vamos a determinar $\nabla_X Y(f)$, para esto usamos la igualdad anterior

$$\begin{aligned}
\rho^2 \nabla_X Y(f) &= \rho^2 (\nabla_X^N Y \cdot f) + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f](\nabla f \cdot f) \\
&= (\nabla_X^N Y \cdot f) + [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X Y \cdot f]|\nabla f|^2 \\
&= \frac{1}{\rho^2 + |\nabla f|^2} [\rho^2 (\nabla_X^N Y \cdot f) + (X \cdot Y \cdot f)|\nabla f|^2]
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la Ecuación 3.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho^2 \nabla_X Y &= \rho^2 \nabla_X^N Y + (X \cdot Y \cdot f) \nabla f - \frac{1}{\rho^2 + |\nabla f|^2} [\rho^2 (\nabla_X^N Y \cdot f) \\
&\quad + (X \cdot Y \cdot f)|\nabla f|^2] \nabla f \\
&= \rho^2 \nabla_X^N Y - \frac{\rho^2}{\rho^2 + |\nabla f|^2} (\nabla_X^N Y \cdot f) \nabla f \\
&\quad + \left[1 - \frac{|\nabla f|^2}{\rho^2 + |\nabla f|^2}\right] (X \cdot Y \cdot f) \nabla f \\
&= \rho^2 \nabla_X^N Y - \frac{\rho^2}{\rho^2 + |\nabla f|^2} (\nabla_X^N Y \cdot f) \nabla f + \frac{\rho^2}{1 + |\nabla f|^2} (X \cdot Y \cdot f) \nabla f \\
&= \rho^2 \nabla_X^N Y - \frac{\rho^2}{\rho^2 + |\nabla f|^2} [X \cdot Y \cdot f - \nabla_X^N Y \cdot f] \nabla f. \\
&= \rho^2 \left[\nabla_X^N Y + \frac{Hess f(X, Y)}{\rho^2 + |\nabla f|^2} \nabla f \right].
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.30. *Sea N una superficie de Lorentz con métrica g_N y $f \in \mathfrak{F}(N)$ una función. Sea Σ una superficie temporal que es imagen de la parametrización $\psi : N \rightarrow I \times_\rho N$ definida por $\psi(u) = (f(u), u)$, con métrica inducida $g = df^2 + \rho^2 g_N$. Si Σ tiene dirección nula canónica respecto a $\rho \partial_t$, entonces $K = \frac{1}{\rho^2} K_N$. Donde K y K_N denotan la curvatura Gaussiana de Σ y N respectivamente.*

Demostración. Los símbolos R_N y R denotarán el tensor de curvatura de N y Σ , respectivamente. Primero, de la Proposición 3.27 sabemos que ∇f es tipo luz. Sea $\{Z, W = \nabla f\}$ un marco tipo luz en $\mathfrak{L}(N)$ tal que $g_N(Z, W) = -1$. Entonces, obtenemos

$$g_N(Z, Z)g_N(Z, Z) - g_N(Z, W)^2 = -1,$$

y

$$g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2 = -\rho^2(\rho^2 + |\nabla f|^2) = -\rho^4;$$

ya que $df(\nabla f) = g_N(\nabla f, \nabla f) = 0$. En particular

$$K(Z, W) = \frac{g(R(Z, W)Z, W)}{g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2} = -\frac{g(R(Z, W)Z, W)}{\rho^4}.$$

Ahora calcularemos $R(Z, W)Z = \nabla_{[Z, W]}Z - [\nabla_Z, \nabla_W]Z$. Para esto, observemos que

$$0 = Xg_N(\nabla f, \nabla f) = 2g_N(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) = 2Hessf(X, \nabla f) = 2Hessf(X, W),$$

para toda $X \in \mathfrak{L}(N)$.

De aquí, el Lema 3.29 y $W = \nabla f$ tenemos $\nabla_X W = \nabla_X^N W$, $\nabla_W X = \nabla_W^N X$,

$$\nabla_{\nabla_Z W} Z = \nabla_{\nabla_Z^N W} Z = \nabla_{\nabla_Z^N W}^N Z + \frac{Hessf(\nabla_Z^N W, Z)}{\rho^2} \nabla f$$

y

$$\nabla_{\nabla_W Z} Z = \nabla_{\nabla_W^N Z} Z = \nabla_{\nabla_W^N Z}^N Z + \frac{Hessf(\nabla_W^N Z, Z)}{\rho^2} \nabla f.$$

Combinando las igualdades anteriores conseguimos

$$\nabla_{[Z, W]} Z = \nabla_{[Z, W]}^N Z + \frac{Hessf([Z, W], Z)}{\rho^2} \nabla f. \quad (3.2)$$

Por otra parte, calculamos

$$\nabla_Z \nabla_W Z = \nabla_Z \nabla_W^N Z = \nabla_Z^N \nabla_W^N Z + \frac{Hessf(Z, \nabla_W^N Z)}{\rho^2} \nabla f$$

y

$$\begin{aligned} \nabla_W \nabla_Z Z &= \nabla_W \left(\nabla_Z^N Z + \frac{Hessf(Z, Z)}{\rho^2} \nabla f \right) \\ &= \nabla_W^N \left(\nabla_Z^N Z + \frac{Hessf(Z, Z)}{\rho^2} \nabla f \right) \\ &= \nabla_W^N \nabla_Z^N Z + \frac{Hessf(Z, Z)}{\rho^2} \nabla_W^N \nabla f + W \left(\frac{Hessf(Z, Z)}{\rho^2} \right) \nabla f. \end{aligned}$$

Así

$$[\nabla_Z, \nabla_W]Z = [\nabla_Z^N, \nabla_W^N]Z - \frac{\text{Hess}f(Z, Z)}{\rho^2} \nabla_W^N \nabla f + h_1 \nabla f, \quad (3.3)$$

donde

$$h_1 = \frac{\text{Hess}f(Z, \nabla_W^N Z)}{\rho^2} - W \left(\frac{\text{Hess}f(Z, Z)}{\rho^2} \right).$$

De las igualdades 3.2 y 3.3 obtenemos el tensor de curvatura en Σ , el cual está dado por

$$R(Z, W)Z = R_N(Z, W)Z + \frac{\text{Hess}f(Z, Z)}{\rho^2} \nabla_W^N \nabla f + h_2 \nabla f,$$

donde $h_2 = \text{Hess}f([Z, W], Z) - h_1$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) &= df^2(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) + \rho^2 g_N(\nabla_X^N \nabla f, \nabla f) \\ &= df(\nabla_X^N \nabla f) g_N(\nabla f, \nabla f) + \frac{\rho^2}{2} X \cdot g_N(\nabla f, \nabla f) = 0, \end{aligned}$$

para toda $X \in \mathfrak{L}(N)$.

Recordemos que $W = \nabla f$. Dado que $g_N(Z, Z)g_N(Z, Z) - g_N(Z, W)^2 = -1$ y $g(Z, Z)g(W, W) - g(Z, W)^2 = -\rho^4$, la curvatura Gaussiana de Σ es

$$\begin{aligned} -\rho^4 K(Z, W) &= g(R(Z, W)Z, W) \\ &= g(R_N(Z, W)Z, W) + \text{Hess}f(Z, Z)g(\nabla_W^N \nabla f, W) \\ &\quad + h_2 g(\nabla f, W) \\ &= g(R_N(Z, W)Z, W) + h_2 (df(\nabla f))^2 \\ &= g(R_N(Z, W)Z, W) \\ &= \rho^2 g_N(R_N(Z, W)Z, W) + df(R_N(Z, W)Z) g_N(\nabla f, W) \\ &= \rho^2 g_N(R_N(Z, W)Z, W) = -\rho^2 K_N(Z, W). \end{aligned}$$

□

Observación 3.31. Recordemos que $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ es isométrico a $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$, bajo la isometría natural $\psi(t, p) = tp$ (véase [23]). Por lo que podemos inducir una métrica en $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$ dada por

$$ds^2 = dt^2 + t^2(-d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\phi^2).$$

Por lo que podemos obtener otro método para encontrar superficies con di-rección nula canónica en $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$.

Proposición 3.32. *El campo vectorial cerrado y conforme $t\partial_t$ en $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ es el campo vectorial radial $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ en $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$.*

Demostración. Consideramos las coordenadas x , y y z de $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ definidas por

$$x = t \sinh \theta, \quad y = t \cosh \theta \cos \phi, \quad z = t \cosh \theta \sin \phi.$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} dx &= \sinh \theta dt + t \cosh \theta d\theta, \\ dy &= \cosh \theta \cos \phi dt + t \sinh \theta d\theta - t \cosh \theta \sin \phi d\phi, \\ dz &= \cosh \theta \sin \phi dt + t \sinh \theta \sin \phi d\theta + t \cosh \theta \cos \phi d\phi. \end{aligned}$$

Ahora, encontramos la base coordenada

$$\begin{aligned} \partial_x &= -\sinh \theta \partial_t + \frac{\cosh \theta}{t} \partial_\theta, \\ \partial_y &= \cosh \theta \cos \phi \partial_t - \frac{\sinh \theta \cos \phi}{t} \partial_\theta - \frac{\sin \phi}{t \cosh \theta} \partial_\phi, \\ \partial_z &= \cosh \theta \sin \phi \partial_t - \frac{\sinh \theta \sin \phi}{t} \partial_\theta + \frac{\cos \phi}{t \cosh \theta} \partial_\phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z &= t \sinh^2 \theta \partial_t + \sinh \theta \cosh \theta \partial_\theta + t \cosh^2 \theta \cos^2 \phi \partial_t \\ &\quad - \sinh \theta \cosh \theta \cos^2 \theta \partial_\theta - \cos \phi \sin \phi \partial_\phi \\ &\quad + t \cosh^2 \theta \sin^2 \phi \partial_t - \sinh \theta \cosh \theta \sin^2 \phi \partial_\theta \\ &\quad + \sin \phi \cos \phi \partial_\phi = t \partial_t. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.33. *Toda superficie con dirección nula canónica respecto a $t\partial_t$ en $I \times_t \mathbb{S}_1^2$ es de dirección nula canónica respecto al campo vectorial radial $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ en $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$.*

Demostración. Es inmediato de la proposición anterior

□

Ejemplo 3.34. Del Ejemplo 3.28 se deduce que la superficie

$$\Sigma = \{(F(\phi + \varepsilon \arctan(\sinh(\theta))), \theta, \phi)\} \subset I \times_t \mathbb{S}_1^2,$$

donde $\varepsilon \in \{1, -1\}$, tiene dirección nula canónica en $\mathbb{R}_1^3 - \{(x, 0, 0)\}$ respecto al campo radial $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$.

3.5. Superficie con dirección nula canónica vista como imagen inversa de una función

Consideremos a M una variedad de Lorentz de dimensión tres, $f \in \mathfrak{F}(M)$, una función y c un valor regular de f de tal manera que la superficie $f^{-1}(c) = \Sigma \subset M$ es tipo tiempo. El gradiente respecto a M será denotado por $\text{grad } f$. Además, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial tipo espacio.

Proposición 3.35. *La superficie $\Sigma = f^{-1}(c)$ tiene dirección nula canónica respecto a un campo vectorial Z si y solo si*

$$|Z|^2 = \frac{(Z \cdot f)^2}{|\text{grad } f|^2}. \quad (3.4)$$

Demostración. Dado que la superficie Σ es tipo tiempo, entonces el campo vectorial $\text{grad } f$ es tipo espacio, es decir, satisface $\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle > 0$. De la descomposición del campo vectorial $Z = Z^\top + Z^\perp$, tenemos que

$$\xi = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}.$$

Así, la parte normal $Z^\perp$ está dada por

$$Z^\perp = \langle \xi, Z \rangle \xi = \frac{Z \cdot f}{|\text{grad } f|^2} \text{grad } f.$$

En consecuencia la parte tangente $Z^\top$ es

$$Z^\top = Z - \frac{Z \cdot f}{|\text{grad } f|^2} \text{grad } f.$$

Por lo tanto, el resultado se deduce del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \langle Z^\top, Z^\top \rangle &= |Z|^2 - 2 \frac{Z \cdot f}{|\text{grad } f|^2} \langle Z, \text{grad } f \rangle + \left(\frac{Z \cdot f}{|\text{grad } f|^2} \right)^2 |\text{grad } f|^2 \\ &= |Z|^2 - \frac{(Z \cdot f)^2}{|\text{grad } f|^2}. \end{aligned}$$

□

Observación 3.36. En esta parte vamos a considerar el caso especial $M = \mathbb{R}_1^3$ con coordenadas (x, y, z) . Sea $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1^3)$ función tal que $f^{-1}(c) = \Sigma \subset \mathbb{R}_1^3$ es una superficie temporal.

Proposición 3.37. *La superficie $f^{-1}(c) = \Sigma$ tiene dirección nula canónica respecto a $Z = (a, b, c) \in \mathbb{R}_1^3$, campo vectorial tipo espacio, unitario y paralelo, si y solo si se satisface la ecuación*

$$(af_x + bf_y + cf_z)^2 = -f_x^2 + f_y^2 + f_z^2.$$

Demostración. Dado que $\langle Z, Z \rangle = 1$ y la igualdad 3.4 obtenemos

$$1 = \frac{(Z \cdot f)^2}{|\text{grad } f|^2} \Leftrightarrow (af_x + bf_y + cf_z)^2 = -f_x^2 + f_y^2 + f_z^2.$$

□

Ejemplo 3.38. Sea $Z \in \mathbb{R}_1^3$ el campo vectorial *paralelo* $(0, 0, 1)$. De la Proposición 3.37 se deduce que la función f satisface la ecuación $-f_x^2 + f_y^2 = 0$ o equivalentemente $f_x \pm f_y = 0$. Cuyas soluciones son

$$f(x, y, z) = F(y \mp x) - G(z),$$

donde F y G son funciones de valores reales. Por lo tanto la superficie temporal $\Sigma = f^{-1}(c)$ tiene dirección nula canónica respecto a $(0, 0, 1)$.

Ejemplo 3.39. Sea $Z(x, y, z) = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ el campo vectorial *radial*. De la Proposición 3.37 se deduce que la función f satisface la ecuación

$$(-x^2 + y^2 + z^2)(-f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) = (xf_x + yf_y + zf_z)^2.$$

Una solución de esta ecuación es

$$f(x, y, z) = G\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right),$$

donde G es una función de valores reales. Por lo tanto la superficie temporal $\Sigma = f^{-1}(c)$ tiene dirección nula canónica respecto a (x, y, z) . Un ejemplo en particular lo podemos ver en la Figura 3.2, donde G es una función constante.

Proposición 3.40. *Sea $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1^3)$ una función, c un valor regular de f , la superficie temporal $f^{-1}(c) = \Sigma$ y el marco tipo luz $\{Z^\top, W\}$. Entonces la curvatura Gaussiana K y curvatura media H de Σ están dadas por*

$$K = \frac{[\text{Hess } f(Z^\top, W)]^2 - \text{Hess } f(W, W)\text{Hess } f(Z^\top, Z^\top)}{|\text{grad } f|^2},$$

$$H = -\frac{\text{Hess } f(Z^\top, W)}{|\text{grad } f|}.$$

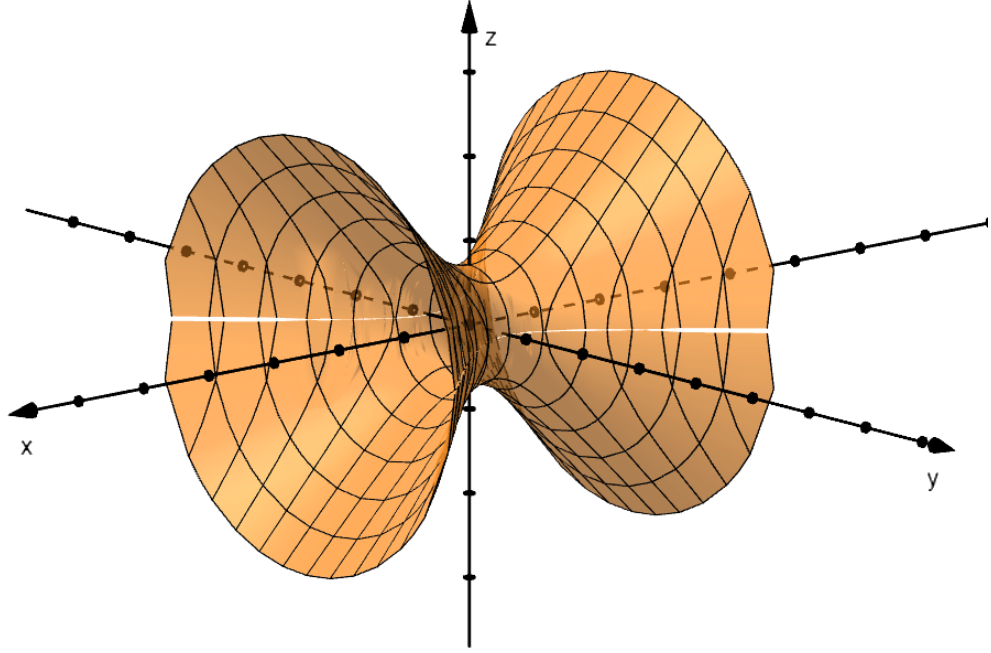


Figura 3.2: Superficie $\Sigma = f^{-1}(1)$ con DNC respecto del campo vectorial radial $Z(x, y, z) = (x, y, z)$, donde $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$.

Demostración. Considerando el campo vectorial normal unitario

$$\xi = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}.$$

El operador de forma está dado por

$$A_\xi(X) = -\bar{\nabla}_X \xi = -X \cdot \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{grad } f + \frac{1}{|\text{grad } f|} \bar{\nabla}_X(\text{grad } f),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \langle A_\xi(X), Y \rangle &= X \cdot \frac{1}{|\text{grad } f|} \langle \text{grad } f, Y \rangle + \frac{1}{|\text{grad } f|} \langle \bar{\nabla}_X(\text{grad } f), Y \rangle \\ &= \frac{\text{Hess } f(X, Y)}{|\text{grad } f|} \end{aligned}$$

De aquí obtenemos la matriz asociada al operador de forma A en $\beta = \{X, Y\}$

$$[A]_\beta = \frac{1}{\det g_\Sigma} \begin{bmatrix} \langle A_\xi(X), X \rangle & \langle A_\xi(X), Y \rangle \\ \langle A_\xi(Y), X \rangle & \langle A_\xi(Y), Y \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle Y, Y \rangle & -\langle X, Y \rangle \\ -\langle Y, X \rangle & \langle X, X \rangle \end{bmatrix},$$

donde $\det(g_\Sigma) = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$.

Ahora, si consideramos el marco tipo luz $\beta = \{X = Z^\top, Y = W\}$ tenemos que $\det(g_\Sigma) = -1$ y

$$\begin{aligned} [A]_\beta &= -\frac{1}{|\text{grad } f|} \begin{bmatrix} \text{Hess } f(Z^\top, Z^\top) & \text{Hess } f(Z^\top, W) \\ \text{Hess } f(W, Z^\top) & \text{Hess } f(W, W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{|\text{grad } f|} \begin{bmatrix} \text{Hess } f(Z^\top, W) & \text{Hess } f(Z^\top, Z^\top) \\ \text{Hess } f(W, W) & \text{Hess } f(Z^\top, W) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H = \frac{\text{tr}[A]_\beta}{2} = -\frac{\text{Hess } f(Z^\top, Z^\top)}{|\text{grad } f|}$$

y

$$K = \det[A]_\beta = \frac{[\text{Hess } f(Z^\top, W)]^2 - \text{Hess } f(W, W)\text{Hess } f(Z^\top, Z^\top)}{|\text{grad } f|^2}.$$

□

Corolario 3.41. *Si la superficie Σ tiene dirección nula canónica respecto a un campo vectorial radial $Z(x, y, z) = (x, y, z)$ entonces $K = H^2$.*

Demostración. De la Ecuación 3.35 tenemos que $|\text{grad } f||Z| = \pm Z \cdot f$. Tomando la dirección positiva se tiene la igualdad

$$\left\langle \frac{Z}{|Z|}, \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} \right\rangle = 1.$$

De la igualdad anterior se deduce que

$$\text{grad } f = \frac{\langle Z, \text{grad } f \rangle}{|Z|^2} Z^\perp = \frac{|\text{grad } f|}{|Z|} Z^\perp.$$

De aquí y de la Proposición 3.5 obtenemos

$$A_\xi(X) = A_{\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}}(X) = \frac{1}{|Z|} A_{Z^\perp}(X) = \frac{1}{|Z|} (\nabla_X Z^\top - X).$$

Usando el marco nulo $\{Z^\top, W\}$, se deduce de aquí que

$$A_\xi(Z^\top) = -\frac{1}{|Z|} Z^\top.$$

Por lo tanto, de la Proposición 3.40 tenemos

$$H = -\frac{\text{Hess } f(Z^\top, W)}{|\text{grad } f|} = \langle A_\xi(Z^\top), W \rangle = \frac{1}{|Z|}$$

y

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{[Hess f(Z^\top, W)]^2 - Hess f(W, W) Hess f(Z^\top, Z^\top)}{|grad f|^2} \\
 &= \left[\frac{Hess f(Z^\top, W)}{|grad f|} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{|Z|^2}.
 \end{aligned}$$

□

Observación 3.42. En el caso en que la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}_1^3$ tiene dirección nula canónica respecto a un campo vectorial paralelo se sabe que $A_{Z^\perp}(Z^\top) = 0$, según la Proposición 2.4. Por lo que $K = H = 0$, es decir, se tratan de las superficies mínimas y planas en $\mathbb{R}_1^3$.

Bibliografía

- [1] P. Cermelli y A. J. Di Scala, *Constant angle surfaces in liquid crystals*, Philos. Magazine, 87, 1871-1888 (2007).
- [2] B.-Y. Chen y S. Deshmukh, *Euclidean submanifolds with conformal canonical vector field*, Bull. Korean Math. Soc. 55(6), 1823-1834 (2018).
- [3] J. Clelland, *Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{3,1}$* , Asian J. Math. 16, 189-208 (2012).
- [4] I. T. Couto y A. Lymberopoulos, *Introduction to Lorentz Geometry: Curves and Surfaces*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL 33487-2742 (2021).
- [5] A. J. Di Scala y G. Ruiz-Hernández, *Helix submanifolds of Euclidean spaces*, Monatsh. Math. 157(3), 205-215 (2009).
- [6] A. J. Di Scala y G. Ruiz-Hernández, *CMC hypersurfaces with canonical principal directions in space forms*, Math. Nachr. 290, No. 2-3, 248-261 (2017).
- [7] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken, y L. Vrancken, *Constant angle surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$* , Monats. Math. 152, 89-96 (2007).
- [8] F. Dillen y M. I. Munteanu, *Constant angle surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc., 40, 85-97 (2009).
- [9] F. Dillen, J. Fastenakels, y J. Van der Veken, *Surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ with a canonical principal direction*, Ann. Global Anal. Geom. 35, 381-396 (2008).
- [10] F. Dillen, M. I. Munteanu, y A. I. Nistor, *Canonical coordinates and principal directions for surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$* , Taiwanese J. Math. 15(5), 2265-2289 (2011).

- [11] J. Fastenakels, M. I. Munteanu y J. Van der Veken, *Constant angle surfaces in the Heisenberg group*, Acta Math. Sinica (Engl. Series), 27(4), 747-756 (2011).
- [12] Y. Fu y A. I. Nistor, *Constant Angle Property and Canonical Principal Directions for Surfaces in $M(c)^2 \times \mathbb{R}_1$* , Mediterr. J. Math. 10, 1035-1049 (2013).
- [13] Y. Fu y M. I. Munteanu, *Generalized constant ratio surfaces in $\mathbb{E}^3$* , Bull. Braz. Math. Soc. (New Series) 45, 73-90 (2014).
- [14] E. Garnica, O. Palmas y G. Ruiz-Hernández, *Hypersurfaces with a canonical principal direction*, Differential Geom. Appl. 30, 382-391 (2012).
- [15] E. Garnica, O. Palmas y G. Ruiz-Hernández, *Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 18, (2012).
- [16] F. Guler, G. Saak y E. Kısap, *Timelike Constant Angle Surfaces in Minkowski Space $\mathbb{R}_1^3$* , Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol 6, no. 44, 2189-2200 (2011).
- [17] J. C. Larsen, *Complex analysis, maximal immersions and metrics in singularities*, Mh. Math. 122, 105-156 (1996).
- [18] R. López y M. I. Munteanu, *Constant angle surfaces in Minkowski space*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 18, 271-286 (2011).
- [19] M. I. Munteanu y A. I. Nistor, *A new approach on constant angle surfaces in $\mathbb{E}^3$* , Turkish J. Math. 33, 107-116 (2009).
- [20] M. I. Munteanu y A. I. Nistor, *Complete classification of surfaces with a canonical principal direction in the Euclidean space $\mathbb{E}^3$* , Cent. Eur. J. Math. 9(2), 378-389 (2011).
- [21] A. I. Nistor, *A note on spacelike surfaces in Minkowski 3-space*, Filomat 27(5), 843-849 (2013).
- [22] J. Olver Peter, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, Minneapolis (2014).
- [23] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*, Academic Press, New York (1983).

- [24] V. H. Patty-Yujra, *Spacelike surfaces in Minkowski 4-space with a canonical normal null direction*, Revista Boliviana de Matemática 2(2), 97-115 (2023).
- [25] V. H. Patty-Yujra y G. Ruiz-Hernández, *Timelike surfaces in Minkowski space with a canonical null direction*, J. Geom. 109:35 (2018).
- [26] G. Ruiz-Hernández, *Helix, shadow boundary and minimal submanifolds*, Illinois J. Math. 52(4), 1385-1397 (2008).