



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIDAD EN ESTADÍSTICA APLICADA

ALGUNOS PROBLEMAS DE CONTROL EN MECÁNICA DE FLUIDOS
Y ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
YINGYING WU

DIRECTORES DE TESIS

DRA. MARÍA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. TAKÉO TAKAHASHI
INSTITUT ÉLIE CARTAN DE LORRAINE

TUTOR

DR. CARLOS GARCÍA AZPEITIA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis directores de tesis, Luz de Teresa y Takéo Takahashi, por su inmenso apoyo, por sus consejos y sobre todo, su paciencia. Sin su guía, todo esto no hubiera sido posible. Gracias también por llevarme a conocer otro pedacito del mundo.

A mis sinodales, Alberto Mercado, Enrique Fernández Cara y Fágner Dias Araruna por el tiempo invertido en la lectura y revisión de esta tesis.

A José Luis, por confiar en mí. Es tu compañía la que hizo tan especial toda esta aventura.

A mi familia, por siempre estar ahí.

Al Conahcyt, por la beca otorgada para la realización de este proyecto de doctorado.

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Teoría del control	4
1.2. Preliminares	5
1.2.1. Sistema de Stokes y de Navier-Stokes	5
1.2.2. Definición de los pesos de Carleman	6
1.2.3. Resultados previos	6
1.3. Resultados obtenidos	8
1.3.1. Control nulo de m sistemas de Stokes y Navier-Stokes acoplados	8
1.3.2. Una condición de Kalman para la controlabilidad de sistemas de Stokes acoplados	11
1.3.3. Control jerárquico para un sistema de Boussinesq	13
1.3.4. Control para Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash	16
2. Control nulo de m sistemas de Stokes y Navier-Stokes acoplados	18
2.1. Introducción	18
2.1.1. Resultados de regularidad	21
2.2. Estimación de Carleman para el sistema adjunto	22
2.3. Pruebas de los resultados principales	30
2.3.1. Prueba de la desigualdad de observabilidad	30
2.3.2. Prueba del Teorema 2.1	31
2.3.3. Prueba del Teorema 2.2	31
3. Una condición de Kalman para el control de sistemas de Navier-Stokes	35
3.1. Introducción	35
3.2. Resultados preliminares	39
3.3. Método de Kalman	41
3.4. Estimación de Carleman	44
3.4.1. Prueba del Teorema 3.11	44
3.4.2. Prueba del Corolario 3.12	49
4. Control jerárquico para un sistema de Boussinesq	50
4.1. Introducción	50
4.2. Resultados preliminares	53
4.2.1. Problema bien planteado	54
4.2.2. Caracterización del control óptimo	55
4.3. Estimaciones de Carleman	56
4.3.1. Descomposición y estimaciones para v	57
4.3.2. Descomposición y estimaciones para w	60
4.3.3. Quitando los términos locales de v y w	63
4.3.4. Estimaciones para φ	64
4.3.5. Descomposición y estimaciones para ψ	65

4.3.6. Prueba del Teorema 4.3	67
4.4. Prueba del control jerárquico exacto	68
5. Control para Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash	72
5.1. Introducción	72
5.2. Estimaciones de Carleman	74
5.2.1. Descomposición y estimaciones para ϕ	74
5.2.2. Descomposición y estimaciones para z	77
5.2.3. Estimando ϕ en términos de z	79
6. Comentarios finales	81
6.1. Trabajos a futuro	81
6.1.1. Control para Navier-Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash	81
6.1.2. Controles en L^∞ para un sistema de Stokes	82
7. Bibliografía	83

Capítulo 1

Introducción

1.1. Teoría del control

De manera general, un sistema de control es un sistema de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, u) & t > 0, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $y \in Y$ es la variable de estado (que queremos controlar), Y es un espacio de estados, y^0 es un dato inicial, $u \in U$ es un control (que elegimos para actuar en el sistema), U es un conjunto de controles admisibles y f es un operador que describe la dinámica del sistema.

Una de las preguntas que busca resolver la teoría de control es: dados dos estados $y^0, y^T \in Y$, ¿existe un control u tal que lleve a la solución del sistema (1.1) de y^0 a y^T en un tiempo $T > 0$ fijo? Para responder esta pregunta, tenemos que considerar las diferentes nociones en las que el sistema puede llegar del estado y^0 al estado y^T :

Definición 1.1 (Controlabilidad exacta). Diremos que el sistema (1.1) es exactamente controlable en el tiempo T si, para todo $y^0, y^T \in Y$, existe un control $u \in U$ tal que la solución y de (1.1) satisface $y(T) = y^T$.

Definición 1.2 (Controlabilidad a cero). Diremos que el sistema (1.1) es controlable a cero en el tiempo T si existe un control $u \in U$ tal que la solución y de (1.1) satisface $y(T) = 0$.

Definición 1.3 (Controlabilidad aproximada). Diremos que el sistema (1.1) es aproximadamente controlable en el tiempo T si, para todo $y^0, y^T \in Y$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un control $u \in U$ tal que la solución y de (1.1) satisface $\|y(T) - y^T\|_Y \leq \varepsilon$.

Definición 1.4 (Controlabilidad a trayectorias). Diremos que el sistema (1.1) es controlable a trayectorias en el tiempo T si, dada una trayectoria $\bar{y}$, es decir, dada una solución (conocida) de

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{u}), \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0, \end{cases}$$

existe un control $u \in U$ tal que la solución y de (1.1) satisface $y(T) = \bar{y}(T)$.

De la definición es sencillo ver que la controlabilidad exacta implica tanto la controlabilidad a cero como la controlabilidad aproximada (el recíproco es falso). Además, para sistemas lineales, la controlabilidad a cero es equivalente a la controlabilidad a trayectorias.

La controlabilidad del sistema (1.1) dependerá de la naturaleza de este. En dimensión finita, se han estudiado muy bien las propiedades de controlabilidad de varios sistemas lineales y no lineales. Para efectos de esta tesis nos interesa en particular el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [19, Capítulo 2, p. 35]. Este resultado nos da una condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea exactamente controlable:

Lema 1.5 (Criterio de Kalman). Sea $T > 0$. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias lineales

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ con $n, m \geq 1$. El sistema (1.2) es exactamente controlable en el tiempo T si y solo si

$$\text{rank} [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] = n. \quad (1.3)$$

Por otro lado, para dimensión infinita, la controlabilidad del sistema (1.1) es más complicada pues dependerá de las propiedades de la ecuación con la que se esté trabajando. Por ejemplo, para la ecuación de calor no posible obtener la controlabilidad exacta debido a su efecto regularizante, o bien, la ecuación de transporte que puede ser controlable a cero en un tiempo T y no ser controlable aproximadamente en ese mismo tiempo.

1.2. Preliminares

Para esta tesis nos interesa trabajar con la mecánica de fluidos, por esta razón dedicaremos las siguientes subsecciones a hablar un poco sobre el sistema de Stokes y de Navier-Stokes, así como algunos de los resultados de control que existen para dichos sistemas.

1.2.1. Sistema de Stokes y de Navier-Stokes

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Introducimos los siguientes espacios de funciones que son utilizados con frecuencia en la teoría de fluidos incompresibles:

$$\mathcal{H} = \left\{ y \in [L^2(\Omega)]^N : \text{div } y = 0 \text{ en } \Omega, \quad y \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ y \in [H_0^1(\Omega)]^N : \text{div } y = 0 \text{ en } \Omega \right\}. \quad (1.5)$$

Consideremos los siguientes dos sistemas, el de Stokes:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = u 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \text{div } y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

y el de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = u 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \text{div } y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

En ambos sistemas $T > 0$, $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío y u denota un control.

Para los sistemas (1.6) y (1.7) existen varios resultados de control conocidos. Para el sistema de Stokes (1.6), en [18] se prueba la controlabilidad a cero y en [14] se prueba la existencia de controles insensibilizantes. Por otro lado, para el sistema de Navier-Stokes (1.7), en [10] se prueba la controlabilidad exacta local y en [15] se prueba la existencia de controles insensibilizantes. Otro resultado de controlabilidad importante fue el presentado en [11]. En dicho artículo se prueba que si la cerradura del dominio del control intersecta a la frontera de Ω , es decir, $\bar{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, se puede lograr la controlabilidad por trayectorias de los sistemas de Stokes, de Navier-Stokes y de Boussinesq usando un control con una componente igual a cero. Después, dicha condición geométrica fue removida para el caso de Stokes en [6], para Navier-Stokes en [4] y para Boussinesq en [3].

Más precisamente, en [6], se prueba el siguiente resultado para el sistema de Stokes:

Lema 1.6. Sea $i \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, para toda $T > 0$ y para toda $y^0 \in \mathcal{H}$ podemos encontrar un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^N)$ con $u_i \equiv 0$ en $(0, T) \times \Omega$ y una solución (y, p) del sistema (1.6) tal que

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Mientras que [4], se prueba el siguiente resultado para el sistema de Navier-Stokes:

Lema 1.7. Sea $i \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, para toda $T > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda $y^0 \in \mathcal{V}$ que satisface $\|y^0\|_{\mathcal{V}} \leq \delta$, podemos encontrar un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^N)$ con $u_i \equiv 0$ en $(0, T) \times \Omega$ y una solución (y, p) del sistema (1.7) tal que

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

La demostración de los resultados antes mencionados, se basa en obtener ciertas “desigualdades de observabilidad” utilizando las conocidas estimaciones de Carleman o desigualdades de Carleman. Esta técnica fue introducida en [12] y se ha utilizado para probar una gran variedad de resultados de controlabilidad para sistemas parabólicos, sistemas de Stokes, de Navier-Stokes, etc. En la siguiente subsección hablaremos un poco más de ellas.

1.2.2. Definición de los pesos de Carleman

Como mencionamos anteriormente, queremos usar las desigualdades de Carleman. Para esto, vamos a definir algunas funciones peso estándar. Primero, consideremos un dominio no vacío ω_0 tal que $\overline{\omega_0} \subset \omega$. Entonces, usando [12, Lema 1.1], existe una función $\eta^0 \in C^2(\Omega)$ que satisface

$$\eta^0 > 0 \text{ en } \Omega, \quad \eta^0 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad \max_{\Omega} \eta^0 = 1, \quad \nabla \eta^0 \neq 0 \text{ en } \overline{\Omega \setminus \omega_0}.$$

De aquí que, definimos las siguientes funciones:

$$\alpha(t, x) = \frac{\exp\{\lambda(2\ell + 2)\} - \exp\{\lambda(2\ell + \eta^0(x))\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad \xi(t, x) = \frac{\exp\{\lambda(2\ell + \eta^0(x))\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad (1.8)$$

$$\alpha_{\#}(t) = \max_{x \in \Omega} \alpha(t, x) = \frac{\exp\{\lambda(2\ell + 2)\} - \exp\{2\lambda\ell\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad \xi_{\#}(t) = \min_{x \in \Omega} \xi(t, x) = \frac{\exp\{2\lambda\ell\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad (1.9)$$

$$\alpha_{\flat}(t) = \min_{x \in \Omega} \alpha(t, x) = \frac{\exp\{\lambda(2\ell + 2)\} - \exp\{\lambda(2\ell + 1)\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad \xi_{\flat}(t) = \max_{x \in \Omega} \xi(t, x) = \frac{\exp\{\lambda(2\ell + 1)\}}{t^\ell(T - t)^\ell}, \quad (1.10)$$

donde $\ell \geq 11$ y $\lambda > 1$. También, tenemos las siguientes estimaciones que nos serán útiles más adelante: existe $C > 0$, que depende de Ω , tal que

$$|\partial_t \alpha| + |\partial_t \xi| \leq CT \xi^{1+1/\ell}, \quad (1.11)$$

$$|\nabla \alpha| = |\nabla \xi| \leq C\lambda \xi, \quad |\Delta \alpha| = |\Delta \xi| \leq C\lambda^2 \xi. \quad (1.12)$$

$$|(\alpha_{\#})'| + |(\xi_{\#})'| \leq CT (\xi_{\#})^{1+1/\ell}, \quad |(\alpha_{\#})''| + |(\xi_{\#})''| \leq CT^2 (\xi_{\#})^{1+2/\ell}, \quad |(\alpha_{\#})'''| + |(\xi_{\#})'''| \leq CT^3 (\xi_{\#})^{1+3/\ell}, \quad (1.13)$$

$$\xi_{\#} \geq \frac{C}{T^{2\ell}}, \quad (1.14)$$

1.2.3. Resultados previos

A continuación presentaremos algunos resultados importantes que serán utilizados a lo largo de esta tesis. El primero es una estimación de Carleman para el operador gradiente. La prueba se puede encontrar en [6].

Lema 1.8. Sea $r \in \mathbb{R}$. Existe una constante $C > 0$, que depende solo de r, Ω y ω_0 , tal que para toda $T > 0$ y toda $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |u|^2 dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r |\nabla u|^2 dx dt + \iint_{(0, T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |u|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq CT^{2\ell}$.

El segundo es una estimación de Carleman para el operador de Laplace. La prueba también se puede encontrar en [6].

Lema 1.9. Sea $r \in \mathbb{R}$. Existe una constante $C > 0$, que depende solo de r, Ω y ω_0 , tal que para toda $T > 0$ y toda $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{r+3} |u|^2 + (s\xi)^{r+1} |\nabla u|^2 \right) dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r |\Delta u|^2 dx dt + \iint_{(0, T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+3} |u|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$.

El tercero es una estimación de Carleman para la ecuación de calor con condiciones de frontera tipo Neumann no homogéneas. La demostración se puede encontrar en [8].

Lema 1.10. Existe una constante $C > 0$, tal que para $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ que satisfacen

$$\partial_t u - \Delta u = h \quad \text{en } (0, T) \times \Omega,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} |\nabla u|^2 + s\xi |u|^2 \right) dx dt \leq C \left(\iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} |h|^2 dx dt \right. \\ \left. + \iint_{(0, T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\sharp} (s\xi)^{-1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\gamma dt + \iint_{(0, T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s\xi |u|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$.

Finalmente, concluimos esta sección con un resultado de regularidad (ver [30, Proposición 1.2, pp. 267-269]) para las soluciones del sistema de Stokes:

Lema 1.11. Para toda $T > 0$, toda $y^0 \in \mathcal{V}$ y toda $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$, el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = f & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases}$$

admite una única solución

$$y \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^N) \cap H^1(0, T; \mathcal{H}) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \quad (1.15)$$

para alguna $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Más aún, existe una constante $C > 0$, que depende de Ω , tal que

$$\|y\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^N)} + \|y\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega)^N)} + \|y\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{V})} + \|p\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)} + \|y^0\|_{\mathcal{V}} \right). \quad (1.16)$$

1.3. Resultados obtenidos

En esta tesis estamos interesados en estudiar problemas de control relacionados a sistemas de Navier-Stokes y sistemas de Boussinesq. Más particularmente, presentaremos 4 resultados. El primero de ellos es un resultado de control a cero para un sistema que consta de varias ecuaciones de Navier-Stokes acopladas. El segundo es una generalización del criterio de Kalman, enunciado en el Lema 1.5, para el caso de ecuaciones de Navier-Stokes. El tercero es un resultado de control jerárquico para un sistema de Boussinesq. Finalmente, el último es nuevamente un resultado de control jerárquico pero aplicado a un sistema de Stokes.

1.3.1. Control nulo de m sistemas de Stokes y Navier-Stokes acoplados

Los resultados que se enuncian aquí serán presentados con más detalle en el Capítulo 2.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sea $T > 0$ y sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Consideremos los siguientes m ($m \geq 2$) sistemas acoplados:

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \varepsilon (y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)} + \nabla p^{(i)} = \sum_{j=1}^m (B_{i,j} \cdot \nabla) y^{(j)} + \sum_{j=1}^m A_{i,j} y^{(j)} + D_i u 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (1.17)$$

En el sistema anterior, $i \in \{1, \dots, m\}$, $y^{(i)} = y^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}^N$ describe la velocidad del fluido, $p^{(i)} = p^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión, $\nu_i > 0$ la viscosidad y 1_ω denota la función característica en ω . Además $A_{i,j} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $B_{i,j} \in \mathbb{R}^N$ y $D_i \in \mathcal{M}_{N,r}(\mathbb{R})$ para algún $r \in \mathbb{N}^*$. Notemos que cuando $\varepsilon = 0$ tenemos un sistema con m ecuaciones de Stokes acopladas, y cuando $\varepsilon = 1$, tenemos un sistema de m ecuaciones de Navier-Stokes acopladas.

Observemos que es posible reescribir el sistema (1.17) de manera más abstracta: para $\varepsilon = 0$ tenemos

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla p = (B \cdot \nabla) y + Ay + Du 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.18)$$

Mientras que, para $\varepsilon = 1$, tenemos

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = (B \cdot \nabla) y + Ay + Du 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.19)$$

donde

$$y = (y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad \nu \Delta y = (\nu_i \Delta y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad (y \cdot \nabla) y = ((y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad \nabla p = (\nabla p^{(i)})_{1 \leq i \leq m},$$

$$\nabla \cdot y = (\nabla \cdot y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad y_0 = (y_0^{(i)})_{1 \leq i \leq m}$$

y

$$(B \cdot \nabla) y = \left(\sum_{j=1}^m (B_{i,j} \cdot \nabla) y^{(j)} \right)_{1 \leq i \leq m}, \quad Ay = \left(\sum_{j=1}^m A_{i,j} y^{(j)} \right)_{1 \leq i \leq m}, \quad Du = (D_i u)_{1 \leq i \leq m}.$$

Sabemos que es posible controlar un sistema de Stokes utilizando un control con $N - 1$ componentes (ver [6]), pero ¿será posible controlar un sistema de m sistemas actuando en un sólo sistema? Más aún, ¿podría dicho control tener sólo $N - 1$ componentes?, así nos gustaría responder la siguiente pregunta:

Pregunta 1. ¿Bajo qué condiciones es posible controlar (1.18) o (1.19), es decir, m sistemas acoplados, actuando con un sólo control (en el primer sistema) y que además tenga una componente igual a cero?

Para responder esta pregunta, nos apoyamos del resultado obtenido en [13], el cual nos dice que para el caso de sistemas parabólicos acoplados, es posible controlar los m sistemas siempre que el acoplamiento esté dado en forma de cascada. Probaremos que este mismo resultado se cumple para nuestro caso. Así que en (1.18) y en (1.19), consideramos

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,m} \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ 0 & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{m,m} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

esto es, toda la subdiagonal de la matriz A es distinta de cero y además todos los términos $A_{i,j}$ son vectores constantes. Más específicamente, nuestras hipótesis sobre A y B son

$$A_{i,j} = a_{i,j} I_N, \quad a_{i,i-1} \neq 0 \quad (2 \leq i \leq m), \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \geq j+2, \quad (1.21)$$

$$B_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \geq j+1. \quad (1.22)$$

Además, como el control que utilizaremos tendrá una componente igual a cero, nuestra hipótesis sobre D es:

$$r = N-1, \quad D_j = 0 \quad (j \geq 2), \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{si } N=2) \quad \text{o} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{si } N=3). \quad (1.23)$$

Para enunciar nuestros resultados, recordemos los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ definidos en (1.4) y (1.5), respectivamente, y denotemos por:

$$\mathbb{H} := \mathcal{H}^m, \quad \mathbb{V} := \mathcal{V}^m.$$

De aquí que, para el sistema de ecuaciones de Stokes tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.12. *Supongamos (1.21)-(1.23). Entonces, para toda $T > 0$ y para toda $y_0 \in \mathbb{H}$, existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ de (1.18) satisface*

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Mientras que, para el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, tenemos el siguiente resultado de control a cero local:

Teorema 1.13. *Supongamos (1.21)-(1.23). Entonces, para toda $T > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para toda $y_0 \in \mathbb{V}$ que satisface*

$$\|y_0\| \leq \delta,$$

existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ de (1.19) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Es importante remarcar que bajo las hipótesis (1.21)-(1.23), hemos logrado probar la controlabilidad a cero de $N \times m$ ecuaciones escalares usando solamente $N-1$ controles escalares.

Idea de la prueba

Para probar el Teorema 1.12 seguiremos un argumento estándar (ver [31, Teorema 11.2.1, p.357]). Para esto necesitamos considerar el sistema adjunto de (1.18), el cual está dado por:

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi + \nabla \pi + (B^* \cdot \nabla) \varphi - A^* \varphi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \varphi(T, \cdot) = \varphi_T & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

o bien, su forma expandida:

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi^{(i)} - \Delta \varphi^{(i)} + \nabla \pi^{(i)} + \sum_{j=1}^i \left((B_{j,i} \cdot \nabla) \varphi^{(j)} - A_{j,i} \varphi^{(j)} \right) = A_{i+1,i} \varphi^{(i+1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq m-1) \\ -\partial_t \varphi^{(m)} - \Delta \varphi^{(m)} + \nabla \pi^{(m)} + \sum_{j=1}^m \left((B_{j,m} \cdot \nabla) \varphi^{(j)} - A_{j,m} \varphi^{(j)} \right) = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \varphi^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq m) \\ \varphi^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq m) \\ \varphi^{(i)}(T, \cdot) = \varphi_T^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq m) \end{cases} \quad (1.24)$$

donde $\varphi_T^{(i)} \in \mathcal{H}$ para $i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, el resultado del Teorema 1.12 será consecuencia de la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(0, x) \right|^2 dx \leq C(T) \sum_{j=1}^{N-1} \iint_{(0,T) \times \omega} \left| \varphi_j^{(1)} \right|^2 dt dx. \quad (1.25)$$

donde $\varphi_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, N$) son las coordenadas de $\varphi^{(i)}$. Ahora, para probar la desigualdad (1.25) utilizaremos las conocidas estimaciones de Carleman que fueron introducidas en [12] y que han sido utilizadas para probar una gran variedad de resultados de controlabilidad, por ejemplo, en [9] podemos encontrar un resumen de los resultados obtenidos para sistemas parabólicos lineales y no lineales y en [10] se usa para probar la controlabilidad del sistema de Navier-Stokes. Luego, en [6], se usa para probar la controlabilidad del sistema de Stokes utilizando un control con una componente igual a cero.

Es importante notar que en el lado derecho de la desigualdad (1.25) solo aparecen algunas componentes de $\varphi^{(1)}$, para lograr esto, seguimos las ideas utilizadas en [6]. Gracias a la naturaleza de nuestro sistema, podemos transformar las ecuaciones de (1.24) en ecuaciones de calor (aplicando el operador $\nabla^2 \Delta$ para deshacernos de la presión). Luego usando estimaciones de Carleman para la ecuación de calor (ver [8]) podemos obtener estimaciones sobre algunas de las componentes de $\varphi^{(i)}$. Finalmente usando la condición de divergencia nula de $\varphi^{(i)}$ recuperaremos las demás componentes.

Una vez probada la controlabilidad nula del sistema (1.18), probaremos que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla p = (B \cdot \nabla) y + Ay + Du1_{\omega} + f & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.26)$$

es decir, el sistema (1.18) con un término fuente $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(m)})$ también es controlable a cero usando el método introducido en [23]. Finalmente, utilizando un argumento de punto fijo probaremos la controlabilidad de (1.26) reemplazando los términos $(f^{(i)})_{1 \leq i \leq m}$ por los términos no lineales

$$(f^{(i)})_{1 \leq i \leq m} := \left(- (y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)} \right)_{1 \leq i \leq m},$$

así obtendremos la controlabilidad local de (1.19) y por lo tanto el Teorema 1.13.

1.3.2. Una condición de Kalman para la controlabilidad de sistemas de Stokes acoplados

Los resultados que se enuncian aquí serán presentados con más detalle en el Capítulo 3.

El objetivo de esta parte es generalizar el Lema 1.5 (Criterio de Kalman) para el caso de un sistema de ecuaciones de Stokes o de Navier-Stokes. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sea $T > 0$ y sea $\omega \subset \Omega$ un abierto suficientemente pequeño. Consideremos las siguientes n ecuaciones con m controles ($m \leq n$):

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} + (y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} u^{(j)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq n). \end{cases} \quad (1.27)$$

En el sistema anterior, $y^{(i)} = y^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}^N$ describe la velocidad del fluido, $p^{(i)} = p^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión, $\nu_i > 0$ la viscosidad y 1_ω denota la función característica en ω . Las ecuaciones están acopladas a través de la matriz constante $(q_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Los controles están denotados por $u^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$ y actúan sobre el sistema a través de la matriz constante $(r_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}}$. Además pedimos que los controles tengan una componente igual a cero, esto es,

$$u^{(j)} \cdot \mathbf{e}_N = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

donde $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$.

Nuestro problema se centra en responder la siguiente pregunta:

Pregunta 2. ¿Es posible obtener un criterio que nos diga cuándo el sistema (1.27) es controlable?

Esta pregunta fue respondida de manera positiva en [1] para el caso en donde se tiene un sistema compuesto por ecuaciones de calor. En dicho artículo presentan una generalización del operador de Kalman y con ella logran obtener una condición necesaria y suficiente para controlar un sistema de ecuaciones de parabólicas. Basándonos en ese resultado, vamos a probar que dicha condición también se satisface para sistemas de Stokes y de Navier-Stokes.

Siguiendo las ideas de [1], comenzaremos definiendo el “nuevo” operador de Kalman. Para esto consideremos una linealización del sistema (1.27):

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} u^{(j)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega. & (1 \leq i \leq n) \end{cases} \quad (1.28)$$

Luego, la idea es reescribir el sistema anterior de manera abstracta: recordemos los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ definidos en (1.4) y (1.5), respectivamente, y consideremos el operador de Stokes clásico

$$\mathbb{A} := -\mathbb{P}\Delta, \quad \mathcal{D}(\mathbb{A}) := \left\{ y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^N : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega \right\}, \quad (1.29)$$

donde $\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^N \rightarrow \mathcal{H}$ es el proyector de Leray. Así, el operador de control $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ de nuestro sistema, puede ser definido como

$$\mathbb{B}u := \mathbb{P} \left(1_\omega \sum_{i=1}^{N-1} u_i \mathbf{e}^{(i)} \right), \quad \text{para } u = (u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{U} := L^2(\omega)^{N-1}.$$

También denotamos por $D, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ respectivamente las matrices $\text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$, $(q_{i,j})_{i,j}$ y $(r_{i,j})_{i,j}$. Finalmente, consideramos el operador del sistema acoplado (1.28)

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) := \mathcal{D}(\mathbb{A})^n, \quad \mathbb{L} := D\mathbb{A} + Q, \quad (1.30)$$

esto es, para cada $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in D(\mathbb{A})^n$,

$$\mathbb{L}y := \left(\nu_i \mathbb{A} y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

El operador de control del sistema acoplado es $R\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}^n)$: esto es, para $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \in \mathcal{U}^m$

$$R\mathbb{B}u = \left(\sum_{j=1}^m r_{i,j} \mathbb{B} u^{(j)} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

Entonces, podemos reescribir (1.28) como

$$\begin{cases} y' + \mathbb{L}y = R\mathbb{B}u & \text{en } (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.31)$$

donde $y_0 := (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)})$. Para probar la controlabilidad a cero del sistema (1.31), definimos el operador de Kalman como en [1]:

$$\mathbb{K} : \mathcal{H}^m \times \mathcal{D}(\mathbb{A})^m \times \dots \times \mathcal{D}(\mathbb{A}^{n-1})^m \rightarrow \mathcal{H}^n, \quad (w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \mapsto \sum_{i=1}^n \mathbb{L}^{i-1} R w^{(i)}. \quad (1.32)$$

En la definición anterior, notemos que para $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_m^{(i)}) \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{i-1})^m$, tenemos

$$R w^{(i)} = \left(\sum_{j=1}^m r_{k,j} w_j^{(i)} \right)_{k \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{i-1})^n = \mathcal{D}(\mathbb{L}^{i-1})$$

y por lo tanto, el operador de Kalman está bien definido. Finalmente, el adjunto del operador $\mathbb{K}$ está dado por

$$\mathcal{D}(\mathbb{K}^*) = [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{n-1})]^n, \quad \mathbb{K}^* \varphi = [R^* \varphi, R^* \mathbb{L}^* \varphi, \dots, R^* (\mathbb{L}^*)^{n-1} \varphi]. \quad (1.33)$$

De aquí que, nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 1.14. *Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces*

$$\text{Ker } \mathbb{K}^* = \{0\} \quad (1.34)$$

si y solo si el sistema (1.31) es controlable a cero para cualquier tiempo $T > 0$.

En otras palabras, la controlabilidad nula del sistema (1.31) es equivalente a la inyectividad del operador $\mathbb{K}^*$. También tenemos el resultado correspondiente para el caso con ecuaciones de Navier-Stokes:

Teorema 1.15. *Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Si se cumple (1.34), entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $y_0 \in \mathcal{V}^n$ que satisface*

$$\|y_0\|_{\mathcal{V}^n} \leq \delta,$$

existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})^m$ tal que la solución y del sistema (1.27) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Idea de la prueba

Antes de continuar, vamos a introducir el sistema adjunto de (1.28):

$$\begin{cases} \partial_t \varphi^{(i)} - \nu_i \Delta \varphi^{(i)} + \nabla \pi^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{j,i} \varphi^{(j)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} \varphi^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \varphi^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \varphi^{(i)}(0, \cdot) = \varphi_0^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

el cual podemos reescribir de manera abstracta como

$$\begin{cases} \varphi' + \mathbb{L}^* \varphi = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (1.35)$$

donde $\varphi_0 := (\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(n)})$. Ahora, el adjunto del operador de control está dado por $\mathbb{B}^* R^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n, \mathcal{U}^m)$. Más precisamente, si $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}) \in \mathcal{H}^n$ y denotamos por $\varphi_k^{(i)}$, $k = 1, \dots, N$ las componentes de $\varphi^{(i)} \in \mathcal{H}$, entonces

$$\mathbb{B}^* R^* \varphi = ((\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(1)}, \dots, (\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(m)}) \in \mathcal{U}^m, \quad (\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(i)} = \left(\sum_{j=1}^n r_{j,i} \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^{(j)} \mathbf{e}_k \right) \Big|_{\omega} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Entonces, el resultado del Teorema 1.14 se seguirá de los dos siguientes resultados. El primero es:

Lema 1.16. *Si el $\operatorname{Ker} \mathbb{K}^* \neq \{0\}$ entonces el sistema (1.35) es no observable: existe $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$ con $\varphi_0 \neq 0$ tal que la solución φ de (1.35) satisface $\varphi(T, \cdot) \neq 0$ y*

$$R^* \varphi = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega.$$

La prueba de este lema es similar a la realizada en [1]. El segundo resultado es una desigualdad de observabilidad para el sistema (1.35):

Teorema 1.17. *Sea $T > 0$ y sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Si se cumple (1.34), entonces existe $C > 0$ y $\ell > 0$ tal que para toda $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$*

$$\int_{\Omega} |\varphi(T, \cdot)|^2 dx \leq C e^{C/T^\ell} \iint_{(0,T) \times \omega} \sum_{k=1}^{N-1} |R^* \varphi_k|^2 dx dt. \quad (1.36)$$

Nuevamente, para probar la desigualdad de observabilidad (1.36) se necesita probar una estimación de Carleman de la forma

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} \rho_{\sharp}^2 |\varphi|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \omega} \rho_b^2 \sum_{k=1}^{N-1} |R^* \varphi_k|^2 dx dt \quad (1.37)$$

donde $\rho_{\sharp}$ y ρ_b son funciones regulares definidas en $[0, T]$, positivas en $(0, T)$ y valen cero en 0 y T .

1.3.3. Control jerárquico para un sistema de Boussinesq

Los resultados que se enuncian aquí serán presentados con más detalle en el Capítulo 4.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sean $\omega, \mathcal{O} \subset \Omega$ abiertos no vacíos y ajenos, es decir,

$$\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Sea $T > 0$ y consideramos el siguiente sistema de Boussinesq con dos controles f y f^* :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y + (y \cdot \nabla) y = \theta e_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + y \cdot \nabla \theta = f 1_\omega + f^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, \quad \theta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.38)$$

En el sistema anterior, $y = y(t, x) \in \mathbb{R}^2$ describe la velocidad del fluido, $\pi_y = \pi_y(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión, $\theta = \theta(t, x) \in \mathbb{R}$ la temperatura y (e_1, e_2) es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Pregunta 3. ¿Podemos actuar sobre el sistema (1.38) con dos controles distintos y que cada uno de ellos tenga un objetivo distinto? Más precisamente, queremos que se cumpla lo siguiente:

1. que el control f^* mantenga la solución (y, θ) del sistema cerca de un estado $(y^*, \theta^*) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ deseado;
2. que el control f lleve el sistema a cero en el tiempo T , esto es, $(y, \theta)(T, \cdot) = 0$ en Ω .

Para tratar este tipo de problemas, se han propuesto diversas estrategias, una de ellas es la estrategia de tipo Stackelberg (ver [20]). Este método fue introducido en la teoría de juegos para problemas de tomas de decisiones no cooperativas, donde uno de los jugadores toma una decisión y los demás tienen que reaccionar a ella. Normalmente el jugador que impone la estrategia es llamado “líder” y los demás “seguidores”. Varios resultados para ecuaciones parciales se han probado usando esta estrategia (ver [16, 17, 24]). De aquí que, vamos a replantear nuestro problema para poder usar la estrategia de Stackelberg.

Primero, notemos que el primer objetivo puede ser transformado a un problema de control óptimo. Recordemos los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ definidos en (1.4) y (1.5), respectivamente. Entonces, fijamos

$$f \in L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad y^0 \in \mathcal{V}, \quad \theta^0 \in H_0^1(\Omega).$$

Así, para cada $f^* \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$, se puede probar que el sistema (1.38) admite una única solución $(y(f^*), \theta(f^*))$ y entonces podemos considerar el siguiente funcional con peso:

$$J(f^*) := \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}^*} \left[|y(f^*) - y^*|^2 + |\theta(f^*) - \theta^*|^2 \right] dt dx + \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \frac{|f^*|^2}{\mu} dt dx. \quad (1.39)$$

En el funcional anterior, $\mathcal{O}^*$ es un abierto no vacío que representa el dominio de observación del control f^* y μ es una función que penaliza la acción del control seguidor f^* .

Notemos que el funcional (1.39) mide la distancia que hay entre la solución $(y(f^*), \theta(f^*))$ del sistema (1.38) y el estado (y^*, θ^*) . Por lo tanto, el objetivo de f^* se traduce a buscar el

$$\inf_{f^* \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))} J(f^*). \quad (1.40)$$

En relación a este objetivo, el resultado que obtenemos es el siguiente:

Lema 1.18. *Supongamos que*

$$f \in L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (y^0, \theta^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega), \quad (y^*, \theta^*) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Así, existe una constante $C > 0$ tal que si

$$\|\mu\|_{L^\infty(0, T)} \leq C,$$

entonces el problema de control óptimo (1.40) admite una única solución dada por

$$f^* := -\mu\sigma,$$

donde (y, θ, u, σ) es la solución al sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y + (y \cdot \nabla) y = \theta \mathbf{e}_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + y \cdot \nabla \theta = f 1_\omega + f^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u + (\nabla y)^\top u - (y \cdot \nabla) u + \sigma \nabla \theta = (y - y^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma - y \cdot \nabla \sigma = u_2 + (\theta - \theta^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u = 0, \quad \theta = \sigma = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0, \quad u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.41)$$

Por otro lado, el segundo objetivo es el problema clásico de encontrar un control $f \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tal que lleve el sistema (1.41) a cero en un tiempo $T > 0$, es decir, probar la controlabilidad parcial del sistema (1.41). Con respecto a este problema, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.19. *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces existe $C > 0$ y $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T])$ tales que*

$$\rho_1(0) = \rho_1(T) = \rho_2(T) = 0, \quad \rho_1 > 0 \text{ en } (0, T), \quad \rho_2 > 0 \text{ en } [0, T]$$

con la siguiente propiedad: si

$$\frac{\mu}{\rho_1} \in L^\infty(0, T), \quad \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (y^0, \theta^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega),$$

con

$$\left\| \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_2} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C,$$

entonces, existe un control $f \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ y una solución

$$(y, \theta, u, \sigma) \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^6) \cap C^0([0, T]; H^1(\Omega)^6) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^6), \quad (\pi_y, \pi_u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$$

de (1.41) que satisfice

$$y(T, \cdot) = 0, \quad \theta(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Idea de la prueba

Para probar el Lema 1.18, seguiremos las ideas de [2]. Usando la derivada de Gateaux del funcional J , podremos caracterizar el control seguidor f^* mediante el sistema (1.41). El procedimiento para probar el Teorema 1.19 es muy similar al usado para probar los resultados de los capítulos anteriores. Es decir, primero se prueba el resultado de control nulo para el sistema linealizado de (1.41) con término fuente:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = \theta \mathbf{e}_2 + h^{(1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \partial_t \theta - \Delta \theta = f 1_\omega - \mu \sigma 1_{\mathcal{O}} + h^{(2)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u = y 1_{\mathcal{O}^*} + h^{(3)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma = u_2 + \theta 1_{\mathcal{O}^*} + h^{(4)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u = 0, \quad \theta = \sigma = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0, \quad u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.42)$$

Nuevamente, probar esto es equivalente a probar una desigualdad de observabilidad usando estimaciones de Carleman. Posteriormente, usando un argumento de punto fijo probaremos la controlabilidad del sistema (1.42) reemplazando los términos $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ y $h^{(4)}$ por los términos no lineales correspondientes

$$h^{(1)} = -(y \cdot \nabla) y, \quad h^{(2)} = -y \cdot \nabla \theta,$$

$$h^{(3)} = -(\nabla y)^\top u + (y \cdot \nabla) u - \sigma \nabla \theta - y^* 1_{\mathcal{O}^*}, \quad h^{(4)} = y \cdot \nabla \sigma - \theta^* 1_{\mathcal{O}^*},$$

y con ello se concluye el Teorema 1.19.

1.3.4. Control para Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash

Los resultados que se enuncian aquí serán presentados con más detalle en el Capítulo 5.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sea $T > 0$ y sean $\omega, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \Omega$ abiertos no vacíos tales que

$$\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset \quad (i = 1, 2).$$

Consideremos el siguiente sistema de Stokes:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y = h 1_\omega + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.43)$$

En el sistema anterior, $y = y(t, x) \in \mathbb{R}^N$ describe la velocidad de fluido, $\pi_y = \pi_y(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión y y^0 es un dato inicial dado. El conjunto ω es el dominio de control principal, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ son dominios de control secundarios; $1_\omega, 1_{\mathcal{O}_1}$ y $1_{\mathcal{O}_2}$ son las funciones características de $\omega, \mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ respectivamente; los controles son h, v^1, v^2 , donde h es el control líder y v^1 y v^2 los controles seguidores.

Nuestro objetivo es el siguiente:

1. que los controles seguidores v^1 y v^2 mantengan la solución y cerca de un estado $y^{1,d}$ y $y^{2,d}$ respectivamente;
2. que el control h lleve el sistema a cero en el tiempo T .

El primer objetivo se traduce como sigue: fijamos $h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ y $y^0 \in \mathcal{H}$. Así, podemos considerar los siguientes funcionales con peso

$$J_i(v^1, v^2) = \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}_{i,d}} |y - y^{i,d}|^2 dx dt + \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}_i} \frac{|v^i|^2}{\mu_i} dx dt \quad (i = 1, 2). \quad (1.44)$$

Entonces, queremos que v^1 y v^2 cumplan lo siguiente:

$$J_1(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^1} J_1(\bar{v}^1, v^2), \quad J_2(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^2} J_2(v^1, \bar{v}^2). \quad (1.45)$$

Definición 1.20. Cualquier par (v^1, v^2) que satisfaga (1.45) es llamado un equilibrio de Nash para J_1 y J_2 .

Para probar la existencia y unicidad de este equilibrio de Nash, nos basaremos en el resultado obtenido en [16]. La idea es aprovechar la convexidad de los funcionales J_i ($i = 1, 2$) para obtener que un par (v^1, v^2) es un equilibrio de Nash de (1.44) si y solo si cumple

$$\left\langle \frac{\partial J_1}{\partial v^1}(v^1, v^2), \hat{v}^1 \right\rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^1 \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_1)) \quad (1.46)$$

y

$$\left\langle \frac{\partial J_2}{\partial v^2}(v^1, v^2), \hat{v}^2 \right\rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^2 \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_2)). \quad (1.47)$$

Así, probaremos el siguiente resultado, el cual nos da una caracterización del par (v^1, v^2) :

Lema 1.21. Dados $h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$, $y^{i,d} \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_{i,d}))$ ($i = 1, 2$) y $y^0 \in \mathcal{H}$. Existe $C > 0$ tal que si

$$\|\mu_i\|_{L^\infty(0, \infty)} \leq C \quad (i = 1, 2),$$

entonces el par (v^1, v^2) es un equilibrio de Nash de J_1 y J_2 si y solo si $v^i = -\mu_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_i}$ ($i = 1, 2$) donde (y, γ^1, γ^2) es solución al sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y = h 1_\omega - \mu_1 \gamma^1 1_{\mathcal{O}_1} - \mu_2 \gamma^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \gamma^1 - \Delta \gamma^1 + \nabla \pi_\gamma^1 = (y - y^{1,d}) 1_{\mathcal{O}_{1,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \gamma^2 - \Delta \gamma^2 + \nabla \pi_\gamma^2 = (y - y^{2,d}) 1_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} \gamma^1 = \operatorname{div} \gamma^2 = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = \gamma^1 = \gamma^2 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \gamma^1(T, \cdot) = 0, \quad \gamma^2(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.48)$$

Una vez probado lo anterior, buscaremos que el control h controle el sistema (1.48) a cero, para esto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.22. *Sea $T > 0$. Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset$ ($i = 1, 2$), que $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} =: \mathcal{O}_d$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces, existe $C > 0$ y funciones $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T])$ tales que*

$$\rho_1(0) = \rho_1(T) = \rho_2(T) = 0, \quad \rho_1 > 0 \text{ en } (0, T), \quad \rho_2 > 0 \text{ en } [0, T)$$

con la siguiente propiedad: si

$$\frac{\mu_1}{\rho_1}, \frac{\mu_2}{\rho_2} \in L^\infty(0, T), \quad \frac{(y^{1,d}, y^{2,d})}{\rho_2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^{2N}), \quad y^0 \in \mathcal{H},$$

con

$$\left\| \frac{(y^{1,d}, y^{2,d})}{\rho_2} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{2N})} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C,$$

entonces, existe un control $h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución de (1.48) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Idea de la prueba

Para probar el Teorema 1.22, nuevamente, la idea es probar una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto de (1.48), el cual está dado por

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z + \nabla \pi_z = (\varphi^1 + \varphi^2)1_{\mathcal{O}_d} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \varphi^1 - \Delta \varphi^1 + \nabla \pi_\varphi^1 = -\mu_1 z 1_{\mathcal{O}_1} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \varphi^2 - \Delta \varphi^2 + \nabla \pi_\varphi^2 = -\mu_2 z 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} z = \operatorname{div} \varphi^1 = \operatorname{div} \varphi^2 = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ z = \varphi^1 = \varphi^2 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(T, \cdot) = z^T, \quad \varphi^1(0, \cdot) = 0, \quad \varphi^2(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.49)$$

Haciendo $\phi = \varphi^1 + \varphi^2$, uno puede reescribir (1.49) como

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z + \nabla \pi_z = \phi 1_{\mathcal{O}_d} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \phi - \Delta \phi + \nabla \pi_\phi = -z(\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} z = \operatorname{div} \phi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ z = \phi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(T, \cdot) = z^T, \quad \phi(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.50)$$

De este modo, uno prueba una desigualdad de la forma

$$\|\rho^{M+5}(z, \phi)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{3N})}^2 \leq C \sum_{k=1, k \neq j}^N \iint_{(0, T) \times \omega} \rho^{2(M+1)} |z_k|^2 dx dt \quad (M > 0). \quad (1.51)$$

donde ρ es una función positiva en $(0, T)$ que cumple $\rho(0) = \rho(T) = 0$ y $M > 0$.

Capítulo 2

Control nulo de m sistemas de Stokes y Navier-Stokes acoplados

En este capítulo presentaremos un resultado de control a cero para sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) acoplados. Para esto consideraremos m sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) en dimensión N (con $N = 2, 3$) y probaremos que cuando el acoplamiento tiene forma de cascada es posible controlar el sistema a cero usando un sólo control en un sistema y actuando únicamente en $N - 1$ componentes. Los resultados de este capítulo fueron tomados de nuestro artículo [27].

2.1. Introducción

Sea Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ (con $N = 2, 3$) con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sean $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío, al cual llamaremos *dominio de control*. Para $m \geq 2$, consideremos los siguientes m sistemas acoplados:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \varepsilon (y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)} + \nabla p^{(i)} = \sum_{j=1}^m (B_{i,j} \cdot \nabla) y^{(j)} + \sum_{j=1}^m A_{i,j} y^{(j)} + D_1 u 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

donde $i \in \{1, \dots, m\}$, $A_{i,j} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $B_{i,j} \in \mathbb{R}^N$ y $D_i \in \mathcal{M}_{N,r}(\mathbb{R})$ para algún $r \in \mathbb{N}^*$. Notemos que si $\varepsilon = 0$, entonces (2.1) es un sistema de m sistemas de Stokes acoplados y si $\varepsilon = 1$, (2.1) es un sistema de m sistemas de Navier-Stokes acoplados. También hemos denotado por 1_ω la función característica en ω y las constantes $\nu_i > 0$ son las viscosidades de los fluidos.

Antes de continuar, notemos que el sistema anterior se puede escribir de manera abstracta como sigue: si $\varepsilon = 0$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla p = (B \cdot \nabla) y + Ay + Du 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

y si $\varepsilon = 1$, tenemos

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = (B \cdot \nabla) y + Ay + Du 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

En los sistemas (2.2) y (2.3),

$$y = (y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad \nu \Delta y = (\nu_i \Delta y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad (y \cdot \nabla) y = ((y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad \nabla p = (\nabla p^{(i)})_{1 \leq i \leq m},$$

$$\operatorname{div} y = (\operatorname{div} y^{(i)})_{1 \leq i \leq m}, \quad y_0 = (y_0^{(i)})_{1 \leq i \leq m}$$

y

$$(B \cdot \nabla) y = \left(\sum_{j=1}^m (B_{i,j} \cdot \nabla) y^{(j)} \right)_{1 \leq i \leq m}, \quad Ay = \left(\sum_{j=1}^m A_{i,j} y^{(j)} \right)_{1 \leq i \leq m}, \quad Du = (D_i u)_{1 \leq i \leq m}.$$

Como mencionamos anteriormente, el acoplamiento que consideraremos está dado en forma de cascada, esto es, las matrices A y B serán de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,m} \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,m} \\ 0 & B_{2,2} & \cdots & B_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{m,m} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

La matriz A es una matriz de vectores constantes cuya subdiagonal es distinta de cero. En otras palabras, nuestras hipótesis sobre A y B son

$$A_{i,j} = a_{i,j} I_N, \quad a_{i,i-1} \neq 0 \quad (2 \leq i \leq m), \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \geq j + 2, \quad (2.5)$$

$$B_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \geq j + 1. \quad (2.6)$$

Este tipo de acoplamiento fue considerado en la controlabilidad nula de m ecuaciones de calor (ver [13]) y permite controlar los m sistemas actuando solamente en uno de ellos, digamos en el primero. Por otro lado, se ha probado que para sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) (ver [4, 6]) es posible controlar el sistema en dimensión N con un control con solo $N - 1$ componentes.

Nuestro objetivo será extender ambos resultados, es decir, probaremos que es posible controlar m sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) actuando solo en el primer sistema y además con $N - 1$ controles escalares. Por lo que, sin pérdida de generalidad, supondremos

$$r = N - 1, \quad D_j = 0 \quad (j \geq 2), \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{si } N = 2) \quad \text{or} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{si } N = 3). \quad (2.7)$$

Para presentar los resultados obtenidos, recordemos ciertos espacios de funciones utilizados en la teoría de sistemas de Stokes:

$$\mathcal{H} = \left\{ y \in [L^2(\Omega)]^N : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega, \quad y \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ y \in [H_0^1(\Omega)]^N : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega \right\}. \quad (2.9)$$

También denotaremos por

$$\mathbb{H} := \mathcal{H}^m \quad \text{y} \quad \mathbb{V} := \mathcal{V}^m. \quad (2.10)$$

Así tenemos el siguiente resultado para sistemas de Stokes:

Teorema 2.1. Supongamos (2.5)-(2.7). Entonces, para toda $T > 0$ y para toda $y_0 \in \mathbb{H}$, existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ de (2.2) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Mientras que para sistemas de Navier-Stokes tenemos un resultado de control nulo local:

Teorema 2.2. Supongamos (2.5)-(2.7). Entonces, para toda $T > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $y_0 \in \mathbb{V}$ que satisface

$$\|y_0\|_{\mathbb{V}} \leq \delta,$$

existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ de (2.3) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Observación 2.3. Como consecuencia, hemos deducido la controlabilidad a cero de $N \times m$ ecuaciones escalares usando solamente $N - 1$ controles escalares.

Para probar el Teorema 2.1, usaremos un argumento estándar (ver [31, Teorema 11.2.1, p.357]). Esto es, consideremos el adjunto del sistema (2.2):

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi + \nabla \pi + (B^* \cdot \nabla) \varphi - A^* \varphi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \varphi(T, \cdot) = \varphi_T & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

o bien, su forma expandida

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi^{(i)} - \Delta \varphi^{(i)} + \nabla \pi^{(i)} + \sum_{j=1}^i \left((B_{j,i} \cdot \nabla) \varphi^{(j)} - A_{j,i} \varphi^{(j)} \right) = A_{i+1,i} \varphi^{(i+1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq m-1) \\ -\partial_t \varphi^{(m)} - \Delta \varphi^{(m)} + \nabla \pi^{(m)} + \sum_{j=1}^m \left((B_{j,m} \cdot \nabla) \varphi^{(j)} - A_{j,m} \varphi^{(j)} \right) = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \varphi^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq m) \\ \varphi^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq m) \\ \varphi^{(i)}(T, \cdot) = \varphi_T^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq m) \end{cases} \quad (2.12)$$

con $\varphi_T^{(i)} \in \mathcal{H}$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ y también denotamos por $\varphi_j^{(i)}$ con $j = 1, \dots, N$ las coordenadas de $\varphi^{(i)}$. Notemos que si consideramos

$$\varphi^{(m+1)} \equiv 0, \quad A_{m+1,i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m),$$

podemos reescribir las ecuaciones como

$$-\partial_t \varphi^{(i)} - \Delta \varphi^{(i)} + \nabla \pi^{(i)} + \sum_{j=1}^i \left((B_{j,i} \cdot \nabla) \varphi^{(j)} - A_{j,i} \varphi^{(j)} \right) = A_{i+1,i} \varphi^{(i+1)} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (1 \leq i \leq m). \quad (2.13)$$

Entonces el Teorema 2.1 será consecuencia de probar la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(0, x) \right|^2 dx \leq C(T) \sum_{j=1}^{N-1} \iint_{(0,T) \times \omega} \left| \varphi_j^{(1)} \right|^2 dt dx. \quad (2.14)$$

para alguna constante $C > 0$ que depende de T , Ω y ω . Para probar la desigualdad anterior utilizaremos las conocidas estimaciones de Carleman. En la siguiente sección presentaremos las herramientas necesarias para probar la desigualdad (2.14).

2.1.1. Resultados de regularidad

En esta sección presentaremos un resultado de regularidad adicional al mencionado en el Lema 1.11, para un sistema de m ecuaciones de Stokes. Para esto, recordemos los espacios mencionados en (2.8)-(2.10).

Sea $\mathbb{P}_0 : L^2(\Omega)^N \rightarrow \mathcal{H}$ el proyector de Leray y consideremos la proyección $\mathbb{P}$ definida por:

$$\mathbb{P} : [L^2(\Omega)^N]^m \rightarrow \mathbb{H}, \quad y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) \mapsto (\mathbb{P}_0 y^{(1)}, \dots, \mathbb{P}_0 y^{(m)}).$$

Consideremos también el operador no acotado definido en $\mathbb{H}$ por

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}_0) := \mathcal{D}(\mathbb{A}_1) := \mathcal{D}(\mathbb{A}) := [H^2(\Omega)^N \cap \mathcal{V}]^m, \quad (2.15)$$

$$\mathbb{A}_0 y := -\mathbb{P} \Delta y, \quad \mathbb{A}_1 y := -\mathbb{P} [(B \cdot \nabla) y + A y], \quad \mathbb{A} := \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1. \quad (2.16)$$

Es bien sabido (ver [26, 30, Teorema 2.1.1, p.128–129]) que el operador $\mathbb{A}_0$ es autoadjunto y positivo. Además, se puede probar que

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}^*) = [H^2(\Omega)^N \cap \mathcal{V}]^m, \quad \mathbb{A}^* = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1^*, \quad (2.17)$$

con

$$\mathbb{A}_1^* \varphi := \mathbb{P} [(B^* \cdot \nabla) \varphi - A^* \varphi],$$

donde

$$(A^*)_{i,j} := A_{j,i}^\top \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \quad (B^*)_{i,j} := B_{j,i} \in \mathbb{R}^N.$$

En lo anterior, $\cdot^\top$ denota una matriz transpuesta en $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Uno puede probar que para alguna $C > 0$

$$\left\| \mathbb{A}_0^{1/2} \varphi \right\|_{\mathbb{H}} = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^{N^2 m}}, \quad \mathbb{V} = \mathcal{D}(\mathbb{A}_0^{1/2}), \quad \|\mathbb{A}_1^* \varphi\|_{\mathbb{H}} \leq C \left\| \mathbb{A}_0^{1/2} \varphi \right\|_{\mathbb{H}}$$

En particular, uno puede probar (ver [25, Teorema 2.1, p.80]) que $-\mathbb{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico en $\mathbb{H}$. Usando la regularidad elíptica de los sistemas de Stokes (ver [30, Proposición 2.2, p.33]), también tenemos que

$$\mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2) \subset [H^4(\Omega)^N]^m, \quad \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^3) \subset [H^6(\Omega)^N]^m.$$

Con la notación anterior, podemos escribir el sistema adjunto (2.11) como

$$\begin{cases} -\varphi' + \mathbb{A}^* \varphi = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases} \quad (2.18)$$

Si $\varphi_T \in \mathbb{H}$, entonces tenemos que $\varphi \in C^0([0, T]; \mathbb{H})$, pero podemos usar las propiedades parabólicas mencionadas anteriormente para conseguir mayor regularidad en φ :

Lema 2.4. Sean $T_0 > 0$ y $T \in (0, T_0)$. Supongamos que $A_{i,j} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $B_{i,j} \in \mathbb{R}^N$, $(i, j \in \{1, \dots, m\})$. Consideremos funciones $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in C^3([0, T])$ y una constante $C > 0$ tal que

$$\theta_i(T) = 0 \quad (i \in \{0, \dots, 3\}), \quad |\theta_3'''| + |\theta_2''| + |\theta_1'| \leq C |\theta_0|, \quad |\theta_3''| + |\theta_2'| \leq C |\theta_1|, \quad |\theta_3'| \leq C |\theta_2|. \quad (2.19)$$

Entonces:

$$\theta_1 \varphi \in H^1(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)), \quad (2.20)$$

$$\theta_2 \varphi \in H^2(0, T; \mathbb{H}) \cap H^1(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2)), \quad (2.21)$$

$$\theta_3 \varphi \in H^3(0, T; \mathbb{H}) \cap H^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)) \cap H^1(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2)) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^3)), \quad (2.22)$$

y además

$$\|\theta_1 \varphi\|_{H^1(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_1 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})}, \quad (2.23)$$

$$\|\theta_2 \varphi\|_{H^2(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_2 \varphi\|_{H^1(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_2 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2))} \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})}, \quad (2.24)$$

$$\|\theta_3 \varphi\|_{H^3(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_3 \varphi\|_{H^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_3 \varphi\|_{H^1(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2))} + \|\theta_3 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^3))} \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})}. \quad (2.25)$$

Demostración. La prueba se basa en un argumento iterativo. De (2.18), obtenemos que para $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} -(\theta_i \varphi)' + \mathbb{A}^* (\theta_i \varphi) = -\theta_i' \varphi & \text{en } (0, T), \\ (\theta_i \varphi)(T) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Como $-\mathbb{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico, de (2.26) con $i = 1$ obtenemos que (2.20) y además se cumple (2.23). De aquí, considerando (2.19), obtenemos

$$\|\theta_2' \varphi\|_{H^1(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_2' \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})}, \quad (\theta_2' \varphi)(T) = 0, \quad (2.27)$$

Ahora, consideremos (2.26) con $i = 2$: tomando la derivada con respecto a t , aplicando el operador $\mathbb{A}^*$ y usando nuevamente que $-\mathbb{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico, concluimos que

$$\|(\theta_2 \varphi)''\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})} + \|(\theta_2 \varphi)'\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_2 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)^2)} \leq C \left(\|\theta_2' \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_2' \varphi\|_{H^1(0, T; \mathbb{H})} \right). \quad (2.28)$$

Combinando la relación anterior con (2.27) y considerando (2.19) tenemos (2.21) y además (2.24). Estas relaciones y (2.19), nos da

$$\|\theta_3' \varphi\|_{H^2(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_3' \varphi\|_{H^1(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_3' \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2))} \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})}, \quad (\theta_3' \varphi)(T) = (\theta_3' \varphi)'(T) = 0. \quad (2.29)$$

Finalmente, considerando $i = 3$ en (2.26) y aplicando los operadores ∂_t^2 , $\mathbb{A}^* \partial_t$ y $(\mathbb{A}^*)^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \|(\theta_3 \varphi)'''\|_{L^2(0, T; \mathbb{H})} + \|(\theta_3 \varphi)''\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|(\theta_3 \varphi)'\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)^2)} + \|\theta_3 \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)^3)} \\ \leq C \left(\|\theta_3' \varphi\|_{H^2(0, T; \mathbb{H})} + \|\theta_3' \varphi\|_{H^1(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^*))} + \|\theta_3' \varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}((\mathbb{A}^*)^2))} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Combinando la relación anterior con (2.19) y (2.29), tenemos (2.22) con (2.25). $\square$

2.2. Estimación de Carleman para el sistema adjunto

Ahora estamos en posición de probar nuestra desigualdad de Carleman. La prueba la haremos para $N = 2$ (el caso $N = 3$ se hace de manera similar) y para simplificar la notación supondremos $T \in (0, 1)$ y $\nu_i = 1$ para $i = 1, \dots, m$. En adelante consideraremos $\omega_0 \in \omega$ y las funciones α, ξ introducidas en la Subsección 1.2.2. Nuestro objetivo será estimar la siguiente cantidad asociada a la solución del sistema adjunto (2.12):

$$\begin{aligned} I(s, \varphi^{(i)}) := \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} \left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 \right) dx dt \\ + \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^5 \left| \varphi^{(i)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo que, nuestro resultado será el siguiente:

Teorema 2.5. *Existe una constante $C > 0$ que depende de la geometría, tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varphi_T \in \mathbb{H}$, la solución $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m)})$ de (2.11) satisface*

$$\sum_{i=1}^m I(s, \varphi^{(i)}) \leq C \iint_{(0, T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2m+3-6} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.32)$$

Para probar el resultado anterior, comenzaremos estimando cada $I(s, \varphi^{(i)})$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) de manera independiente.

Proposición 2.6. Sea $\widehat{\omega} \subset \Omega$ un conjunto abierto no vacío tal que $\omega_0 \Subset \widehat{\omega} \Subset \omega$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varphi_T \in \mathbb{H}$, la solución $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m)})$ de (2.11) satisface

$$\begin{aligned} I(s, \varphi^{(i)}) &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^5 \left| \varphi^{(j)} \right|^2 dx dt \\ &\quad + C \sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left(\left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + C \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \quad (1 \leq i \leq m). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Demostración. Primero, notemos que, tomando la divergencia en la ecuación (2.13), tenemos

$$\Delta \pi^{(i)} = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \quad (1 \leq i \leq m).$$

Ahora, siguiendo las ideas de [6], aplicamos el operador $\nabla^2 \Delta$ a la primera componente de (2.13) y obtenemos

$$-\partial_t \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} - \Delta \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} = - \sum_{j=1}^i B_{j,i} \cdot \nabla \left(\nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \right) + \sum_{j=1}^{i+1} a_{j,i} \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \quad (1 \leq i \leq m). \quad (2.34)$$

Aplicando el Lema 1.10 a la ecuación de arriba, obtenemos que para $\lambda \geq C$ y para $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$:

$$\begin{aligned} &\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} \left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^i \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt + \sum_{j=1}^{i+1} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 d\gamma dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

El resto de la prueba se divide en varios pasos:

- En el Paso 1, completamos el lado izquierdo de (2.35) con integrales con peso de $\varphi^{(i)}$ y agregamos algunos términos locales en el lado derecho.
- En el Paso 2, obtenemos una cota superior para el término de frontera.
- Finalmente, en el Paso 3, estimamos todos los términos locales que no aparecen en el lado derecho de (2.33).

Paso 1. Aplicamos el Lema 1.8 con $u = \nabla \Delta \varphi_1^{(i)}$ y $r = 1$: para $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y $\lambda \geq C$, tenemos

$$\begin{aligned} &\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aplicamos nuevamente el Lema 1.8 con $u = \Delta \varphi_1^{(i)}$ y $r = 3$: para $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y $\lambda \geq C$, tenemos

$$\begin{aligned} &\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ahora, usando la condición de divergencia nula de $\varphi^{(i)}$, tenemos

$$\left| \partial_2 \varphi_2^{(i)} \right| = \left| \partial_1 \varphi_1^{(i)} \right| \leq \left| \nabla \varphi_1^{(i)} \right|.$$

Luego, usando la desigualdad de Poincaré y la elipticidad del operador de Laplace con condiciones de frontera tipo Dirichlet, obtenemos que existe $C > 0$ que depende de Ω tal que

$$\int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)} \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx.$$

Combinando las relaciones anteriores con (2.35)-(2.37), obtenemos que $I(s, \varphi^{(i)})$ definido en (2.31), satisface

$$\begin{aligned} I(s, \varphi^{(i)}) \leq & C \left(\sum_{j=1}^i \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt + \sum_{j=1}^{i+1} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 d\gamma dt + \sum_{k=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{5-2k} \left| \nabla^k \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \right). \quad (2.38) \end{aligned}$$

Paso 2. En este paso, vamos a estimar el término de frontera del lado de derecho de (2.38). Para esto, usaremos el Lema 2.4: considerando (1.11), se puede probar que

$$\theta_0 := e^{-s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{\frac{5}{2}}, \quad \theta_1(t) := e^{-s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{\frac{3}{2}-\frac{1}{\ell}}, \quad \theta_2(t) := e^{-s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{\frac{1}{2}-\frac{2}{\ell}}, \quad \theta_3(t) := e^{-s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{\ell}}$$

satisfacen (2.19) para $s \geq T^{\ell}$. De aquí que,

$$\begin{aligned} & \|\theta_1 \varphi\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \|\theta_1 \varphi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \|\theta_2 \varphi\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \|\theta_2 \varphi\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \|\theta_2 \varphi\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega)^2)} \\ & + \|\theta_3 \varphi\|_{H^3(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \|\theta_3 \varphi\|_{H^2(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \|\theta_3 \varphi\|_{H^1(0,T;H^4(\Omega)^2)} + \|\theta_3 \varphi\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega)^2)} \\ & \leq C \|\theta_0 \varphi\|_{L^2(0,T;\mathbb{H})}. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Ahora, usando una desigualdad de traza (ver [22, Teorema 2.1, p.9]) y una desigualdad de interpolación (ver [21, Observación 9.5, p.46-47]), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 d\gamma dt \right| \\ & \leq C \int_0^T e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{-1} \left(\left\| \varphi^{(i)} \right\|_{H^4(\Omega)^2} \left\| \varphi^{(i)} \right\|_{H^6(\Omega)^2} + \left\| \varphi^{(i)} \right\|_{H^4(\Omega)^2}^{1/2} \left\| \varphi^{(i)} \right\|_{H^6(\Omega)^2}^{3/2} \right) dt \\ & \leq C \int_0^T \left((s\xi_{\sharp})^{-1+\frac{5}{\ell}} \left\| \theta_2 \varphi^{(i)} \right\|_{H^4(\Omega)^2} \left\| \theta_3 \varphi^{(i)} \right\|_{H^6(\Omega)^2} + (s\xi_{\sharp})^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}} \left\| \theta_2 \varphi^{(i)} \right\|_{H^4(\Omega)^2}^{1/2} \left\| \theta_3 \varphi^{(i)} \right\|_{H^6(\Omega)^2}^{3/2} \right) dt. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Usando que $\ell \geq 11$ y (1.14), tenemos que para $C > 0$ y $s \geq CT^{2\ell}$:

$$(s\xi_{\sharp})^{-1+\frac{5}{\ell}} \leq (C4^{\ell})^{-1+\frac{5}{\ell}} \quad \text{y} \quad (s\xi_{\sharp})^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}} \leq (C4^{\ell})^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}}.$$

Entonces, tomando $C > 0$ suficientemente grande, a partir de las relaciones anteriores y usando (2.38)-(2.40), obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^{\ell} + T^{2\ell})$,

$$\begin{aligned} I(s, \varphi^{(i)}) \leq & C \left(\sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left(\left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{5-2k} \left| \nabla^k \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt \right) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^5 \left| \varphi^{(j)} \right|^2 dx dt. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Paso 3. Para estimar los términos locales, procederemos de manera estándar: consideramos $\tilde{\omega}$ un abierto con $\omega_0 \Subset \tilde{\omega} \Subset \widehat{\omega}$ y η_1 una función tal que

$$\eta_1 \in C_c^2(\tilde{\omega}), \quad \eta_1 \equiv 1 \text{ en } \omega_0, \quad \eta_1 \geq 0.$$

Entonces, usando integración por partes tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s\xi \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} \right)^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \eta_1 e^{-2s\alpha} s\xi \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} \right)^2 dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\eta_1 e^{-2s\alpha} s\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \eta_1 e^{-2s\alpha} s\xi \frac{\partial^3}{\partial x_k^2 \partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_q} \Delta \varphi_1^{(i)} dx dt. \end{aligned}$$

Usando (1.12) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} \left| \nabla^3 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De manera análoga vamos a estimar el término local de $\nabla \Delta \varphi_1^{(i)}$: consideramos η_2 una función tal que

$$\eta_2 \in C_c^2(\widehat{\omega}), \quad \eta_2 \equiv 1 \text{ en } \tilde{\omega}, \quad \eta_2 \geq 0.$$

Entonces, usando integración por partes

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \varphi_1^{(i)} \right)^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} \eta_2 e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \varphi_1^{(i)} \right)^2 dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\eta_2 e^{-2s\alpha} (s\xi)^3) \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \varphi_1^{(i)} \Delta \varphi_1^{(i)} dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} \eta_2 e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \Delta \varphi_1^{(i)} \Delta \varphi_1^{(i)} dx dt. \end{aligned}$$

Usando (1.12) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 + s\xi \left| \nabla^2 \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

La estimación de arriba junto con (2.41) y (2.42), implican (2.33) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Esto concluye la Proposición 2.6. $\square$

Ahora estamos en posición para probar el Teorema 2.5.

Demostración. Para probar este teorema usaremos el acoplamiento del sistema. Sumando (2.32) para $i \in \{1, \dots, m\}$ y tomando $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$, para $C > 0$ suficientemente grande, tenemos

$$\sum_{i=1}^m I(s, \varphi^{(i)}) \leq C \sum_{i=1}^m \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(i)} \right|^2 dx dt. \quad (2.43)$$

Para deshacernos de los términos locales del lado derecho (excepto el correspondiente a $i = 1$), introducimos una sucesión de abiertos $\mathcal{O}_i$ con $i \in \{1, \dots, m\}$ tales que

$$\widehat{\omega} =: \mathcal{O}_0 \Subset \mathcal{O}_1 \Subset \dots \Subset \mathcal{O}_i \Subset \dots \Subset \mathcal{O}_m \Subset \omega$$

y las funciones

$$\chi_i \in C_c^2(\mathcal{O}_i) \quad \text{tal que} \quad \chi_i \equiv 1 \text{ en } \mathcal{O}_{i-1}, \quad \chi_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq m).$$

Así, considerando la ecuación $m-1$ de (2.13) y aplicando el operador de Laplace a la primera componente de esta ecuación y obtenemos:

$$-\partial_t \Delta \varphi_1^{(m-1)} - \Delta^2 \varphi_1^{(m-1)} + \sum_{j=1}^{m-1} B_{j,m-1} \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(j)} - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,m-1} \Delta \varphi_1^{(j)} = a_{m,m-1} \Delta \varphi_1^{(m)} \quad (2.44)$$

Usando esta relación e integración por partes, tenemos que

$$\iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt \leq \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt = \sum_{k=1}^4 J_k \quad (2.45)$$

con

$$J_1 := -\frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \varphi_1^{(m)} \partial_t \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt, \quad (2.46)$$

$$J_2 := -\frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta^2 \varphi_1^{(m-1)} dx dt, \quad (2.47)$$

$$J_3 := \frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \varphi_1^{(m)} \left(\sum_{j=1}^{m-1} B_{j,m-1} \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(j)} \right) dx dt, \quad (2.48)$$

$$J_4 := -\frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \varphi_1^{(m)} \left(\sum_{j=1}^{m-1} a_{j,m-1} \Delta \varphi_1^{(j)} \right) dx dt. \quad (2.49)$$

Lo siguiente es estimar cada J_i con $i = 1, 2, 3, 4$. Comenzamos con J_1 . Integrando por partes y usando que

$$\chi_1 \partial_t \Delta \varphi_1^{(m)} = -\chi_1 \Delta^2 \varphi_1^{(m)} + \chi_1 \sum_{j=1}^m B_{j,m} \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(j)} - \chi_1 \sum_{j=1}^m a_{j,m} \Delta \varphi_1^{(j)},$$

obtenemos que

$$J_1 = \sum_{k=1}^4 J_{1,k} \quad (2.50)$$

donde

$$J_{1,1} := \frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 \partial_t \left(e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt,$$

$$J_{1,2} := \frac{-1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta^2 \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt,$$

$$J_{1,3} := \frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left(\sum_{j=1}^m B_{j,m} \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(j)} \right) \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt,$$

$$J_{1,4} := \frac{1}{a_{m,m-1}} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left(\sum_{j=1}^m a_{j,m} \Delta \varphi_1^{(j)} \right) \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt.$$

Usando la estimación (1.11) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y toda $\varepsilon > 0$

$$|J_{1,1}| \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} s^7 \xi^{7+2/\ell} \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt, \quad (2.51)$$

$$|J_{1,2}| \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \Delta^2 \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt, \quad (2.52)$$

$$|J_{1,3}| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt \quad (2.53)$$

y

$$|J_{1,4}| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.54)$$

Combinando (2.51)-(2.54), obtenemos que para $\varepsilon > 0$,

$$|J_1| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m I(s, \varphi^{(j)}) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.55)$$

Ahora, para estimar J_2 (definido en (2.47)), notemos que usando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta^2 \varphi_1^{(m-1)} dx dt &= \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \Delta \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt \\ &\quad + \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta^2 \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt \\ &\quad + \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} 2\nabla \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Usando (1.12) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \Delta \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt \right| \\ \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nuevamente, usando el mismo argumento

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} 2\nabla \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \cdot \nabla \Delta \varphi_1^{(m)} \Delta \varphi_1^{(m-1)} dx dt \right| \\ \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Combinando (2.52), (2.57) y (2.58), obtenemos que para $\varepsilon > 0$,

$$|J_2| \leq \varepsilon I(s, \varphi^{(m)}) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.59)$$

Procedemos de manera similar para J_3 (definido en (2.48)). Aplicando integración por partes varias veces y usando la desigualdad de Young obtenemos que, existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \frac{-1}{a_{m,m-1}} \sum_{j=1}^{m-1} B_{j,m-1} \cdot \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} \left[\nabla \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \varphi_1^{(m)} + \left(\chi_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \nabla \Delta \varphi_1^{(m)} \right] \Delta \varphi_1^{(j)} dx dt \right| \\ &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 \right) dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m-1} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Finalmente, para estimar J_4 (definido en (2.49)), usando la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$|J_4| \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m-1} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt. \quad (2.61)$$

Juntando todo lo anterior, tenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(m)} \right|^2 dx dt \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^m I(s, \varphi^{(j)}) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 + \sum_{j=1}^{m-2} (s\xi)^7 \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^m I(s, \varphi^{(j)}) + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m-1} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Análogamente, para $\Delta \varphi_1^{(m-1)}$ se puede probar que existe $C > 0$ tal que para $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \varphi_1^{(m-1)} \right|^2 dx dt \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m I(s, \varphi^{(j)}) + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m-2} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{17} \left| \Delta \varphi_1^{(j)} \right|^2 dx dt.$$

Usando el argumento de manera iterativa, podemos estimar todos los términos locales, de modo que a partir de (2.43) obtenemos

$$\sum_{i=1}^m I(s, \varphi^{(i)}) \leq C \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_m} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{(m+1)}+1} \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.62)$$

Por último, vamos a estimar el término local de $\Delta \varphi_1^{(1)}$ en términos de $\varphi_1^{(1)}$. Para esto, consideremos un abierto $\tilde{\omega}$ tal que $\mathcal{O}_m \Subset \tilde{\omega} \Subset \omega$ y

$$\tilde{\chi} \in C_c^2(\tilde{\omega}) \quad \text{tal que} \quad \tilde{\chi} \equiv 1 \text{ en } \mathcal{O}_m, \quad \tilde{\chi} \geq 0.$$

Entonces, usando integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_m} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{(m+1)}+1} \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt \leq \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \tilde{\chi} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{(m+1)}+1} \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \nabla \left(\tilde{\chi} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{(m+1)}+1} \right) \Delta \varphi_1^{(1)} \cdot \nabla \varphi_1^{(1)} dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} \tilde{\chi} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{(m+1)}+1} \Delta \nabla \varphi_1^{(1)} \cdot \nabla \varphi_1^{(1)} dx dt. \end{aligned}$$

Considerando (1.12) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_m} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+1)+1} \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Luego, consideremos

$$\chi \in C_c^2(\omega) \quad \text{tal que} \quad \chi \equiv 1 \text{ en } \tilde{\omega}, \quad \chi \geq 0$$

y usando integración por partes

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \omega} \chi e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \omega} \nabla \left(\chi e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \right) \cdot \nabla \varphi_1^{(1)} \varphi_1^{(1)} dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \omega} \chi e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \Delta \varphi_1^{(1)} \varphi_1^{(1)} dx dt. \end{aligned}$$

Nuevamente, considerando (1.12) y la desigualdad de Young, obtenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+2)-1} \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^6 \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+3)-6} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Juntando (2.62)-(2.64), obtenemos que existe $C > 0$ tal que toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m I(s, \varphi^{(i)}) &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^6 \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+3)-6} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Por otro lado, aplicando el Lema 1.9 con $u = \varphi_1^{(1)}$ y $r = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^8 \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 + (s\xi)^6 \left| \nabla \varphi_1^{(1)} \right|^2 \right) dx dt \\ \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^8 \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Combinando lo de arriba con (2.65) y recordando que $I(s, \varphi^{(i)})$ está definido en (2.31), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^m I(s, \varphi^{(i)}) \leq \varepsilon I(s, \varphi^{(1)}) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2(m+3)-6} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt$$

para todo $\varepsilon > 0$ y con esto concluimos el Teorema 2.5. $\square$

2.3. Pruebas de los resultados principales

En esta sección presentaremos las pruebas del Teorema 2.1 y del Teorema 2.2.

2.3.1. Prueba de la desigualdad de observabilidad

En esta sección vamos a probar la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto (2.12) a partir del Teorema 2.5.

Lema 2.7. Sean $T \in (0, 1)$ y $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces, existe $C > 0$ y $\ell \geq 11$ tal que para toda $\varphi_T \in \mathbb{H}$, la solución φ de (2.12) satisface

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(0, x) \right|^2 dx \leq C e^{\frac{C}{T^\ell}} \iint_{(0, T) \times \omega} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.66)$$

Demostración. Primero, consideremos una estimación de energía del sistema adjunto (2.12). Multiplicando cada ecuación de (2.13) por su respectivo $\varphi^{(i)}$ y usando integración por partes, obtenemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)} \right|^2 dx + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \nabla \varphi^{(i)} \right|^2 dx = \sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} \left(A_{j,i} \varphi^{(i)} \cdot \varphi^{(j)} + \left[(B_{j,i} \cdot \nabla) \varphi^{(i)} \right] \cdot \varphi^{(j)} \right) dx.$$

Luego, usando el lema de Grönwall, existe una constante $C > 0$ tal que el mapeo

$$t \mapsto e^{Ct} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(t, x) \right|^2 dx$$

es no decreciente. En particular, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(0, x) \right|^2 dx \leq \frac{2}{T} e^{CT} \sum_{i=1}^m \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(t, x) \right|^2 dx dt. \quad (2.67)$$

Por otro lado, de (2.31) y (2.32) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^m \iint_{(0, T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^5 \left| \varphi^{(i)} \right|^2 dx dt \leq C \iint_{(0, T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{m+3}-6} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt. \quad (2.68)$$

Usando que si $t \in [T/4, 3T/4]$, entonces

$$\frac{3T^2}{16} \leq t(T-t) \leq \frac{T^2}{4},$$

obtenemos, a partir de (1.9), que existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\alpha_{\sharp}(t) \leq \frac{C_1}{T^{2\ell}}, \quad \xi_{\sharp}(t) \geq \frac{C_2}{T^{2\ell}} \quad (t \in [T/4, 3T/4])$$

y por lo tanto, existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$e^{-2s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^5 \geq e^{-\frac{C_3}{T^{2\ell}}}. \quad (2.69)$$

De manera similar, de (1.8) sabemos que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\alpha(t, x) \geq \frac{c_1}{t^{\ell}(T-t)^{\ell}}, \quad \xi(t, x) \leq \frac{c_2}{t^{\ell}(T-t)^{\ell}} \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Omega)$$

y por lo tanto, existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{m+3}-6} \leq e^{-2s\frac{c_1}{t^\ell(T-t)^\ell}} \left(s\frac{c_2}{t^\ell(T-t)^\ell} \right)^{2^{m+3}-6} \leq c_3. \quad (2.70)$$

Combinando (2.67)-(2.70), se sigue que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left| \varphi^{(i)}(0, x) \right|^2 dx \leq \frac{C}{T} e^{C(T+1+\frac{1}{T^\ell})} \iint_{(0,T) \times \omega} \left| \varphi_1^{(1)} \right|^2 dx dt.$$

Con esto concluimos la desigualdad de observabilidad (2.14). $\square$

2.3.2. Prueba del Teorema 2.1

Recordemos que los espacios $\mathcal{H}, \mathcal{V}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{V}$ están definidos en (2.8)-(2.10). Definimos el operador de control $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{H})$ dado por

$$\mathbb{U} := L^2(\omega)^{N-1}, \quad \mathbb{B}u = \mathbb{B}(u_1, \dots, u_{N-1}) := (\mathbb{P}_0((u_1, \dots, u_{N-1}, 0)1_\omega), 0, \dots, 0), \quad (2.71)$$

donde $\mathbb{P}_0$ es el proyector de Leray. Usando la notación anterior y la definición de $\mathbb{A}$ dada en (2.16), podemos reescribir (2.2) como

$$\begin{cases} y' + \mathbb{A}y = \mathbb{B}u & \text{en } (0, T), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Es bien sabido (ver [31, p.357]) que el sistema (2.72) es controlable a cero para todo tiempo $T > 0$ si y solo si existe $K(T) > 0$ tal que

$$\left\| e^{-T\mathbb{A}^*} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{H}}^2 \leq K(T)^2 \int_0^T \left\| \mathbb{B}^* e^{-t\mathbb{A}^*} \varphi_0 \right\|_{\mathbb{H}}^2 dt \quad (\varphi_0 \in \mathbb{H}). \quad (2.73)$$

Como $\mathbb{A}^*$ está dado por (2.17) y como

$$\mathbb{B}^* \varphi = \left(\left(\varphi_1^{(1)} \right)_{|\omega}, \dots, \left(\varphi_{N-1}^{(1)} \right)_{|\omega} \right),$$

concluimos el Teorema 2.1 a partir del Lema 2.7.

2.3.3. Prueba del Teorema 2.2

Para esta demostración usaremos el método de término fuente que fue introducido en [23] para probar la controlabilidad de sistemas no lineales. Primero vamos a enunciar el resultado de dicho artículo y después lo adaptaremos para probar nuestro resultado. Consideremos $\mathbb{H}$ y $\mathbb{U}$ dos espacios de Hilbert, $-\mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{H}$ un generador infinitesimal de un semigrupo analítico $(e^{-t\mathbb{A}})_{t \geq 0}$ y $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{H})$ un operador de control tal que cumple (2.73) con $K : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ continuo y no creciente. Sea $T > 0$ y supongamos que existen funciones $\rho, \rho_0, \rho_1 \in C^0([0, T], \mathbb{R}^*)$ no crecientes, positivas en $[0, T)$ con

$$\rho(T) = \rho_0(T) = \rho_1(T) = 0$$

y tales que, para algunas constantes $q > 1$ y $C > 0$,

$$\rho_0(t) := \rho_1(q^2(t-T) + T)K((q-1)(T-t)) \quad \left(t \in \left[T \left(1 - \frac{1}{q^2} \right), T \right] \right), \quad (2.74)$$

$$\rho_0 \leq C\rho, \quad \rho_1 \leq C\rho, \quad |\rho'| \rho_0 \leq C\rho^2 \quad (t \in [0, T]). \quad (2.75)$$

Denotemos por $L_{\rho_1}^2(0, T; \mathbb{H})$ el siguiente espacio

$$L_{\rho_1}^2(0, T; \mathbb{H}) := \left\{ f \in L^2(0, T; \mathbb{H}) : \frac{f}{\rho_1} \in L^2(0, T; \mathbb{H}) \right\}$$

y de manera análoga definimos el espacio $L_{\rho_0}^2(0, T; \mathbb{U})$. Así, podemos considerar el siguiente problema de control:

$$\begin{cases} y' + \mathbb{A}y = \mathbb{B}u + f & \text{en } (0, T), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.76)$$

El resultado de [23] dice lo siguiente:

Teorema 2.8. *Con las suposiciones anteriores, existe un operador acotado*

$$\mathcal{E}_T \in \mathcal{L} \left(\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times L_{\rho_1}^2(0, T; \mathbb{H}), L_{\rho_0}^2(0, T; \mathbb{U}) \right)$$

tal que para toda $y_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ y para toda $f \in L_{\rho_1}^2(0, T; \mathbb{H})$ la solución y de (2.76) con $u = \mathcal{E}_T(y_0, f)$ satisface

$$\frac{y}{\rho} \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A})) \cap C^0([0, T]; \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})) \cap H^1(0, T; \mathbb{H}).$$

Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{y}{\rho} \right\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A})) \cap C^0([0, T]; \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})) \cap H^1(0, T; \mathbb{H})} \leq C \left(\|y_0\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})} + \|f\|_{L_{\rho_1}^2(0, T; \mathbb{H})} \right).$$

El resultado anterior nos dice que bajo ciertas condiciones, si el sistema (2.72) es controlable a cero, entonces el sistema con un término fuente (2.76) también es controlable a cero.

Observación 2.9. Como $\rho(T) = 0$, el resultado anterior implica $y(T) = 0$.

A lo largo de este capítulo hemos definido quienes son $\mathbb{H}, \mathbb{U}, \mathbb{A}, \mathbb{B}$ (ver (2.10), (2.16) y (2.71)) para nuestro caso. Hay que ver si se cumplen todas las hipótesis para aplicar el Teorema 2.8. En la Subsección 2.1.1 probamos que $-\mathbb{A}$ es un generador infinitesimal de un semigrupo analítico. Además en el Lema 2.7 tenemos que, para alguna constante $C_K > 0$, se cumple (2.73) con

$$K(T) = C_K e^{\frac{C_K}{T^\ell}}.$$

Ahora, consideremos

$$q \in \left(1, 2^{\frac{1}{2\ell}} \right),$$

y sean

$$\rho(t) := e^{-\frac{C_\star}{(T-t)^\ell}}, \quad \rho_0(t) := C_K e^{-\frac{C_0}{(T-t)^\ell}}, \quad \rho_1(t) := e^{-\frac{C_1}{(T-t)^\ell}},$$

donde $C_\star, C_0, C_1$ son constantes positivas que cumplen

$$C_0 := \frac{C_1}{q^{2\ell}} - \frac{C_K}{(q-1)^\ell} > \frac{C_1}{2}, \quad \frac{C_1}{2} < C_\star < C_0 < C_1.$$

Uno puede comprobar que se tienen las relaciones (2.74), (2.75) y además $\rho^2 \leq \rho_1$. Así que, podemos aplicar el Teorema 2.8, y obtener un resultado de controlabilidad para el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y^{(1)} - \Delta y^{(1)} + \nabla p^{(1)} = \sum_{j=1}^m (B_{1,j} \cdot \nabla) y^{(j)} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} y^{(j)} + u \mathbf{e}_1 1_\omega + f^{(1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t y^{(i)} - \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} = \sum_{j=i}^m (B_{i,j} \cdot \nabla) y^{(j)} + \sum_{j=i-1}^m A_{i,j} y^{(j)} + f^{(i)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (2 \leq i \leq m) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (1 \leq i \leq m) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1 \leq i \leq m) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega. \quad (1 \leq i \leq m) \end{cases} \quad (2.77)$$

Más precisamente, existe

$$\mathcal{E}_T \in \mathcal{L} \left(\mathbb{V} \times L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m), L_{\rho_0}^2(0, T; L^2(\omega)) \right)$$

tal que para toda $y_0 \in \mathbb{V}$ y para toda $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(m)}) \in L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)$, la solución $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ de (2.77) con el control $u = \mathcal{E}_T(y_0, f)$ satisface

$$\frac{y}{\rho} \in L^2(0, T; [H^2(\Omega)^N]^m) \cap C^0([0, T]; [H^1(\Omega)^N]^m) \cap H^1(0, T; \mathbb{H}). \quad (2.78)$$

Más aún, se tiene la siguiente estimación

$$\left\| \frac{y}{\rho} \right\|_{L^2(0, T; [H^2(\Omega)^N]^m) \cap C^0([0, T]; [H^1(\Omega)^N]^m) \cap H^1(0, T; \mathbb{H})} \leq C \left(\|y_0\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)} \right). \quad (2.79)$$

Ahora estamos en posición de probar el Teorema 2.2. Para esto usaremos el Teorema de Punto Fijo de Banach.

Demostración del Teorema 2.2. Notemos que $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ es solución de (2.3) si es solución de (2.77) con

$$f = \left(- \left(y^{(1)} \cdot \nabla \right) y^{(1)}, \dots, - \left(y^{(m)} \cdot \nabla \right) y^{(m)} \right).$$

Entonces, consideremos el mapeo

$$\mathcal{N}_T : f \in B_R \mapsto \left(- \left(y^{(1)} \cdot \nabla \right) y^{(1)}, \dots, - \left(y^{(m)} \cdot \nabla \right) y^{(m)} \right),$$

con

$$B_R := \left\{ f \in L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m) : \left\| \frac{f}{\rho_1} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)} \leq R \right\}$$

donde $R > 0$ es tal que

$$\|y_0\|_{\mathbb{V}} \leq R.$$

La idea es probar que para R suficientemente pequeño, $\mathcal{N}_T(B_R) \subset B_R$ y por lo tanto $(\mathcal{N}_T)|_{B_R}$ es una contracción estricta. Del teorema de punto fijo de Banach obtendremos que el mapeo $\mathcal{N}_T$ tiene un punto fijo. Así, la solución y del sistema (2.77) también es solución del sistema (2.3), y de la relación (2.79) concluiremos que $y(T, \cdot) = 0$. Por lo que solo queda probar que efectivamente, $\mathcal{N}_T(B_R) \subset B_R$ y que $(\mathcal{N}_T)|_{B_R}$ es una contracción. Para esto, usando que $\rho^2 \leq \rho_1$, inclusiones de Sobolev y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{v \cdot \nabla w}{\rho_1} \right|^2 dx dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left| \left(\frac{v}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{w}{\rho} \right) \right|^2 dx dt \leq C \left\| \frac{v}{\rho} \right\|_{L^\infty(0, T; L^6(\Omega)^N)}^2 \left\| \frac{\nabla w}{\rho} \right\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega)^N)}^2 \\ &\leq C \left\| \frac{v}{\rho} \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^N)}^2 \left\| \frac{w}{\rho} \right\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^N)}^2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Usando esta relación y la desigualdad (2.79), tenemos que

$$\left\| \frac{\mathcal{N}_T(f)}{\rho_1} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)} \leq C \left(\|y_0\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)} \right)^2 \leq 4CR^2 \leq R,$$

para R suficientemente pequeño. Así, para tal R se tiene que $\mathcal{N}_T(B_R) \subset B_R$.

Ahora, consideremos $\tilde{f}, \hat{f} \in B_R$ y sea $f = \tilde{f} - \hat{f}$. Consideremos $\tilde{y}$ (respectivamente $\hat{y}$) la solución de (2.77) asociado al control $\tilde{u} = \mathcal{E}_T(y_0, \tilde{f})$ (respectivamente $\hat{u} = \mathcal{E}_T(y_0, \hat{f})$). Entonces, $y = \tilde{y} - \hat{y}$ es solución de (2.77) asociado al control $u := \mathcal{E}_T(0, f)$ y por lo tanto

$$\left\| \frac{y}{\rho} \right\|_{L^2(0, T; [H^2(\Omega)^N]^m) \cap C^0([0, T]; [H^1(\Omega)^N]^m) \cap H^1(0, T; \mathbb{H})} \leq C \|f\|_{L_{\rho_1}^2(0, T; [L^2(\Omega)^N]^m)}.$$

Usando lo anterior y la desigualdad (2.80), obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathcal{N}_T(\tilde{f})}{\rho_1} - \frac{\mathcal{N}_T(\widehat{f})}{\rho_1} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)^N]^m)} &\leq \left\| \left(\frac{\tilde{y}}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{y}{\rho} \right) \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)^N]^m)} + \left\| \left(\frac{y}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\widehat{y}}{\rho} \right) \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)^N]^m)} \\ &\leq CR \|f\|_{L^2_{\rho_1}(0,T;[L^2(\Omega)^N]^m)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para R suficientemente pequeño, $(\mathcal{N}_T)_{|B_R}$ es una contracción estricta y concluimos la prueba del Teorema 2.2. $\square$

Capítulo 3

Una condición de Kalman para el control de sistemas de Navier-Stokes

En este capítulo presentaremos una condición necesaria y suficiente con la cual es posible controlar un sistema de n sistemas de Navier-Stokes con m controles. Estos resultados fueron tomados de nuestro artículo [29].

3.1. Introducción

Sea Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ (con $N = 2, 3$) con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sean $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío, al cual llamaremos *dominio de control*. Consideremos los siguientes n sistemas con m controles

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} + (y^{(i)} \cdot \nabla) y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} u^{(j)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega. & (1 \leq i \leq n) \end{cases} \quad (3.1)$$

En el sistema anterior, $y^{(i)} = y^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}^N$ describe la velocidad del fluido, $p^{(i)} = p^{(i)}(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión, $\nu_i > 0$ la viscosidad. Las ecuaciones están acopladas a través de la matriz constante $(q_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Los controles están denotados por $u^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$ y actúan a través de la matriz constante $(r_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}}$. Además, pedimos que los controles tengan una componente igual a cero, por ejemplo

$$u^{(j)} \cdot \mathbf{e}_N = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

donde $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$.

Nuestro objetivo es probar que el conocido criterio de Kalman para la controlabilidad de sistemas en dimensión finita también es válido para sistemas de Stokes. En [1], se probó que dicho criterio de Kalman puede ser extendido para el caso de sistemas de ecuaciones de calor. De este modo, siguiendo la estrategia usada en [1], probaremos que tal criterio se puede aplicar a sistemas de Navier-Stokes y además considerando controles con una componente igual a cero.

Primero, consideremos una linealización del sistema (3.1):

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} u^{(j)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega. & (1 \leq i \leq n) \end{cases} \quad (3.2)$$

Para simplificar la notación, vamos a escribir el sistema de manera más abstracta: recordemos los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ definidos en (1.4) y (1.5), respectivamente, y consideremos el operador de Stokes

$$\mathbb{A} := -\mathbb{P}\Delta, \quad \mathcal{D}(\mathbb{A}) := \left\{ y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^N : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega \right\}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbb{P} : L^2(\Omega)^N \rightarrow \mathcal{H}$ es el proyector de Leray. El operador de control $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ de nuestro sistema se puede definir como

$$\mathbb{B}u := \mathbb{P} \left(1_\omega \sum_{i=1}^{N-1} u_i \mathbf{e}_{(i)} \right), \quad \text{para } u = (u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{U} := L^2(\omega)^{N-1}.$$

También denotamos por $D, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ respectivamente las matrices $\operatorname{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$, $(q_{i,j})_{i,j}$ y $(r_{i,j})_{i,j}$. Finalmente, consideramos el operador del sistema acoplado (3.1)

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) := \mathcal{D}(\mathbb{A})^n, \quad \mathbb{L} := D\mathbb{A} + Q, \quad (3.4)$$

esto es, para cada $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})^n$, tenemos

$$\mathbb{L}y := \left(\nu_i \mathbb{A} y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

El operador de control del sistema acoplado es $R\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}^n)$: esto es, para $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \in \mathcal{U}^m$

$$R\mathbb{B}u = \left(\sum_{j=1}^m r_{i,j} \mathbb{B}u^{(j)} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

Entonces, podemos reescribir (3.2) como

$$\begin{cases} y' + \mathbb{L}y = R\mathbb{B}u & \text{en } (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $y_0 := (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)})$. Ahora, para probar la controlabilidad a cero del sistema (3.5), introducimos el operador de Kalman como en [1]:

$$\mathbb{K} : \mathcal{H}^m \times \mathcal{D}(\mathbb{A})^m \times \dots \times \mathcal{D}(\mathbb{A}^{n-1})^m \rightarrow \mathcal{H}^n, \quad (w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \mapsto \sum_{i=1}^n \mathbb{L}^{i-1} R w^{(i)}. \quad (3.6)$$

En la definición anterior, notemos que $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_m^{(i)}) \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{i-1})^m$, así

$$R w^{(i)} = \left(\sum_{j=1}^m r_{k,j} w_j^{(i)} \right)_{k \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{i-1})^n = \mathcal{D}(\mathbb{L}^{i-1})$$

y por lo tanto, el operador de Kalman está bien definido. El adjunto del operador $\mathbb{K}$ está dado por

$$\mathcal{D}(\mathbb{K}^*) = [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{n-1})]^n, \quad \mathbb{K}^* \varphi = [R^* \varphi, R^* \mathbb{L}^* \varphi, \dots, R^* (\mathbb{L}^*)^{n-1} \varphi]. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, nuestro resultado es el siguiente:

Teorema 3.1. Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces

$$\text{Ker } \mathbb{K}^* = \{0\} \quad (3.8)$$

si y solo si el sistema (3.5) es controlable a cero para todo tiempo $T > 0$.

Observación 3.2. Con controlable a cero nos referimos que para todo tiempo $T > 0$ y para toda $y_0 \in \mathcal{H}^n$, existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})^m$ tal que la solución y de (3.5) satisface

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Para probar el resultado anterior, probaremos que (3.8) es equivalente a una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto de (3.2) (o de (3.5)):

$$\begin{cases} \partial_t \varphi^{(i)} - \nu_i \Delta \varphi^{(i)} + \nabla \pi^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{j,i} \varphi^{(j)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \text{div } \varphi^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \varphi^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \varphi^{(i)}(0, \cdot) = \varphi_0^{(i)} & \text{en } \Omega. & (1 \leq i \leq n) \end{cases} \quad (3.9)$$

En forma abstracta, el sistema adjunto se escribe como

$$\begin{cases} \varphi' + \mathbb{L}^* \varphi = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $\varphi_0 := (\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(n)})$. El adjunto del operador de control está dado por $\mathbb{B}^* R^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n, \mathcal{U}^m)$. Más precisamente, si $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}) \in \mathcal{H}^n$ y denotamos por $\varphi_k^{(i)}$, $k = 1, \dots, N$ las componentes de $\varphi^{(i)} \in \mathcal{H}$, entonces

$$\mathbb{B}^* R^* \varphi = \left((\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(1)}, \dots, (\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(m)} \right) \in \mathcal{U}^m, \quad (\mathbb{B}^* R^* \varphi)^{(i)} = \left(\sum_{j=1}^n r_{j,i} \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^{(j)} \mathbf{e}_k \right) \Big|_{\omega} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Siguiendo un argumento de dualidad (ver [31, Teorema 11.2.11, p.357]), el Teorema 3.1 es consecuencia de los siguientes dos resultados:

Lema 3.3. Si el $\text{Ker } \mathbb{K}^* \neq \{0\}$ entonces el sistema (3.9) es no observable: existe $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$ con $\varphi_0 \neq 0$ tal que la solución φ de (3.10) satisface $\varphi(T, \cdot) \neq 0$ y

$$R^* \varphi = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega.$$

Teorema 3.4. Sea $T > 0$ y sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Si se cumple (3.8), entonces existe $C > 0$ y $\ell > 0$ tal que para toda $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$

$$\int_{\Omega} |\varphi(T, \cdot)|^2 dx \leq C e^{C/T^\ell} \iint_{(0,T) \times \omega} \sum_{k=1}^{N-1} |R^* \varphi_k|^2 dx dt. \quad (3.11)$$

En el enunciado de arriba, el lado derecho se puede reescribir como

$$\iint_{(0,T) \times \omega} \sum_{k=1}^{N-1} |R^* \varphi_k|^2 dx dt = \iint_{(0,T) \times \omega} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n r_{j,i} \varphi_k^{(j)} \right|^2 dx dt.$$

Para probar la desigualdad (3.11), necesitaremos probar una desigualdad de Carleman de la forma

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} \rho_{\sharp}^2 |\varphi|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \omega} \rho_{\flat}^2 \sum_{k=1}^{N-1} |R^* \varphi_k|^2 dx dt \quad (3.12)$$

donde $\rho_{\sharp}$ y ρ_b son funciones regulares definidas en $[0, T]$, positivas en $(0, T)$ y valen cero en 0 y T . Más precisamente: para alguna $\kappa \in (0, 1)$ y $\delta_n \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_{\sharp} = e^{-s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^{3/2-1/\ell}, \quad \rho_b = e^{-\kappa s\alpha_b} (s\xi_b)^{\delta_n/2},$$

donde las funciones $\alpha_{\sharp}, \alpha_b, \xi_{\sharp}$, y ξ_b son las definidas en (1.8)-(1.10). De aquí que, la prueba de cómo obtener (3.11) a partir de (3.12) es análoga a la que hicimos en el Lema 2.7.

Observación 3.5. La prueba de este método sigue la misma idea usada en [1] para la ecuación de calor. Se busca reducir el problema al caso donde el sistema (3.9) está en forma de cascada con un término en el lado derecho particular de manera que pueda ser absorbido usando propiedades de los pesos de Carleman. Sin embargo, para el caso de ecuaciones de Stokes, el resultado no se obtiene de manera inmediata de [1]. Específicamente, usando los mismos pesos descritos en el Capítulo 2, una estimación de Carleman para la ecuación de calor tiene la siguiente forma

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |\psi|^2 dx dt \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} |g|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |\psi|^2 dx dt \right) \quad (3.13)$$

para ψ solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_t \psi - \Delta \psi = g & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En particular, si $g = a\psi$ con $a \in \mathbb{R}$, la integral de g en (3.13) se puede absorber por el lado izquierdo. Sin embargo, para el sistema de Stokes (ver [4]) tenemos la siguiente estimación de Carleman

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-5s\alpha_{\sharp}} (s\xi_{\sharp})^4 |\psi|^2 dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-3s\alpha_{\sharp}} |g|^2 dx dt + \sum_{i < N} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha_b - 3s\alpha_{\sharp}} (s\xi_b)^7 |\psi_i|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

para ψ solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_t \psi - \Delta \psi + \nabla p = g & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \psi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En este caso, si $g = a\psi$ con $a \in \mathbb{R}$, la integral de g no se puede absorber por el lado izquierdo. Por esta razón, es necesario considerar un sistema en cascada generalizado y probar una nueva estimación de Carleman para dicho sistema.

Finalmente, usando un argumento de punto fijo similar al que usamos en el Capítulo 2, uno puede probar un resultado de control local para el sistema (3.1) a partir de Teorema 3.4:

Teorema 3.6. *Sea $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío. Si se cumple (3.8), entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $y_0 \in \mathcal{V}^n$ que satisfice*

$$\|y_0\|_{\mathcal{V}^n} \leq \delta,$$

existe un control $u \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})^m$ tal que la solución y de (3.1) satisfice

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

3.2. Resultados preliminares

Recordemos que el operador de Stokes $\mathbb{A}$ (dado en (3.3)) es autoadjunto, positivo y con resolvente compacto. En particular, su espectro está compuesto de eigenvalores $(\gamma_p)_{p \geq 1}$ positivos. Consideremos una base ortonormal de $\mathcal{H}$ compuesta por los eigenvectores $(\phi_p)_{p \geq 1}$ asociados a los eigenvalores $(\gamma_p)_{p \geq 1}$. Entonces, para toda $p \geq 1$, podemos definir la matriz

$$K_p := \left[R \mid (\gamma_p D + Q) R \mid \cdots \mid (\gamma_p D + Q)^{n-1} R \right] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R}) \quad (3.15)$$

y su adjunta

$$K_p^* := \begin{bmatrix} R^* \\ R^* (\gamma_p D + Q^*) \\ \vdots \\ R^* (\gamma_p D + Q^*)^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{nm,n}(\mathbb{R}).$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado probado en [1, Proposición 2.2]:

Proposición 3.7. *Con la notación anterior, tenemos las siguientes equivalencias:*

$$\text{Ker } \mathbb{K}^* = \{0\} \iff \forall p \geq 1, \text{ Ker } K_p^* = \{0\} \iff \forall p \geq 1, \text{ rank } K_p = n.$$

La proposición anterior nos permite probar el Lema 3.3 de la misma forma que en [1]:

Prueba de Lema 3.3. Supongamos que $\text{Ker } \mathbb{K}^* \neq \{0\}$. Entonces, por la Proposición 3.7, existe $p_0 \geq 1$ y $z_0 \in \text{Ker } K_{p_0}^* \subset \mathbb{R}^n$ con $z_0 \neq 0$. Luego, por la condición de Kalman estándar (ver [31, Proposición 1.4.7, p.13]), se tiene que

$$R^* e^{-(\gamma_{p_0} D + Q^*)t} z_0 = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Luego, para $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ y $\phi \in \mathcal{H}$, definimos

$$z\phi := (z^{(1)}\phi, \dots, z^{(n)}\phi) \in \mathcal{H}^n.$$

Uno puede probar que

$$\varphi(t) := (e^{-(\gamma_{p_0} D + Q^*)t} z_0) \phi_{p_0} \quad (t \geq 0)$$

es solución de (3.10) con condición inicial $\varphi_0 = z_0 \phi_{p_0}$ y se tiene que

$$\varphi(T) = (e^{-(\gamma_{p_0} D + Q^*)T} z_0) \phi_{p_0} \neq 0 \quad \text{y} \quad R^* \varphi(t) = (R^* e^{-(\gamma_{p_0} D + Q^*)t} z_0) \phi_{p_0} = 0 \quad (t \geq 0).$$

□

Usando la Proposición 3.7, se pueden considerar los siguientes casos particulares del Teorema 3.1. Estos casos son también discutidos en [1].

Caso 1: todas las viscosidades son iguales. Supongamos que

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \nu_i = \nu > 0.$$

Entonces, a partir de la Proposición 3.7, la relación (3.8) es equivalente a

$$\text{rank } [R \mid QR \mid \cdots \mid Q^{n-1} R] = n, \quad (3.16)$$

esta es la condición de Kalman original para matrices Q y R . En particular, el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} u^{(j)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

es controlable a cero si y solo si el sistema lineal de dimensión finita

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} Y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} U^{(j)} & \text{en } (0, T), \quad (1 \leq i \leq n) \\ Y^{(i)}(0, \cdot) = Y_0^{(i)} \in \mathbb{R} & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

es controlable.

Caso 2: control simultáneo. Supongamos que

$$Q = 0, \quad m = 1, \quad R = (r_i)_{i=1, \dots, n}.$$

Entonces (3.15) se puede escribir como

$$K_p := \begin{bmatrix} r_1 & (\gamma_p \nu_1) r_1 & \cdots & (\gamma_p \nu_1)^{n-1} r_1 \\ r_2 & (\gamma_p \nu_2) r_2 & \cdots & (\gamma_p \nu_2)^{n-1} r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & (\gamma_p \nu_n) r_n & \cdots & (\gamma_p \nu_n)^{n-1} r_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

En particular, usando matrices de Vandermonde, obtenemos que la condición (3.8) es equivalente a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad r_i \neq 0, \quad \nu_i \neq \nu_j \quad \text{si } i \neq j.$$

En particular, tomando $r_i = 1$ para toda i , obtenemos que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} - \nu_i \Delta y^{(i)} + \nabla p^{(i)} = u^{(1)} 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ \operatorname{div} y^{(i)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n) \\ y^{(i)}(0, \cdot) = y_0^{(i)} & \text{en } \Omega, & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

es controlable a cero usando un solo control $u^{(1)}$ (con una componente igual a cero) cuando todas las viscosidades ν_i son distintas (y no cero). En este caso, el sistema anterior se dice ser simultáneamente controlable a cero para todo tiempo $T > 0$.

Caso 3: sistemas en cascada. Supongamos

$$q_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \geq j + 2, \quad q_{i,i-1} \neq 0 \quad (2 \leq i \leq n), \quad R = (\delta_{1,i})_{i=1, \dots, n}$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. Entonces, por inducción obtenemos que K_p es una matriz triangular superior de la forma

$$K_p := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & q_{2,1} & & & \\ \vdots & 0 & q_{3,2}q_{2,1} & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \prod_{i=2}^n q_{i,i-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Por hipótesis, los elementos de la diagonal son distintos de cero. En este caso, el sistema (3.2) es controlable a cero y podemos recuperar una parte de nuestro resultado obtenido en [27].

3.3. Método de Kalman

Como ya mencionamos anteriormente, para probar el Teorema 3.1, vamos a extender el método introducido en [1] para ecuaciones parabólicas de tipo calor acopladas. Consideremos

$$\mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{H}$$

un operador autoadjunto positivo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ un operador de control acotado. Consideramos el problema de control dado por

$$\begin{cases} \partial_t y^{(i)} + \nu_i \mathbb{A} y^{(i)} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} y^{(j)} = \sum_{j=1}^m r_{i,j} \mathbb{B} u^{(j)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}. \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $\nu_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), $Q = (q_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R = (r_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Definiendo el operador $\mathbb{L}$ como en (3.4) con $D = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$, el sistema anterior se puede escribir como en (3.5) y el adjunto como en (3.10). Entonces para probar la controlabilidad de (3.17) usamos el operador de Kalman definido en (3.6). Enunciaremos el resultado de Kalman obtenido en [1, Teorema 2.1]. Recordemos que el adjunto de $\mathbb{K}^*$ está definido en (3.7).

Teorema 3.8. *Supongamos (3.8). Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2n(n-1)})]^n$,*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^n} \leq C \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} \mathbb{K}^* \varphi \right\|_{(\mathcal{H}^m)^n}.$$

El operador de Kalman nos permite reducir el problema a una familia de sistemas en cascada que describiremos a continuación. Sea $\mathcal{S}_n$ el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Entonces, consideramos el siguiente sistema en “cascada”:

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(i,\sigma)} + \nu_{\sigma(i)} \mathbb{A} \psi^{(i,\sigma)} = \psi^{(i+1,\sigma)} & (1 \leq i \leq n-1, \sigma \in \mathcal{S}_n), \\ \partial_t \psi^{(n,\sigma)} + \nu_{\sigma(n)} \mathbb{A} \psi^{(n,\sigma)} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \beta^{p,\tilde{\sigma}} \psi^{(p,\tilde{\sigma})} & (\sigma \in \mathcal{S}_n), \\ \psi^{(i,\sigma)}(0) = \psi_0^{(i,\sigma)} & (1 \leq i \leq n, \sigma \in \mathcal{S}_n), \end{cases} \quad (3.18)$$

donde $\beta^{p,\sigma} \in \mathbb{R}$ para $p \in \{1, \dots, n\}$ y $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Este sistema acopla $n \times n!$ ecuaciones y el estado es

$$\psi^{(i,\sigma)} \quad (1 \leq i \leq n, \sigma \in \mathcal{S}_n).$$

Esta es una generalización del siguiente sistema considerado en [27] y en [13] donde $\mathbb{A}$ es el operador de Stokes o el operador de Laplace:

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(i)} + \nu_i \mathbb{A} \psi^{(i)} = \psi^{(i+1)} & (1 \leq i \leq n-1) \\ \partial_t \psi^{(n)} + \nu_n \mathbb{A} \psi^{(n)} = \sum_{p=1}^n \beta^p \psi^{(p)}. \end{cases}$$

Usando estimaciones con peso para el sistema anterior donde $\mathbb{A}$ es el operador de Laplace, los autores en [1] probaron una condición de Kalman para la ecuación de calor. Para el caso de Stokes, necesitamos la siguiente estimación con peso para el sistema (3.18):

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T \rho_{\sharp}(t) \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} \partial_t^k \psi^{(1,\sigma)}(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_0^T \rho_{\flat}(t) \left\| \mathbb{B}^* \psi^{(1,\sigma)}(t) \right\|_{\mathcal{U}}^2 dt, \quad (3.19)$$

donde $\rho_{\sharp}, \rho_{\flat} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones continuas y $C > 0$ una constante. Dicha estimación puede ser obtenida a partir de estimaciones de Carleman.

Proposición 3.9. *Supongamos (3.8) y que para cualquier $(\beta^p, \sigma)_{p \in \{1, \dots, n\}, \sigma \in \mathcal{S}_n}$ y cualquier solución de (3.18) se tiene la estimación con peso (3.19). Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$, y para cualquier solución φ de (3.10)*

$$\int_0^T \rho_{\sharp}(t) \|\varphi(t)\|_{\mathcal{H}^n}^2 dt \leq C \int_0^T \rho_{\flat}(t) \|\mathbb{B}^* R^* \varphi(t)\|_{\mathcal{U}^m}^2 dt. \quad (3.20)$$

Observación 3.10. Si $\rho_{\sharp}$ está acotado por abajo en algún subintervalo no vacío de $(0, T)$ y si $\rho_{\flat}$ es acotado, entonces (3.20) implica desigualdad de observabilidad

$$\|\varphi(T)\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq k_T^2 \int_0^T \|R^* \mathbb{B}^* \varphi\|_{\mathcal{U}^m}^2 dt. \quad (3.21)$$

Prueba del Proposición 3.9. Del Teorema 3.8 y (3.7), existe $C > 0$ tal que para toda $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2n(n-1)})]^n$,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} R^* (\mathbb{L}^*)^k \varphi \right\|_{\mathcal{H}^m}^2.$$

Supongamos que φ es solución de (3.10) con dato inicial $\varphi_0 \in [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2n(n-1)})]^n$. Entonces para toda $t, \varphi(t) \in [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2n(n-1)})]^n$ y la estimación de arriba se convierte en

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} \partial_t^k R^* \varphi \right\|_{\mathcal{H}^m}^2 = C \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} \partial_t^k (R^* \varphi)^{(i)} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.22)$$

donde

$$(R^* \varphi)^{(i)} = \sum_{j=1}^n r_{j,i} \varphi^{(j)} \quad (1 \leq i \leq m). \quad (3.23)$$

Ahora, probaremos que $(R^* \varphi)^{(i)}$ satisface una ecuación de evolución. Más generalmente, consideremos $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea

$$\psi^{(1)} := \sum_{j=1}^n r_j \varphi^{(j)} \quad (3.24)$$

donde φ es solución (3.10). Escribimos

$$\mathbb{E}_i := \partial_t + \nu_i \mathbb{A}, \quad \mathbb{M} := \text{diag}(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n) + Q^*,$$

de este modo, la primera ecuación en (3.10) se puede reescribir como

$$\mathbb{M}\varphi = 0.$$

Tomando la transpuesta de la matrix de cofactores de $\mathbb{M}$ del sistema anterior, obtenemos que para toda $j = 1, \dots, n$

$$\det(\mathbb{M}) \varphi^{(j)} = 0$$

y en particular, usando (3.24) se tiene

$$\det(\mathbb{M}) \psi^{(1)} = 0. \quad (3.25)$$

Más aún, existe $\alpha_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R}$ (que depende de Q) tal que

$$\det(\mathbb{M}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_i - \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \prod_{k=1}^p \mathbb{E}_{i_k}. \quad (3.26)$$

Para $\sigma \in \mathcal{S}_n$, tomamos

$$\psi^{(p, \sigma)} := \prod_{k=1}^{p-1} \mathbb{E}_{\sigma(k)} \psi^{(1)}. \quad (3.27)$$

En particular, tenemos que para toda $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\psi^{(1, \sigma)} = \psi^{(1)}, \quad \mathbb{E}_{\sigma(p)} \psi^{(p, \sigma)} = \psi^{(p+1, \sigma)} \quad (1 \leq p \leq n-1), \quad (3.28)$$

y usando (3.25) y (3.26)

$$\mathbb{E}_{\sigma(n)} \psi^{(n, \sigma)} = \psi^{(n+1, \sigma)} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_i \psi^{(1)} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \prod_{k=1}^p \mathbb{E}_{i_k} \psi^{(1)}. \quad (3.29)$$

Fijemos $p \in \{0, \dots, n-1\}$. Entonces para cualquier $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, existe una permutación $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$ tal que

$$\tilde{\sigma}(k) = i_k \quad (k = 1, \dots, p).$$

Tomamos $\beta^{p+1, \tilde{\sigma}} := \alpha_{i_1, \dots, i_p}$ la correspondiente permutación y $\beta^{p+1, \tilde{\sigma}} := 0$ para cualquier otra permutación $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$. Entonces

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \prod_{k=1}^p \mathbb{E}_{i_k} \psi^{(1)} = \sum_{p=1}^n \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \beta^{p, \tilde{\sigma}} \psi^{(p, \tilde{\sigma})}.$$

Por lo tanto, combinando la relación anterior con (3.28) y (3.29), obtenemos que para toda $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(\psi^{(p, \sigma)})_p$ satisface el sistema en cascada dado por (3.18). En particular, podemos usar la estimación (3.19) y deducir que para toda $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ la función $\psi^{(1)}$ definida por (3.24) satisface

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T \rho_{\sharp}(t) \left\| \mathbb{A}^{(2n-1)(n-1)} \partial_t^k \psi^{(1)}(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq C \int_0^T \rho_{\flat}(t) \left\| \mathbb{B}^* \psi^{(1)}(t) \right\|_{\mathcal{U}}^2 dt. \quad (3.30)$$

Regresando a (3.22) y usando (3.23), obtenemos (3.20). Para terminar la prueba, usamos la densidad de $[\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2n(n-1)})]^n$ en $\mathcal{H}^n$ para obtener (3.20) para el caso donde $\varphi_0 \in \mathcal{H}^n$. $\square$

3.4. Estimación de Carleman

Para probar la estimación de Carleman, usaremos las mismas funciones pesos de la Subsección 1.2.2 (ver (1.8)-(1.10)). Las pruebas serán muy similares a las realizadas en el capítulo anterior por lo que algunos pasos serán omitidos. Para simplificar las cuentas, haremos la prueba para el caso $N = 2$ (el caso $N = 3$ se hace de manera similar).

Recordemos el sistema adjunto:

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(i,\sigma)} - \nu_{\sigma(i)} \Delta \psi^{(i,\sigma)} + \nabla \pi^{(i,\sigma)} = \psi^{(i+1,\sigma)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n-1, \sigma \in \mathcal{S}_n) \\ \partial_t \psi^{(n,\sigma)} - \nu_{\sigma(n)} \Delta \psi^{(n,\sigma)} + \nabla \pi^{(n,\sigma)} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \beta^{p,\tilde{\sigma}} \psi^{(p,\tilde{\sigma})} & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (\sigma \in \mathcal{S}_n) \\ \operatorname{div} \psi^{(i,\sigma)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, & (1 \leq i \leq n, \sigma \in \mathcal{S}_n) \\ \psi^{(i,\sigma)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, & (1 \leq i \leq n, \sigma \in \mathcal{S}_n) \\ \psi^{(i,\sigma)}(0, \cdot) = \psi_0^{(i,\sigma)} & \text{en } \Omega. & (1 \leq i \leq n, \sigma \in \mathcal{S}_n) \end{cases} \quad (3.31)$$

La idea es estimar la misma cantidad que consideramos en (2.31) asociada a la solución de (3.31):

$$I(s, \psi) := \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} |\nabla^3 \Delta \psi_1|^2 + s\xi |\nabla^2 \Delta \psi_1|^2 + (s\xi)^3 |\nabla \Delta \psi_1|^2 + (s\xi)^5 |\Delta \psi_1|^2 \right) dx dt \\ + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^5 |\psi|^2 dx dt. \quad (3.32)$$

Nuestra primera estimación de Carleman se enuncia a continuación:

Teorema 3.11. *Existe $C > 0$ que depende de la geometría y $\delta_n \in \mathbb{N}^*$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\psi_0^{(i,\sigma)} \in \mathcal{H}$, ($i \in \{1, \dots, n\}, \sigma \in \mathcal{S}_n$), la solución $(\psi^{(i,\sigma)})_{i,\sigma}$ del sistema (3.31) satisface*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\sigma)}) \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{\delta_n} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.33)$$

A partir de este resultado, podemos obtener la siguiente estimación con peso:

Corolario 3.12. *Supongamos $\kappa \in (0, 1)$, $J, K \in \mathbb{N}$. Entonces existe $C > 0$ que depende de la geometría y $\delta_n \in \mathbb{N}^*$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y para toda $\psi_0^{(i,\sigma)} \in \mathcal{H}$, ($i \in \{1, \dots, n\}, \sigma \in \mathcal{S}_n$), la solución $(\psi^{(i,\sigma)})_{i,\sigma}$ del sistema (3.31) satisface*

$$\sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \left| \partial_t^j \mathbb{A}^k \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt \\ \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2\kappa s\alpha_\flat} (s\xi_\flat)^{\delta_n} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.34)$$

3.4.1. Prueba del Teorema 3.11

La prueba es similar a la hecha en el Capítulo 2. Primero probaremos lo siguiente:

Proposición 3.13. *Sea $\widehat{\omega} \subset \Omega$ un abierto no vacío tal que $\omega_0 \Subset \widehat{\omega} \Subset \omega$. Entonces, existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C$ y para toda $(\psi^{(i,\sigma)})_{i,\sigma}$ que satisface (3.31), se tiene*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\sigma)}) \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.35)$$

Demostración. Siguiendo las ideas de [6]. Notemos que tomando la divergencia de las primeras dos ecuaciones en (3.31), obtenemos que

$$\Delta \pi^{(i,\sigma)} = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega. \quad (1 \leq i \leq n)$$

Considerando esto, aplicamos el operador $\nabla^2 \Delta$ a primera componente de las primeras dos ecuaciones en (3.31) para obtener

$$\begin{cases} \partial_t \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} - \nu_{\sigma(i)} \Delta \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} = \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i+1,\sigma)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ \partial_t \nabla^2 \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} - \nu_{\sigma(n)} \Delta \nabla^2 \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \beta^{p,\tilde{\sigma}} \nabla^2 \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (3.36)$$

Ahora, usando el Lema 1.10, existe una constante $C > 0$ tal que para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} \left| \nabla^3 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 + s\xi \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} \right|^2 dx dt \right), \quad (3.37) \end{aligned}$$

para toda $\lambda \geq C$, $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. La siguiente parte se dividirá en 3 pasos:

- Paso 1 consistirá en agregar los términos que hacen falta del lado izquierdo para completar $I(s, \psi^{(i,\sigma)})$.
- Paso 2 consistirá en remover el término de frontera.
- Paso 3 consistirá en quitar los términos locales que no aparecen en (3.35).

Paso 1. La estrategia es la misma que usamos en el Capítulo 2. Aplicamos el Lema 1.9 para agregar una integral en términos de $\nabla \Delta \psi_1^{(i,\sigma)}$ y de $\Delta \psi_1^{(i,\sigma)}$. Luego, usando la divergencia nula y la desigualdad de Poincaré, podemos recuperar a $\psi^{(i,\sigma)}$ (con ambas componentes) y obtenemos

$$\begin{aligned} I(s, \psi^{(i,\sigma)}) & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left(s\xi \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ & \quad + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 d\gamma dt \\ & \quad \left. + \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-2} \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} \right|^2 dx dt \right). \quad (3.38) \end{aligned}$$

Paso 2. Notemos que las funciones

$$\theta_0 := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{\frac{5}{2}}, \quad \theta_1(t) := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{\ell}}, \quad \theta_2(t) := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{\ell}}, \quad \theta_3(t) := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{\ell}}$$

satisfacen (2.19). Así, usando el Lema 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n \left(\left\| \theta_1 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \left\| \theta_1 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)} \right. \\
& \quad + \left\| \theta_2 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \left\| \theta_2 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \left\| \theta_2 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega)^2)} \\
& \quad \left. + \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^3(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^2(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^1(0,T;H^4(\Omega)^2)} + \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega)^2)} \right) \\
& \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n \left\| \theta_0 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Ahora, para estimar el término de frontera, usamos una desigualdad de traza y un argumento de interpolación, así obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 d\gamma dt \right| \\
& \leq C \int_0^T e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{-1} \left(\left\| \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^4(\Omega)^2} \left\| \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^6(\Omega)^2} + \left\| \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^4(\Omega)^2}^{1/2} \left\| \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^6(\Omega)^2}^{3/2} \right) dt \\
& \leq C \int_0^T \left((s\xi_\#)^{-1+\frac{5}{\ell}} \left\| \theta_2 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^4(\Omega)^2} \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^6(\Omega)^2} + (s\xi_\#)^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}} \left\| \theta_2 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^4(\Omega)^2}^{1/2} \left\| \theta_3 \psi^{(i,\sigma)} \right\|_{H^6(\Omega)^2}^{3/2} \right) dt. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Usando que $\ell \geq 11$ y (1.14), tenemos que para toda $C > 0$ y $s \geq CT^{2\ell}$,

$$(s\xi_\#)^{-1+\frac{5}{\ell}} \leq (C4^\ell)^{-1+\frac{5}{\ell}}, \quad (s\xi_\#)^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}} \leq (C4^\ell)^{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2\ell}}.$$

Tomando $C > 0$ suficientemente grande y considerando (3.38)-(3.40), obtenemos que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\sigma)}) \\
& \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left(s\xi \left| \nabla^2 \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Paso 3. Este paso es completamente igual al que hicimos antes (ver Paso 3 de la Sección 2.2) por lo que omitiremos la prueba. Esto concluye la prueba de la Proposición 3.13. $\square$

Ahora estamos en posición de probar el Teorema 3.11.

Prueba del Teorema 3.11. Empezamos con (3.35), nuestro objetivo es remover los términos del lado derecho que tengan que ver con $\psi_1^{(i,\sigma)}$ con $i \geq 2$. Este paso también es similar a lo que hicimos en el capítulo anterior. Primero, consideramos una sucesión de subconjuntos abiertos $\mathcal{O}_i$, ($0 \leq i \leq n$) tales que

$$\widehat{\omega} =: \mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n-1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}_i \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}_0 \subseteq \omega$$

y funciones tales que

$$\zeta_i \in C_c^2(\mathcal{O}_{i-1}) \quad \text{tales que} \quad \zeta_i \equiv 1 \text{ en } \mathcal{O}_i, \quad \zeta_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Aplicando el operador Δ a la primera componente de cada ecuación en (3.31), obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t \Delta \psi_1^{(i,\sigma)} - \nu_{\sigma(i)} \Delta^2 \psi_1^{(i,\sigma)} = \Delta \psi_1^{(i+1,\sigma)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (1 \leq i \leq n-1, \sigma \in \mathcal{S}_n) \\ \partial_t \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} - \nu_{\sigma(n)} \Delta^2 \psi_1^{(n,\sigma)} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \beta^{p,\tilde{\sigma}} \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} & \text{en } (0, T) \times \Omega. \quad (\sigma \in \mathcal{S}_n) \end{cases} \quad (3.42)$$

Usando lo anterior, obtenemos que para toda $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \tilde{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt \\ &= \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left(\Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right) \left(\partial_t \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} - \nu_{\sigma(n-1)} \Delta^2 \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vamos a estimar la última integral en la relación anterior. Usando integración por partes y (3.42) tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left(\Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right) \left(\partial_t \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right) dx dt \\ = - \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n \partial_t \left(e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \\ - \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left(\nu_{\sigma(n)} \Delta^2 \psi_1^{(n,\sigma)} + \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{p=1}^n \beta^{p,\tilde{\sigma}} \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} \right) \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando nuevamente integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta^2 \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt &= \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta^2 \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \\ &+ \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \Delta \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \\ &+ 2 \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \nabla \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \cdot \nabla \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ahora, para estimar el lado derecho de (3.44) y (3.45), usamos (1.11) y (1.12), tenemos que para $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$:

$$\left| \partial_t \left(e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \right| \leq C e^{-2s\alpha} (s\xi)^{6+1/\ell}, \quad \left| \Delta \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \right| \leq C e^{-2s\alpha} (s\xi)^7, \quad \left| \nabla \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \right| \leq C e^{-2s\alpha} (s\xi)^6.$$

De aquí que, usando la desigualdad de Young, para $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n \partial_t \left(e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \right| \\ \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7+2/\ell} \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \Delta \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \right| \\ \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \nabla \left(\zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \right) \cdot \nabla \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta^2 \psi_1^{(n,\sigma)} \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s\xi \left| \Delta^2 \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt \quad (3.49)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} \zeta_n e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} \left(\Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right) dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(p,\tilde{\sigma})} \right|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Juntando (3.43)-(3.45) con (3.46)-(3.50) tenemos que existe $C > 0$ tal que para $s \geq C$ y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \iint_{(0,T) \times \widehat{\omega}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(n,\sigma)} \right|^2 dx dt \leq \varepsilon \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\tilde{\sigma})}) \\
& \quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{n-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^9 \left| \Delta \psi_1^{(n-1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Con una prueba similar, se puede probar por inducción que para toda $k \in \{2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
& \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_k} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n-k+2}+1} \left| \Delta \psi_1^{(k,\sigma)} \right|^2 dx dt \leq \varepsilon \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\tilde{\sigma})}) \\
& \quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{k-1}} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n-k+3}+1} \left| \Delta \psi_1^{(k-1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Combinando esto con (3.35), obtenemos

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n I(s, \psi^{(i,\sigma)}) \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \left| \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \quad (3.53)$$

Para terminar esta prueba, estimamos la integral local de $\Delta \psi^{(1,\sigma)}$ en términos de solo $\psi^{(1,\sigma)}$. Usando integración por partes:

$$\begin{aligned}
& \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \left| \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt \leq \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_0} \zeta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \left| \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt \\
& = \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_0} \Delta \left(\zeta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \right) \left(\Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right) \psi_1^{(1,\sigma)} dx dt \\
& + \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_0} 2\nabla \left(\zeta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \right) \cdot \left(\nabla \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right) \psi_1^{(1,\sigma)} dx dt \\
& \quad + \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_0} \zeta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \left(\Delta^2 \psi_1^{(1,\sigma)} \right) \psi_1^{(1,\sigma)} dx dt.
\end{aligned}$$

Considerando (1.12) y usando la desigualdad de Young tenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+1}+1} \left| \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^5 \left| \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla \Delta \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 + s\xi \left| \Delta^2 \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{2^{n+2}+1} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Combinando lo anterior con (3.53), obtenemos (3.33) con $\delta_n = 2^{n+2} + 1$. Esto concluye la prueba del Teorema 3.11. $\square$

3.4.2. Prueba del Corolario 3.12

Ahora podemos probar el Corolario 3.12 con el resultado obtenido en el Teorema 3.11.

Prueba del Corolario 3.12. Comenzamos juntando (3.39) (con $\theta_1(t) = e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3/2-1/\ell}$) y (3.33):

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \left(\left| \partial_t \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \mathbb{A} \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\alpha_b} (s\xi_b)^{\delta_n} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Luego, escribiendo el sistema (3.31) como (3.18) (usando el operador (3.3)), notemos que $(\partial_t \psi^{(i,\sigma)})_{i,\sigma}$ y $(\mathbb{A} \psi^{(i,\sigma)})_{i,\sigma}$ satisfacen (3.31) (con distintas condiciones iniciales). De aquí que, de la relación correspondiente (3.54) obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \left(\left| \partial_t^2 \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \partial_t \mathbb{A} \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \mathbb{A}^2 \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2s\hat{\alpha}} (\hat{s}\hat{\xi})^{\delta_n} \left(\left| \mathbb{A} \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \partial_t \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ahora, para $\kappa \in (0, 1)$ existe λ_0, s_0 tal que para toda $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0$ tenemos

$$e^{-2s\alpha_b} (s\xi_b)^{\delta_n} \leq C e^{-2\kappa s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \quad (3.56)$$

y por lo tanto, de las estimaciones de arriba se sigue que

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \left(\left| \partial_t^2 \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \partial_t \mathbb{A} \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 + \left| \mathbb{A}^2 \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2\kappa s\alpha_b} (\kappa s\xi_b)^{\delta_n} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Por inducción, obtenemos que para toda $J \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{j=0}^J \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{3-2/\ell} \left| \partial_t^j \mathbb{A}^{J-j} \psi^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2\kappa^{J-1} s\alpha_b} (s\xi_b)^{\delta_n} \left| \psi_1^{(1,\sigma)} \right|^2 dx dt.$$

$\square$

Capítulo 4

Control jerárquico para un sistema de Boussinesq

En este capítulo presentaremos un resultado de control jerárquico. Para esto consideraremos un sistema de Boussinesq en dimensión 2 con dos controles (actuando en la ecuación de calor) donde cada control tendrá su propio objetivo. Los resultados presentados fueron tomados de nuestro artículo [28].

4.1. Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con frontera suave. Sea $T > 0$ y sean ω y $\mathcal{O}$ dos subconjuntos de Ω , abiertos no vacíos con

$$\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Consideremos el siguiente sistema de Boussinesq con dos controles f y f^* :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y + (y \cdot \nabla) y = \theta \mathbf{e}_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + y \cdot \nabla \theta = f 1_\omega + f^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, \quad \theta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

En el sistema anterior, $y = y(t, x) \in \mathbb{R}^2$ describe la velocidad del fluido, $\pi_y = \pi_y(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión, $\theta = \theta(t, x) \in \mathbb{R}$ la temperatura y $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Las funciones f y f^* son dos controles que tienen dos objetivos distintos:

1. el objetivo de f^* es que la solución (y, θ) se mantenga cerca de un estado $(y^*, \theta^*) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ dado;
2. el objetivo de f es llevar la solución a cero en un tiempo $T > 0$, es decir, $(y, \theta)(T, \cdot) = 0$ en Ω .

El primer objetivo consiste en resolver un problema de control óptimo, es decir, buscamos un control f^* que minimice un funcional que involucra la “distancia” entre (y, θ) y un estado deseado (y^*, θ^*) . El segundo objetivo es un problema clásico de control a cero.

A continuación, detallaremos la formulación del problema. Primero, recordemos la definición de ciertos espacios:

$$\mathcal{H} = \left\{ y \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega, \quad y \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\},$$

$$\mathcal{V} = \left\{ y \in [H_0^1(\Omega)]^2 : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega \right\}.$$

Para el primer objetivo, hacemos una formulación de control óptimo para f^* : fijamos

$$f \in L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad y^0 \in \mathcal{V}, \quad \theta^0 \in H_0^1(\Omega). \quad (4.2)$$

Así, para cada $f^* \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$, uno puede probar que el sistema (4.1) admite una única solución $(y(f^*), \theta(f^*))$, que depende también de los datos f, y^0 y θ^0 , y entonces podemos considerar el siguiente funcional con peso:

$$J(f^*) := \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}^*} \left[|y(f^*) - y^*|^2 + |\theta(f^*) - \theta^*|^2 \right] dx dt + \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \frac{|f^*|^2}{\mu} dx dt, \quad (4.3)$$

donde $\mathcal{O}^*$ es un abierto no vacío que representa el dominio de observación del control f^* , μ es una función que satisface

$$\mu \in C^0([0, T]; \mathbb{R}_+), \quad \mu(0) = \mu(T) = 0, \quad \mu > 0 \text{ en } (0, T). \quad (4.4)$$

y que será descrita con mayor detalle más adelante (ver (4.7) y (4.12)). Notemos que el funcional (4.3) “mide la distancia” que hay entre la solución $(y(f^*), \theta(f^*))$ del sistema (4.1) y el estado (y^*, θ^*) , por lo tanto, el objetivo de f^* es minimizar $J(f^*)$, esto es, se busca el

$$\inf_{f^* \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))} J(f^*). \quad (4.5)$$

En relación al problema anterior, se tiene el siguiente resultado:

Lema 4.1. *Supongamos (4.2) y que $(y^*, \theta^*) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Existe una constante $C > 0$ tal que si*

$$\|\mu\|_{L^\infty(0, T)} \leq C,$$

entonces el problema de control óptimo (4.5) admite una única solución dada por

$$f^* := -\mu\sigma,$$

donde (y, θ, u, σ) es la solución al sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y + (y \cdot \nabla) y = \theta e_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + y \cdot \nabla \theta = f 1_\omega + f^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u + (\nabla y)^\top u - (y \cdot \nabla) u + \sigma \nabla \theta = (y - y^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma - y \cdot \nabla \sigma = u_2 + (\theta - \theta^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u = 0, \quad \theta = \sigma = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0, \quad u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

En el sistema anterior, $\cdot^\top$ denota la transpuesta de una matriz. La prueba del Lema 4.1 es estándar así que solamente daremos un pequeño esbozo de ella en la Subsección 4.2.2.

El resultado principal de este capítulo es la controlabilidad nula parcial del sistema acoplado (4.6):

Teorema 4.2. *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces existen $C > 0$ y $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T])$ tales que*

$$\rho_1(0) = \rho_1(T) = \rho_2(T) = 0, \quad \rho_1 > 0 \text{ en } (0, T), \quad \rho_2 > 0 \text{ en } [0, T]$$

con la siguiente propiedad: si

$$\frac{\mu}{\rho_1} \in L^\infty(0, T), \quad \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (y^0, \theta^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega), \quad (4.7)$$

con

$$\left\| \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_2} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C,$$

entonces existe un control $f \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ y una solución

$$(y, \theta, u, \sigma) \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^6) \cap C^0([0, T]; H^1(\Omega)^6) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^6), \quad (\pi_y, \pi_u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$$

de (4.6) que satisface

$$y(T, \cdot) = 0, \quad \theta(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Para probar el resultado anterior, seguiremos la misma estrategia que hemos usado en capítulos anteriores: consideremos el sistema (4.6) linealizado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = \theta \mathbf{e}_2 + h^{(1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \partial_t \theta - \Delta \theta = f 1_\omega - \mu \sigma 1_{\mathcal{O}} + h^{(2)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u = y 1_{\mathcal{O}^*} + h^{(3)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma = u_2 + \theta 1_{\mathcal{O}^*} + h^{(4)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u = 0, \quad \theta = \sigma = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0, \quad u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ y $h^{(4)}$ son términos fuentes. Probaremos la controlabilidad nula parcial del sistema linealizado. Posteriormente, probaremos el resultado para el caso no lineal usando un argumento de punto fijo donde reemplazaremos $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ y $h^{(4)}$ por los términos no lineales correspondientes

$$h^{(1)} = -(y \cdot \nabla) y, \quad h^{(2)} = -y \cdot \nabla \theta, \quad (4.9)$$

$$h^{(3)} = -(\nabla y)^\top u + (y \cdot \nabla) u - \sigma \nabla \theta - y^* 1_{\mathcal{O}^*}, \quad h^{(4)} = y \cdot \nabla \sigma - \theta^* 1_{\mathcal{O}^*}. \quad (4.10)$$

Ahora, para probar la controlabilidad nula del sistema (4.8) usaremos un argumento de dualidad, esto implica que probaremos una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto

$$\begin{cases} -\partial_t v - \Delta v + \nabla \pi_v = w 1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = v_2 + \psi 1_{\mathcal{O}^*} + g^{(2)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t w - \Delta w + \nabla \pi_w = \psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \psi - \Delta \psi = -\mu \varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ v = w = 0, \quad \varphi = \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(T, \cdot) = v^0, \quad \varphi(T, \cdot) = \varphi^0, \quad w(0, \cdot) = 0, \quad \psi(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

Comenzaremos probando que este sistema lineal está bien definido siempre que $\|\mu\|_{L^\infty(0, T)}$ sea suficientemente pequeño. El segundo resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema 4.3. *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces existe $\rho \in C^0([0, T])$ tal que*

$$\rho(0) = \rho(T) = 0, \quad \rho > 0 \quad \text{en } (0, T)$$

con la siguiente propiedad: para toda μ que satisface

$$\frac{\mu}{\rho^{11}} \in L^\infty(0, T), \quad (4.12)$$

existe $C > 0$ tal que para toda solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) se tiene

$$\|\rho^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^6)}^2 \leq C \left(\left\| \rho^{12} \left(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)} \right) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^6)}^2 + \iint_{(0, T) \times \omega} \rho^{26} |\varphi|^2 dx dt \right). \quad (4.13)$$

4.2. Resultados preliminares

En esta sección presentaremos las herramientas necesarias para probar los resultados antes mencionados. Primero presentaremos un resultado de regularidad similar al mencionado en el Lema 2.4: introducimos el operador de Laplace y el operador de Stokes:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \mathbf{A} := -\Delta : \mathcal{D}(\mathbf{A}) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (4.14)$$

y

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) := \left\{ y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \operatorname{div} y = 0 \text{ en } \Omega \right\}, \quad \mathbb{A} := -\mathbb{P}\Delta : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad (4.15)$$

donde $\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow \mathcal{H}$ es el proyector de Leray. Es bien sabido que ambos operadores son autoadjuntos y positivos, y como $\partial\Omega$ es regular, por la regularidad elíptica se tiene que para $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}^k) \subset H^{2k}(\Omega), \quad \mathcal{D}(\mathbb{A}^k) \subset [H^{2k}(\Omega)]^2. \quad (4.16)$$

Para $T > 0$, definimos

$$\mathbf{X}_k := \bigcap_{j=0}^k H^j(0, T; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{k-j})), \quad \mathbb{X}_k := \bigcap_{j=0}^k H^j(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^{k-j})).$$

En particular,

$$\mathbf{X}_0 = L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{X}_1 = L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbf{A})) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbb{X}_1 = L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A})) \cap H^1(0, T; \mathbb{H}). \quad (4.17)$$

Supongamos que ψ y w son las soluciones fuertes de los sistemas

$$\begin{cases} \psi' + \mathbf{A}\psi = \kappa\psi + \kappa\mathbf{F} & \text{en } (0, T) \\ \psi(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w' + \mathbb{A}w = \kappa w + \kappa\mathbb{F} & \text{en } (0, T) \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

donde $\kappa \in C^\infty((0, T))$. Supongamos $j_0 \geq 1$ y que para $j \in \{0, \dots, j_0\}$,

$$\tau_j \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}_+), \quad \tau_j(0) = 0, \quad (4.19)$$

$$\left| \frac{d^k \tau_j}{dt^k} \right| \leq C \tau_{j-k} \quad (k \in \{0, \dots, j\}), \quad \left| \frac{d^{k-1} (\kappa \tau_j)}{dt^{k-1}} \right| \leq C \tau_{j-k} \quad (k \in \{1, \dots, j\}). \quad (4.20)$$

Siguiendo la prueba del Lema 2.4, tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.4. *Supongamos que ψ y w son las soluciones fuertes de los sistemas (4.18), que $j_0 \geq 1$ y que κ, τ_j , $j \in \{0, \dots, j_0\}$ satisfacen las hipótesis anteriores. Si $\mathbb{F} \in \mathbb{X}_{j_0-1}$, entonces para toda $j \in \{1, \dots, j_0\}$ se tiene que*

$$\tau_j w \in \mathbb{X}_j, \quad \tau_j \partial_t^k w \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^{j-k})) \quad (k \in \{1, \dots, j\}),$$

y la estimación

$$\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=0}^j \|\tau_j \partial_t^k w\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbb{A}^{j-k}))} \leq C \left(\|\tau_0 w\|_{\mathbb{X}_0} + \|\mathbb{F}\|_{\mathbb{X}_{j_0-1}} \right).$$

De manera similar, si $\mathbf{F} \in \mathbf{X}_{j_0-1}$, entonces para toda $j \in \{1, \dots, j_0\}$ se tiene que

$$\tau_j \psi \in \mathbf{X}_j, \quad \tau_j \partial_t^k \psi \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{j-k})) \quad (k \in \{1, \dots, j\}),$$

y la estimación

$$\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=0}^j \|\tau_j \partial_t^k \psi\|_{L^2(0, T; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{j-k}))} \leq C \left(\|\tau_0 \psi\|_{\mathbf{X}_0} + \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}_{j_0-1}} \right).$$

4.2.1. Problema bien planteado

En esta subsección probaremos la existencia y unicidad de las soluciones fuertes para el sistema adjunto (4.11). Para simplificar la notación, escribimos

$$h = \left(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(4)} \right) \quad \text{y} \quad g = \left(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)} \right) ..$$

Proposición 4.5. *Sea $T > 0$. Así, existe $C > 0$ tal que si*

$$\|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \leq C,$$

entonces el sistema (4.11) está bien definido: para toda $g \in [\mathbf{X}_0]^6$, $(v^0, \varphi^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega)$, existe una única solución fuerte de (4.11) con

$$\|(v, \varphi, w, \psi)\|_{\mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1 \times \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1} \leq C \left(\|g\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(v^0, \varphi^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \right).$$

Demostración. Usaremos un argumento de punto fijo: para toda $\tilde{\varphi} \in \mathbf{X}_0$, podemos resolver el sistema

$$\begin{cases} -\partial_t v - \Delta v + \nabla \pi_v = w 1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = v_2 + \psi 1_{\mathcal{O}^*} + g^{(2)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t w - \Delta w + \nabla \pi_w = \psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \psi - \Delta \psi = -\mu \tilde{\varphi} 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ v = w = 0, \quad \varphi = \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(T, \cdot) = v^0, \quad \varphi(T, \cdot) = \varphi^0, \quad w(0, \cdot) = 0, \quad \psi(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.21)$$

Más precisamente, el sistema está en forma de “cascada”: podemos obtener de manera sucesiva ψ, w, v y φ con la estimación

$$\|(v, \varphi, w, \psi)\|_{\mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1 \times \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1} \leq C \left(\|g\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(v^0, \varphi^0)\|_{H^1(\Omega)^3} + \|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{X}_0} \right).$$

En particular, podemos considerar el mapeo $\mathcal{Z} : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_0$, $\tilde{\varphi} \mapsto \varphi$, donde (v, φ, w, ψ) es la solución correspondiente a (4.21). Podemos ver que de la desigualdad de arriba, si $\|\mu\|_{L^\infty(0,T)}$ es suficientemente pequeña, entonces $\mathcal{Z}$ es una contracción estricta. Aplicando el teorema de punto fijo de Banach, obtenemos que existe un único punto fijo para $\mathcal{Z}$ y con esto finaliza la proposición. $\square$

De manera similar, podemos probar que el sistema (4.8) está bien definido.

Proposición 4.6. *Sea $T > 0$. Entonces existe $C > 0$ tal que si*

$$\|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \leq C,$$

entonces el sistema (4.8) está bien definido: para toda $h \in [\mathbf{X}_0]^6$, $f \in L^2(0, T; L^2(\omega))$, $(y^0, \theta^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega)$, existe una única solución fuerte de (4.8) con

$$\|(y, \theta, u, \sigma)\|_{\mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1 \times \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1} \leq C \left(\|h\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \right).$$

Ahora, definimos los siguientes operadores

$$\mathcal{L}(y, \pi_y, \theta, u, \pi_u, \sigma) := \begin{bmatrix} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y - \theta \mathbf{e}_2 \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + \mu \sigma 1_{\mathcal{O}} \\ -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u - y 1_{\mathcal{O}^*} \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma - u_2 - \theta 1_{\mathcal{O}^*} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

y

$$\mathcal{L}^*(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) := \begin{bmatrix} -\partial_t v - \Delta v + \nabla \pi_v - w 1_{\mathcal{O}^*} \\ -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - v_2 - \psi 1_{\mathcal{O}^*} \\ \partial_t w - \Delta w + \nabla \pi_w - \psi \mathbf{e}_2 \\ \partial_t \psi - \Delta \psi + \mu \varphi 1_{\mathcal{O}} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Esto nos permite reescribir los sistemas (4.8) y (4.11) como

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y, \pi_y, \theta, u, \pi_u, \sigma) = h + (0, 0, f1_\omega, 0, 0, 0) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u = 0, \quad \theta = \sigma = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0, \quad u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.24)$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) = g & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ v = w = 0, \quad \varphi = \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(T, \cdot) = v^0, \quad \varphi(T, \cdot) = \varphi^0, \quad w(0, \cdot) = 0, \quad \psi(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.25)$$

Así definimos la solución por transposición de (4.8). Para esto, consideremos $(y, \pi_y, \theta, u, \pi_u, \sigma)$, una solución fuerte del sistema (4.8) y

$$(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) \in [\mathbb{X}_1 \times L^2(0, T; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \times \mathbf{X}_1]^2, \quad (4.26)$$

tal que

$$v(T, \cdot) = w(0, \cdot) = 0, \quad \varphi(T, \cdot) = \psi(0, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (4.27)$$

Notemos que si multiplicamos la primera ecuación en (4.8) por v , la segunda ecuación por φ , la tercera ecuación por w , la cuarta ecuación por ψ y aplicamos integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0, T) \times \Omega} (y, \theta, u, \sigma) \cdot \mathcal{L}^*(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) \, dx \, dt + \iint_{(0, T) \times \omega} f \varphi \, dx \, dt \\ = \int_{\Omega} (y^0, \theta^0) \cdot (v(0, \cdot), \varphi(0, \cdot)) \, dx + \iint_{(0, T) \times \Omega} h \cdot (v, \varphi, w, \psi) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 4.7. Sean $h \in [\mathbf{X}_0]^6$, $f \in L^2(0, T; L^2(\omega))$, $(y^0, \theta^0) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega)$. Diremos que $(y, \theta, u, \sigma) \in [\mathbb{X}_0 \times \mathbf{X}_0]^2$ es una *solución por transposición* del sistema (4.8) si para todo $(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi)$ que satisface (4.26) y (4.27) se cumple la relación (4.28).

De aquí que, usando el resultado de la Proposición 4.5, se tiene la unicidad de las soluciones por transposición de (4.8). En particular, si (y, θ, u, σ) es una solución fuerte de (4.8), entonces también es su solución por transposición.

4.2.2. Caracterización del control óptimo

En esta subsección daremos un esbozo de la prueba del Lema 4.1.

Prueba del Lema 4.1. La existencia y unicidad del control óptimo se puede obtener siguiendo los argumentos de [2]. La idea es usar la convexidad de J bajo la condición de que $\|\mu\|_{L^\infty(0, T)} \leq C$ y la diferenciabilidad Gateaux del mapeo

$$G : L^2(0, T; L^2(\mathcal{O})) \rightarrow \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1, \quad f^* \mapsto (y(f^*), \theta(f^*)),$$

donde $(y(f^*), \theta(f^*))$ es la solución fuerte de (4.8) asociada a f^* y a (y^0, θ^0, f) que satisfacen (4.2). A continuación, daremos una idea de cómo caracterizar al control óptimo. Sean $f^*, h^* \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ y escribimos

$$(y, \theta) = G(f^*), \quad (\tilde{y}, \tilde{\theta}) = DG_{f^*}(h^*),$$

donde $DG_{f^*}(h^*)$ es la derivada de Gateaux de G en f^* con dirección h^* . De aquí, a partir de (4.8), podemos concluir que $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$ debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{y} - \Delta \tilde{y} + \nabla \pi_{\tilde{y}} + (\tilde{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \tilde{y} = \tilde{\theta} e_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \tilde{\theta} - \Delta \tilde{\theta} + \tilde{y} \cdot \nabla \theta + y \cdot \nabla \tilde{\theta} = h^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{y} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \tilde{y} = 0, \quad \tilde{\theta} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \tilde{y}(0, \cdot) = 0, \quad \tilde{\theta}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.29)$$

Más aún, la derivada de Gateaux del funcional J , definido en (4.3), en f^* con dirección h^* está dada por

$$DJ_{f^*}(h^*) = \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}^*} \left[(y - y^*) \cdot \tilde{y} + (\theta - \theta^*) \cdot \tilde{\theta} \right] dx dt + \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}} \frac{f^* h^*}{\mu} dx dt. \quad (4.30)$$

Por otro lado, usando que $(y, \theta) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1$ y de la teoría de sistemas de Navier-Stokes, uno puede probar que existe una única solución $(u, \sigma) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1$ del siguiente problema

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u + \nabla \pi_u + (\nabla y)^\top u - (y \cdot \nabla) u + \sigma \nabla \theta = (y - y^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \sigma - \Delta \sigma - y \cdot \nabla \sigma = u_2 + (\theta - \theta^*) 1_{\mathcal{O}^*} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0, \quad \theta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(T, \cdot) = 0, \quad \sigma(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación del sistema anterior por $\tilde{y}$, la segunda por $\tilde{\theta}$ y usando integración por partes, llegamos a que

$$\iint_{(0,T) \times \mathcal{O}} h^* \sigma dx dt = \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}^*} \left[(y - y^*) \cdot \tilde{y} + (\theta - \theta^*) \cdot \tilde{\theta} \right] dx dt. \quad (4.31)$$

gracias a que $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$ satisfacen (4.29). Finalmente, comparando (4.30) con (4.31) concluimos que si f^* es un punto crítico del funcional J , entonces

$$f^* = -\mu\sigma,$$

que era lo que se quería probar. $\square$

4.3. Estimaciones de Carleman

En esta sección presentaremos las estimaciones de Carleman para probar el Teorema 4.3. Para esto, consideremos ω_0 un dominio no vacío tal que

$$\overline{\omega_0} \subset \omega \cap \mathcal{O}^*.$$

Igual que en la Subsección 1.2.2, usando [12], podemos construir una función $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface

$$\eta^0 > 0 \text{ en } \Omega, \quad \eta^0 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad \max_{\Omega} \eta^0 = 1, \quad \nabla \eta^0 \neq 0 \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \omega_0.$$

Para simplificar la notación para más adelante, definimos las mismas funciones que en la Subsección 1.2.2 pero con $\ell = 11$:

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= \frac{\exp(24\lambda) - \exp[\lambda(22 + \eta^0(x))]}{t^{11}(T - t)^{11}}, \quad \xi(t, x) = \frac{\exp[\lambda(22 + \eta^0(x))]}{t^{11}(T - t)^{11}}, \\ \alpha_{\sharp}(t) &= \max_{x \in \overline{\Omega}} \alpha(t, x) = \frac{\exp(24\lambda) - \exp(22\lambda)}{t^{11}(T - t)^{11}}, \quad \xi_{\sharp}(t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} \xi(t, x) = \frac{\exp(22\lambda)}{t^{11}(T - t)^{11}}, \\ \alpha_{\flat}(t) &= \min_{x \in \overline{\Omega}} \alpha(t, x) = \frac{\exp(24\lambda) - \exp(23\lambda)}{t^{11}(T - t)^{11}}, \quad \xi_{\flat}(t) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \xi(t, x) = \frac{\exp(23\lambda)}{t^{11}(T - t)^{11}}, \end{aligned}$$

con $\lambda > 1$. Estas funciones cumplen las mismas relaciones (1.11)-(1.14). Más aún, con estas funciones también se tienen los resultados del Lema 1.8, Lema 1.9 y Lema 1.10, así que podremos usarlos más adelante.

También introducimos la siguiente función peso

$$\rho := e^{-s\alpha_{\sharp}}.$$

Para esta función, tenemos los siguientes resultados:

Lema 4.8. Sea $T > 0$. Para toda $\varepsilon > 0$, existen $s_0, \lambda_0 > 0$ tales que para toda $s \geq s_0 T^{22}$ y $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\rho \leq \varepsilon \quad \text{en } (0, T).$$

Demostración. Notemos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \geq \lambda_0$

$$e^{24\lambda} - e^{22\lambda} \geq \frac{1}{2} e^{24\lambda_0}$$

así, para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0 T^{22}$ se tiene

$$s\alpha_{\sharp} \geq s_0 e^{24\lambda_0} 2^{21},$$

entonces tomando s_0 y λ_0 suficientemente grandes, tenemos

$$s\alpha_{\sharp} \geq -\ln \varepsilon.$$

□

Con una prueba similar, también tenemos:

Lema 4.9. Sea $T > 0$, sean $p, q > 0$ y sea $N > M$. Para toda $\varepsilon > 0$, existen $s_0, \lambda_0 > 0$ tales que para toda $s \geq s_0 T^{22}$ y $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\lambda^p (s\xi)^q e^{-Ns\alpha} \leq \varepsilon \rho^M \quad \text{en } (0, T) \times \Omega.$$

Observación 4.10. La función ρ que aparece en el enunciado del Teorema 4.3 es justamente la definida arriba, con $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$ para λ_0 y s_0 son suficientemente grandes. Notemos que la condición (4.12) implica que $\mu \leq C\rho^{11}$. De aquí que, del Lema 4.8 se sigue la condición de que $\|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \leq C$ (para $C > 0$ suficientemente pequeño) que aparece en la Proposición 4.5 y en la Proposición 4.6.

Para lo que sigue, consideremos una sucesión de dominios no vacíos ω_i tales que

$$\overline{\omega_i} \subset \omega_{i+1}, \quad \overline{\omega_{i+1}} \subset \omega \cap \mathcal{O}^* \quad (i \geq 0). \quad (4.32)$$

También consideramos la correspondiente sucesión de funciones suaves tales que

$$\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+), \quad \chi_i \equiv 1 \text{ en } \omega_i, \quad \text{con soporte compacto en } \omega_{i+1}. \quad (4.33)$$

4.3.1. Descomposición y estimaciones para v

Para el sistema que satisface v consideremos la siguiente descomposición que fue introducida en [5]:

$$\rho^{20}v = \rho v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}, \quad (4.34)$$

donde $v^{(1)}, v^{(2)}$ y $v^{(3)}$ satisfacen lo siguiente

$$\begin{cases} -\partial_t v^{(1)} + \mathbb{A}v^{(1)} = \rho^{19}\mathbb{P} \left(w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} \right) & \text{en } (0, T), \quad v^{(1)}(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.35a)$$

$$\begin{cases} -\partial_t v^{(2)} + \mathbb{A}v^{(2)} = -19\rho'v^{(1)} & \text{en } (0, T), \quad v^{(2)}(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.35b)$$

$$\begin{cases} -\partial_t v^{(3)} + \mathbb{A}v^{(3)} = -20\frac{\rho'}{\rho} \left(v^{(2)} + v^{(3)} \right) & \text{en } (0, T), \quad v^{(3)}(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.35c)$$

Usando la regularidad de los sistemas de Stokes, tenemos

$$\left\| v^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_1} + \left\| v^{(2)} \right\|_{\mathbb{X}_2} \leq C \left\| \rho^{19} \left(w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}. \quad (4.36)$$

Antes de continuar, definimos las siguientes cantidades:

$$I_1(v^{(3)}) := \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 + s^8 \lambda^9 \xi^8 \left| \nabla v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ + \sum_{j=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^{1+2j} \lambda^{2+2j} \xi^{1+2j} \left| \nabla^{3-j} \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^8 \lambda^9 \xi_\#^8 \left| v^{(3)} \right|^2 dx dt \quad (4.37)$$

y

$$J_1(v^{(3)}) := \sum_{j=1}^3 \sum_{k=0}^j \left\| \tau_j \partial_t^k v^{(3)} \right\|_{L^2(0,T;H^{2(j-k)}(\Omega)^2)}^2, \quad (4.38)$$

donde

$$\tau_j := e^{-s\alpha_\#} \lambda^{\frac{9}{2}} (s\xi_\#)^{4-j\frac{12}{11}} \quad (j = 0, \dots, 3). \quad (4.39)$$

Entonces, nos dedicaremos a probar lo siguiente

Lema 4.11. *Existen s_0, λ_0 , tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \|\rho^{21}v\|_{\mathbb{X}_0}^2 \leq C \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} s^{12} \lambda^{13} \xi^{12} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.40)$$

con $v^{(3)}$ definido en (4.34).

Demostración. La ecuación (4.35c) se puede reescribir como

$$\begin{cases} -\partial_t v^{(3)} - \Delta v^{(3)} + \nabla \pi_v^{(3)} = 20s\alpha'_\# (v^{(2)} + v^{(3)}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} v^{(3)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ v^{(3)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v^{(3)}(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.41)$$

Siguiendo la técnica que usamos en capítulos anteriores, aplicamos el operador $\nabla^2 \Delta$ a la segunda componente de $v^{(3)}$ y obtenemos

$$-\partial_t \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} - \Delta \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} = 20s\alpha'_\# \left(\nabla^2 \Delta v_2^{(2)} + \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega.$$

Usando el Lema 1.10, obtenemos que existen $s_0, \lambda_0 > 0$ tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$ y $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s\lambda^2 \xi \left| \nabla^3 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^2 (\alpha'_\#)^2 \left(\left| \nabla^2 \Delta v_2^{(2)} \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\lambda\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.42)$$

Usando la regularidad (4.36) podemos estimar el primer término del lado derecho de (4.42), así obtenemos que

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s\lambda^2 \xi \left| \nabla^3 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ \leq C \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\lambda\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.43)$$

Para agregar los términos faltantes para recuperar $I_1(v^{(3)})$, usamos dos veces el Lema 1.9, la primera con $u = \nabla \Delta v_2^{(3)}$ y $r = 3$, la segunda con $u = \Delta v_2^{(3)}$ y $r = 5$, así conseguimos

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s^5 \lambda^6 \xi^5 \left| \nabla \Delta v_2^{(3)} \right|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left(s^5 \lambda^6 \xi^5 \left| \nabla \Delta v_2^{(3)} \right|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Además, usando Lema 1.8 con $u = v_2^{(3)}$ y $r = 7$, tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s^8 \lambda^9 \xi^8 \left| \nabla v_2^{(3)} \right|^2 + s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Por último, usando la desigualdad de Poincaré y la condición de divergencia nula, obtenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^8 \lambda^9 \xi_\#^8 \left| v_1^{(3)} \right|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^8 \lambda^9 \xi^8 \left| \nabla v_2^{(3)} \right|^2 dx dt. \quad (4.46)$$

Combinando (4.43)-(4.46), obtenemos que existen s_0, λ_0 tales que, para toda $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) & \leq C \left(\left\| \rho^{19} \left(w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $I_1(v^{(3)})$ está definido por (4.37). Por otro lado, podemos checar que las funciones peso definidas en (4.39), satisfacen (4.19) y (4.20) con $\kappa = 20s\alpha'_\#$, entonces aplicando el Lema 4.4 y juntándolo con (4.47) tenemos

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) & \leq C \left(\left\| \rho^{19} \left(w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Para estimar el término de frontera, usamos la misma estrategia que en el Capítulo 2 (ver (2.40)), tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \\ & \leq C \lambda^{-8} \int_0^T \left(\tau_2 \left\| v_2^{(3)} \right\|_{H^4(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\tau_3 \left\| v_2^{(3)} \right\|_{H^6(\Omega)} \right)^{3/2} dt \leq C \lambda^{-8} J_1(v^{(3)}) \end{aligned}$$

De este modo, tomando λ_0 suficientemente grande, podemos absorber el término $C\lambda^{-8}J_1(v^{(3)})$ con el lado izquierdo. Por tanto, obtenemos que existen s_0, λ_0 tales que, para toda $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene

$$I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) \leq C \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{10} \lambda^{11} \xi^{10} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.48)$$

Para estimar los términos locales, usamos estimaciones de energía, esto es, hacemos el dominio un poco más grande y con ayuda de una función flan (véase (4.32) y (4.33)) e integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta v_2^{(3)} \right)^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \omega_1} \chi_0 e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta v_2^{(3)} \right)^2 dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \omega_1} \frac{\partial}{\partial x_k} (\chi_0 e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} \Delta v_2^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_q} \Delta v_2^{(3)} dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \omega_1} \chi_0 e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \frac{\partial^3}{\partial x_k^2 \partial x_q} \Delta v_2^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_q} \Delta v_2^{(3)} dx dt. \end{aligned}$$

Luego usando la desigualdad de Young, obtenemos que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \leq \varepsilon I_1(v^{(3)}) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} s^5 \lambda^6 \xi^5 \left| \nabla \Delta v_2^{(3)} \right|^2 dx dt.$$

Con el mismo argumento, estimamos los demás términos locales. Así llegamos a

$$I_2(v^{(3)}) + J_2(v^{(3)}) \leq C \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} s^{12} \lambda^{13} \xi^{12} \left| v_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.49)$$

Finalmente, para agregar un término de v usamos la identidad (4.34) y notamos que

$$\rho^{21}v = \rho^2v^{(1)} + \rho v^{(2)} + \rho v^{(3)},$$

lo que implica que

$$\left\| \rho^{21}v \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 \leq C \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_1(v^{(3)}) \right).$$

Combinandolo con (4.49), se concluye (4.40). $\square$

4.3.2. Descomposición y estimaciones para w

Para la ecuación de w , vamos a considerar una descomposición similar a la que usamos para v . Consideremos

$$\rho^{17}w = \rho w^{(1)} + w^{(2)} + w^{(3)}, \quad (4.50)$$

donde $w^{(1)}, w^{(2)}$ y $w^{(3)}$ satisfacen

$$\begin{cases} \partial_t w^{(1)} + \mathbb{A}w^{(1)} = \rho^{16}\mathbb{P} \left(\psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} \right) & \text{en } (0, T), \quad w^{(1)}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.51a)$$

$$\begin{cases} \partial_t w^{(2)} + \mathbb{A}w^{(2)} = 16\rho' w^{(1)} & \text{en } (0, T), \quad w^{(2)}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.51b)$$

$$\begin{cases} \partial_t w^{(3)} + \mathbb{A}w^{(3)} = 17\frac{\rho'}{\rho} \left(w^{(2)} + w^{(3)} \right) & \text{en } (0, T), \quad w^{(3)}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.51c)$$

Usando la regularidad de los sistemas de Stokes, tenemos que

$$\left\| w^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_1} + \left\| w^{(2)} \right\|_{\mathbb{X}_2} \leq C \left\| \rho^N \left(\psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}. \quad (4.52)$$

Definimos las cantidades

$$I_2(w^{(3)}) := \sum_{j=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^{1+2j} \lambda^{2+2j} \xi^{1+2j} \left| \nabla^{3-j} \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left| w^{(3)} \right|^2 dx dt \quad (4.53)$$

y

$$J_2(w^{(3)}) := \sum_{j=1}^3 \sum_{k=0}^j \left\| \tilde{\tau}_j \partial_t^k w^{(3)} \right\|_{L^2(0,T; H^{2(j-k)}(\Omega)^2)}^2 \quad (4.54)$$

con

$$\tilde{\tau}_j := e^{-s\alpha_\#} \lambda^4 (s\xi_\#)^{\frac{7}{2}-j\frac{12}{11}} \quad (j = 0, \dots, 3). \quad (4.55)$$

Nos centraremos a probar lo siguiente:

Lema 4.12. *Existen s_0, λ_0 , tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \left\| \rho^{21} v \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) + \left\| \rho^{18} w \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 \\ \leq C \left(\left\| \rho^{19} g^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} g^{(3)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} \psi \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} \left(s^{12} \lambda^{13} \xi^{12} \left| v_2^{(3)} \right|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right), \quad (4.56) \end{aligned}$$

donde $v^{(3)}$ y $w^{(3)}$ están definidos por (4.34) y (4.52), respectivamente.

Demostración. Reescribimos la ecuación (4.51c) como

$$\begin{cases} \partial_t w^{(3)} - \Delta w^{(3)} + \nabla \pi_w^{(3)} = -17s\alpha'_\# (w^{(2)} + w^{(3)}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} w^{(3)} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ w^{(3)} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ w^{(3)}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.57)$$

Aplicamos el operador $\nabla^2 \Delta$ a la segunda componente del sistema anterior

$$\partial_t \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} - \Delta \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} = -17s\alpha'_\# \left(\nabla^2 \Delta w_2^{(2)} + \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega. \quad (4.58)$$

Usando el Lema 1.10, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 + s \lambda^2 \xi \left| \nabla^3 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^2 (\alpha'_\#)^2 \left(\left| \nabla^2 \Delta w_2^{(2)} \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.59) \end{aligned}$$

Notemos que el primer término del lado derecho de (4.59) se puede estimar con (4.52). Nuevamente, usando el Lema 1.9 dos veces (la primera con $u = \nabla \Delta w^{(3)}$, $r = 3$ y la segunda con $u = \Delta w^{(3)}$, $r = 5$) y sumándolos tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s^5 \lambda^6 \xi^5 \left| \nabla \Delta w_2^{(3)} \right|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left(s^5 \lambda^6 \xi^5 \left| \nabla \Delta w_2^{(3)} \right|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Luego, usando la elipticidad del operador de Laplace, también tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left(\left| w_2^{(3)} \right|^2 + \left| \nabla w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt. \quad (4.61)$$

Además, usando la desigualdad de Poincaré y la condición de divergencia nula, tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left| w_1^{(3)} \right|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left| \nabla w_2^{(3)} \right|^2 dx dt. \quad (4.62)$$

Combinando (4.59)-(4.62), obtenemos la siguiente estimación para $I_2(w^{(3)})$:

$$\begin{aligned} I_2(w^{(3)}) & \leq C \left(\left\| \rho^{16} \left(\psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (4.63)$$

De nuevo, podemos checar que las funciones peso definidas en (4.55), satisfacen (4.19) y (4.20) con $\kappa = -17s\alpha'_\#$, entonces aplicando el Lema 4.4 y juntándolo con (4.63) tenemos

$$\begin{aligned} I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) & \leq C \left(\left\| \rho^{16} \left(\psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta w_2^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \Delta w_2^{(3)} \right|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Para el término de frontera, hacemos una estimación similar a la que hicimos para v de modo que si tomamos λ_0 suficientemente grande, podemos absorberlo con el lado izquierdo. Luego, usando estimaciones de energía logramos estimar los términos locales de $\nabla^2 \Delta w_2^{(3)}$ ($j = 0, 1, 2$) en términos de $\Delta w_2^{(3)}$. Así obtenemos

$$I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) \leq C \left(\left\| \rho^{16} \left(\psi \mathbf{e}_2 + g^{(3)} \right) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.64)$$

Finalmente, para agregar el término de w , usamos (4.50) y (4.52). Juntando todo lo anterior con el Lema 4.11 concluimos el Lema 4.12. $\square$

4.3.3. Quitando los términos locales de v y w

En esta sección vamos a estimar las integrales locales de $v_2^{(3)}$ y de $\Delta w_2^{(3)}$ que aparecen en el lado derecho de (4.56) en términos de φ y ψ . Esto es, probaremos el siguiente resultado:

Lema 4.13. *Existen s_0, λ_0 , tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \|\rho^{21}v\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) + \|\rho^{18}w\|_{\mathbb{X}_0}^2 \\ \leq C \left(\|\rho^{18-\frac{1}{7}}g^{(1)}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \|\rho^{15-\frac{5}{7}}g^{(2)}\|_{\mathbf{X}_0}^2 + \|\rho^{16}g^{(3)}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \|\rho^{16}\psi\|_{\mathbf{X}_0}^2 \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_6} \rho^{30-\frac{10}{7}} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx dt \right), \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde $v^{(3)}$ y $w^{(3)}$ están definidos por (4.34) y (4.52), respectivamente.

Demostración. Comenzamos estimando $\Delta w_2^{(3)}$. Usando la primera ecuación de (4.11), tenemos que

$$\Delta w_2 = -\partial_t \Delta v_2 - \Delta^2 v_2 + \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} - \Delta g_2^{(1)} \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*$$

y de la descomposición (4.50) se sigue que

$$w_2^{(3)} = \rho^{17}w_2 - \rho w_2^{(1)} - w_2^{(2)}, \quad (4.66)$$

por lo que se tiene

$$\Delta w_2^{(3)} = \rho^{17} \left(-\partial_t \Delta v_2 - \Delta^2 v_2 + \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} - \Delta g_2^{(1)} \right) - \rho \Delta w_2^{(1)} - \Delta w_2^{(2)}. \quad (4.67)$$

Usando (4.32), (4.33) y el Lema 4.9 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 e^{-(2-\frac{1}{7})s\alpha_\sharp} \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt \\ &= \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 \rho^{(19-\frac{1}{7})} \Delta w_2^{(3)} \left(-\partial_t \Delta v_2 - \Delta^2 v_2 + \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} - \Delta g_2^{(1)} \right) dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 \rho^{(2-\frac{1}{7})} \Delta w_2^{(3)} \left(\rho \Delta w_2^{(1)} + \Delta w_2^{(2)} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Solo haremos la estimación del primer término en lado derecho de (4.68) ya que los demás términos se estiman de manera similar. Aplicando integración por partes tenemos

$$\begin{aligned} - \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 \rho^{(19-\frac{1}{7})} \Delta w_2^{(3)} \partial_t \Delta v_2 dx dt &= \iint_{(0,T) \times \omega_5} \left(19 - \frac{1}{7} \right) \rho^{(18-\frac{1}{7})} \rho' \Delta \left(\chi_4 \Delta w_2^{(3)} \right) v_2 dx dt \\ &\quad + \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{(19-\frac{1}{7})} \Delta \left(\chi_4 \partial_t \Delta w_2^{(3)} \right) v_2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ahora, notemos que $|\rho'| \leq C\rho^{1-\frac{1}{7}}$, entonces usando (4.52), (4.54), (4.55) y la desigualdad de Young, tenemos que para $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \Delta w_2^{(3)} \right|^2 dx dt &\leq C \left(\varepsilon J_1(w^{(3)}) + \frac{1}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(18-\frac{2}{7})} |v_2|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + \left\| \rho^{18-\frac{1}{7}}g^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16}g^{(3)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16}\psi \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ahora, para estimar el término de $v_2^{(3)}$, usamos (4.34) y (4.36)

$$\iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} s^{12} \lambda^{13} \xi^{12} |v_2^{(3)}|^2 dx dt \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_4} \rho^{40} |v_2|^2 dx dt + \left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 \right).$$

Combinando lo anterior con el Lema 4.8, (4.56) y (4.70), se tiene

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \left\| \rho^{21} v \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) + \left\| \rho^{18} w \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 \\ \leq C \left(\left\| \rho^{18-\frac{1}{7}} g^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} g^{(3)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} \psi \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(18-\frac{2}{7})} |v_2|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Finalmente, vamos a quitar el término local de v_2 . De la segunda ecuación en (4.11) tenemos

$$-\partial_t \varphi - \Delta \varphi = v_2 + \psi + g^{(2)} \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*$$

así, considerando (4.32), (4.33) y la descomposición (4.34) tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(18-\frac{2}{7})} |v_2|^2 dx dt \leq \iint_{(0,T) \times \omega_6} \chi_5 \rho^{36-\frac{4}{7}} \left(\rho v_2^{(1)} + v_2^{(2)} + v_2^{(3)} \right) \left(-\partial_t \varphi - \Delta \varphi - \psi - g^{(2)} \right) dx dt. \quad (4.72)$$

Aplicando integración por partes y considerando (4.36), (4.38), (4.39) y la desigualdad de Young, obtenemos que para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(18-\frac{2}{7})} |v_2|^2 dx dt \leq \varepsilon J_2(v^{(3)}) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left(\left\| \rho^{19} (w1_{\mathcal{O}^*} + g^{(1)}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16-\frac{5}{7}} g^{(2)} \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_6} \rho^{30-\frac{10}{7}} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Juntando esto con (4.71) obtenemos (4.65). $\square$

4.3.4. Estimaciones para φ

Para la ecuación de φ , definimos la siguiente cantidad

$$I_3(\varphi) := \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-44s\alpha} \left(s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \varphi|^2 + (s\xi)^{-1} (|\Delta \varphi|^2 + |\partial_t \varphi|^2) \right) dx dt, \quad (4.74)$$

para la cual probaremos lo siguiente:

Lema 4.14. *Existen s_0, λ_0 , tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$\begin{aligned} I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \left\| \rho^{21} v \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) + \left\| \rho^{18} w \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_3(\varphi) + \left\| \rho^{22} \varphi \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 \\ \leq C \left(\left\| \rho^{18-\frac{1}{7}} g^{(1)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{15-\frac{5}{7}} g^{(2)} \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} g^{(3)} \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \left\| \rho^{16} \psi \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_6} \rho^{30-\frac{10}{7}} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx dt \right), \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde $v^{(3)}$ y $w^{(3)}$ están definidos por (4.34) y (4.52), respectivamente.

Demostración. Como φ satisface una ecuación de calor, aplicando un resultado estándar de Carleman para calor (ver [9]), tenemos que existen s_0, λ_0 tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$ y $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos

$$I_3(\varphi) + \|\rho^{22}\varphi\|_{\mathbf{X}_0}^2 \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-44\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 dx dt + \left\| e^{22} (v_2 + \psi + g^{(2)}) \right\|_{\mathbf{X}_0}^2 \right). \quad (4.76)$$

Combinando lo anterior con (4.65) se tiene (4.75). $\square$

Ahora, antes de trabajar con ψ , usaremos los acoplamientos del sistema (4.11) para obtener una nueva ecuación para φ :

Lema 4.15. *Supongamos que (v, φ, w, ψ) es una solución suave de (4.11). Entonces*

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta)^2 \Delta \varphi &= \partial_{x_1}^2 \psi + \Delta g_2^{(3)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(3)} + (\partial_t - \Delta) \left(\Delta g_2^{(1)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} \right) \\ &\quad + (-\partial_t - \Delta) \Delta g^{(4)} + (\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta) \Delta g^{(2)} \quad \text{en } (0, T) \times [\mathcal{O}^* \cap \omega]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Demostración. Del sistema (4.11), tenemos

$$\Delta \pi_w = \partial_{x_2} \psi + \operatorname{div} g^{(3)} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \quad \text{y} \quad \Delta \pi_v = \operatorname{div} g^{(1)} \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*,$$

de aquí que

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \Delta w_2 &= \partial_{x_1}^2 \psi + \Delta g_2^{(3)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(3)} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ (-\partial_t - \Delta) \Delta v_2 &= \Delta w_2 + \Delta g_2^{(1)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*. \end{aligned}$$

De las dos relaciones de arriba, obtenemos

$$(\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta) \Delta v_2 = \partial_{x_1}^2 \psi + \Delta g_2^{(3)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(3)} + (\partial_t - \Delta) \left(\Delta g_2^{(1)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} \right) \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*.$$

Combinando esto con la segunda ecuación del sistema (4.11), se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta)^2 \Delta \varphi &= \partial_{x_1}^2 \psi + \Delta g_2^{(3)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(3)} + (\partial_t - \Delta) \left(\Delta g_2^{(1)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} \right) \\ &\quad + (\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta) \Delta (\psi + g^{(2)}) \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}^*. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la cuarta ecuación en (4.11) y recordando que $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$, obtenemos (4.77). $\square$

4.3.5. Descomposición y estimaciones para ψ

Para ψ haremos una descomposición similar a la usada con v y con w , para esto consideremos

$$\rho^{13} \psi = \rho \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}, \quad (4.78)$$

donde $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ y $\psi^{(3)}$ satisfacen

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(1)} + \mathbf{A} \psi^{(1)} = \rho^{12} \left(-\mu \varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} \right) & \text{en } (0, T), \quad \psi^{(1)}(0, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.79a)$$

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(2)} + \mathbf{A} \psi^{(2)} = 12 \rho' \psi^{(1)} & \text{en } (0, T), \quad \psi^{(2)}(0, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.79b)$$

$$\begin{cases} \partial_t \psi^{(3)} + \mathbf{A} \psi^{(3)} = 13 \frac{\rho'}{\rho} \left(\psi^{(2)} + \psi^{(3)} \right) & \text{en } (0, T), \quad \psi^{(3)}(0, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.79c)$$

Usando la regularidad de los sistemas de calor, tenemos

$$\left\| \psi^{(1)} \right\|_{\mathbf{X}_1} + \left\| \psi^{(2)} \right\|_{\mathbf{X}_2} \lesssim \left\| \rho^{12} \left(-\mu \varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} \right) \right\|_{\mathbf{X}_0}. \quad (4.80)$$

Definimos las cantidades

$$I_4(\psi^{(3)}) := \sum_{j=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^{1+2j} \lambda^{2+2j} \xi^{1+2j} \left| \nabla^{3-j} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left| \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \quad (4.81)$$

y

$$J_4(\psi) := \sum_{j=1}^5 \sum_{k=0}^j \left\| \widehat{\tau}_j \partial_t^k \psi \right\|_{L^2(0,T; H^{2(j-k)}(\Omega))}^2, \quad (4.82)$$

con

$$\widehat{\tau}_j := e^{-s\alpha_\#} \lambda^4 (s\xi_\#)^{\frac{7}{2}-j\frac{12}{11}} \quad (j = 0, \dots, 5). \quad (4.83)$$

Vamos a probar lo siguiente:

Lema 4.16. *Existen s_0, λ_0 , tales que para $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$, $\lambda \geq \lambda_0$, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$I_4(\psi^{(3)}) + J_4(\psi^{(3)}) + \left\| \rho^{14} \psi \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 \leq C \left(\left\| \rho^{12} \left(-\mu \varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} \right) \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \right), \quad (4.84)$$

donde $\psi^{(3)}$ está definido por (4.78).

Demostración. Aplicamos el operador $\nabla^2 \partial_{x_1}^2$ a la ecuación que satisface ψ , así obtenemos que

$$\partial_t \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} - \Delta \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} = -13s\alpha'_\# \left(\nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(2)} + \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega.$$

Usando el Lema 1.10, tenemos que para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s\lambda^2 \xi \left| \nabla^3 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^2 (\alpha'_\#)^2 \left(\left| \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(2)} \right|^2 + \left| \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 \right) dx dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 d\gamma dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \left| \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Notemos que el primer término del lado derecho en lo anterior, se puede estimar con (4.80). Además, usando el Lema 1.9 dos veces (la primera con $u = \nabla \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)}$, $r = 3$ y la segunda con $u = \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)}$, $r = 5$) y juntandolo con lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^{1+2j} \lambda^{2+2j} \xi^{1+2j} \left| \nabla^{3-j} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \\ & \leq C \left(\left\| \rho^{12} \left(-\mu \varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)} \right) \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s \lambda \xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Luego, usando que Ω es acotado y $\psi = 0$ en $\partial\Omega$, tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s^7 \lambda^8 \xi_\#^7 \left| \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt.$$

Juntando lo anterior tenemos que

$$I_4(\psi^{(3)}) \leq C \left(\left\| \rho^{12} (-\mu\varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)}) \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_{\sharp}} s \lambda \xi_{\sharp} \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 d\gamma dt \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \right), \quad (4.85)$$

para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^{11} + T^{22})$. Lo siguiente es estimar el término de frontera que aparece en el lado derecho de (4.85). Para esto, notemos que las funciones peso definidas en (4.83) satisfacen (4.19) y (4.20) con $\kappa = -13s\alpha'_{\sharp}$, por lo que podemos usar el Lema 4.4 para agregar el término $J_4(\psi)$ en el lado izquierdo de (4.85) y tomando s_0 y λ_0 suficientemente grandes tenemos

$$I_4(\psi^{(3)}) + J_4(\psi^{(3)}) \leq C \left(\left\| \rho^{12} (-\mu\varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)}) \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \sum_{j=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} s^{3+2j} \lambda^{4+2j} \xi^{3+2j} \left| \nabla^{2-j} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \right). \quad (4.86)$$

Los términos locales se pueden estimar igual que como lo hicimos con v y w . Finalmente, considerando (4.78) y (4.80) podemos agregar un término de ψ para obtener (4.84). $\square$

4.3.6. Prueba del Teorema 4.3

En esta subsección vamos a juntar el Lema 4.14, el Lema 4.15 y el Lema 4.16 para probar el Teorema 4.3.

Prueba del Teorema 4.3. Tenemos que estimar el término local de $\partial_{x_1}^2 \psi^{(3)}$. Para esto, usando la descomposición (4.78) y el Lema 4.9 tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \leq \iint_{(0,T) \times \omega_3} \chi_2 \rho^{(2-\frac{1}{7})} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \left(\rho^{13} \partial_{x_1}^2 \psi - \rho \partial_{x_1}^2 \psi^{(1)} - \partial_{x_1}^2 \psi^{(2)} \right) dx dt.$$

Luego, usando la identidad (4.77) tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \omega_3} \chi_2 \rho^{(15-\frac{1}{7})} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \partial_{x_1}^2 \psi dx dt = \iint_{(0,T) \times \omega_3} \chi_2 \rho^{(15-\frac{1}{7})} \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \left[(\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta)^2 \Delta \varphi \right. \\ \left. - \Delta g_2^{(3)} + \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(3)} - (\partial_t - \Delta) \left(\Delta g_2^{(1)} - \partial_{x_2} \operatorname{div} g^{(1)} \right) - (-\partial_t - \Delta) \Delta g^{(4)} - (\partial_t - \Delta)(-\partial_t - \Delta) \Delta g^{(2)} \right] dx dt.$$

Aplicando integración por partes, usando (4.82), (4.83) y la desigualdad de Young tenemos que para $\varepsilon > 0$

$$\iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 \left| \partial_{x_1}^2 \psi^{(3)} \right|^2 dx dt \leq \varepsilon J_4(\psi^{(3)}) \\ + \frac{C}{\varepsilon} \left(\left\| \rho^{12} (-\mu\varphi 1_{\mathcal{O}} + g^{(4)}) \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \sum_{i=1}^4 \iint_{(0,T) \times \Omega} \rho^{28-\frac{2}{7}} \left| g^{(i)} \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_3} \rho^{28-\frac{2}{7}} |\varphi|^2 dx dt \right).$$

Juntando lo de arriba, con la estimaciones (4.75) y (4.84) obtenemos lo siguiente

$$I_1(v^{(3)}) + J_1(v^{(3)}) + \left\| \rho^{21} v \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + I_2(w^{(3)}) + J_2(w^{(3)}) + \left\| \rho^{18} w \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 \\ + I_3(\varphi) + \left\| \rho^{22} \varphi \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + I_4(\psi^{(3)}) + J_4(\psi^{(3)}) + \left\| \rho^{14} \psi \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 \\ \leq C \left(\left\| \rho^{12} \mu\varphi 1_{\mathcal{O}} \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \left\| \rho^{12} g^{(4)} \right\|_{\mathbf{x}_0}^2 + \left\| \rho^{14-\frac{1}{7}} \left(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)} \right) \right\|_{[\mathbf{x}_0]^5}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_6} \rho^{28-\frac{2}{7}} |\varphi|^2 dx dt \right).$$

Finalmente, tomando en cuenta la condición (4.12), podemos absorber el término $\rho^{12}\mu\varphi 1_{\mathcal{O}}$ por el lado izquierdo, así obtenemos (4.13) y concluimos el Teorema 4.3. $\square$

4.4. Prueba del control jerárquico exacto

En esta sección mostraremos cómo obtener el Teorema 4.2 a partir del Teorema 4.3. Recordemos que h y g están definidas como

$$h = \left(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(4)} \right) \quad \text{y} \quad g = \left(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)} \right).$$

Primero modificaremos la función peso ρ de (4.13) por $\rho_{\natural}$ definido como sigue

$$\rho_{\natural}(t) := \begin{cases} \rho\left(\frac{T}{2}\right) & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \rho(t) & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}.$$

Así, las funciones ρ_1 y ρ_2 mencionadas en el Teorema 4.2 son precisamente

$$\rho_1 := \rho^{11}, \quad \text{y} \quad \rho_2 := \rho_{\natural}^{22}. \quad (4.87)$$

Además, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.17. *Con las hipótesis del Teorema 4.3, la solución (v, φ, w, ψ) de (4.11) satisface*

$$\|\rho_{\natural}^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{[\mathbf{x}_0]^6} + \|(v(0, \cdot), \varphi(0, \cdot))\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C \left(\|\rho_{\natural}^{12}g\|_{[\mathbf{x}_0]^6} + \|\rho_{\natural}^{13}\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \right). \quad (4.88)$$

Demostración. De (4.13), tenemos

$$\|\rho_{\natural}^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{L^2(T/2, T; L^2(\Omega)^6)} \lesssim \|\rho_{\natural}^{12}g\|_{[\mathbf{x}_0]^6} + \|\rho_{\natural}^{13}\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))}. \quad (4.89)$$

Ahora, consideremos una función $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$, $\chi \equiv 1$ en $(-\infty, T/2]$, $\chi \equiv 0$ en $[3T/4, \infty)$. Se sigue de (4.11) y (4.23) que

$$\begin{cases} L^*(\chi(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi)) = \chi g + \chi'(v, \varphi, w, \psi) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\chi v) = \operatorname{div}(\chi w) = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ (\chi v) = (\chi w) = 0, \quad (\chi \varphi) = (\chi \psi) = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (\chi v)(T, \cdot) = 0, \quad (\chi \varphi)(T, \cdot) = 0, \quad (\chi w)(0, \cdot) = 0, \quad (\chi \psi)(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando la Proposición 4.5 al sistem anterior tenemos

$$\|\chi(v, \varphi, w, \psi)\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^6) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^6)} \leq C \left(\|\chi g\|_{[\mathbf{x}_0]^6} + \|\chi'(v, \varphi, w, \psi)\|_{[\mathbf{x}_0]^6} \right). \quad (4.90)$$

Notemos que el soporte de χ' está contenido en $(T/2, 3T/4)$ y además

$$\rho_{\natural}(t) \geq \rho_{\natural}\left(\frac{3T}{4}\right) > 0 \quad (t \in (T/2, 3T/4)).$$

Combinando esto con (4.90), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\rho_{\natural}^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{L^2(0, T/2; L^2(\Omega)^6)} + \|(v(0, \cdot), \varphi(0, \cdot))\|_{L^2(\Omega)^3} \\ \leq C \left(\|\rho_{\natural}^{12}g\|_{L^2(0, 3T/4; L^2(\Omega)^6)} + \|\rho_{\natural}^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{L^2(T/2, 3T/4; L^2(\Omega)^6)} \right). \end{aligned}$$

De esta relación junto con (4.89), se concluye (4.88). $\square$

Usando el resultado anterior, vamos a probar la controlabilidad nula del sistema lineal (4.8). Para esto, definimos el siguiente espacio de Banach

$$\mathcal{F} := \left\{ h : \frac{h}{\rho_{\natural}^{22}} \in [\mathbf{X}_0]^6 \right\}$$

dotado de la norma

$$\|h\|_{\mathcal{F}} := \left\| \frac{h}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^6}.$$

Proposición 4.18. *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$, que $\omega \cap \mathcal{O}^* \neq \emptyset$ y (4.12). Entonces, existe un operador lineal continuo*

$$\mathcal{M} : \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{F} \rightarrow [\mathbb{X}_1 \times \mathbf{X}_1]^2 \times L^2(0, T; L^2(\omega))$$

tal que, para toda $(y^0, \theta^0) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega)$ y $h \in \mathcal{F}$,

$$((y, \theta, u, \sigma), f) := \mathcal{M}((y^0, \theta^0), h)$$

corresponde a la solución fuerte del sistema (4.8) asociada a las condiciones iniciales (y^0, θ^0) , a h y a un control f tal que se tiene la estimación

$$\left\| \frac{(y, \theta, u, \sigma)}{\rho_{\natural}^{11}} \right\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^6) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^6)} + \left\| \frac{f}{\rho_{\natural}^{13}} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \leq C \left(\|h\|_{\mathcal{F}} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \right). \quad (4.91)$$

En particular,

$$y(T, \cdot) = 0, \quad \theta(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración. Definimos el espacio

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 := \left\{ (v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})^8 : \nabla \cdot v = \nabla \cdot w = 0 \quad \text{en } [0, T] \times \overline{\Omega}, \right. \\ \left. v = w = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \partial\Omega, \quad \varphi = \psi = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} \pi_v \, dx = \int_{\Omega} \pi_w \, dx = 0 \quad \text{en } [0, T] \right\}. \end{aligned}$$

Recordando que el operador L^* está definido en (4.23) y que satisface (4.25), consideramos la forma bilineal

$$\begin{aligned} \left\langle (v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi), (\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}) \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ := \iint_{(0, T) \times \Omega} \rho_{\natural}^{24} L^*(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) \cdot L^*(\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}) \, dx \, dt + \iint_{(0, T) \times \Omega} \rho_{\natural}^{26} \varphi \widehat{\varphi} \, dx \, dt \quad (4.92) \end{aligned}$$

y la forma lineal

$$\ell \left((\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}) \right) := \iint_{(0, T) \times \Omega} (\widehat{v}, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\psi}) \cdot h \, dx \, dt + \int_{\Omega} (\widehat{v}(0, \cdot) \cdot y^0 + \widehat{\varphi}(0, \cdot) \theta^0) \, dx.$$

Usando (4.88), podemos ver que la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ definida en (4.92) es un producto escalar en $\mathcal{X}_0$. Denotemos por $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ la norma correspondiente y por $\mathcal{X}$ la completación de $\mathcal{X}_0$ con dicha norma. Se sigue de (4.88) que

$$\|\rho_{\natural}^{22}(v, \varphi, w, \psi)\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(v(0, \cdot), \varphi(0, \cdot))\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C \|(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi)\|_{\mathcal{X}}.$$

En particular, $\ell \in \mathcal{X}'$ con

$$\|\ell\|_{\mathcal{X}'} \leq C \left(\left\| \frac{h}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(y^0, \theta^0)\|_{L^2(\Omega)^3} \right).$$

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Riesz y así obtenemos la existencia y unicidad de $(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi) \in \mathcal{X}$ tal que para toda $(\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}) \in \mathcal{X}$,

$$\left\langle (v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi), (\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}) \right\rangle_{\mathcal{X}} = \ell(\widehat{v}, \widehat{\pi}_v, \widehat{\varphi}, \widehat{w}, \widehat{\pi}_w, \widehat{\psi}). \quad (4.93)$$

Ahora, definimos

$$(y, \theta, u, \sigma) := \rho_{\natural}^{24} L^*(v, \pi_v, \varphi, w, \pi_w, \psi), \quad f := \rho_{\natural}^{26} \varphi.$$

Gracias a (4.93) tenemos que (y, θ, u, σ) es una solución por transposición de (4.8) asociada a f y a h (en el sentido de la Definición 4.7). Más aún, también tenemos la estimación

$$\left\| \frac{(y, \theta, u, \sigma)}{\rho_{\natural}^{12}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \left\| \frac{f}{\rho_{\natural}^{13}} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \leq C \left(\left\| \frac{h}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(y^0, \theta^0)\|_{L^2(\Omega)^3} \right).$$

Luego, uno puede probar que $(y, \pi_y, \theta, u, \pi_u, \sigma)$ es solución de

$$L \left(\frac{(y, \pi_y, \theta, u, \pi_u, \sigma)}{\rho_{\natural}^{11}} \right) = \frac{(h^{(1)}, h^{(2)} + f 1_{\omega}, h^{(3)}, h^{(4)})}{\rho_{\natural}^{11}} + \frac{11\rho'_{\natural}}{\rho_{\natural}^{12}} (-y, -\theta, u, \sigma)$$

con

$$\operatorname{div} \left(\frac{y}{\rho_{\natural}^{11}} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{u}{\rho_{\natural}^{11}} \right) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad \frac{(y, \theta, u, \sigma)}{\rho_{\natural}^{11}} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega$$

y

$$\left(\frac{(y, \theta)}{\rho_{\natural}^{11}} \right) (0, \cdot) = \left(\frac{(y^0, \theta^0)}{\rho_{\natural}^{11}} \right), \quad \left(\frac{(u, \sigma)}{\rho_{\natural}^{11}} \right) (T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Aplicando la Proposición 4.5, se obtiene (4.91). $\square$

Finalmente estamos en posición de probar el resultado de controlabilidad nula:

Prueba del Teorema 4.2. La proposición anterior nos permite definir el siguiente mapeo

$$\mathcal{N}(h) := \left(-(y \cdot \nabla) y, -y \cdot \nabla \theta, -(\nabla y)^{\top} u + (y \cdot \nabla) u - \sigma \nabla \theta - y^* 1_{\mathcal{O}^*}, y \cdot \nabla \sigma - \theta^* 1_{\mathcal{O}^*} \right), \quad (4.94)$$

donde $((y, \theta, u, \sigma), f) := \mathcal{M}((y^0, \theta^0), h)$ para $h \in \mathcal{F}$. Notemos que si h es un punto fijo del mapeo $\mathcal{N}$, entonces la solución correspondiente (y, θ, u, σ) es una solución de (4.6) (ver (4.9) y (4.10)). Usando inclusiones de Sobolev y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\left\| \frac{(y \cdot \nabla) y}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^2} \leq C \left\| \left(\left(\frac{y}{\rho_{\natural}^{11}} \right) \cdot \nabla \right) \left(\frac{y}{\rho_{\natural}^{11}} \right) \right\|_{[\mathbf{X}_0]^2} \leq C \left\| \frac{y}{\rho_{\natural}^{11}} \right\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2.$$

Combinando lo anterior con (4.91), (4.94) y

$$\frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_{\natural}^{22}} \in [\mathbf{X}_0]^3,$$

obtenemos que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para toda $h, \widehat{h} \in \mathcal{F}$, se tiene

$$\|\mathcal{N}(h)\|_{\mathcal{F}} \leq C_0 \left(\left\| \frac{h}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^6} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \right)^2 + \left\| \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_{\natural}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^3} \quad (4.95)$$

y

$$\left\| \mathcal{N}(h) - \mathcal{N}(\widehat{h}) \right\|_{\mathcal{F}} \leq C_0 \left(\|h\|_{\mathcal{F}} + \|\widehat{h}\|_{\mathcal{F}} + \|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \right) \|h - \widehat{h}\|_{\mathcal{F}}. \quad (4.96)$$

Ahora, consideremos

$$R := \frac{1}{8C_0}$$

y tomemos

$$\|(y^0, \theta^0)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq R, \quad \left\| \frac{(y^*, \theta^*)}{\rho_{\mathfrak{I}}^{22}} \right\|_{[\mathbf{X}_0]^3} \leq \frac{R}{2}.$$

Entonces, usando (4.95) y (4.96), se sigue que la bola cerrada en el espacio de Banach $\mathcal{F}$ definida por

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(0, R) := \{h \in \mathcal{F} : \|h\|_{\mathcal{F}} \leq R\}$$

es invariante bajo $\mathcal{N}$ y en esta bola, $\mathcal{N}$ es una contracción estricta. Esto implica que existe un punto fijo y por lo tanto se concluye el teorema. $\square$

Capítulo 5

Control para Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash

En este capítulo usaremos la estrategia Stackelberg-Nash en un sistema de Stokes. Actuaremos en el sistema a través de una jerarquía de controles. Obtendremos un equilibrio de Nash para los controles “seguidores” (correspondientes a una optimización multi-objetivo no cooperativo) y el control “líder” tendrá un objetivo de control a cero. Además, pediremos que este último control tenga una componente igual a cero.

5.1. Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Sea $T > 0$ y sean $\omega, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \Omega$ abiertos no vacíos tales que

$$\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset \quad (i = 1, 2).$$

Consideremos el siguiente sistema de Stokes:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y = h 1_\omega + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

En el sistema anterior, $y = y(t, x) \in \mathbb{R}^N$ describe la velocidad del fluido, $\pi_y = \pi_y(t, x) \in \mathbb{R}$ la presión y y^0 es un dato inicial dado. El conjunto ω es el dominio de control principal, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ son dominios de control secundarios; $1_\omega, 1_{\mathcal{O}_1}$ y $1_{\mathcal{O}_2}$ son las funciones características de $\omega, \mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ respectivamente; los controles son h, v^1, v^2 , donde h es el control líder y v^1 y v^2 los controles seguidores.

Supongamos que el control h tomó su decisión, los controles seguidores intentan conseguir un equilibrio de Nash para los funcionales J_i ($i = 1, 2$). Es decir, fijamos

$$h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1}), \quad y^0 \in \mathcal{H}, \quad (5.2)$$

y consideramos los siguientes funcionales con peso

$$J_i(v^1, v^2) = \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}_{i,d}} |y - y^{i,d}|^2 dx dt + \frac{1}{2} \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}_i} \frac{|v^i|^2}{\mu_i} dx dt \quad (i = 1, 2). \quad (5.3)$$

Buscamos controles $v^i \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_i))$ tales que

$$J_1(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^1} J_1(\bar{v}^1, v^2), \quad J_2(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^2} J_2(v^1, \bar{v}^2). \quad (5.4)$$

Cualquier par (v^1, v^2) que satisfaga (5.4) es llamado un equilibrio de Nash para J_1 y J_2 . Notemos que si los funcionales J_i ($i = 1, 2$) son convexos, entonces (v^1, v^2) es un equilibrio de Nash si y sólo si

$$\left\langle \frac{\partial J_1}{\partial v^1}(v^1, v^2), \hat{v}^1 \right\rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^1 \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_1)) \quad (5.5)$$

y

$$\left\langle \frac{\partial J_2}{\partial v^2}(v^1, v^2), \hat{v}^2 \right\rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^2 \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_2)). \quad (5.6)$$

Usando el resultado de [16, Corolario 3.3], obtenemos lo siguiente

Lema 5.1. *Dados $h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$, $y^{i,d} \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_{i,d}))$ ($i = 1, 2$) y $y^0 \in \mathcal{H}$. Existe $C > 0$ tal que si*

$$\|\mu_i\|_{L^\infty(0, \infty)} \leq C \quad (i = 1, 2),$$

entonces el par (v^1, v^2) es un equilibrio de Nash de J_1 y J_2 si y solo si $v^i = -\mu_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_i}$ ($i = 1, 2$) donde (y, γ^1, γ^2) es solución del sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi_y = h 1_\omega - \mu_1 \gamma^1 1_{\mathcal{O}_1} - \mu_2 \gamma^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \gamma^1 - \Delta \gamma^1 + \nabla \pi_\gamma^1 = (y - y^{1,d}) 1_{\mathcal{O}_{1,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \gamma^2 - \Delta \gamma^2 + \nabla \pi_\gamma^2 = (y - y^{2,d}) 1_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} \gamma^1 = \operatorname{div} \gamma^2 = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = \gamma^1 = \gamma^2 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \gamma^1(T, \cdot) = 0, \quad \gamma^2(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

Una vez que encontremos el equilibrio (v^1, v^2) para cada control h , lo que sigue es buscar el control líder h que satisfaga el problema de control nulo. Así que nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.2. *Sea $T > 0$. Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset$ ($i = 1, 2$), que $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} =: \mathcal{O}_d$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces, existen $C > 0$ y funciones $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T])$ tales que*

$$\rho_1(0) = \rho_1(T) = \rho_2(T) = 0, \quad \rho_1 > 0 \text{ en } (0, T), \quad \rho_2 > 0 \text{ en } [0, T]$$

con la siguiente propiedad: si

$$\frac{\mu_1}{\rho_1}, \frac{\mu_2}{\rho_2} \in L^\infty(0, T), \quad \frac{(y^{1,d}, y^{2,d})}{\rho_2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^{2N}), \quad y^0 \in \mathcal{H},$$

con

$$\left\| \frac{(y^{1,d}, y^{2,d})}{\rho_2} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{2N})} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C,$$

entonces, existe un control $h \in L^2(0, T; L^2(\omega)^{N-1})$ tal que la solución de (5.7) satisfice

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ en } \Omega.$$

Una vez más, probar el resultado anterior es equivalente a probar una desigualdad de observabilidad para el sistem adjunto

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z + \nabla \pi_z = \varphi^1 1_{\mathcal{O}_{1,d}} + \varphi^2 1_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \varphi^1 - \Delta \varphi^1 + \nabla \pi_\varphi^1 = -\mu_1 z 1_{\mathcal{O}_1} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \varphi^2 - \Delta \varphi^2 + \nabla \pi_\varphi^2 = -\mu_2 z 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} z = \operatorname{div} \varphi^1 = \operatorname{div} \varphi^2 = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ z = \varphi^1 = \varphi^2 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(T, \cdot) = z^T, \quad \varphi^1(0, \cdot) = 0, \quad \varphi^2(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

Teorema 5.3. Sea $T > 0$ y sea $j \in \{1, \dots, N\}$. Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset$ ($i = 1, 2$), que $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} =: \mathcal{O}_d$ y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces, existe una función ρ tal que

$$\rho(0) = \rho(T) = 0, \quad \rho > 0 \text{ en } (0, T)$$

con la siguiente propiedad: para toda μ_1, μ_2 que satisfaga

$$\frac{\mu_1}{\rho^5}, \frac{\mu_2}{\rho^5} \in L^\infty(0, T),$$

existe $C > 0$ tal que para toda solución $(z, \varphi^1, \varphi^2)$ de (5.8) se tiene

$$\|\rho^{M+5}(z, \varphi^1, \varphi^2)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3N})}^2 \leq C \sum_{k=1, k \neq j}^N \iint_{(0,T) \times \omega} \rho^{2(M+1)} |z_k|^2 dx dt \quad (M > 0). \quad (5.9)$$

5.2. Estimaciones de Carleman

Usaremos las mismas funciones peso de la Subsección 1.2.2. También haremos la prueba en dimensión $N = 2$ y usaremos

$$\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}. \quad (5.10)$$

Entonces, tomando $\phi = \varphi^1 + \varphi^2$ podemos reescribir el sistema (5.8) como:

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z + \nabla \pi_z = \phi 1_{\mathcal{O}_d} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \phi - \Delta \phi + \nabla \pi_\phi = -z(\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} z = \operatorname{div} \phi = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ z = \phi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(T, \cdot) = z^T, \quad \phi(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Así tenemos lo siguiente:

Proposición 5.4. Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O}_i = \emptyset$ ($i = 1, 2$) y que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Entonces, existe $C > 0$ tal que para toda $z^T \in \mathcal{H}$, la solución (z, ϕ) de (5.8) satisface

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2(M+5)s\alpha_\#} |z|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2(M+2)s\alpha_\#} |\phi|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \omega} e^{-2(M+1)s\alpha_\#} |z_1|^2 dx dt, \quad (5.12)$$

para toda $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y $M > 0$.

En lo que sigue consideremos $\rho = \rho(t) := e^{-s\alpha_\#}$ y consideremos una sucesión de dominios no vacíos ω_i tales que

$$\bar{\omega}_i \subset \omega_{i+1}, \quad \bar{\omega}_{i+1} \subset \omega \cap \mathcal{O}_d \quad (i \geq 0), \quad (5.13)$$

con sus correspondientes funciones suaves

$$\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+), \quad \chi_i \equiv 1 \text{ en } \omega_i, \quad \text{con soporte compacto en } \omega_{i+1}. \quad (5.14)$$

5.2.1. Descomposición y estimaciones para ϕ

Las estimaciones que haremos a continuación están basadas en descomposiciones similares a las usadas en el capítulo anterior (ver (4.34), (4.50), (4.78)). Así, para el sistema que satisface ϕ consideremos la siguiente descomposición: sea $M > 0$

$$\rho^{M+1} \phi = \rho \bar{\phi} + \hat{\phi} + \tilde{\phi}, \quad (5.15)$$

donde $\bar{\phi}$, $\hat{\phi}$ y $\tilde{\phi}$ satisfacen

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\phi} + \Delta \bar{\phi} + \nabla \bar{\pi}_\phi = -\rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \hat{\phi} + \Delta \hat{\phi} + \nabla \hat{\pi}_\phi = M \rho' \bar{\phi} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \tilde{\phi} + \Delta \tilde{\phi} + \nabla \tilde{\pi}_\phi = (M+1) \frac{\rho'}{\rho} (\bar{\phi} + \hat{\phi}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\phi} = \operatorname{div} \hat{\phi} = \operatorname{div} \tilde{\phi} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \bar{\phi} = \hat{\phi} = \tilde{\phi} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \bar{\phi}(0, \cdot) = \hat{\phi}(0, \cdot) = \tilde{\phi}(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.16)$$

Usando el resultado de regularidad del Lema 4.4 tenemos

$$\|\bar{\phi}\|_{\mathbb{X}_1}^2 + \|\hat{\phi}\|_{\mathbb{X}_2}^2 \leq C \left\| -\rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2. \quad (5.17)$$

Antes de continuar, definimos las siguientes cantidades

$$I_1(u) := \sum_{i=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta u_1|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^7 |u|^2 dx dt \quad (5.18)$$

y

$$J_1(u) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=0}^j \|\tau_j \partial_t^k u\|_{L^2(0,T; H^{2(j-k)}(\Omega)^2)}^2, \quad \tau_j := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{\frac{7}{2}-j\frac{12}{11}} \quad (j = 0, \dots, 3). \quad (5.19)$$

Entonces, nos dedicaremos a probar lo siguiente:

Lema 5.5. *Existen λ_0 y s_0 tales que para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^\ell + T^{2\ell})$, ϕ que cumple (5.15) y (5.16) satisface*

$$I_1(\tilde{\phi}) + J_1(\tilde{\phi}) + \|\rho^{M+2} \phi\|_{\mathbb{X}_0}^2 \leq C \left(\left\| \rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 |\Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt \right). \quad (5.20)$$

Demostración. Primero, notemos que podemos escribir el sistema que satisface $\tilde{\phi}$ como

$$\partial_t \tilde{\phi} + \Delta \tilde{\phi} + \nabla \tilde{\pi}_\phi = -(M+1) s\alpha'_\# (\bar{\phi} + \hat{\phi}) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega.$$

Ahora, siguiendo la misma estrategia que en capítulos anteriores, aplicamos el operador $\nabla^2 \Delta$ a la primera componente de $\tilde{\phi}$ y obtenemos

$$\partial_t \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 - \Delta \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 = -(M+1) s\alpha'_\# (\nabla^2 \Delta \bar{\phi}_1 + \nabla^2 \Delta \hat{\phi}_1) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega.$$

Aplicando el Lema 1.10, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left(s\xi |\nabla^3 \Delta \tilde{\phi}_1|^2 + (s\xi)^3 |\nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\alpha'_\#)^2 \left(|\nabla^2 \Delta \bar{\phi}_1|^2 + |\nabla^2 \Delta \hat{\phi}_1|^2 \right) dx dt + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |\nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt \right), \quad (5.21) \end{aligned}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Luego, aplicando dos veces el Lema 4.8, la primera con $u = \nabla \Delta \tilde{\phi}_1$ y $r = 3$ y la segunda con $u = \Delta \tilde{\phi}_1$ y $r = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Por otro lado, usando la condición de divergencia nula de $\tilde{\phi}$ se tiene

$$\left| \partial_2 \tilde{\phi}_2 \right| = \left| \partial_1 \tilde{\phi}_1 \right| \leq C \left| \nabla \tilde{\phi}_1 \right|.$$

Más aún, como $\alpha_\#$ y $\xi_\#$ no dependen de x , usando la desigualdad de Poincaré y la elipticidad del operador de Laplace, obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^7 \left| \tilde{\phi} \right|^2 dx dt & \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^7 \left| \nabla \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt \\ & \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Juntando (5.21)-(5.23), obtenemos

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{\phi}) & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\alpha'_\#)^2 \left(\left| \nabla^2 \Delta \bar{\phi}_1 \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta \hat{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 d\gamma dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^3 \left| \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Lo siguiente es estimar los términos del lado derecho de (5.24) que no aparecen en (5.20). Tomando en cuenta (5.17) y la estimación

$$|(\alpha_\#)'| + |(\xi_\#)'| \leq CT (\xi_\#)^{1+1/\ell},$$

tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\alpha'_\#)^2 \left(\left| \nabla^2 \Delta \bar{\phi}_1 \right|^2 + \left| \nabla^2 \Delta \hat{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \leq C \left\| \rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2. \quad (5.25)$$

También podemos notar que las funciones peso definidas en (5.19) satisfacen las condiciones (4.19) y (4.20) con $\kappa = -(M+1)s\alpha'_\#$, así que aplicando el Lema 4.4 obtenemos

$$J_1(\tilde{\phi}) \leq C \left\| \rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2. \quad (5.26)$$

Para estimar el término de frontera, usamos una desigualdad de traza y una desigualdad de interpolación y obtenemos

$$\iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 d\gamma dt \leq \int_0^T \left(\tau_2 \left\| \tilde{\phi}_1 \right\|_{H^4(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\tau_3 \left\| \tilde{\phi}_1 \right\|_{H^6(\Omega)} \right)^{3/2} dt \leq J_1(\tilde{\phi}_1). \quad (5.27)$$

Por lo tanto, juntando (5.25)-(5.27) con (5.24) obtenemos que

$$I_1(\tilde{\phi}_1) + J_1(\tilde{\phi}_1) \leq C \left(\left\| \rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2}) \right\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \sum_{i=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} \left| \nabla^i \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt \right),$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Finalmente, solo queda estimar los términos locales. Para esto, usando las mismas estimaciones de energía que en capítulos pasados y usando la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \left| \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^3 \left| \nabla^3 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^3 \left| \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.28)$$

y

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} (s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt &\leq \varepsilon \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^3 \left| \nabla^2 \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 + (s\xi)^5 \left| \nabla \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (5.29)$$

para toda $\varepsilon > 0$. Con las estimaciones (5.28) y (5.29) se tiene que

$$I_1(\tilde{\phi}) + J_1(\tilde{\phi}) \leq C \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 \left| \Delta \tilde{\phi}_1 \right|^2 dx dt. \quad (5.30)$$

Por último, notemos que podemos recuperar una integral en términos de ϕ_1 de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} |\rho^{M+2} \phi_1|^2 dx dt &\leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} \left(|\rho^2 \bar{\phi}_1|^2 + |\rho \hat{\phi}_1|^2 + |\rho \tilde{\phi}_1|^2 \right) dx dt \\ &\leq C \left(\|\rho^M z (\mu_1 1_{\mathcal{O}_1} + \mu_2 1_{\mathcal{O}_2})\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_1(\tilde{\phi}) \right). \end{aligned}$$

Juntando lo anterior con (5.30), concluimos (5.20). $\square$

5.2.2. Descomposición y estimaciones para z

Hacemos la siguiente descomposición para z :

$$\rho^{M+4} z = \rho \bar{z} + \hat{z} + \tilde{z}, \quad (5.31)$$

con $M > 0$ y donde $\bar{z}$, $\hat{z}$ y $\tilde{z}$ satisfacen

$$\begin{cases} -\partial_t \bar{z} + \Delta \bar{z} + \nabla \bar{\pi}_z = \rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \hat{z} + \Delta \hat{z} + \nabla \hat{\pi}_z = (M+3) \rho' \bar{z} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \tilde{z} + \Delta \tilde{z} + \nabla \tilde{\pi}_z = -(M+4) \frac{\rho'}{\rho} (\bar{z} + \hat{z}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{z} = \operatorname{div} \hat{z} = \operatorname{div} \tilde{z} = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \bar{z} = \hat{z} = \tilde{z} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \bar{z}(T, \cdot) = \hat{z}(T, \cdot) = \tilde{z}(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.32)$$

Usando el resultado de regularidad del Lema 4.4 tenemos

$$\|\bar{z}\|_{\mathbb{X}_1}^2 + \|\hat{z}\|_{\mathbb{X}_2}^2 \leq C \|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2. \quad (5.33)$$

Definimos

$$\begin{aligned} I_0(\tilde{z}) &:= \sum_{i=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} \left| \nabla^i \Delta \tilde{z}_1 \right|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^8 |\nabla \tilde{z}_1|^2 + (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^8 |\tilde{z}|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.34)$$

y

$$J_0(\tilde{z}) := \sum_{j=1}^3 \sum_{k=0}^j \left\| \tau_j \partial_t^k v^{(3)} \right\|_{L^2(0,T;H^{2(j-k)}(\Omega)^2)}^2, \quad \tau_j := e^{-s\alpha_\#} (s\xi_\#)^{4-j\frac{12}{11}} \quad (j = 0, \dots, 3). \quad (5.35)$$

Nos centraremos en probar lo siguiente

Lema 5.6. *Existen λ_0 y s_0 tales que para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^\ell + T^{2\ell})$, z que cumple (5.31) y (5.32) satisface*

$$I_0(\tilde{z}) + J_0(\tilde{z}) + \|\rho^{M+5} z\|_{\mathbb{X}_0}^2 \leq C \left(\|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{12} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right). \quad (5.36)$$

Demostración. A partir de la prueba para ϕ_1 , es sencillo ver que se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt &\leq C \left(\|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2 \right. \\ &\quad \left. + \iint_{(0,T) \times \partial\Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \Delta \tilde{z}_1 \right|^2 d\gamma dt + \sum_{i=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Usando el Lema 1.9 con $r = 8$ y $u = \tilde{z}_1$ tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^8 |\nabla \tilde{z}_1|^2 + (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 \right) dx dt \\ \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 |\Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$. Más aún, usando la divergencia nula y la desigualda de Poincaré tenemos

$$\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} (s\xi_\#)^8 |\tilde{z}|^2 dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha} (s\xi)^8 |\nabla \tilde{z}_1|^2 dx dt. \quad (5.39)$$

Juntando (5.37)-(5.39), obtenemos

$$\begin{aligned} I_0(\tilde{z}) &\leq C \left(\|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-2s\alpha_\#} s\xi_\# \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \nabla^2 \Delta \tilde{z}_1 \right|^2 d\sigma dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que las funciones peso definidas en (5.35) satisfacen (4.19) y (4.20) con $\kappa = (M+4)s\alpha_\#$, así que podemos aplicar el Lema 4.4. Más aún, tomando $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^\ell + T^{2\ell})$ y usando una desigualdad de traza y una desigualdad de interpolación podemos absorber el término de frontera que aparece en el lado derecho en la estimación de arriba y obtener

$$\begin{aligned} I_0(\tilde{z}) + J_0(\tilde{z}) &\leq C \left(\|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Lo siguiente es estimar los términos locales. Usando estimaciones de energía y la desigualdad de Young, podemos obtener que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{7-2i} |\nabla^i \Delta \tilde{z}_1|^2 dx dt + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{10} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \\ \leq C \left(\varepsilon I_0(\tilde{z}) + \frac{1}{\varepsilon} \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{12} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

para toda $\varepsilon > 0$. Combinando lo de arriba con (5.31) y (5.31) concluimos (5.36). $\square$

5.2.3. Estimando ϕ en términos de z

El objetivo de esta subsección es probar lo siguiente:

Lema 5.7. *Existen λ_0 y s_0 tales que para $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq s_0(T^\ell + T^{2\ell})$, la solución (z, ϕ) de (5.11) satisface*

$$I_0(\tilde{z}) + J_0(\tilde{z}) + \|\rho^{M+5} z\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_1(\tilde{\phi}) + J_1(\tilde{\phi}) + \|\rho^{M+2} \phi\|_{\mathbb{X}_0}^2 \leq C \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(M+\frac{3}{2})} |z_1|^2 dx dt, \quad (5.40)$$

donde $\tilde{z}$ y $\tilde{\phi}$ están definidas por (5.31) y (5.15) respectivamente.

Demostración. Juntando el Lema 5.5 y el Lema 5.6 tenemos

$$\begin{aligned} I_0(\tilde{z}) + J_0(\tilde{z}) + \|\rho^{M+5} z\|_{\mathbb{X}_0}^2 + I_1(\tilde{\phi}) + J_1(\tilde{\phi}) + \|\rho^{M+2} \phi\|_{\mathbb{X}_0}^2 \\ \leq C \left(\|\rho^M \mu_1 z 1_{\mathcal{O}_1}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \|\rho^M \mu_2 z 1_{\mathcal{O}_2}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{12} |\tilde{z}_1|^2 dx dt \right. \\ \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 |\Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt \right). \quad (5.41) \end{aligned}$$

Notemos que

$$-\partial_t z - \Delta z + \nabla \pi_z = \phi \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{O}_d$$

y que

$$\rho^{M+1} \phi = \rho \bar{\phi} + \hat{\phi} + \tilde{\phi}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta \tilde{\phi}_1 = \rho^{M+1} (-\partial_t \Delta z_1 - \Delta^2 z_1) - \rho \Delta \bar{\phi}_1 - \Delta \hat{\phi}_1. \quad (5.42)$$

Entonces, usando (5.13), (5.14) y la identidad (5.42) tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 |\Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt &\leq \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 e^{-\frac{1}{2}s\alpha_\#} |\Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt \\ &= \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 \rho^{M+\frac{3}{2}} \Delta \tilde{\phi}_1 (-\partial_t \Delta z_1 - \Delta^2 z_1) dx dt \\ &\quad - \iint_{(0,T) \times \omega_5} \chi_4 e^{-\frac{1}{2}s\alpha_\#} \Delta \tilde{\phi}_1 (\rho \Delta \bar{\phi}_1 + \Delta \hat{\phi}_1) dx dt. \end{aligned}$$

Ahora, usando integración por partes y la desigualdad de Young tenemos que para toda $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} (s\xi)^7 |\Delta \tilde{\phi}_1|^2 dx dt &\leq \varepsilon J_1(\phi) + \frac{C}{\varepsilon} \left(\|\rho^M \mu_1 z 1_{\mathcal{O}_1}\|_{\mathbb{X}_0}^2 + \|\rho^M \mu_2 z 1_{\mathcal{O}_2}\|_{\mathbb{X}_0}^2 \right. \\ &\quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(M+\frac{3}{2})} |z_1|^2 dx dt \right). \quad (5.43) \end{aligned}$$

Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \omega_4} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{12} |\widetilde{z}_1|^2 \, dx \, dt &\leq \iint_{(0,T) \times \omega_4} \rho^{2(M+4)} |z_1|^2 + \rho^2 |\bar{z}_1|^2 + |\widehat{z}_1|^2 \, dx \, dt \\ &\leq \iint_{(0,T) \times \omega_5} \rho^{2(M+\frac{3}{2})} |z_1|^2 \, dx \, dt + \|\rho^{M+3} \phi 1_{\mathcal{O}_d}\|_{\mathbb{X}_0}^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Considerando las estimaciones (5.43) y (5.44) en (5.41), obtenemos (5.40) siempre que $\mu_i \leq \rho^5$ ($i = 1, 2$).

□

Capítulo 6

Comentarios finales

En esta tesis logramos probar algunos problemas de controlabilidad para los sistemas de Stokes, de Navier-Stokes y de Boussinesq. Primero, en el Capítulo 2, trabajamos con un sistema de m sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) acoplados y probamos que si el acoplamiento está en forma de cascada es posible controlar el sistema a cero usando un solo control con una componente igual a cero.

En el Capítulo 3, trabajamos con un sistema de n sistemas de Stokes (y de Navier-Stokes) con m controles ($m < n$) actuando en ella y probamos que dicho sistema es controlable a cero si y solo si se satisface una condición de tipo Kalman.

En el Capítulo 4 y en el Capítulo 5, trabajamos con control jerárquico. En el Capítulo 4, usamos una estrategia de Stackelberg para controlar un sistema de Boussinesq. En este sistema tenemos 2 controles, donde uno se encarga de controlar el sistema a cero y el otro resuelve un problema de control óptimo. Por otro lado, en el Capítulo 5, usamos una estrategia de Stackelberg-Nash para el control de un sistema de Stokes. Aquí tenemos 3 controles, uno se encarga de controlar el sistema a cero mientras que los otros dos resuelven un equilibrio de Nash que corresponde a un problema de optimización multiobjetivo.

6.1. Trabajos a futuro

Como continuación a esta tesis se planea trabajar con los siguientes problemas.

6.1.1. Control para Navier-Stokes usando la estrategia Stackelberg-Nash

Buscamos probar un resultado similar al obtenido en el Capítulo 5 pero para un sistema de Navier-Stokes. Más precisamente, consideremos el siguiente sistema con 3 controles:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla \pi_y = h1_\omega + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Queremos que los controles h, v^1 y v^2 cumplan lo siguiente:

- el objetivo de cada v^i es mantener la solución y cerca de un estado $y^{i,d}$ en $\mathcal{O}_{i,d}$ ($i = 1, 2$);
- el objetivo de h es de control a cero en el tiempo T : $y(T, \cdot) = 0$ en Ω .

Así como en el Capítulo 5, el primer objetivo se puede transformar en un problema de control óptimo. Consideremos los dos funcionales con peso:

$$J_i(h, v^1, v^2) = \frac{1}{2} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_{i,d}} |y - y^{i,d}|^2 dx dt + \frac{1}{2} \iint_{(0,T) \times \mathcal{O}_i} \frac{|v^i|^2}{\mu_i} dx dt \quad (i = 1, 2), \quad (6.2)$$

Queremos que el control v^1 minimice el funcional J_1 y que el control v^2 minimice el funcional J_2 . De aquí tenemos la siguiente definición:

Definición 6.1. Diremos que el par (v^1, v^2) es un equilibrio de Nash si cumplen

$$J_1(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^1} J_1(\bar{v}^1, v^2),$$

$$J_2(v^1, v^2) = \min_{\bar{v}^2} J_2(v^1, \bar{v}^2).$$

La principal dificultad que encontramos a la hora de encontrar el equilibrio de Nash es que, como el sistema (6.1) es no lineal, el funcional J_i no es convexo. Por lo tanto, el equilibrio de Nash obtenido para el caso lineal (el sistema de Stokes) puede no ser el adecuado. Una opción es trabajar con un quasi-equilibrio de Nash.

Definición 6.2. Diremos que el par (v^1, v^2) es un quasi-equilibrio de Nash si satisfacen el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla \pi_y = h1_\omega - v^1 1_{\mathcal{O}_1} - v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\partial_t \gamma^i - \Delta \gamma^i + \nabla \pi_\gamma^i + (\nabla y)^\top \gamma^i - (y \cdot \nabla) \gamma^i = (y - y^{i,d}) 1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (i = 1, 2) \\ \operatorname{div} y = \operatorname{div} \gamma^1 = \operatorname{div} \gamma^2 = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = \gamma^1 = \gamma^2 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y^0, \quad \gamma^1(T, \cdot) = 0, \quad \gamma^2(T, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega. \\ v^i = -\mu_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_i} \quad (i = 1, 2). \end{array} \right.$$

6.1.2. Controles en L^∞ para un sistema de Stokes

Para este problema, buscamos probar la existencia de controles en L^∞ para un sistema de Stokes. En el artículo [7] se prueba que se puede probar el control a cero y control aproximado para una ecuación de calor quasi-lineal (con ciertas condiciones) usando un control interno o un control en la frontera, ambos perteneciendo a L^∞ . Más precisamente, consideremos los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = u 1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (6.3)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ y = u 1_\gamma & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Prueban que si el término $f(y, \nabla y)$ crece más lento que

$$|y| \log^{3/2}(1 + |y| + |\nabla y|) + |\nabla y| \log^{3/2}(1 + |y| + |\nabla y|)$$

entonces se tiene lo siguiente:

- el sistema (6.3) es controlable a cero y aproximadamente controlable y el control $u \in L^\infty((0, T) \times \omega)$;
- el sistema (6.4) es controlable a cero y aproximadamente controlable y el control $u \in L^\infty((0, T) \times \gamma)$.

Nuestro objetivo es conseguir adaptar los argumentos de dicho artículo para aplicarlos a un sistema de Stokes.

Capítulo 7

Bibliografía

- [1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos. A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems. *J. Evol. Equ.*, 9(2):267–291, 2009.
- [2] T. R. Bewley, R. Temam, and M. Ziane. A general framework for robust control in fluid mechanics. *Physica D*, 138(3-4):360–392, 2000.
- [3] N. Carreño. Local controllability of the N -dimensional Boussinesq system with $N - 1$ scalar controls in an arbitrary control domain. *Math. Control Relat. Fields*, 2(4):361–382, 2012.
- [4] N. Carreño and S. Guerrero. Local null controllability of the N -dimensional Navier-Stokes system with $N - 1$ scalar controls in an arbitrary control domain. *J. Math. Fluid Mech.*, 15(1):139–153, 2013.
- [5] N. Carreño and T. Takahashi. Control problems for the Navier-Stokes system with nonlocal spatial terms. <https://hal.science/hal-03819799>, 2022.
- [6] J.-M. Coron and S. Guerrero. Null controllability of the N -dimensional Stokes system with $N - 1$ scalar controls. *J. Differential Equations*, 246(7):2908–2921, 2009.
- [7] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3):798–819, 2002.
- [8] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J.-P. Puel. Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3):442–465, 2006.
- [9] E. Fernández-Cara and S. Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 45(4):1399–1446, 2006.
- [10] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Y. Imanuvilov, and J.-P. Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12):1501–1542, 2004.
- [11] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Y. Imanuvilov, and J.-P. Puel. Some controllability results for the N -dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with $N - 1$ scalar controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45(1):146–173, 2006.
- [12] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [13] M. González-Burgos and L. de Teresa. Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math.*, 67(1):91–113, 2010.

- [14] S. Guerrero. Controllability of systems of Stokes equations with one control force: existence of insensitizing controls. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 24(6):1029–1054, 2007.
- [15] M. Gueye. Insensitizing controls for the Navier-Stokes equations. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 30(5):825–844, 2013.
- [16] F. Guillén-González, F. Marques-Lopes, and M. A. Rojas-Medar. On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies for Stokes equations. *Proc. Am. Math. Soc.*, 141(5):1759–1773, 2013.
- [17] V. Hernández-Santamaría and L. de Teresa. Robust Stackelberg controllability for linear and semilinear heat equations. *Evol. Equ. Control Theory*, 7(2):247–273, 2018.
- [18] O. Y. Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:39–72, 2001.
- [19] R. Kalman, P. Falb, and M. Arbib. *Topics in Mathematical System Theory*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1969.
- [20] J.-L. Lions. Some remarks on Stackelberg’s optimization. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4(4):477–487, 1994.
- [21] J.-L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the French by P. Kenneth.
- [22] J.-L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 182. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the French by P. Kenneth.
- [23] Y. Liu, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Single input controllability of a simplified fluid-structure interaction model. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 19(1):20–42, 2013.
- [24] C. Montoya and L. de Teresa. Robust Stackelberg controllability for the Navier-Stokes equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 25(5):Paper No. 46, 33, 2018.
- [25] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [26] H. Sohr. *The Navier-Stokes equations*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2001. An elementary functional analytic approach, [2013 reprint of the 2001 original] [MR1928881].
- [27] T. Takahashi, L. de Teresa, and Y. Wu-Zhang. Controllability results for cascade systems of m coupled N -dimensional Stokes and Navier-Stokes systems by $N - 1$ scalar controls. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 29:Paper No. 31, 24, 2023.
- [28] T. Takahashi, L. de Teresa, and Y. Wu-Zhang. Stackelberg exact controllability for the Boussinesq system. working paper or preprint, Oct. 2023.
- [29] T. Takahashi, L. de Teresa, and Y. Wu-Zhang. A Kalman condition for the controllability of a coupled system of Stokes equations. *J. Evol. Equ.*, 24(1):4, 2024.
- [30] R. Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, revised edition, 1979. Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.
- [31] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.