



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CUÁDRICAS EN EL ESPACIO PROYECTIVO: CONVEXIDAD, SEPARACIÓN Y
DUALIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUCINDA SERNA HERRERA

DIRECTOR
DR. GILBERTO CALVILLO VIVES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS U.N.A.M

CIUDAD DE MÉXICO 30 ABRIL , 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Rocío Barrionuevo y Enrique Serna el apoyo y cariño brindados para realizar mis estudios. Sin su ayuda incondicional, esta tesis no hubiera podido ser terminada. También quiero agradecer a toda mi familia y amigos por el respaldo moral y auxilio emocional para no desistir de esta aventura académica.

Quiero agradecer al Dr. Gilberto Calvillo, director de esta tesis, por su paciencia infinita y entusiasmo para terminar este proyecto. Tuve la oportunidad durante el posgrado de tomar varios cursos magníficos y divertidos con él en los que aprendí mucho; sobre todo, al terminar cada una de sus clases, siempre avivó mi amor a las matemáticas. Voy a extrañar hablar de Geometría con usted.

A la Dra. Larisa Sbitneva y a la Dra. Lucía López de Medrano les quiero hacer un agradecimiento especial, ya que en mi licenciatura fueron quienes me introdujeron al mundo de la Geometría Proyectiva.

Glosario

- * \mathbb{R}^n : espacio real de dimensión n .
- * U, V, W son subespacios de \mathbb{R}^n .
- * R es la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dada por $aRb \Leftrightarrow a \neq 0$ y $\exists \lambda, \lambda b = a$.
- * $[a]$ es la clase de equivalencia de R definida por $[a]$
- * $\mathcal{P}^n = \{[a] | a \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\}$ denota al espacio proyectivo de dimensión n .
- * $\mathcal{L}_{n+1} = \{V | V \text{ es subespacio vectorial de } \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$.
- * $(\mathcal{L}_{n+1}, \leq, \wedge, \vee)$ es el retículo de subespacios de \mathbb{R}^{n+1} .
- * Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, b \rangle$ denotará el producto interno usual $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.
- * U^* denota el espacio dual del espacio vectorial U .
- * U^\perp denota una dualidad del subespacio U
- * $\mathcal{P}(V)$ es el subespacio proyectivo asociado al subespacio V .
- * $\hat{V} = \mathcal{P}(V)$.
- * $\mathcal{P}(\{0\}) := \emptyset$.
- * $\mathcal{S}_n = \mathcal{P}(\mathcal{L}_{n+1}) = \{\mathcal{P}(V) | V \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota el retículo de subespacios proyectivos de \mathcal{P}^n .
- * \hat{U}^\perp denota el dual del subespacio proyectivo \hat{U} .
- * \leq_p es la relación de orden sobre \mathcal{S}_n dado por $\hat{U} \subseteq \hat{V}$ si $U \subseteq V$.
- * $\hat{U} \wedge_p \hat{V} = \hat{U} \cap \hat{V}$.

-
- * $\hat{U} \vee_p \hat{V} = \hat{U} \oplus \hat{V}$.
 - * $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ y } x^T Q x = 0\}$ denota una cuádrica proyectiva.
 - * $C_ = \{[x] \mid x^T Q x = 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota una región cuádrica.
 - * $C_ > = \{[x] \mid x^T Q x > 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota una región cuádrica.
 - * $C_ \geq = \{[x] \mid x^T Q x \geq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota una región cuádrica.
 - * $C_ < = \{[x] \mid x^T Q x < 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota una región cuádrica.
 - * $C_ \leq = \{[x] \mid x^T Q x \leq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ denota una región cuádrica.
 - * $(A, B)^+, (A, B)^-$ denotan segmentos abiertos proyectivos de la recta proyectiva que pasan por A y B , y $[A, B]^+, [A, B]^-$ segmentos cerrados proyectivos.
 - * K es un conjunto convexo en \mathcal{P}^n
 - * K' es el complemento del conjunto convexo K .
 - * $\tau(K)$ es el tipo de $K \subset \mathcal{P}^n$ convexo.
 - * $A = a^\perp$ es la recta polar del punto a .
 - * $\rho(x)$ denota la polaridad de Apolonio aplicada al punto x .

*

Introducción

La motivación de esta tesis surge del interés del Dr. Gilberto Calvillo Vives y mío de generalizar problemas de optimización en espacios proyectivos. Tal interés fue motivado por el artículo Karmarkar (1984), donde se muestra un algoritmo polinomial para programación lineal que usa transformaciones proyectivas. Puesto que la convexidad es un elemento fundamental en la optimización, cualquier esfuerzo para extender los conceptos de la optimización al espacio proyectivo requieren de la definición de convexidad en tal espacio. El problema surge cuando se trata de generalizar la definición usual de convexidad ya que en el espacio proyectivo dos puntos definen dos segmentos de la recta que los une. Existen dos definiciones para la convexidad proyectiva: la primera definición de convexidad proyectiva dada por Groot y Vries (1957), posteriormente usada por Dekker (1965), es la siguiente: dado un conjunto $K \in \mathcal{P}^n$ y dos puntos A y B entonces K es convexo si y sólo si exactamente uno de los 2 segmentos que une A y B está dentro de K . La segunda definición dada en Calvillo y Mayo (1990) y usada en Bracho y Calvillo (1991) nos dice que al menos existe un segmento dentro de K que une A y B ; esta es la definición que usaremos en el capítulo 4. La diferencia entre estas definiciones es que en la primera definición la recta proyectiva no es un convexo y en la segunda lo es. En el artículo Bracho y Calvillo (1991), se demuestra un teorema para conjuntos convexos en el caso general; el primer objetivo de esta tesis es demostrarlo solo para las cuádricas.

A principio de los años 90 el Dr. Calvillo expuso su trabajo a Jack Edmonds y este sugirió que revisará un artículo de Frank Sinden que también se había interesado en optimización sobre el espacio proyectivo. Sinden adoptó la definición de convexidad de Groot y Vries (1957), pero intuyó que la convexidad podía tener otra definición con mayor riqueza. El artículo de Sinden se centra en el concepto de dualidad. El segundo objetivo de esta tesis es seguir las ideas de dualidad de Sinden y probar una conjetura suya acerca de la dualidad en regiones cuádricas. El tema de la dualidad aparece a lo

largo de la tesis en varios capítulos. Primero, aparece en el capítulo 1 en la sección de retículos de subespacios proyectivos; luego, en el capítulo 2 donde se ve que las funciones cuadráticas no degeneradas definen una dualidad y, por último, en el capítulo 5 titulado *Dualidad*, donde se habla de la dualidad de conjuntos convexos en \mathcal{P}^n . La conjetura de Sinden se probará en este capítulo.

Al trabajar en estos dos objetivos, nos percatamos que las cuádricas en \mathcal{P}^n son separadores naturales de \mathcal{P}^n , así que agregamos el capítulo 3 con título *Separación*, en el cual se aborda este tema.

Los capítulos 1 y 2 son introductorios. En el primero se define el espacio proyectivo real definiendo los puntos de \mathcal{P}^n como los subespacios de dimensión 1 en \mathbb{R}^{n+1} y consecuentemente los subespacios proyectivos de dimensión k como los subespacios lineales de dimensión $k + 1$ en \mathbb{R}^{n+1} . Donde dos puntos de \mathbb{R}^{n+1} representan el mismo punto de \mathcal{P}^n si son colineales con el origen.

En el capítulo 2 se estudian las cuádricas en \mathcal{P}^n y se clasifican de acuerdo a los valores propios de las matrices que las definen. El capítulo 3 titulado como *Separación*, se escribió al darnos cuenta que las cuádricas pueden servir como separadores de \mathcal{P}^n lo cual se prueba en este mismo capítulo.

Al final de esta tesis, se decidió agregar dos apéndices, el primero contiene cronológicamente una breve historia de la geometría proyectiva y el segundo contiene, de forma detallada, la descripción algebraica de la polaridad de Apolonio.

Índice general

1. Espacio proyectivo	1
1.1. Espacio proyectivo \mathcal{P}^n	1
1.2. Subespacios proyectivos	7
1.3. Dualidad proyectiva	9
2. Cuádricas	15
2.1. Cuádricas en \mathcal{P}^n	15
2.2. Ejemplo de clasificación de cuádricas en \mathcal{P}^2 y \mathcal{P}^3	20
2.3. Cuádricas con valores propios iguales a 0 (cuádricas degeneradas)	23
2.4. Formas bilineales y cuádricas	25
2.5. Polaridad en cuádricas	25
3. Separación	27
3.1. Separación en \mathbb{R}^n	27
3.2. Regiones cuádricas	29
4. Convexidad proyectiva	33
4.1. Definición de convexidad proyectiva	33
4.2. Convexidad proyectiva en regiones cuádricas	36
5. Dualidad	41
5.0.1. Polaridad de Apolonio	43
5.0.2. Polaridades y regiones cuádricas	47
A. Notas históricas	55
B. Polaridad de Apolonio	65

Capítulo 1

Espacio proyectivo

Para empezar este capítulo, se aclara que se trabajará en el campo de los reales, pues el interés de esta tesis se centra en el espacio proyectivo real.

Este capítulo describe el espacio proyectivo real \mathcal{P}^n y consta de dos secciones. En la primera sección, llamada *Espacio proyectivo \mathcal{P}^n* , se estudian la definición algebraica y el modelo geométrico de \mathcal{P}^n , algunas propiedades de la recta y el plano proyectivo (mismas que serán utilizadas en el capítulo 4). Al final de esta sección, se explica qué son los objetos proyectivos, una definición nueva y que más adelante se usará para facilitar la escritura de este trabajo.

La segunda sección de este capítulo titulada *Subespacios proyectivos* empieza con un breve repaso sobre los subespacios lineales en \mathbb{R}^n con el fin de introducir la definición de retículo de subespacios lineales en \mathbb{R}^n y con esto construir el retículo de subespacios \mathcal{P}^n , que se utilizará para precisar la definición de la dualidad proyectiva.

1.1. Espacio proyectivo \mathcal{P}^n

La descripción del espacio proyectivo está dada por $\mathcal{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/R$, en la cual la relación de equivalencia R está dada por $aRb \Leftrightarrow a \neq 0$ y $\lambda b = a$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Además, las clases de equivalencia de R están dadas por $[a] = \{b \in \mathbb{R}^{n+1} | b = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$. Así, las clases de equivalencia son las rectas que pasan por el origen sin el origen y representan a los puntos proyectivos en \mathcal{P}^n . Baer (1952).

Hay dos formas clásicas de representar las clases de equivalencia anteriormente mencionadas la primera es:

$\mathcal{P}^n = \{[(u_1, \dots, u_k, 1, 0, \dots, 0)] \mid u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k\}$ y si $k = 0$ define el punto $(1, 0, 0, \dots, 0)$ y se puede visualizar en la siguiente imagen 1.1 Esta forma de representación sirve para

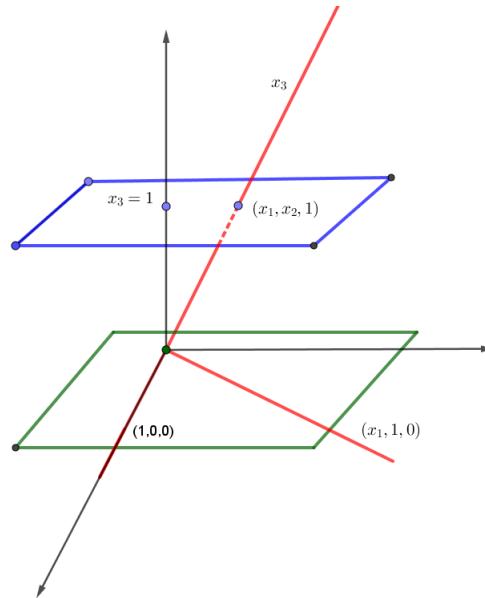


Figura 1.1: Representación de los puntos en el plano proyectivo

demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Cada uno de los puntos $(u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$ de \mathcal{P}^n define una clase de equivalencia diferente y toda clase de equivalencia dada por R está representada por uno de estos puntos.*

Demostración. La demostración se hará por casos:

Sea el punto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $x_{n+1} \neq 0$ se tiene que la clase de equivalencia $[(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})]$ es la misma que $[(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, 1)]$ cuando $u_j = x_j/x_{n+1}$, con $j < n + 1$. Para el caso donde el punto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ es de la forma $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$ con $x_{k+1} \neq 0$. Se tiene $[(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)] = [(u_1, \dots, u_k, \dots, 0)]$ con $u_j = x_j/x_{k+1}$ para $j < k$. Finalmente, el punto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x_1, 0, \dots, 0)$ tomando $u_1 = x_1/x_1 = 1$ es el punto asociado al eje x_1 . Obsérvese que $x_1 \neq 0$, ya que se removió el origen de las consideraciones.

□

La segunda representación de las clases de equivalencia restringe a los representantes a mantener la norma euclidiana igual a 1. Así, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, la clase $[x]$ es la misma que $[\frac{x}{\|x\|}]$. Sin embargo, en esta representación, los puntos $\frac{x}{\|x\|}$ y $\frac{-x}{\|x\|}$ representan la misma clase. Así que se debe escoger solo uno. Primero se considera los que tienen $x_{n+1} > 0$, pero aún tenemos la ambigüedad cuando $x_{n+1} = 0$. En este caso tomamos $x_n > 0$, y si $x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} = 0$, entonces, el representante es $(1, 0, \dots, 0)$.

Hasta ahora se ha definido al espacio proyectivo como el espacio donde los puntos son las clases de equivalencia dadas por R o como el espacio donde los puntos son las líneas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, intuitivamente se sabe que estas dos definiciones son lo mismo, pero no se ha demostrado. La demostración es la siguiente: se toma un punto proyectivo $[u] = \{v | v = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$ y a K como el espacio de una dimensión generado por u , entonces, el mapeo $[u] \rightarrow Ku$ da una biyección entre \mathcal{P}^n y el conjunto de subespacios de una dimensión en \mathbb{R}^{n+1} ; estos subespacios unidimensionales corresponden a las líneas por el origen en \mathbb{R}^{n+1} . La observación y la demostración se encuentran en Gallier (2010).

Habiendo descrito el modelo de \mathcal{P}^n que se usará a lo largo del trabajo, a continuación se hará un listado de algunas propiedades importantes de la recta proyectiva y del plano proyectivo.

Recta proyectiva

En esta sección se hablará de la recta proyectiva en comparación con la recta real destacando las siguientes propiedades:

Proposición 1.1.2. *La recta real \mathbb{R}^1 está contenida en la recta proyectiva \mathcal{P}^1 .*

Demostración. Para cada número real m se considera la recta $x_2 = mx_1$. El conjunto de las rectas incluye a todas las rectas que pasan por el origen excepto a la recta $x_1 = 0$. Es decir la recta euclideana esta en correspondencia biyectiva con las rectas con pendiente finita.

□

Proposición 1.1.3. *La recta proyectiva \mathcal{P}^1 es isomorfa a la circunferencia S_1 .*

Demostración. Considérese la circunferencia S^1 en \mathbb{R}^2 con radio 1 y centro en $(0, 1)$. Cada recta $y = mx$ que pasa por el origen intersecta a S^1 en el punto $(\frac{2m}{m^2+1}, \frac{2m^2}{m^2+1})$. Al punto $(0, 0)$ se le asocia el eje x_1 y al $(0, 2)$ se le asocia eje x_2 .

De esta manera, se define una función continua, la cual cumple con que a cada recta que pasa por el origen se le asocia un punto de S^1 . \square

Proposición 1.1.4. *La recta proyectiva \mathcal{P}^1 es completa.*

Demostración. Esta propiedad se hereda del hecho de que \mathbb{R} es completo. \square

Proposición 1.1.5. *La recta proyectiva \mathcal{P}^1 no admite un orden lineal.*

Demostración. Esta propiedad se sigue de la propiedad 1.1.3, la recta proyectiva al ser isomorfa a S^1 no admite un orden lineal. \square

Proposición 1.1.6. *Se necesita remover dos puntos de la recta proyectiva \mathcal{P}^1 para obtener dos componentes conexas (desconectadas).*

Demostración. Dado que un círculo es doblemente conexo se necesita remover dos puntos para separarlos en dos segmentos. Así, se tiene que dados dos puntos a y b en \mathcal{P}^1 se requieren dos puntos c y d para separarlos. \square

Proposición 1.1.7. *La recta proyectiva \mathcal{P}^1 es compacta.*

Demostración. Esta propiedad se hereda del hecho de que la recta proyectiva es homeomorfa a una circunferencia. \square

Modelo de \mathcal{P}^2

Imaginarse el espacio proyectivo es un ejercicio mental complicado y para dimensión $n > 2$ es imposible. Así que con el fin de fijar las ideas de la sección anterior y tener cierta noción e intuición de cómo se comporta geoméricamente \mathcal{P}^n , se decidió estudiar con detalle el plano proyectivo.

Considérese el plano Π_{x_3} en \mathbb{R}^3 descrito por la ecuación $x_3 = 1$, entonces, un punto proyectivo $[x]$ en \mathcal{P}^2 con $x_3 \neq 0$ está representado por el punto $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1) \in \Pi_{x_3}$. En

este modelo el lugar geométrico de una recta proyectiva es el plano generado por dos líneas homogéneas en \mathbb{R}^3 correspondientes a los puntos proyectivos $[x]$ y $[x']$, de esta manera la línea proyectiva definida por $[x]$ y $[x']$ queda como $l = \{z|[z] = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x'_1, x'_2, x'_3), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ con α, β diferentes de cero. Las líneas homogéneas paralelas al plano Π_{x_3} se nombrarán como puntos ideales o puntos al infinito y la línea al infinito es el conjunto que contiene a todos los puntos al infinito (el plano generado por $x_3 = 0$), como se ve en la figura 1.2.

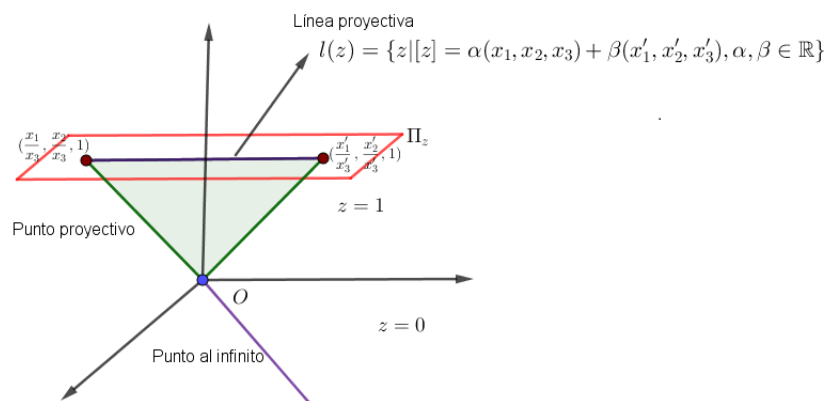


Figura 1.2: Plano proyectivo

Si se cambiara de carta; es decir, si ahora se tomara el plano Π_{x_2} descrito por la ecuación $x_2 = 1$, los puntos al infinito cambiarían, ya que ahora corresponderían a las líneas homogéneas paralelas a Π_{x_2} , lo que indica que estos puntos realmente no son especiales ni diferentes, sólo se llamaron así por convención. De esta manera, queda descrito el modelo geométrico de \mathcal{P}^2 .

Algunas propiedades importantes del plano proyectivo

Proposición 1.1.8. *En el plano proyectivo dos rectas cualesquiera siempre se intersectan.*

Demostración. Los puntos en \mathcal{P}^2 corresponden a las rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 y las rectas en \mathcal{P}^2 corresponden a los planos que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 . En \mathbb{R}^3 dos planos diferentes que pasan por el origen se intersectan en una recta. Así que las rectas

proyectivas correspondientes se intersectan en un punto; es decir, en el plano proyectivo no existen rectas paralelas. \square

Proposición 1.1.9. *Dos puntos a y b en \mathcal{P}^2 determinan una única recta.*

Demostración. Los puntos a y $b \in \mathcal{P}^2$ corresponden a dos rectas que pasan por el origen l_a y l_b en \mathbb{R}^3 . Se tiene que l_a y l_b en \mathbb{R}^3 determinan a un único plano Π que corresponde a una recta en \mathcal{P}^2 . \square

Proposición 1.1.10. *El plano proyectivo no puede separarse en dos componentes conexas removiendo una recta.*

Demostración. Supóngase que al remover una recta l el plano proyectivo puede separarse en dos componentes conexas, pero para tener dos componentes conexas en todas las rectas en el plano se les deben remover dos puntos, pero al remover a l se remueve solo el punto de intersección de l con cada una de las otras rectas y, por lo tanto, ninguna recta se parte en 2 componentes conexas. \square

Proposición 1.1.11. *Existe una dualidad entre puntos y rectas del plano proyectivo.*

Esta última proposición se estudiará a fondo en varias partes de la tesis; primero, en la sección *Dualidad en el retículo de los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1}* de este mismo capítulo; luego, se retomará en el capítulo 2 en la sección *Dualidad y cuádricas*; finalmente en el capítulo 5.

Objetos proyectivos

Con el fin de facilitar la escritura en capítulos posteriores, se propone la definición de lo que es un objeto proyectivo.

Se llamará *objeto proyectivo* a un conjunto de puntos en \mathbb{R}^{n+1} cerrado bajo la multiplicación por escalares; es decir, que cumpla con que al tomar cualquier punto dentro de él la línea homogénea definida por este punto también esté en el conjunto.

Los objetos proyectivos de \mathbb{R}^{n+1} están en relación biyectiva con los subconjuntos de \mathcal{P}^n mediante la relación de equivalencia R definida anteriormente. Debido a ello, en ocasiones, abusaremos del lenguaje refiriéndonos a un objeto proyectivo como un subconjunto correspondiente de \mathcal{P}^n .

Algunos ejemplos de objetos proyectivos son las soluciones de ecuaciones de polinomios homogéneos. A continuación se estudiarán los casos para grado 1 y 2. Los polinomios de grado uno $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ en \mathbb{R}^{n+1} representa un hiperplano que pasa por el origen y, por definición, es un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$. Cuando los polinomios son de segundo grado, se obtienen cuádricas $C(x) = xQx^t$ que se estudiarán detalladamente en el capítulo 3. Sin embargo, para ver que una cuádrica es un objeto proyectivo basta multiplicar x por $\lambda \neq 0$, de esta manera $(\lambda x)^T Q (\lambda x) = 0 \Leftrightarrow (x^T Q x) = 0 \Leftrightarrow x^T Q x = 0$, mostrando así que las cuádricas son objetos proyectivos.

1.2. Subespacios proyectivos

Esta sección llamada subespacios proyectivos tiene como fin explicar el concepto de dualidad proyectiva por medio del retículo proyectivo. Para lograrlo, se empezará con un breve repaso sobre subespacios lineales de \mathbb{R}^n , ya que los subespacios proyectivos de \mathcal{P}^n son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} .

Subespacios lineales de \mathbb{R}^n

Se denotará por $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$ al subespacio $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ generado por los vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$.

Un espacio vectorial se puede definir, mediante ecuaciones, de tres formas diferentes: con ecuaciones vectoriales, con ecuaciones paramétricas y con ecuaciones cartesianas.

Se dirá que $U \subset \mathbb{R}^n$, donde U es el subespacio $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$, es definido por ecuaciones vectoriales si cada vector $v \in U$ se expresa como $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

La siguiente forma de describir U es por medio de ecuaciones paramétricas, cada u_i tiene coordenadas $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in+1})$ con respecto a la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ en \mathbb{R}^n ; es decir, $u_i = \alpha_{i1}e_1 + \dots + \alpha_{in+1}e_{n+1}$. Si v es un vector de U de coordenadas (x_1, \dots, x_{n+1}) , sustituyendo los u_i en la ecuación vectorial de v , se llega a $v = (x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1(\alpha_{11}e_1 + \dots + \lambda_{n+1}\alpha_{1n+1}e_{n+1}) + \dots + \lambda_k(\alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{k(n+1)}e_{n+1})$, desarrollando estas igualdades se llega a:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda_1 \alpha_{11} + \dots + \lambda_k \alpha_{n1} \\
 &\vdots \\
 x_{n+1} &= \lambda_1 \alpha_{1n+1} + \dots + \lambda_k \alpha_{(n+1)(n+1)}
 \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones se pueden escribir como $x = \lambda A$ en forma matricial y son conocidas como ecuaciones paramétricas de U .

La última forma de describir a U es por medio de las ecuaciones que se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones dado por $Ax^T = 0$ donde A es la matriz con entradas α_{ij} correspondientes de las ecuaciones paramétricas y x es el vector de coordenadas (x_1, \dots, x_n) .

Es importante recordar que la dimensión del subespacio vectorial U se calcula dependiendo de la forma en la que esté expresado el subespacio: si es de forma vectorial, la dimensión se determina con el número de vectores linealmente independientes que generan a U ; en las paramétricas, por el número de parámetros; en la cartesiana, con el rango de la matriz A .

Como parte del recordatorio de los subespacios vectoriales, se verán las definiciones de las operaciones de intersección y suma directa de subespacios de \mathbb{R}^n , ya que son necesarias para definir el retículo de \mathbb{R}^n .

Sean U y V subespacios en \mathbb{R}^{n+1} , entonces, la intersección de subespacios se define como $U \cap V = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} | w \in U, w \in V\}$ y la suma como $U \oplus V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$. Estas dos operaciones de subespacios vectoriales dan como resultado subespacios vectoriales. Se debe notar que la unión de dos subespacios vectoriales puede no dar como resultado un subespacio vectorial; esto pasa porque en la unión de subespacios U y V hay nuevas combinaciones de vectores que se pueden sumar y que antes no se podían como, $u+v$ donde $u \in U$ y $v \in V$. Por ejemplo, sean los subespacios $U, V \subset \mathbb{R}^2$ de la forma $U = \langle 0, x_1 \rangle$ y $V = \langle x_2, 0 \rangle$, entonces, en la unión está $(0, 1)$ y $(1, 0)$ pero $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ no está.

1.3. Dualidad proyectiva

El Retículo de supespacios \mathbb{R}^{n+1}

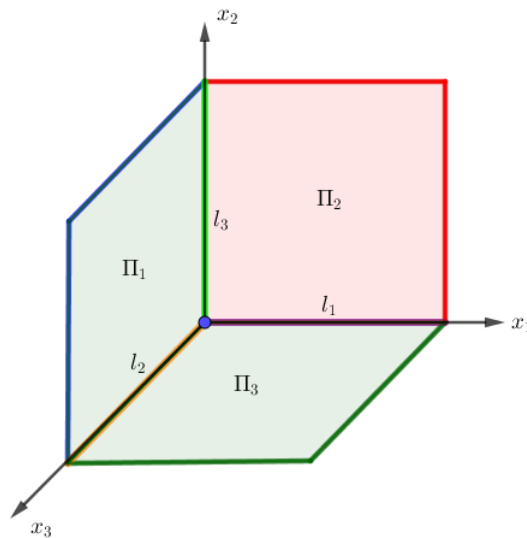
Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado por un orden \leq , donde para cada a, b en el retículo existe una única máxima cota inferior de $\{a, b\}$ que se llama *meet* \wedge y una única mínima cota superior de $\{a, b\}$ llamada *join* \vee . La mínima cota superior es el menor de los elementos del retículo que dado un subconjunto V cumple con ser mayor o igual a cualquier elemento de V . La máxima cota inferior es el mayor de los elementos del retículo, tal que dado un subconjunto V en el retículo cumple con ser menor o igual a cualquier elemento de V . Birkhoff (1948).

Un ejemplo de un retículo es el conjunto de todos los números enteros positivos, donde el orden parcial \leq está dado por m divide a n con n, m en el conjunto. Entonces, el retículo es dado por $m \vee n$, que es el mínimo común múltiplo de m, n , y por $m \wedge n$ que es el máximo común divisor de m, n .

El retículo \mathcal{L}_{n+1} de los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} es la estructura dada por $\mathcal{L}_{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \leq, \wedge, \vee)$. Si $U, V \subset \mathcal{L}_{n+1}$, entonces, el orden parcial se da por la inclusión de los subespacios; es decir, $U \leq V = U \subseteq V$, el \wedge es la intersección vista de la forma $U \wedge V = U \cap V$ y \vee es la suma directa de estos mismos subespacios donde $U \vee V = U \oplus V$.

Para ejemplificar el retículo de subespacios vectoriales, se verá \mathcal{L}_3 : el elemento maximal de \mathcal{L}_3 es todo \mathbb{R}^3 y el minimal $\{0\}$. Como no se pueden visualizar todos los subespacios de dimensión 2 que siguen del elemento maximal ni todos los subespacios de dimensión 1 que siguen del minimal, entonces, para poder ejemplificar las relaciones de incidencia de este retículo se tomarán solamente los siguientes subespacios de dimensión 1: l_1, l_2, l_3 que son rectas que pasan por el origen ortogonales entre ellas como se puede apreciar en 1.3 y los subespacios de dimensión 2 que son los planos Π_1, Π_2, Π_3 generados por las rectas de la siguiente forma: l_2, l_3 genera a Π_1 , l_3, l_1 genera a Π_2 y l_1, l_2 genera a Π_3 .

Las relaciones de incidencia en \mathcal{L}_3 dadas por \wedge son $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l_3$, $\Pi_1 \cap \Pi_3 = l_2$ y $\Pi_2 \cap \Pi_3 = l_1$ y por \vee son $l_1 \oplus l_2 = \Pi_3$, $l_1 \oplus l_3 = \Pi_2$, $l_2 \oplus l_3 = \Pi_1$, de esta forma queda descrito el retículo de manera gráfica, este subconjunto de \mathcal{L}_3 se ve como en el diagrama de Hasse 1.4.



4

Figura 1.3: Planos y rectas

Dualidad en los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1}

La dualidad es un concepto fascinante que se ha estudiado en todas las ramas del conocimiento humano. Baste recordar la teología cristiana con sus ideas del bien y el mal o el I Ching con el ying y el yang. En la Física se encuentra la dualidad partícula-onda luz; la literatura tampoco se queda atrás con *Dr. Jekyll y Mr. Hyde*, donde Robert Louis Stevenson examinó la noción de dualidad, por mencionar solo una de las obras literarias que abordan este tema. En geometría proyectiva informalmente se puede decir que la dualidad se refiere a la traducción de conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, mediante una biyección. Es decir, si el dual de A es B , entonces el dual de B es A . La dualidad es uno de los conceptos más importantes y característicos de \mathcal{P}^n ; su definición formal es difícil de entender, así que se decidió introducirla por medio de los retículos de subespacios vectoriales como lo hacen en Baer (1952).

En este capítulo se definirá la dualidad por medio de un producto interno, en este caso será el usual $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$; entonces, el dual del subespacio U se define como el complemento ortogonal de $U^\perp = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, s \rangle = 0, \forall v \in U\}$.

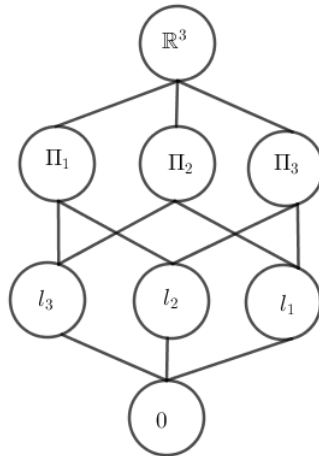


Figura 1.4: Diagrama de Hasse de algunos subespacios de \mathbb{R}^3

Proposición 1.3.1. *Si $U \subset V$, entonces $V^\perp \subset U^\perp$.*

Demostración. Sea $v \in V^\perp$, entonces $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in V$, y como $U \subset V$ también se cumple para todo $w \in U$, por lo que $v \in U^\perp$ y, por lo tanto, $V^\perp \subset U^\perp$. \square

Proposición 1.3.2. (*Leyes de Morgan*) *Sea $U, V \subset \mathbb{R}^3$, entonces se cumple $U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp$.*

Demostración. La primera contención que se demostrará es $(U + V)^\perp \subset U^\perp \cap V^\perp$, sea $x \in (U + V)^\perp$ entonces $x \notin U$ y $x \notin V$ por lo tanto $x \in (U + V)^\perp$. La segunda contención a demostrar es $U^\perp \cap V^\perp \subset (U + V)^\perp$. Sea $x \in U^\perp \cap V^\perp$ entonces $x \in U^\perp$ y $x \in V^\perp$ por lo tanto $x \notin U + V$ así que $x \in (U + V)^\perp$. \square

En la sección anterior se dio un ejemplo de retículo de un subespacio vectorial en \mathbb{R}^3 ; si se regresa a ver el diagrama de Hasse 1.4, se puede notar que tiene cierta simetría, así que si se busca el dual de un subespacio vectorial, basta con poner de cabeza el diagrama como se ve en 1.5. Al voltear el diagrama, lo que se está aplicando son las proposiciones anteriores que intercambian sumas e intersecciones y revierten la inclusión de subconjuntos. Los retículos que son simétricos bajo inversión son los retículos que tienen un dual.

Las relaciones de incidencia en este retículo dual se mantienen iguales intercambiando el \wedge por el \vee . Ver en Alberto S (2005).

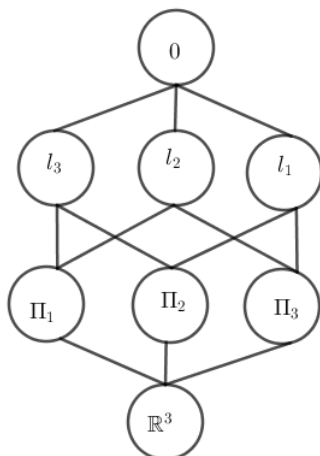


Figura 1.5: Diagrama dual de Hasse de algunos subespacios de \mathbb{R}^3

Retículo de \mathcal{P}^n y dualidad proyectiva

Como se mencionó anteriormente, los subespacios vectoriales \mathbb{R}^{n+1} son objetos proyectivos y los correspondientes subconjuntos de \mathcal{P}^n son los subespacios proyectivos. Al subespacio $\{0\}$ se le asocia por convención el vacío como subespacio de dimensión -1 . Así a cada subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ le asociamos el subespacio proyectivo $\hat{V} \subset \mathcal{P}^n$. Esta biyección puede extenderse a un isomorfismo de retículos.

El retículo proyectivo es la estructura $\mathcal{S}_n = (\mathcal{P}^n, \leq_p, \wedge_p, \vee_p)$. La relación de orden \leq_p en el retículo proyectivo está dada por $\hat{U} \subseteq \hat{V}$ si $U \subseteq V$, se define \wedge_p y \vee_p como: $\hat{U} \wedge_p \hat{V} = \widehat{U \cap V}$ y $\hat{U} \vee_p \hat{V} = \widehat{U \oplus V}$. Por consiguiente, el subespacio dual de \hat{U} se define como $\rho(U) = \widehat{U}^\perp$ y a cada elemento del retículo le corresponde su dual.

El retículo de los subespacios en \mathcal{P}^n coincide con el de \mathbb{R}^{n+1} aunque se debe hacer una modificación. En \mathcal{L}_{n+1} el elemento minimal está dado por $\{0\}$, pero en los subespacios proyectivos no existe este elemento, así que se introduce el subespacio proyectivo vacío que corresponde a la tupla de ceros y tiene dimensión -1 ; con esta modificación, se tiene que el elemento minimal de \mathcal{S}_n corresponde a la tupla de ceros y así \mathcal{S}_n es isomorfo a \mathcal{L}_{n+1} .

El principio de dualidad en el espacio proyectivo:

Todo teorema en espacios proyectivos de dimensión n , enunciado en términos de inclusiones, sumas y/o intersecciones de subespacios, proporciona un teorema dual, igualmente válido, obtenido mediante la sustitución de sumas por intersecciones, de intersecciones por sumas y los subespacios de dimensión r por subespacios de dimensión $n-r-1$. Esto último debido a que $\dim(\mathcal{P}^n) = n$ significa $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$. De ahí que si $\dim(\hat{V}) = r$, se tiene $\dim(\hat{V}^\perp) = \dim(V^\perp) - 1 = (\dim(\mathbb{R}^{n+1}) - \dim(V)) - 1 = [(n+1) - (r+1)] - 1 = n-r-1$.

Por ejemplo, la dualidad de \mathcal{P}^2 se observa en las siguientes dos afirmaciones duales:

- Dos puntos determinan una única línea; es decir, el \vee de dos puntos es una línea
- Dos líneas cualesquiera se encuentran en un único punto; es decir, el \wedge de dos líneas es un punto.

Este patrón de dualidad se observa en todos los teoremas clásicos de la geometría proyectiva como en el teorema de Desargues.

Aunque hay muchos más conceptos del espacio proyectivo que son interesantes para estudiar sobre todo en dimensión 2 y 3, la descripción de \mathcal{P}^n que se ha dado en este capítulo es suficiente para que en los próximos capítulos se puedan definir las cuádricas y los conjuntos convexos en \mathcal{P}^n . El definir a \mathcal{P}^n por medio de clases de equivalencia servirá para poder manipular fácilmente los objetos proyectivos como se observará en el siguiente capítulo. En el capítulo 2 se verá la dualidad como una forma bilineal y en el capítulo 5 se explorarán más ideas sobre la dualidad.

Capítulo 2

Cuádricas

Después de las variedades lineales, las cuádricas son las hipersuperficies más simples y se encuentran en todas las áreas de las matemáticas y la física. En el espacio proyectivo de dimensión 2, las cuádricas (conocidas como cónicas) han sido extensamente estudiadas. En este trabajo se analizan para dimensión n , con el fin de que todas las propiedades de convexidad que se demuestren posteriormente sean de manera general, aunque se revisarán algunos ejemplos para \mathcal{P}^2 y \mathcal{P}^3 .

2.1. Cuádricas en \mathcal{P}^n

Sea Q una matriz simétrica con las entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$, entonces, se define una cuádrica en \mathcal{P}^n como el subconjunto de puntos: $C = \{[x] | x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ y } x^T Q x = 0\}$.

Al examinar la definición de C , se observa que la matriz Q es la que define la cuádrica, por lo tanto, para poder obtener información de C , se debe analizar a la matriz Q . Los siguientes teoremas, definiciones y proposiciones de álgebra lineal relacionados con Q nos darán las herramientas para estudiar las cuádricas. La mayoría de los resultados que a continuación serán presentados no tendrán demostración ya que al ser resultados correspondientes al área del álgebra lineal no es relevante plasmarlos en este trabajo.

Una matriz A con valores en los reales es ortogonal si $A^T A = I$ y tiene las siguientes propiedades:

- Si A es ortogonal entonces A^T es ortogonal.

- Si A y B son matrices ortogonales entonces AB también es ortogonal.
- Si A es ortogonal entonces A^T que también es ortogonal es su inversa.
- La matriz identidad es ortogonal

Estas propiedades nos dicen que el conjunto de matrices ortogonales con entradas reales forman un grupo.

Las matrices ortogonales definen una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices simétricas a través de la conjugación. Definimos la relación de equivalencia de similitud como sigue:

Si Q y R son matrices simétricas se dice que Q es similar a R si existe una matriz B ortogonal tal que $BQB^T = R$.

Para demostrar la relación de equivalencia se enunciarán las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.1.1. *Sea P una matriz ortogonal, entonces P^TQP tiene los mismos valores propios que Q .*

Proposición 2.1.2. *Si A y B son matrices ortogonales entonces su producto también lo es.*

Demostración. Demostración de la relación de equivalencia entre matrices ortogonales en el conjunto de las matrices simétricas.

- La relación es simétrica. Si Q es similar a R se tiene $R = B^tQB$ entonces $BR = BB^tQB$ y $BRB^T = BB^tQBB^T = Q$
- La relación es reflexiva. $Q = IQI^t$.
- La relación es transitiva. Si Q es similar a R se tiene $R = BQB^t$ y R es similar a T se tiene $T = ARA^T$ entonces $T = ABQB^tA^T = (AB)Q(AB)^T$ por lo que Q es similar a T .

□

Teorema 2.1.3. *Si Q es una matriz simétrica entonces existe una matriz diagonal D similar a Q . Por lo tanto existe una matriz B ortogonal tal que $D = BQB^T$.*

El teorema 2.1.3 es un caso especial del *Teorema espectral*; la demostración se encuentra en Friedberg, Insel, y Spence (1997a), y el caso especial, en Friedberg, Insel, y Spence (1997b).

Las matrices de permutación son ortogonales. Si los elementos de D son diferentes entonces existen $n!$ matrices diagonales a Q .

Las siguientes proposiciones estudian diferentes transformaciones sobre las matrices ortogonales.

Proposición 2.1.4. *La transformación $yB = x$ es una isometría.*

Proposición 2.1.5. *Una enlogación $T(x) = Ex$ es una transformación. donde E es una matriz diagonal con entradas positivas.*

Proposición 2.1.6. *La transformación $yT(x) = yBEx$ es un homomorfismo.*

Proposición 2.1.7. *La imagen de una cuádrlica bajo T es otra cuádrlica.*

A partir de estas proposiciones se puede decir que la cuádrlica que se obtiene después de aplicar la enlogación es homeomorfa a la original. Es decir, son cuádrlicas cualitativamente iguales.

Para realizar el análisis y la clasificación de C se aplica el teorema 2.1.3 a la matriz Q que define a C , así $Q = B^TDB$ donde Q es una matriz diagonal con a_i valores propios con $i = 1, \dots, n$. Al rango de Q se le llamará codimensión del lugar singular $\text{codimSing}(C(Q))$, Rodríguez-Sanjuarjo y Sancho (1998).

Siguiendo con el análisis de C , si se tiene $x^TQx = 0$ con Q descrita como en el párrafo anterior y se toma la matriz E como la matriz con entradas $e_{ii} = |d_{ii}|^{\frac{1}{2}}$ si $d_{ii} \neq 0$ y $e_{ii} = 1$. Donde las d_{ii} con $i = 1, \dots, n$ son las entradas de la diagonal de la matriz Q . Entonces $E^{-1}QE^{-1} = F$ con entradas $f_{ii} = 1$ si $d_{ii} > 0$, $f_{ii} = -1$ si $d_{ii} < 0$ y $f_{ii} = 0$ entonces

$d_{ii} = 0$. Como F es equivalente a Q se puede decir que Q ahora es una matriz diagonal con entradas en la diagonal con valor $1, -1$ ó 0 .

Esta forma de reescribir las cuádricas permite clasificarlas por medio del signo de las entradas de la diagonal de Q :

- Caso 1: todos los valores en la diagonal son distintos de cero y con el mismo signo. A este caso le corresponderá el vacío y, por lo tanto, no es de interés estudiarlo.
- Caso 2: al menos dos de los valores en la diagonal tiene signo distinto y puede haber valores iguales a cero, así sin pérdida de generalidad los valores propios de Q se pueden agrupar en tres grupos, los valores de la diagonal se parten en tres grupos con $a_i > 0$ para $i \leq k$, $a_i < 0$ para $k + 1 \leq i \leq l$ y $a_i = 0$ para $i > l$.

A partir de aquí se tomará siempre a Q con al menos dos de sus valores en la diagonal con signo diferente.

El caso 2 se clasificará en 2 subcasos, dependiendo de si Q tiene valores 0.

El siguiente teorema demostrado en Friedberg, Insel, y Spence (1997c) da información sobre los coeficientes de C :

Teorema 2.1.8. Ley de inercia de Sylvester para matrices: *Sea A una matriz simétrica expresada en la forma $A = B^T D B$ donde B es ortogonal y D diagonal. Entonces, el número de las entradas positivas y las negativas de la diagonal de la matriz D es independiente de la matriz A .*

Entonces, por el teorema 2.1.8 el número de sumandos positivos de C es un invariante y es denominado *signatura*. Al rango de Q se le llamará *codimensión del lugar singular* $\text{codimSing}(C)$. Rodríguez-Sanjuarjo y Sancho (1998). Se llamará *signatura proyectiva* al valor absoluto del número de valores positivos menos el número de valores negativos $\sigma = |k - (l - k)| = 2k - l$ y la *codimensión de Singer* (el rango de Q queda como $\text{codimSing}(C) = n + 1 - (n + 1 - l) = l$). Se dirá que las cuádricas que tienen la misma *signatura proyectiva* y *codimensión* se clasificarán como cuádricas iguales. En resumen, se puede decir que clasificar proyectivamente las superficies cuadráticas equivale a encontrar las formas canónicas a las que se puede reducir Q por medio de las transformaciones

utilizadas anteriormente y contar las combinaciones posibles de los signos de cada entrada de la matriz.

Para calcular el número de cuádricas diferentes que existen en \mathcal{P}^n se define el siguiente sistema de desigualdades; donde cada solución de este sistema representa un tipo de cuádrica. El sistema toma a k y l como enteros y se resuelve para soluciones enteras:

$$\begin{aligned} 0 < n + 1 & \tag{2.1} \\ k \leq l \leq n + 1 & \\ l - k \leq k & \end{aligned}$$

La desigualdad $0 < n + 1$ indica que la cuádrica más pequeña tiene una matriz Q de tamaño 1×1 . La desigualdad $k \leq l \leq n + 1$ implica que al menos siempre existe un valor propio positivo y uno negativo, reduciéndola a $k - l \leq 0$ se grafica como la recta $k = l$. La última desigualdad $l - k \leq k$ supone sin pérdida de generalidad que existen igual o menos sumandos negativos que positivos.

La solución de este sistema se ve de la siguiente manera:

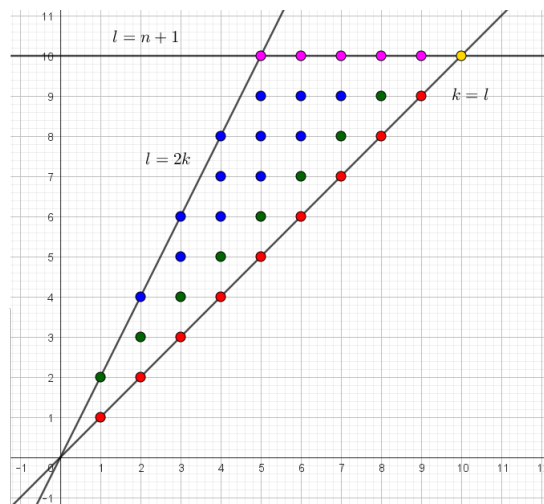


Figura 2.1: Solución hasta $n = 10$ del sistema de desigualdades 2.1

En el dibujo 2.1 cada punto representa una cuádrica, el dibujo solo llega hasta $n = 10$

pero se sigue hasta cualquier valor de n . Si se analiza la solución del sistema, se llega a que si n es par se tienen $(\frac{n}{2})^2 + n$ cuádricas y si n es impar, se tienen $(\frac{n+1}{2})^2 + \frac{n+1}{2} - 1$.

Si se observa 2.1, se tiene una bonita clasificación visual de las cuádricas en \mathcal{P}^n : los puntos rojos que están sobre la recta $k = l$ corresponden a las cuádricas que tienen sólo valores positivos y ceros; entonces, representan el vacío proyectivo dado por los coeficientes iguales a 1 más subespacios dados por los coeficientes iguales a cero. El punto amarillo es la cuádrica con todos los coeficientes positivos y representa el vacío proyectivo. A este tipo de cuádricas se les llamará cuádricas lineales. La cuádrica C representada solo por entradas iguales a cero no se tomará en cuenta para el conteo ni como un tipo de cuádrica.

A las cuádricas representadas por los puntos que no están sobre la línea $k = l$ se les llamará cuádricas no lineales y son las que se estudiarán a fondo en este y los siguientes capítulos. A partir de este momento, cuando se nombren a las cuádricas, se estará refiriendo a las no lineales a menos de que se indique lo contrario. Los puntos verdes y rosas representan cuádricas más subespacios dependiendo del número de coeficientes positivos, negativos y ceros. Un ejemplo es el punto $(3, 4)$, en el que se tienen 3 coeficientes positivos, uno negativo y seis con coeficiente cero. Entonces, se tiene una esfera con dimensión 2 más un subespacio de dimensión 6.

Los puntos rosas sobre la recta $l = n + 1$ son las cuádricas que no tienen valores propios iguales a cero, más adelante en este capítulo se analizarán estas cuádricas para \mathcal{P}^2 y \mathcal{P}^3 .

Todas las cuádricas, menos las representadas por los puntos rojos, son separadores, esto se estudiará en el próximo capítulo.

2.2. Ejemplo de clasificación de cuádricas en \mathcal{P}^2 y \mathcal{P}^3

Para ejemplificar este proceso de clasificación de las cuádricas, se estudiará el caso de las cuádricas en \mathcal{P}^2 . Las cuádricas degeneradas se estudiarán con mayor detalle en la siguiente sección.

Sea una cuádrica en \mathcal{P}^2 dada por $C = \{x_i \in \mathcal{R}^3 | x^T Q x = 0\}$ y si se aplica el teorema 2.1.3 a C para cada Q dada por la combinación de coeficientes de C , entonces, para cada Q queda una matriz diagonal con entradas 1, -1 y 0. Para poder clasificar esta

cuádrica, basta con estudiar cuántas combinaciones de signos pueden tener las entradas de Q . La diagonal de Q se denotará como $d = (d_1, d_2, d_3)$, donde las d_i son las entradas de las diagonales de Q correspondientes al renglón i . Entonces, para $C \subset \mathcal{P}^2$ se tienen las siguientes posibilidades de combinaciones en los signos:

$$(1, 1, 1), (-1, -1, -1), (1, -1, -1), (1, 1, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, -1, 0), (-1, 0, -1), \\ (0, -1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), \\ (1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (-1, 0, 0).$$

Las primeras dos tuplas $(1, 1, 1), (-1, -1, -1)$, que en la figura 2.1 están representadas por el punto $(0, 0)$ donde todas las entradas tienen el mismo signo, son equivalentes y corresponden al vacío proyectivo. Las tuplas $(1, -1, -1)$ y $(1, 1, -1)$ representadas en el dibujo 2.1 por el punto $(2, 3)$ también son equivalentes entre ellas, ya que una se obtiene de la otra sólo multiplicando por un signo. Por lo anterior, se puede concluir que solo hay una tipo de cuádrica en \mathcal{P}^2 sin entradas iguales a cero y es correspondiente a una elipse en contraste con R^2 donde existen 3 tipos de cuádricas no degeneradas (parábola, hipérbola y elipse).

Las tuplas con entradas cero se reducen a los siguientes casos: $(1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0)$. La primera tupla representa un subespacio y la otras dos representan una cuádrica más un subespacio. Estas tuplas se representan en 2.1 por los puntos $(1, 1)$, el punto $(2, 3)$ y el punto $(2, 2)$, respectivamente.

Otro ejemplo de la clasificación de cuádricas es el análisis de $C \subset \mathcal{P}^3$, sea $C = \{x_i \mathcal{R}^4 | x^T Q x = 0\}$ donde se aplica el teorema 2.1.3 a cada Q posible y se obtienen matrices diagonales con entradas 1 -1 o 0.

De aquí quedan las siguientes tuplas sin valores propios iguales a cero:

$(1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1), (-1, -1, -1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, -1)$ desechando las tuplas que son equivalentes quedan las siguientes: $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, -1)$, donde la primera corresponde al vacío proyectivo y en 2.1 es el punto $(0, 0)$. La tupla $(1, 1, 1, -1)$ corresponde a un elipsoide y es representada en 2.1 como el punto $(3, 4)$ y $(1, 1, -1, -1)$ se puede pensar como un hiperboloide, que en \mathcal{P}^3 corresponde a un toro y es representado en 2.1 por el punto $(2, 4)$. Entonces, las cuádricas no degeneradas en \mathcal{P}^3 se clasifican en dos tipos.

Las cuádricas degeneradas en \mathcal{P}^3 tienen las siguientes tuplas: $(1, 0, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, -1, 0)$, representadas en 2.1 por los siguientes puntos $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, los cuales representan subespacios (el número de subespacios es el número de ceros) más una cuádrlica de dimensión 2 o 3. Esto se explicará más adelante en la sección 2.3 de este capítulo.

Es interesante revisar con cuidado el caso del hiperboloide, ya que la ecuación de la cuádrlica en \mathcal{P}^3 que le corresponde es $C = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$; esta cuádrlica se puede representar en \mathbb{R}^3 como un hiperboloide que corta el plano $x_3 = 1$ como se ve en 2.2.

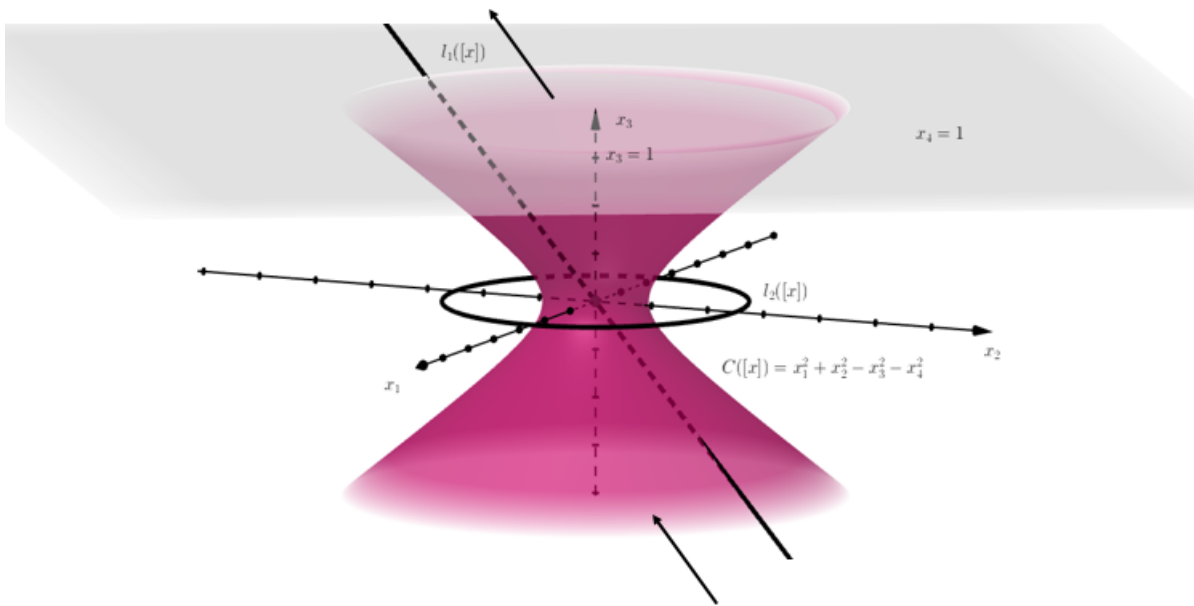


Figura 2.2: Cuádrlica en \mathcal{P}^3

El hiperboloide puede cambiar de posición, dependiendo de que carta se tome como $x_i = 1$. Geométricamente, si se hacen cortes paralelos al plano $x_3 = 1$, los cortes se verán como círculos y quedan representados por la recta proyectiva $l_1 = \{[x] | x \in \mathbb{R}^4 \text{ y } x_1 + x_2 = 0\}$. Si los cortes del hiperplano son transversales como se muestra en el dibujo 2.2, son representados por la recta proyectiva $l_2 = \{[x] | x \in \mathbb{R}^4 \text{ y } x_3 + x_4 = 0\}$. El hiperboloide, al estar formado de rectas proyectivas, cumple con que las rectas son cerradas, por lo que ocasiona que el hiperboloide se conecte extremo con extremo. En el dibujo 2.2 esta conexión queda representada con la flechita.

Por otra parte si se toma otra carta $x_4 = 0$ de $C = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ se obtiene un

paraboloide hiperbólico o silla de montar como se ve en 2.3.

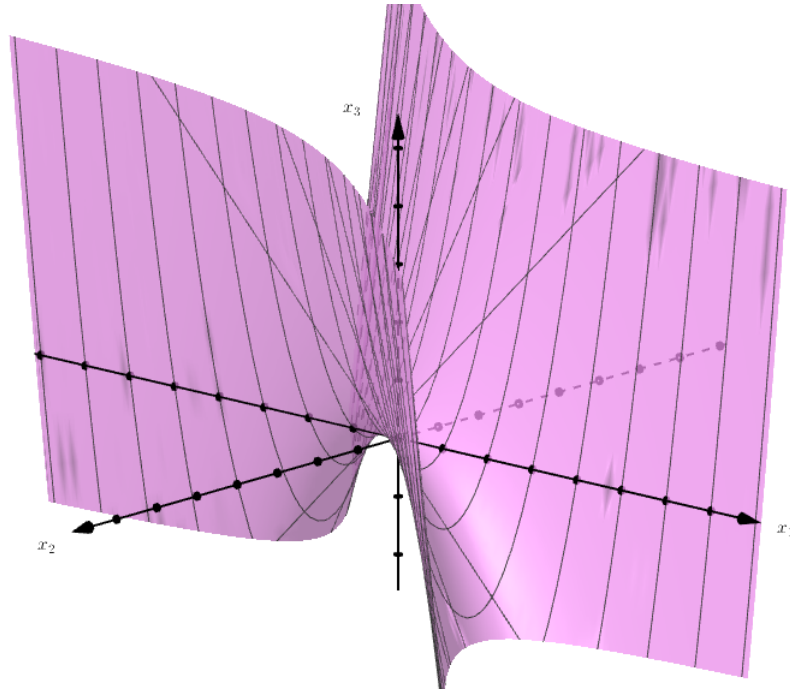


Figura 2.3: Cuádrica en \mathcal{P}^3

Esta forma de ver C se retomará en el siguiente capítulo para ejemplificar el concepto de región cuádrica en el espacio proyectivo. Por ahora, se debe notar que las rectas en C quedan determinadas por sus intersecciones con el plano $x_1 = cte$ y $x_2 = cte$.

2.3. Cuádricas con valores propios iguales a 0 (cuádricas degeneradas)

Las cuádricas que tienen valores propios iguales a cero se comportan diferente, ya que se pueden descomponer en dos objetos proyectivos. Para poder entenderlo, se necesitan las siguientes proposiciones:

Proposición 2.3.1. Sean S y T objetos proyectivos de \mathbb{R}^{n+1} tales que $S \subseteq V$ y $T \subseteq V^\perp$ donde V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, la suma de Minkowski de S y T es también un objeto proyectivo $S + T$.

Demostración. Sea $a \in S + T$, $a \neq 0$. Entonces, $a = b + c$ donde $b \in S$ y $c \in T$. Puesto que S y T son objetos proyectivos, por lo tanto las líneas homogéneas $[b]$ y $[c]$ están en S y T , respectivamente. Así $\Pi = [b] + [c]$ es un plano de \mathbb{R}^{n+1} que pasa por el origen. Claramente, $a \in \Pi$ y también $[a] \in \Pi \subseteq S + T$. \square

Proposición 2.3.2. *Sean S y T como en 2.3.1. Entonces, $\mathcal{P}(S + T) = [\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(T)]$ que denota la unión de todas las rectas de \mathcal{P}^n que intersectan a $\mathcal{P}(S)$ y a $\mathcal{P}(T)$.*

Demostración. Sea $a \in [\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(T)]$, entonces, $a = b + c$ donde $b \in S$ y $c \in T$. Así que $[b] \in \mathcal{P}(S)$ y $[c] \in \mathcal{P}(T)$, la recta proyectiva L que une a $[b]$ con $[c]$ corresponde al plano $\Pi \in \mathbb{R}^n$ generado por b y c . Así que $a \in \Pi$ y $[a] \in L$ y, por consiguiente, $[a] \in \mathcal{P}(S + T)$.

Consideremos ahora $a \in \mathcal{P}(S + T)$, por ende $[a]$ es un punto de alguna recta L que intersecta a $\mathcal{P}(S)$ y a $\mathcal{P}(T)$. Sean $b \in L \cap \mathcal{P}(S)$ y $c \in L \cap \mathcal{P}(T)$, puesto que $[a], [b]$ y $[c]$ están en L entonces a, b y c están en $\Pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\mathcal{P}(\Pi) = L$, por lo tanto $a = \beta b + \gamma c$. Obsérvese que $b \in S$ y $c \in T$, pero como S y T son objetos proyectivos, $\beta b \in S$ y $\gamma c \in T$ implica que $a \in S + T$ y, por consiguiente, $[a] \in \mathcal{P}(S + T)$. \square

Dadas las dos proposiciones anteriores, la cuádrlica $C = \{[x] \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + 0(x_{r+1}^2) + \dots + 0(x_{n+1}^2) = 0\}$, donde $a_i = 0$ para $i > r$, se puede descomponer en un subespacio de dimensión r y en una cuádrlica no degenerada C' en el subespacio ortogonal de dimensión $(n+1) - r$. Si se toma e_i como los vectores unitarios con $i = 1, \dots, n+1$, entonces los subespacios en los que se descompone la cuádrlica quedan como $V = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ y su subespacio ortogonal $V^\perp = \langle e_{r+1}, \dots, e_{n+1} \rangle$. Formalmente se tiene el siguiente teorema:

+

Teorema 2.3.3. *La cuádrlica $C \subset \mathcal{P}^n$ es la suma de Minkowski de una cuádrlica no degenerada $C' \subseteq P^{r-1}$ y el subespacio proyectivo $P(V^\perp)$.*

Demostración. Se sigue directamente de las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2. \square

Un ejemplo de este tipo de cuádrlicas en \mathcal{P}^3 es con la cuádrlica $C = \{[(x_1, x_2, x_3, x_4)] | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$; obsérvese que esta cuádrlica está en \mathbb{R}^4 y puede descomponerse en dos conjuntos S y T . El primero contenido en el subespacio $V = \langle x_1, x_2, x_3, 0 \rangle$ y el segundo conjunto $V^\perp = \langle 0, 0, 0, x_4 \rangle$. De esta forma, S y T quedan definidos como $S =$

$\{(x_1, x_2, x_3, 0) | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ y $T = V^\perp$. Así, $C = S + T$ y por la proposición 2.3.2 se tiene $\mathcal{P}(C) = [\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(T)]$. Puesto que $\mathcal{P}(S)$ es un círculo en \mathcal{P}^3 y $\mathcal{P}(T) = p$ es un punto de \mathcal{P}^3 fuera del plano que contiene a $\mathcal{P}(S)$, entonces, $[\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(T)]$ es un cono (proyectivo) con vértice en p .

2.4. Formas bilineales y cuádricas

La definición de una cuádriga C en \mathcal{P}^n se relaciona con una forma bilineal.

Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} . Una función $H : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una forma bilineal si:

$$H(u + v, w) = H(v, w) + H(u, w)$$

$$H(u, v + w) = H(u, v) + H(u, w)$$

$$H(\alpha u, v) = \alpha H(u, v)$$

$$H(u, \alpha v) = \alpha H(u, v)$$

$\forall u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Una forma bilineal es simétrica si $H(u, v) = H(v, u) \forall u, v \in V$.

Una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una forma cuadrática si existe una forma bilineal H tal que $C(x) = H(x, x)$. En general, se puede tomar $H(x, x) = x^T Q x$ con $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ y Q una matriz simétrica $M_{n \times n}$.

2.5. Polaridad en cuádricas

Sea $C \subset \mathcal{P}^n$ una cuádriga definida por $p^T Q p = 0$ en \mathbb{R}^{n+1} . Dos puntos proyectivos p y p' son conjugados con respecto a C si $p^T Q' p' = 0$.

Se llamará polar de un punto al conjunto $pol_C(p) = \{[p'] \in \mathcal{P}^n | p^T Q' p' = 0\}$. Si $L \subset \mathcal{P}^n$ es una variedad lineal proyectiva, se llamará polar de L con respecto a C al conjunto de todos los puntos conjugados con todos los de L ; es decir, $pol_C(L) = \{[p'] \in \mathcal{P}^n | p^T Q' p' = 0 \forall p \in L\}$.

Observación 2.5.1. Si C es una cuádriga no degenerada en \mathcal{P}^n (las cuádricas no degeneradas están representadas en el dibujo 2.1 por los puntos rosas), la polaridad inducida por la aplicación $\Phi'_Q : \mathcal{P}^{*n} \rightarrow \mathcal{P}^n$ asocia a cada punto en C a un hiperplano polar.

El tema de polaridad en cuádricas se retomará en el capítulo 5 donde se introducirá la polaridad de Apolonio en el espacio proyectivo.

Capítulo 3

Separación

La primera sección de este capítulo es un breve recordatorio de los separadores naturales de \mathbb{R}^n y su relación con las cuádricas en \mathcal{P}^n . En la segunda sección, se da la definición de una región cuádrica, se dan algunos ejemplos en \mathcal{P}^2 y se demuestra que las cuádricas son separadores de \mathcal{P}^n .

3.1. Separación en \mathbb{R}^n

Un separador geométrico de \mathbb{R}^n es una hipersuperficie cuyo complemento consiste en dos conjuntos disjuntos. En \mathbb{R}^n es bien conocido que sus separadores básicos son el hiperplano y la esfera. Si se remueve un hiperplano o una esfera de \mathbb{R}^n se obtienen dos conjuntos convexos ajenos. De hecho, un hiperplano se puede considerar como el límite de una familia de esferas que pasa por un punto cuyo centro está cada vez más lejano. Las imágenes homeomorfas de los hiperplanos y las esferas son también separadores. Es por ello que los hiperplanos y las esferas pueden considerarse separadores básicos.

El ejemplo más sencillo es en \mathbb{R}^2 y el hiperplano $x_2 = 0$ como separador; si se remueve el hiperplano, quedan dos conjuntos ajenos que corresponden al conjunto definido por los números positivos del eje x_2 y el otro conjunto por los números negativos; estos dos conjuntos ajenos se pueden definir por desigualdades. En el artículo Winder (1966), se demuestra en cuantas regiones separan k hiperplanos a \mathbb{R}^n .

Encontrar separadores geométricos en \mathbb{R}^n es un problema clásico de optimización para conjuntos convexos y, en particular, en las llamadas *support vector machines*. Nello Cris-

tianini (2000). La generalización de estos separadores está dada por el teorema de Jordan-Brouwer, cuya prueba fue bosquejada por Lebesgue y, después, demostrada por Brouwer. Dieudonné (1989).

Teorema 3.1.1. *Dado un subconjunto J de \mathbb{R}^n homeomorfo a S_{n-1} se tiene:*

- *El complemento $\mathbb{R}^n - J$ contiene dos componentes conexas*
- *J es la frontera de cada componente conexa en $\mathbb{R}^n - J$*

En \mathcal{P}^n no es posible separar el espacio por medio de un hiperplano, ya que si se remueve uno, lo que se obtiene es un espacio isomorfo a \mathbb{R}^n . Entonces, ¿cuáles son los separadores básicos en \mathcal{P}^n ? Antes de contestar esta pregunta, se harán las siguientes observaciones sobre las cuádricas en \mathcal{P} y \mathcal{P}^2 .

Sea $C \subseteq \mathcal{P}$ donde se toma la función cuádrica $C = \{x_i \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 - x_2^2 = 0\}$. Como $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ y, por lo tanto, se cumple que $(x_1 - x_2) = 0$ ó $(x_1 + x_2) = 0$. Estas dos últimas expresiones corresponden a las rectas que se encuentran a $\pm 45^\circ$ del eje x_1 , si se toma la carta $x_2 = 1$, se tiene que cruzar las rectas $x_1 = -x_2$ y $x_2 = x_1$ en dos puntos diferentes y estos puntos son un separador. En general, los únicos separadores de \mathcal{P} son dos puntos diferentes.

Si se sube una dimensión y se toma $C \subseteq \mathcal{P}^2$ donde $C = x_1^2 - x_2^2 + 0 * x_3^2 = 0$, obsérvese que para cualquier valor de x_3 se cumple $C = 0$. De esta forma, se tiene que C corresponde a dos planos que se cruzan en el eje x_3 , entonces $P(C)$ es un par de rectas que se cruzan en un punto.

Otro caso posible en \mathcal{P}^2 es $C = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, si se toma la carta $x_3 = 1$ se tiene que $C = x_1^2 + x_2^2 = 1$ que corresponde a una circunferencia y también es un separador en \mathcal{P}^2 . Para C de dimensión n con un coeficiente igual -1 se obtiene como separador una esfera de una dimensión menos y también es un separador. De hecho, estos separadores corresponden a la línea punteada verde en la figura 2.1.

Estas observaciones sobre \mathcal{P} y \mathcal{P}^2 muestran que dos hiperplanos y las esferas sirven como separadores del espacio proyectivo, entonces, se puede pensar que algunas cuádricas funcionan como separadores de \mathcal{P}^n . En el capítulo 2 se estudió la clasificación de las cuádricas

por medio de desigualdades; utilizando esa clasificación, se tiene que todas las cuádricas representadas en la figura 2.1, menos las cuádricas correspondientes a los puntos rojos, son separadores de \mathcal{P}^n y en la siguiente sección se demostrará.

3.2. Regiones cuádricas

En esta sección se definirá una región cuádrica en \mathcal{P}^n y se demostrará que una cuádrica en \mathcal{P}^n es un separador que parte en dos regiones cuádricas al espacio proyectivo. Para poder demostrarlo, se utilizarán las propiedades de la recta proyectiva y del plano proyectivo vistas en el capítulo II.

Para dar la definición de región cuádrica, se recuerda que a un polinomio homogéneo $W(x)$ de segundo grado en \mathbb{R}^2 , en el cual se toma una desigualdad del tipo $W(x) \geq 0$ o $W(x) \leq 0$ en vez de una igualdad $W(x) = 0$, se le llamará desigualdad cuadrática. Un ejemplo de una desigualdad cuadrática en \mathbb{R}^2 es la desigualdad $W(x) = x_1^2 + x_2^2 < 16$ que representa el interior de un círculo de radio cuatro. Resolviendo la desigualdad, se llega a $-4 < x_1 < 4$ y $-\sqrt{16 - x_1^2} < x_2 < \sqrt{16 - x_1^2}$; estas dos desigualdades juntas nos dan la solución de $W(x) = x_1^2 + x_2^2 < 16$ que gráficamente es el interior del círculo. La solución de la desigualdad está dividiendo el plano en dos partes: en lo que está dentro de la cuádrica y en lo que está afuera. A estas regiones se les llamará regiones cuádricas. Este ejemplo ilustra como son unas regiones cuádricas en \mathbb{R}^2 .

Con la idea anterior en mente se definirán las regiones cuádricas en \mathcal{P}^n :

Para la cuádrica $C = \{x | x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ y } x^T Q x = 0\}$, se definirán las regiones cuádricas proyectivas dadas por C con alguno de los siguientes conjuntos de \mathcal{P}^n , donde Q es una matriz simétrica. :

- $C_ = = \{[x] | x^T Q x = 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$
- $C_ > = \{[x] | x^T Q x > 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$
- $C_ \geq = \{[x] | x^T Q x \geq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$
- $C_ < = \{[x] | x^T Q x < 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$
- $C_ \leq = \{[x] | x^T Q x \leq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$

Observación 3.2.1. $C_{<}$, $C_{>}$ denotan regiones abiertas y C_{\geq}, C_{\leq} denotan las regiones con la frontera de C . Además, si se tiene una región con frontera C_{\geq} , su región complementaria es $C_{<}$.

Proposición 3.2.2. Las regiones cuádricas son objetos proyectivos.

Demostración. Sea C y sus regiones cuádricas $C_{=}$, $C_{>}$ y C_{\leq} y el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, $\lambda * C_{=} = \{[x] | (\lambda * x^T)Q(\lambda * x) = 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \{[x] | \lambda^2 * (x^T Q x) = 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ que está contenido en $C_{=}$. Se tiene que $\lambda * C_{>} = \{[x] | (\lambda * x^T)Q(\lambda * x) > 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \{[x] | \lambda^2 * (x^T Q x) > 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ que está contenido en $C_{>}$, ya que como se está multiplicando por λ^2 no cambia el sentido de la desigualdad. Por último, se tiene que $\lambda * C_{\leq} = \{[x] | (\lambda * x^T)Q(\lambda * x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \{[x] | \lambda^2 * (x^T Q X) \leq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$, donde la desigualdad no cambia por la misma razón que en $C_{>}$, entonces, está contenido en C_{\leq} . Si se toman las regiones cuádricas $C_{<}$ y C_{\geq} , la demostración es similar. \square

Las regiones cuádricas están determinadas por la matriz Q asociada a la cuádrlica C . En el ejemplo de $C \subset \mathcal{P}^2$, en el capítulo 2 donde Q tiene valores propios positivos, negativos, se demuestra que la cuádrlica es una elipse. Esta cuádrlica tiene como regiones cuádrlicas a C_{\geq} que corresponde a la frontera y lo que está fuera de la elipse y $C_{<}$ que corresponde al interior de la elipse.

Otro ejemplo para visualizar las regiones cuádrlicas es tomar la cuádrlica $C = \{[x] | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\}$ y se toma la carta $x_4 = 0$, esto da una silla de montar. Evaluando C en cada vector canónico, se tiene que $C(e_1) = 1$, $C(e_2) = 1$, $C(e_3) = -1$ y $C(e_4) = -1$ como se ve en 3.1 y la frontera de C queda representada por la curva verde. En este dibujo se ve claramente como la frontera de C está en dos regiones de \mathcal{P}^3 .

El otro caso de las regiones cuádrlicas en $C \subset \mathcal{P}^2$ es cuando Q tiene valores propios positivos, negativos e iguales a cero; es decir, la diagonal de la matriz D es $(1, -1, 0)$. En este caso C representa geoméricamente a dos rectas proyectivas Π_1 y Π_2 que se intersectan en el eje x_3 . Estas dos rectas parten en dos regiones la región formada por R_1 y R_3 y la región R_2 y R_4 , como se ve en la figura 3.2.

Después de este ejemplo, con la siguiente proposición se demostrará que las cuádrlicas separan al espacio proyectivo.

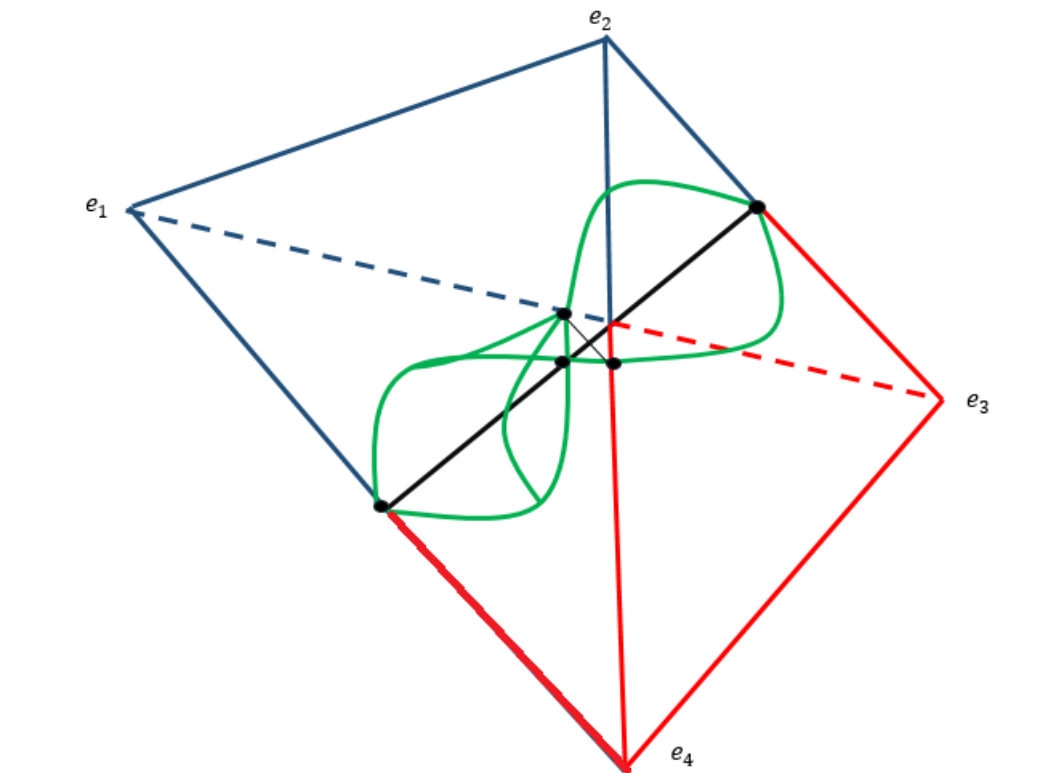


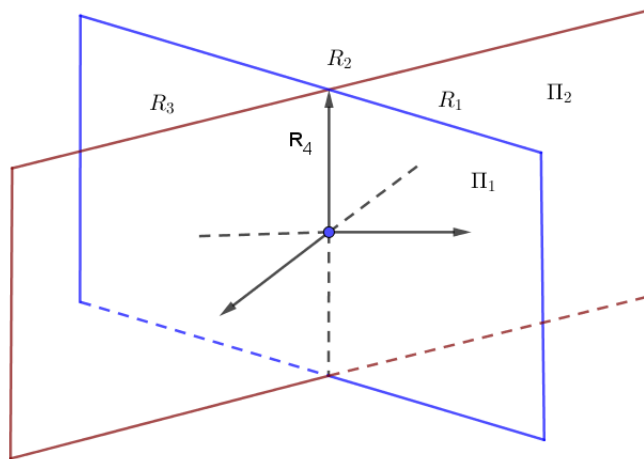
Figura 3.1: Regiones cuádricas de $C \subseteq \mathcal{P}^3$

Proposición 3.2.3. *Una función cuádrica C separa al espacio proyectivo en dos regiones.*

Demostración. Se tiene Q con valores propios positivos y negativos. Para demostrar este caso, se utilizará el hecho de que \mathcal{P}^n es un espacio completo y que las cuádricas son funciones continuas, entonces, se toman dos puntos $w, z \in \mathcal{P}^n$ que cumplan con que w esté en $C < 0$ y z en $C > 0$; como \mathcal{P}^n es un espacio completo se puede asegurar que estos dos puntos existen. Se traza una trayectoria continua de w a z , la cual va de $C(w) < 0$ a $C(z) > 0$, por lo que la trayectoria obligatoriamente cruza por $C = 0$ que es la cuádrica. Además, como C es una función continua, siempre se puede encontrar una trayectoria entre los puntos en $C > 0$ y los puntos en $C < 0$.

Con esto queda demostrado que una cuádrica separa al espacio proyectivo en dos regiones cuádricas.

□



4

Figura 3.2: Regiones cuádricas de C degeneradas en \mathcal{P}^2

Capítulo 4

Convexidad proyectiva

El estudio de los conjuntos convexos en el espacio real surge naturalmente en la geometría, el álgebra lineal, el análisis y la optimización. En programación lineal se ha discutido la idea de trabajar en el espacio proyectivo donde el resultado más famoso es el algoritmo de Karmarkar para programación lineal Karmarkar (1984). Los conjuntos convexos proyectivos aparecen antes que el algoritmo de Karmarkar en Dekker (1965), Groot y Vries (1957) y en Sinden (1963) con diferentes definiciones.

En este capítulo se presentan las definiciones de un conjunto convexo en \mathcal{P}^n dadas en Bracho y Calvillo (1991) y en Calvillo y Mayo (1990); se probará que estas definiciones son equivalentes, que las regiones cuádricas son conjuntos convexos proyectivos y el teorema sobre la dimensión de variedades lineales en un convexo proyectivo que aparece en Bracho y Calvillo (1991) pero sólo para regiones cuádricas.

4.1. Definición de convexidad proyectiva

La primera definición de un conjunto convexo en \mathcal{P}^n se encuentra en Calvillo y Mayo (1990) y con ella se probará que el complemento de un conjunto convexo es convexo.

Sean dos puntos $A = [x_1]$ y $B = [x_2]$ en \mathcal{P}^n y sea l la línea generada por ellos. Los puntos A y B dividen a l en dos conjuntos.

- $(A, B)^+ = \{[z] \in \mathcal{P}^n | z = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha\beta > 0\}$
- $(A, B)^- = \{[z] \in \mathcal{P}^n | z = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha\beta < 0\}$

Llamados los segmentos abiertos de l definidos por A y B . Si A y B están dentro de estos segmentos, se les llama cerrados y se denotan como $[A, B]^+$ y $[A, B]^-$. Un subconjunto $K \subset \mathcal{P}^n$ es convexo si dados cualquier $A, B \in K$ al menos uno de los segmentos cerrados está en K .

Dada esta definición, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1. *Si un conjunto $K \subset \mathcal{P}^n$ es convexo, entonces, su complemento $K^c = \mathcal{P}^n - K$ también es convexo.*

Para poder probar este teorema, se utilizará la siguiente definición y el siguiente lema.

Por la *proposición 1.6* del capítulo 1 se tiene que: dados cuatro puntos en una línea A, B, C, D se dirá que A, B separa a C, D si $C \in (A, B)^+$ y $D \in (A, B)^-$.

Lema 4.1.2. *Sean $K \subset \mathcal{P}^n$ y A, B, C, D cuatro puntos sobre una línea tal que $A, B \in K$ y $C, D \in K^c$ (el complemento de K). Si A, B separa a C, D , entonces K y K^c no son convexos.*

Demostración. La prueba viene directamente de la definición de convexidad y de que como A, B separa a C, D implica que hay elementos de $(A, B)^+$ y de $(A, B)^-$ tanto en K y K^c , lo que implica que K no contiene completamente a $[A, B]^+$ ni a $[A, B]^-$. Lo mismo sucede con K^c . □

Demostración. *Teorema 4.1.1* se supone K convexo y K^c no convexo. Sean A, B dos puntos en K^c . Como K^c no es convexo, entonces existen puntos $C \in (A, B)$ y $D \in (B, A)$ que están en K y por el lema anterior implica que K no es convexo. Por lo tanto K^c es convexo. □

La segunda definición de convexidad que se verá a continuación es más sencilla que la primera y será utilizada para estudiar la convexidad en las cuádricas.

Se define a un conjunto convexo proyectivo como un subconjunto $K \subset \mathcal{P}^n$, con la propiedad de que para cada línea l , $K \cap l$ es conexa; en esta definición se toma el vacío como convexo. Esta definición se encuentra en Bracho y Calvillo (1991). Es importante notar que un subconjunto convexo en \mathcal{P}^n , que está completamente en una carta afín, es

convexo sobre la carta y los que no se pueden encajar son los que generalizan el concepto de conjuntos convexos euclidianos. El ejemplo básico de un conjunto convexo proyectivo son los subespacios proyectivos con sus complementos. Dada una línea l cualquiera y un subespacio proyectivo S hay tres posibilidades:

1. $l \cap S = \emptyset$
2. $l \cap S = l$
3. $l \cap S$ es un punto

en cada caso se tiene que la intersección es conexa y por lo tanto S es convexo. Por el *Teorema 4.1.1* S^c también es convexo.

Como se vio en el capítulo anterior, los espacios proyectivos no son separadores y de esta manera difieren radicalmente de las cuádricas que sí separan el espacio proyectivo. Por ello, a continuación, las demostraciones se dividirán en dos casos: las cuádricas lineales (subespacios proyectivos) y las cuádricas no lineales.

A continuación se verá la equivalencia de las dos definiciones de un conjunto convexo en el espacio proyectivo.

Afirmación 4.1.3. *Las dos definiciones de convexidad dadas son equivalentes.*

Demostración. Se probará que la primera definición implica la segunda. Si K es un conjunto convexo con la primera definición, entonces $[A, B]^+ \in K$ ó $[A, B]^- \in K$ para cualesquiera A, B en K . Sea $l \subset \mathcal{P}^n$ se tiene que $l \cap K$ cumple alguno de los siguientes casos donde $|l \cap K|$ denotará la cardinalidad de los puntos de la intersección :

1. $|l \cap K| = 0$ que corresponde al vacío y por definición es conexo.
2. $|l \cap K| = 1$, la intersección es un solo punto; supóngase el punto A , entonces, se puede ver este punto como un intervalo cerrado $[A, B]^+$ que es conexo.
3. $|l \cap K| > 1$, la intersección es más de un punto; supóngase que los puntos de la intersección son A, B , entonces $A, B \in K$ y $A, B \in l$. Como K es convexo con la primera, definición, entonces, $[A, B]^+ \subset K$ es un segmento conexo por lo tanto, se tiene $[A, B]^+ \subset l$. Así $l \cap K$ es un segmento conexo y así es convexo con la segunda definición.

La segunda definición implica la primera de la siguiente manera: Si K es convexo con la segunda definición, cumple con la propiedad de que para cada línea l la intersección $K \cap l$, es conexa, si $A, B \in K \cap l$ entonces existe un segmento conexo en la intersección que contiene a A y B , pero como este segmento está en la intersección, entonces, está en K y así es convexo con la primera definición. □

4.2. Convexidad proyectiva en regiones cuádricas

Teorema 4.2.1. *Las regiones cuádricas en \mathcal{P}^n son conjuntos convexos.*

Demostración. Las regiones cuádricas C_{\leq} y $C_{>}$ son un subespacio proyectivo como se vio anteriormente. Para el caso no lineal, las cuádricas son separadores y cada una de las dos regiones abiertas y conexas en que se descompone $\mathcal{P}^n - C$ son convexas y, por lo tanto, también sus complementos como se demuestra a continuación:

Sea $C = \{[x] | x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ y } x^T Q x = 0\}$ una cuádrica y considérense las dos regiones cuádricas complementarias y $C_{>} = \{[x] | x^T Q x > 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ y $C_{\leq} = \{[x] | x^T Q x \leq 0, x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$. Se demostrará que $C_{>}$ y C_{\leq} son conjuntos convexos. Sean $[u]$ y $[v]$ dos puntos proyectivos tales que $u \in C_{>}$ y $v \in C_{\leq}$, entonces, si se evalúan u, v en las regiones cuádricas, se tiene que $u^T Q u > 0$ y $v^T Q v < 0$.

Sea $l = \{\alpha u + \beta v | u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ al intersectar los objetos proyectivos C y l , se obtiene: $C \cap l = \{(\alpha u + \beta v)^T Q (\alpha u + \beta v) = 0 | u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y se realiza la siguiente manipulación algebraica $(\alpha u)^T Q (\alpha u) + 2(\alpha u)^T Q (\beta v) + (\beta v)^T Q (\beta v) = \alpha^2(u^T Q u) + 2\alpha\beta(u^T Q v) + \beta^2(v^T Q v) = 0$. De esta última expresión se tiene que $C \cap l = \{\alpha^2(u^T Q u) + 2\alpha\beta(u^T Q v) + \beta^2(v^T Q v) | u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Se debe notar que $(u^T Q u)$, $2(u^T Q v)$ y $(v^T Q v)$ son constantes, por lo que para simplificar la notación se les llamarán a, b y c , respectivamente; se debe notar que $a > 0$ y $c < 0$. Con esta nueva notación, se tiene $C \cap l = \{\alpha^2 a + \alpha\beta b + \beta^2 c = 0 | a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y, al resolver esta ecuación para α , se llega a $\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} * \beta$, puesto que $a > 0$, $c < 0$, $ac < 0$ y $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones y, por lo tanto, l intersecta a C en dos puntos r y s . Así $(r, s)^+ \in C_{>}$ y $[r, s]^- \subset C_{\leq}$. La demostración es igual para $C_{<}$ y C_{\geq} . □

A continuación se enuncia el teorema dado en Bracho y Calvillo (1991), que se demostrará para el caso especial en el que los conjuntos convexos son regiones cuádricas:

Teorema 4.2.2. *Sea $K \subset \mathcal{P}^n$ convexo, entonces, $\tau(K) + \tau(P^n - K) = n - 1$*

Donde el tipo de un conjunto convexo $K \subset \mathcal{P}^n$ denotado por $\tau(K)$ es definido como la máxima dimensión de un subespacio proyectivo \mathcal{P}^n que es contenido en K .

Este teorema restringido a cuádricas es:

Teorema 4.2.3. *Sean las regiones cuádricas $C_>$ y $C_<$ de la cuádrica $C = \{[x] | x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ y } x^T Q x = 0\}$, entonces, $\tau(C_>) + \tau(C_<) = n - 1$.*

Antes de empezar la demostración, se recuerda que en la primera sección del capítulo 2 dedicado a las cuádricas, se mostró que toda cuádrica se puede reducir a la siguiente forma cuadrática: $H(x, x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 + 0 * \sum_{i=r+1}^{n+1} x_i^2$.

Demostración.

Parte a) Para el caso en que $C_<$ es un espacio proyectivo de dimensión k y por tanto $\tau(C_<) = k$ su complemento tiene tipo $\tau(C_>) = n - k - 1$, ya que cualquier subespacio de dimensión mayor intersecta a $C_<$.

Parte b) Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que cada $x_i = 0$ para $i = s + 1, \dots, n + 1$ y x_i arbitrario para x_i de $i = 1, \dots, s$, entonces, estos x pertenecen al conjunto $C_>$, ya que al evaluar en C , el término negativo de C es igual a cero y la suma de cuadrados siempre es positiva. Las $x_i = 0$ que se fijaron definen un subespacio vectorial $V = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i = 0, i = s + 1, \dots, n + 1\}$ con dimensión s y $V \subset C_>$.

Se busca demostrar que la dimensión de V es la dimensión máxima de la variedad lineal contenida en C ; para demostrarlo, se necesita estudiar $C_<$ que es la región complementaria de $C_>$.

Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que cada $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, s$ y x_i arbitrario para x_i de $i = s + 1, \dots, n + 1$, entonces, estos x pertenecen al conjunto $C_<$, ya que el término positivo de C es igual a cero las x_i de $i = r + 1, \dots, n + 1$ van multiplicadas por el coeficiente

cero por lo tanto son cero y la suma de cuadrados multiplicada por un signo negativo siempre es negativa. De manera similar al caso anterior, se tiene que las $x_i = 0$ que se fijaron forman un subespacio vectorial $V' = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i = 0, i = 1, \dots, s\}$ que es el subespacio ortogonal a V con esto $V' = V^\perp$ con dimensión $n + 1 - s$ y $V^\perp \subset C_{<}$.

Los subespacios V y V' , por ser subespacios ortogonales son ajenos y complementarios, así que cada una de sus dimensiones es máxima; entonces, se tiene que $\tau(C_{>}) = s - 1$ y $\tau(C_{\leq}) = n + 1 - s$ de manera que $\tau(C_{>}) + \tau(C_{\leq}) = n + 1 - s + s - 1 = n - 1$.

□

Teorema 4.2.4. *Para todo punto $p \in K$ con $K \subset \mathcal{P}^n$ una región cuádrlica, existe una variedad lineal $L_p \subset K$ de dimensión máxima donde $p \in L_p$.*

Para poder probar el Teorema 4.2.4 se necesita el siguiente Lema:

Lema 4.2.5. *Si K^c es una región cuádrlica de tipo 0, entonces, para todo punto $p \in K$ existe un hiperplano que pasa por p y está contenido en K .*

Demostración. K^c es de tipo 0, por lo tanto es definido por un elipsoide. Como $\tau(K^c) = 0$ se tiene que por el Teorema 4.2.3 $\tau(K) = m - 1$, entonces, existe una variedad lineal $L \subset K$. Si se quita L , se obtiene una carta, y si se considera a L como el hiperplano al infinito, al quitarlo queda el espacio afín, así K^c es un convexo usual. Sea p un punto en K y p' un punto sobre K^c que cumpla con ser el punto más cercano al punto p y se toma el hiperplano $H' \subset K$ tangente a K^c que toca a K^c en p' entonces se puede encontrar un hiperplano $H \subset K$ paralelo a H' el cual pase por p . □

Demostración. Teorema 4.2.4 En 4.2.1 se probó que las regiones cuádrlicas son conjuntos convexos, entonces, se tiene el convexo K y se toma su complemento K^c , la frontera de K le pertenece a K . Se toma una variedad lineal L de dimensión máxima $m - 1$ en K por lo que existe una variedad M complementaria en K^c y se toma un punto $p \in K - L$. La unión de todas las rectas que pasan por L y p forman una variedad lineal L_p de dimensión $\dim(L) + 1$.

Si se toman las intersecciones $L_p \cap K$ y $L_p \cap K^c$, entonces, tenemos una partición de L_p y la frontera que separa a K con K^c al intersectarla con L_p nos da una cuádrlica.

Asimismo, $L_p \cap K$ tiene dimensión igual a la $\dim(L)$ y, además, la intersección contiene a L . Como L es de dimensión máxima en K , entonces, tiene que ser de dimensión máxima en $L_p \cap K^c$, así se tiene que $\tau(K \cap L_p) = \tau(K) = \dim(L) = m - 1$. Por 4.2.3 se tiene que $\tau(K \cap L_p) + \tau(K^c \cap L_p) = n - 1$, entonces, $\tau(K^c \cap L_p) = 0$, así la máxima variedad lineal de $\tau(K^c \cap L_p)$ es un punto.

Como $\tau(K^c \cap L_p) = 0$ es una cuádrica homeomorfa a un círculo tiene que ser una elipse y por el lema 4.2.5 se tiene una variedad lineal que pasa por p de dimensión igual a la dimensión $m - 1$.

□

Este teorema da cierre a este capítulo; en trabajos futuros sería interesante encontrar el dual del teorema 4.2.2 y, por lo tanto, el dual de 4.2.3, pero para hacerlo lo primero es definir el dual de un conjunto convexo proyectivo y de ahí transformar el teorema, lo cual es un problema muy interesante, pero desafortunadamente está fuera del alcance de esta tesis. Para concluir, se puede decir que es más fácil encontrar conjuntos convexos en \mathcal{P}^n que en \mathbb{R}^{n+1} , aunque falta muchísima investigación que desarrollar sobre convexos en \mathcal{P}^n y sus posibles aplicaciones.

Capítulo 5

Dualidad

En Sinden (1963), se explora una idea para resolver problemas de programación convexa en el espacio proyectivo, usando como motivación el hecho de que en \mathcal{P}^n la dualidad entre puntos y rectas es perfecta a diferencia del espacio euclidiano. El artículo Sinden (1963) se divide en las siguientes secciones:

- Introducción
- Conjuntos convexos en el espacio proyectivo
- Intersección de conjuntos convexos
- Funciones cuasiconvexas
- Programas convexos
- Coordenadas
- Politopos convexos
- Regiones cuádricas convexas
- Apéndice (contiene las demostraciones)

Este capítulo está inspirado en los comentarios de la sección *regiones cuádricas convexas* que serán citados más adelante. Para poder entender estos comentarios, se necesitarán las siguientes dos definiciones. La primera definición se encuentra en la sección de *conjuntos convexos en el plano proyectivo*, donde se definen como pares duales convexas a un conjunto de puntos P y un conjunto de líneas L en el plano proyectivo si cumplen con ser disjuntos, exhaustivos y, además, si dos líneas de L no separan dos puntos en P . Por disjuntos se entiende que ningún punto de P está en una línea de L . Exhaustivos significa que todo punto en $\mathcal{P}^2 - P$ está en una línea de L .

La segunda definición se encuentra en la sección de *regiones cuádricas convexas* en donde

se define como el tipo k de una cuádrica a la cantidad de valores propios positivos que tiene la Q asociada a la cuádrica. Las regiones de tipo $k = 1$ corresponden en esta tesis a los convexos de tipo cero que en \mathcal{P}^2 son elipses.

Dadas estas definiciones, Sinden apunta:

Las regiones de tipo $k \neq 1$ no son convexas. Es interesante considerar la posibilidad de generalizar una definición de convexidad para que regiones de tipo arbitrario puedan ser tomadas en cuenta. La definición como es dada depende de la dualidad entre puntos (un parámetro homogéneo) e hiperplanos ($(n - 1)$ parámetros homogéneos). Pero las k -variedades y las $(n - k)$ -variedades son duales para cualquier k en el rango $(1, n - 1)$. Si un conjunto P_k de k -variedades y un conjunto L_{n-k} de $(n - k)$ -variedades son disjuntos, exhaustivos e individualmente convexos, entonces P_k y L_{n-k} pueden ser llamados un par k -convexo. Parece plausible conjeturar que una superficie cuádrica de tipo k define pares k -convexos. Esto se puede verificar intuitivamente en \mathcal{P}^3 en el cual las líneas ($k = 2$) son auto-duales. La superficie cuádrica correspondiente en este caso es un hiperboloide de una hoja.

En Sinden (1963) la definición de convexos duales depende solo de la dualidad entre puntos e hiperplanos y el autor señala que esta definición se puede generalizar. Años después, sin saberlo, esta generalización fue hecha en el artículo de — Bracho y Calvillo (1991) con su definición de convexidad.

La intuición de Frank Sinden fue correcta, sin embargo no brindó una demostración de su conjetura debido a que no pudo generalizar su definición de pares convexos al espacio proyectivo n -dimensional. Así que para probar la conjetura de Sinden primero se debe generalizar su definición de pares convexos y luego se observará que con la definición general, la conjetura se sigue como corolario del *Torema 4.2.4*.

Sean \mathcal{L} y \mathcal{M} dos conjuntos de variedades lineales complementarias contenidos en \mathcal{P}^n . Es decir, todos los elementos de \mathcal{L} son variedades lineales de dimensión k y los de \mathcal{M} son variedades lineales de dimensión $n - k - 1$. Se dice que \mathcal{L} y \mathcal{M} son un par convexo si: •

- Ningún para $L \in \mathcal{L}$ y $M \in \mathcal{M}$ se intersectan.
- Todo punto de \mathcal{P}^n pertenece a un elemento de \mathcal{L} o a un elemento de \mathcal{M} .
- $\mathcal{K}_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} = \cup_{L \in \mathcal{L}} L$ y $\mathcal{K}_{\mathcal{M} \in \mathcal{M}} = \cup_{M \in \mathcal{M}} M$ son convexos en la segunda definición.

Estas tres condiciones son las correspondientes en la definición de Sinden a que \mathcal{L} y \mathcal{M} sean, ajenas, exhaustivas y conexas.

Teorema 5.0.1. *Las variedades lineales maximales de las regiones cuádricas complementarias son un par dual.*

Demostración. El teorema 4.2.4 asegura que por cada punto de una región cuádrica pasa un variedad lineal maximal contenida en la región. Puesto que una región cuádrica y su complemento son convexas se sigue inmediatamente. \square

La siguiente sección arroja aún más luz sobre este tema, ya que muestra que en el caso de las cuádricas los pares duales de Sinden están relacionados por la polaridad definida por la cuádrica que define las regiones cuádricas.

5.0.1. Polaridad de Apolonio

Apolonio de Perga (262 a.C.- 190 d.C) fue un astrónomo y matemático griego que dedicó su vida a estudiar las secciones cónicas. En sus estudios sobre las cónicas, definió la Polaridad de Apolonio para \mathbb{R}^2 , que se detallará más adelante, y demostró que: dado un círculo y un punto a fuera del círculo siempre se puede encontrar la línea polar A correspondiente al punto a con notación $A = a^\perp$ y el punto a es el polo de la línea A con notación $A^\perp = a$.

La construcción de la línea polar se hace de la siguiente forma: se tiene un círculo y el punto a ; se trazan las dos líneas tangentes al círculo que pasan por a como se ve en el dibujo 5.1. Se marcan los puntos tangente γ y β y se traza la recta de γ y β que es la recta polar A .

En \mathbb{R}^2 , si se tiene que la recta A coincide con el diámetro, quiere decir que las rectas tangentes son paralelas como en en 5.2 y no hay punto a que se le pueda asignar, pero si pasamos al plano proyectivo, se le puede asignar un punto al punto al infinito. Así, en el plano proyectivo, la Polaridad de Apolonio se cumple para todos los puntos.

Hasta aquí se ha definido la Polaridad de Apolonio solo para puntos fuera del círculo; en seguida, se dará la definición de polaridad proyectiva que se define para todos los puntos dentro y fuera del círculo.

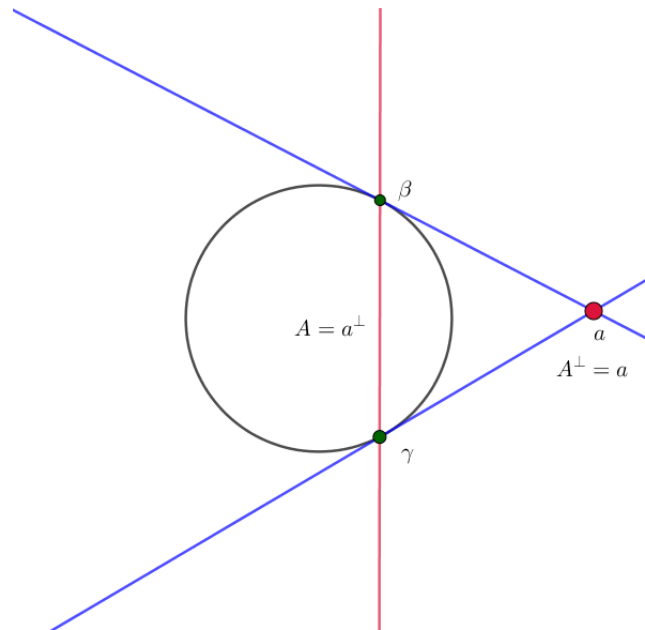


Figura 5.1: Polaridad de Apolonio

Para obtener la polaridad proyectiva, se seguirá el dibujo 5.3. Se tiene el círculo S_1 y el punto a (se tomó el punto a fuera pero se vale para cualquiera) y se toman dos rectas cualesquiera que pasen por el punto a y corten en dos a S_1 que son representadas por las rectas azules. Así se obtienen los puntos $\alpha, \beta, \delta, \gamma$. En seguida, se trazan las rectas verdes que son las que pasan por α, δ y la recta que pasa por β, γ . Después, trazamos las dos rectas moradas que son la recta α, γ y la recta β, δ . De esta manera, obtenemos el punto de intersección de las rectas verdes y el de las rectas moradas llamado C . Se traza la recta por estos dos puntos de intersección y se obtiene la recta polar A .

El dibujo 5.3 también sirve para encontrar la recta polar correspondiente al punto C . Se toman dos rectas que pasen por C ; en el dibujo son las rectas moradas. Se marcan los puntos $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, que son obtenidos de la intersección de las rectas moradas con el círculo. Después, se trazan las rectas azules definidas: una, por los puntos α y β , y la otra, por los puntos δ y γ . Las rectas azules se intersectan en el punto a . También se deben de trazar las dos rectas verdes: una la que pasa por α y δ y la segunda la que pasa por δ y γ . La recta polar, mostrada en el dibujo por la recta azul claro, se obtiene al unir el punto a con el punto de intersección de las rectas verdes.

El caso límite de la polaridad proyectiva se ve cuando el punto a está sobre la frontera de

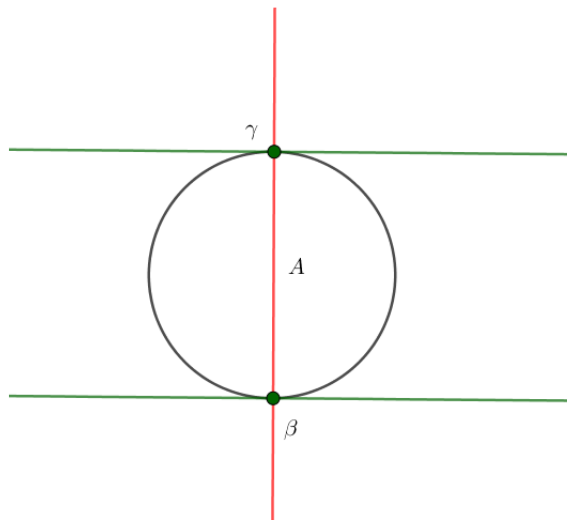


Figura 5.2: Polaridad de Apolonio con punto al infinito

la circunferencia como se ve en 5.4. Se siguen los mismos pasos: se empieza trazando dos rectas que corten a S_1 y pasen por el punto a representadas en el dibujo por las rectas verdes. Se marcan los puntos de intersección de las rectas verdes con S_1 como α y β . En este caso, no existen los otros dos puntos γ y δ , así que se toma el punto a como el punto de intersección de las rectas verdes. Así la polar de a es dada por la recta tangente a S_1 que pasa por a .

Polaridad de Apolonio en su forma algebraica

Sea un círculo en \mathbb{R}^2 de radio 1 con centro en el origen, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, un punto a . La recta polar correspondiente al punto a y los puntos p y q como en el dibujo 5.5; entonces, se tiene la siguiente observación:

Observación 5.0.2. *El conjunto de los puntos en la recta polar correspondiente al punto a se puede definir como $p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot a = 1\}$.*

Demostración. El vector que va del centro a p es de longitud 1 y es ortogonal a una de las rectas tangentes. Si se toma el triángulo rectángulo azul, que se ve en el dibujo 5.5, se puede pensar como la proyección ortogonal de a sobre el vector del centro a p (por comodidad de notación se le llamará p). De esta manera, se tiene que $a \cdot p = 1$ y, por simetría, se sigue el mismo razonamiento para el punto q así $a \cdot q = 1$. Si se toma cualquier otro punto s de la

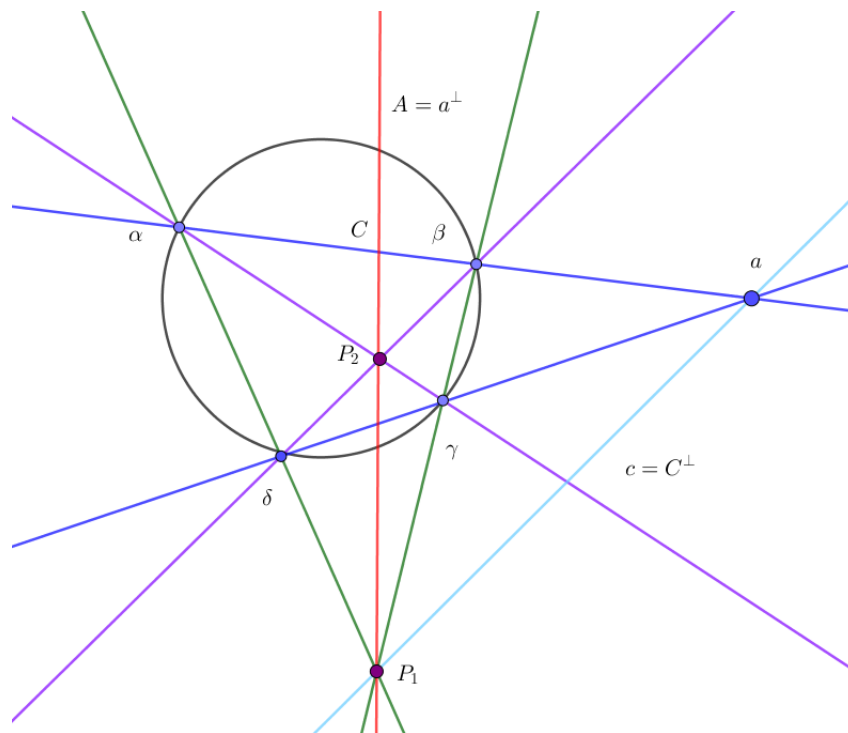


Figura 5.3: Polaridad proyectiva

recta polar, se cumple que $s = \lambda p + (1 - \lambda)q$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, $s = q + \lambda(p - q)$ que es la recta que pasa por q en dirección $p - q$; entonces, $a \cdot s = a \cdot p + \lambda(a \cdot (p - q)) = 1 + \lambda - \lambda = 1$ y se demuestra la observación.

Si el punto a está dentro del círculo, como en el dibujo B.1, su recta polar es la recta roja y se toman las proyecciones ortogonales como los dos triángulos rectángulos rosas. De esta manera, se llega a $a \cdot p = 1$ y $a \cdot q = 1$ y se sigue la demostración como para el punto fuera del círculo. \square

Polaridad de Apolonio en su forma algebraica en \mathcal{P}^2

A continuación, se probará la *observación 5.0.1* para \mathcal{P}^2 , siguiendo la ideas que se usaron para definirla en \mathbb{R}^2 .

La polaridad correspondiente a un cono \mathcal{R}^3 definido por $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. A esta forma cuadrática corresponde la forma bilineal: $H(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0$ por lo tanto la *observación 5.0.1* se convierte en la siguiente:

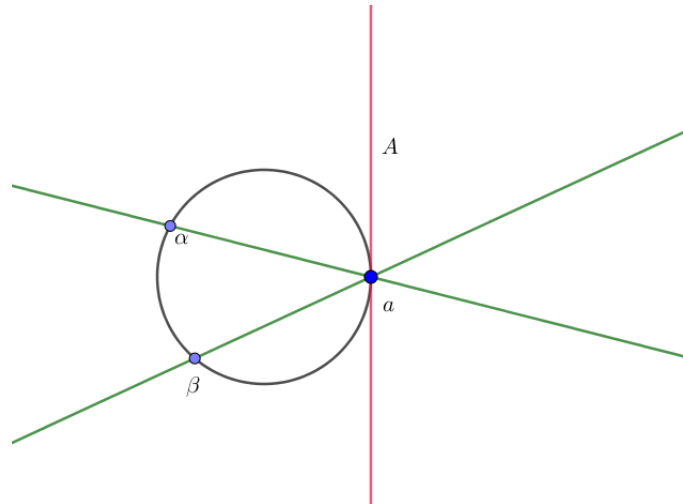


Figura 5.4: Polaridad proyectiva

Observación 5.0.3. La recta polar l correspondiente por el punto $[a] \in \mathcal{P}^2$ es:

$$l = \{[x] \in \mathcal{P}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = 0\}$$

Cuando se restringe \mathcal{P}^2 a la carta afín dada por $x_3 = 1$, la polaridad es la definida en la observación 5.1, como se ve en la figura 5.6. A los puntos de la forma $x = (x_1, x_2, 0)$ le corresponde la recta $l = \{[x] \in \mathcal{P}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$ que es la recta que pasa por el centro del círculo de referencia.

5.0.2. Polaridades y regiones cuádricas

En las secciones anteriores, se estudió la polaridad de Apolonio en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 a detalle; en esta sección, se estudiará la polaridad de Apolonio aplicada a puntos dentro de algunas regiones cuádricas de \mathcal{P}^2 y de \mathcal{P}^3 . También se definirá una nueva polaridad para algunas cuádricas en \mathcal{P}^3 .

Sea la región cuádrica $C_{\leq} = \{[x] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq 0\} \in \mathcal{P}^2$. En el capítulo 2 se demostró que la cuádrica que define esta región representa geoméricamente un elipsoide y, por lo tanto, se puede aplicar la polaridad de Apolonio. La forma bilineal asociada a C_{\leq} es $b(x, y) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0\}$ y la polaridad de Apolonio aplicada

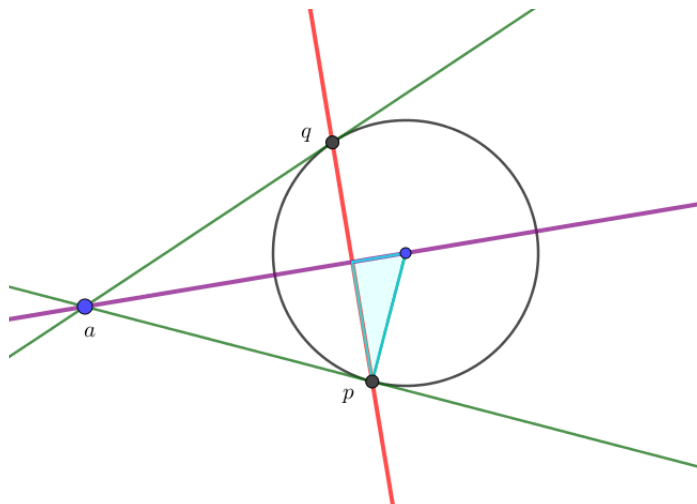


Figura 5.5:

a un punto $x \in C_{\leq}$ se define como $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 | b(x, y) = 0\}$ que es: $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 | x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0\}$, si se toma la carta $y_3 = \frac{1}{x_3}$ para $x_3 \neq 0$, entonces, se tiene: $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 | x_1y_1 + x_2y_2 - 1 = 0\}$ que es una recta (punto proyectivo) en $C_{>}$. Si $x_3 = 0$, entonces, $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 | x_1y_1 + x_2y_2 = 0\}$

Por medio de la polaridad de Apolonio se le puede asociar a cada punto $x \in C_{\leq} \subset \mathcal{P}^2$ una recta en C_{\geq} ; por el teorema 4.2.4, se conoce que para cada punto dentro de un convexo K se encuentra una variedad maximal en K^c ; como se probó en el capítulo 4, las regiones cuádricas y sus complementos son conjuntos convexos, por lo que se puede afirmar que para cada punto en C_{\leq} existe su recta polar en $C_{>}$. De esta forma se tiene una biyección entre los puntos de C_{\leq} y las rectas de C_{\geq} dada por la polaridad de Apolonio.

Si se toma la región cuádrica C_{\leq} en \mathcal{P}^2 y dos puntos p y $q \in C_{\leq}$ entonces, se tiene un segmento m que une a p y q . Los puntos p y q unidos por un segmento m tienen sus rectas polares P y Q en C_{\geq} . El segmento M que une a P y Q en C_{\geq} es el conjunto de todas las rectas que se encuentran entre P y Q y no pasan por $C_{<}$ como se ve en el dibujo 5.7.

El segmento derecho puede ser cualquiera de los conjuntos de rectas entre P y Q el verde, el azul o ambos. El segmento m corresponde al segmento M como se ve en la figura 5.7. Entonces, se puede definir un conjunto convexo en el conjunto de las rectas contenidas en C_{\geq} . Dado S un conjunto de rectas, S es convexo si dadas dos rectas al menos uno de los intervalos definidos por las rectas está en S . Dadas estas definiciones, se tiene que

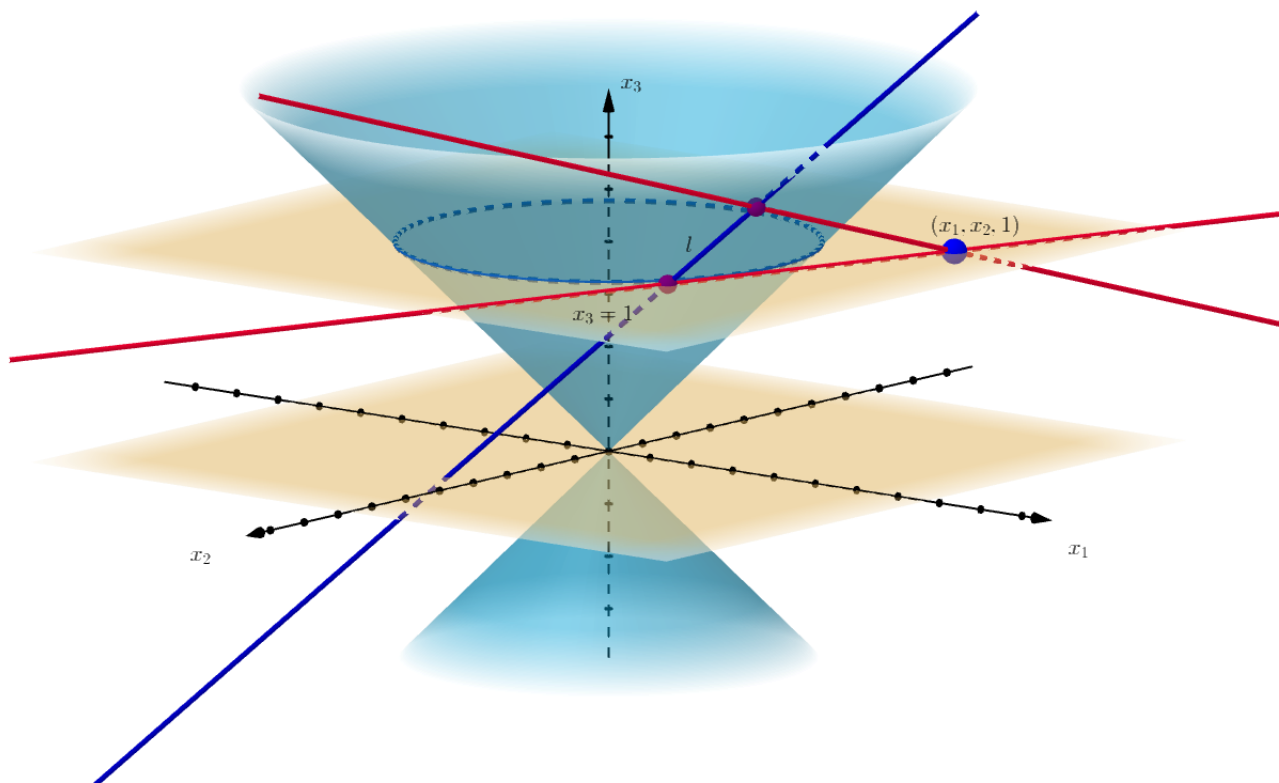


Figura 5.6: Polaridad de Apolonio \mathcal{P}^2

$\rho(C_{\leq}) = S$ donde $\rho(C_{\leq})$ denota al conjunto de todos los puntos de C_{\leq} con la polaridad de Apolonio.

La polaridad ρ no es solo una biyección sino un isomorfismo en el sentido de que la relación de "estar entre" se preserva. Es decir, si r está entre p y q en el único segmento que une a p y q , y está dentro de C_{\leq} , entonces, $R = \rho(r)$ está en el único segmento (de recta) definido por P y Q contenido en C_{\geq} . Es decir, que en esencia el conjunto de rectas contenida en C_{\geq} es un convexo igual a C_{\leq} . Para los segmentos en $C_{>}$, las rectas polares correspondientes son aquellas que intersectan a $C_{<}$. Estas rectas polares definen a un convexo en rectas que corresponde a $C_{>}$.

La relación descrita se puede representar en el diagrama 5.8, el cual muestra dos dualidades en \mathcal{P}^2 el cual es un ejemplo de la dualidad en \mathcal{P}^2 . En el diagrama se tiene que C_{\leq} y $C_{>}$ son conjuntos convexos de puntos complementarios; es decir, entre ellos existe una función de conjuntos dada por las flechas verticales. Los conjuntos complementarios S y S^c también tienen una función entre ellos dada por la polaridad de Apolonio, $\rho(C_{\leq}) = S$ y $\rho(C_{>}) = S^c$,

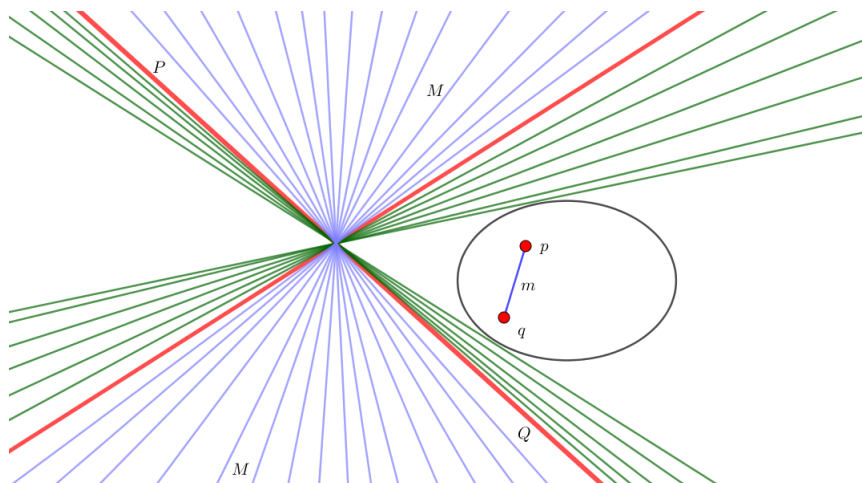


Figura 5.7: Segmentos de convexos en \mathcal{P}^2

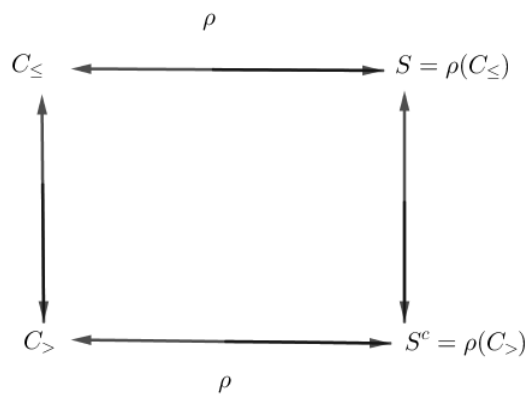


Figura 5.8: Diagrama de Polaridad de Apolonio

dada por las flechas horizontales.

Se muestra así que los pares convexos de Sindén son en realidad convexos isomorfos mediante una polaridad, y usando la dualidad de convexos dada por la complementación, obtenemos otros convexos de líneas en \mathcal{P}^2 que son los complementos (como conjuntos de líneas) de las líneas contenidas en $C_>$. Así se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.0.4. *Sea $C_≤$ convexo en puntos y $C_>$ convexo en rectas tal que $\rho(C_≤) = S$, entonces, $C_≤ \cup (\cup_{l \in S} l) = \mathcal{P}^2$, donde l son las rectas del conjunto S .*

Demostración. Por el Teorema 4.2.4 a cada punto $C_≤$ le corresponde una recta polar, y si se toma $\cup_{l \in S} l$, se tienen todas las rectas que no intersectan a $C_≤$. Por lo tanto,

$$C_{\leq} \cup (\cup_{l \in S} l) = \mathcal{P}^2. \quad \square$$

En Sinden (1963) se conjetura que una superficie cuádrica de tipo k define pares k -convexos. Esto se puede verificar intuitivamente en algunas cuádricas en \mathcal{P}^3 . Sea $C_{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0\}$; como se vio en el capítulo 2, la cuádrica que define esta región geoméricamente es un elipsoide o una esfera. Su forma bilineal asociada es $b(x, y) = \{y \in \mathbb{R}^4 | x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 = 0\}$ y la polaridad de Apolonio aplicada a un punto $x \in C_{\leq} \subset \mathcal{P}^3$ es $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^4 | b(x, y) = 0\}$. Si se toma la carta $y_4 = 1$ se llega a $\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^4 | x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x_4\}$. Así por medio de la polaridad de Apolonio se le asocia a cada punto de C_{\leq} un hiperplano en $C_{>}$. Este ejemplo es el mismo que fue analizado para \mathcal{P}^2 pero con una dimensión más; de hecho, para cualquier dimensión en el que la cuádrica que define a la región cuádrica represente geoméricamente una elipse o un elipsoide de cualquier dimensión se cumple lo demostrado para \mathcal{P}^2 .

La siguiente cuádrica en \mathcal{P}^3 que se estudiará es : $C = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\}$. Si se recuerda el capítulo 2, se vio que esta cuádrica geoméricamente corresponde a un toro en \mathcal{P}^3 . La forma bilineal asociada a C es $H(x, y) = \{y \in \mathbb{R}^4 | x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 = 0\}$, con esta forma bilineal se definirá una nueva polaridad aplicada a un punto $x \in \mathcal{P}^3$ dada por $\iota(x) = \{y \in \mathbb{R}^4 | H(x, y) = 0\}$ que es igual a $\iota(x) = \{y \in \mathbb{R}^4 | x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 = 0\}$. Nótese que para x fijo $\iota(x)$ es un hiperplano que pasa por el origen en \mathbb{R}^4 ; es decir, un plano en \mathcal{P}^3 . Con el análisis de este ejemplo se propone la siguiente proposición para esta cuádrica.

Proposición 5.0.5. *Sean $C_{<}, C_{\leq}, C_{>}, C_{\geq}$ las regiones cuádricas asociadas a C . Si L es una recta contenida en $C_{<}$, entonces, $\iota(L)$ es una recta contenida en $C_{>}$. Si L está en C_{\leq} , entonces, $\iota(L)$ está en C_{\geq} . Si $L \subset C_{=}$, entonces, $\iota(L) \subset C_{=}$.*

Enseguida se desarrollará la idea de la demostración de 5.0.5, considerando el caso $L \subset C_{<}$. Obsérvese que $\iota(L)$ es una recta, ya que si, p y q son dos puntos que determinan a L , entonces, $\rho(p)$ y $\rho(q)$ son dos planos que se intersectan en $\iota(L)$. Es decir, $\iota(L) = \rho(p) \cap \rho(q)$.

Sea Π un plano que contiene a L en \mathcal{P}^3 , se tiene que Π intersecta a C en una elipse.

Se toma un punto p_1 sobre L , y por medio de la polaridad de Apolonio, se calcula el polar con respecto a la elipse $C \cap \Pi_1$ como se ve en 5.9. De esta manera, se tiene que $\rho(p_1) = p_1^*$.

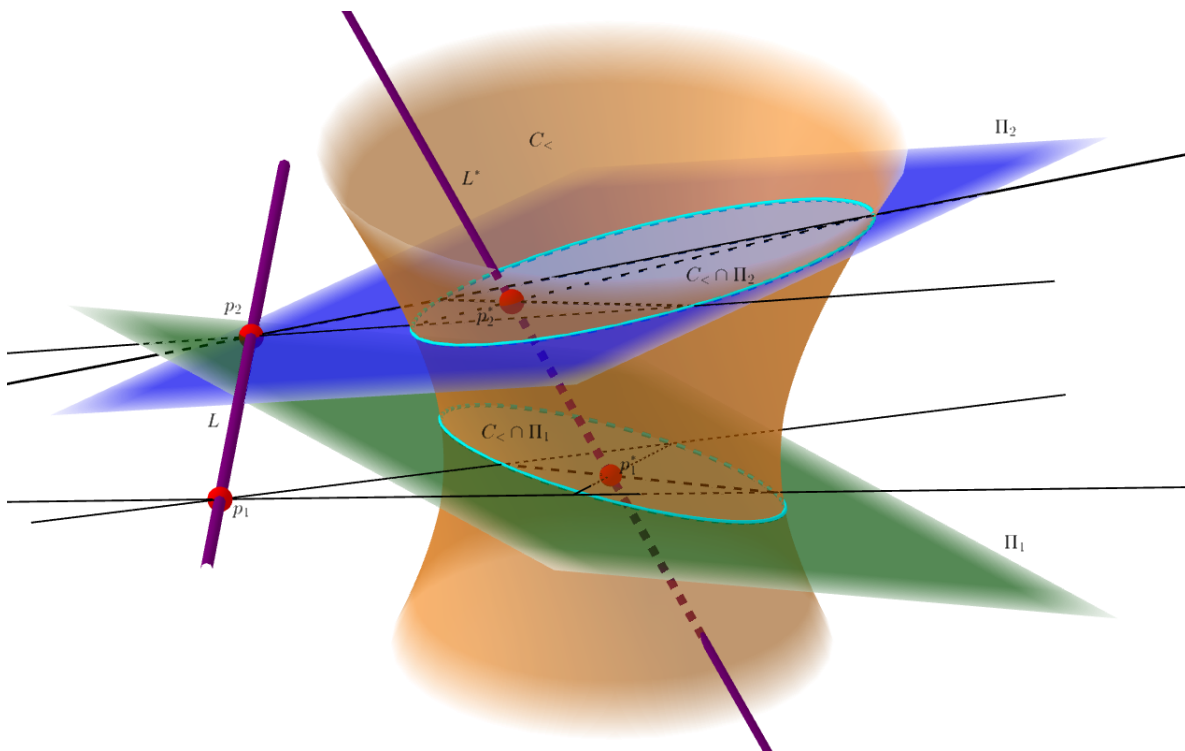


Figura 5.9: Polaridad de Apolonio en $C_{<} \subset \mathcal{P}^3$

Como por L pasan una infinidad de planos, entonces cuando se hace la intersección de cada plano con $C_{<}$ se obtiene una infinidad de elipses. Así para cada elipse se considera L como la recta polar de un punto dentro de la elipse; en 5.9 se observa el proceso para p_1 y p_2 . Al final, la unión de los puntos polares da la recta L^* que es la recta polar correspondiente a L . Con esta construcción geométrica conjeturamos que el conjunto de los puntos polares es igual a la intersección de Π que denota el conjunto de planos que contiene a L y $\iota(L)$, es decir: $\rho(L) = \Pi \cap \iota(L)$, lo cual como se dijo anteriormente no se demostrará.

Esta demostración se puede generalizar para cualquier dimensión, de esta forma la conjetura de Sinden es probada de otra forma y se muestra su relación con las polaridades.

En estos ejemplos en \mathcal{P}^2 y en \mathcal{P}^3 se vio cómo la conjetura de Sinden se cumple, por lo que una superficie cuádrica de tipo k define pares k -convexos y, además, por medio de las polaridades, se encontró una relación entre regiones cuádricas muy parecida a la dualidad proyectiva descrita en el capítulo 1. En este trabajo solo se logró demostrar la

conjetura con la segunda demostración propuesta para tres de los ejemplos dados pero + se tiene la sospecha de que se puede generalizar para toda dimensión siguiendo la idea de la demostración de 5.0.5.

Apéndice A

Notas históricas

Una historia con dos caminos

La historia de la geometría proyectiva es interesante porque tiene su origen en dos caminos totalmente independientes. A estos caminos se les podría llamar el camino matemático y el camino del arte renacentista:

El camino matemático (más de 500 años con una misma duda)

[Pure mathematics is] good to give chills in the spine to a certain number of people, me included. I do not know what else it is good for, and I do not care. But like von Neumann said, one never knows whether someone is going to find another use for it. Serge Lang In The Beauty of Doing Mathematics: Three Public Dialogues (1985), 49

“El camino matemático ” de la geometría proyectiva narra la serie de sucesos cronológicos que ejemplifican el quehacer de la investigación matemática y muestran cómo un descubrimiento matemático realmente es un conjunto de teoría construida en un espacio amplio de tiempo por muchos matemáticos. También es notable que este camino se desarrolla por completo a partir del punto de vista de un problema de matemáticas puras; es decir, cuando se está generando conocimiento matemático sin tener ninguna aplicación en mente. Lo que se relata a continuación se puede encontrar en Coolidge (1934), aunque el desarrollo histórico de la geometría proyectiva se encuentra en casi cualquier libro del tema.

Desde la aparición del hombre en el planeta, se han tenido que resolver problemas para facilitar las actividades cotidianas; una de las herramientas más utilizadas son las matemáticas. Al principio de las civilizaciones, se empleaba sólo la aritmética y algunos cálculos sencillos para resolver ecuaciones lineales. Las matemáticas modernas, las matemáticas que requieren de un rigor lógico para su formalización, principiaron con los griegos que estaban interesados en hacer de la materia una ciencia deductiva. Hubo muchos descubrimientos geométricos en esa época, pero fue Tales de Mileto quien enfatizó la importancia de obtener demostraciones rigurosas para sustentar las matemáticas. En el campo de la geometría, Euclides fue el primero que presentó deducciones lógicas a partir de una serie de axiomas en *Elementos*, donde formuló cinco postulados para definir la geometría euclidiana, sin saber que por siglos causarían dolores de cabeza a los matemáticos. Los postulados son los siguientes:

Postulados de Euclides:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Una línea recta se puede extender indefinidamente en una recta.
3. Se puede trazar cualquier círculo con un centro y un radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos de algún lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

El quinto postulado tiene otras dos versiones:

- 5a) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.
- 5b) Los ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos.

A pesar de que en *Elementos*, de Euclides, hay varias inconsistencias, como la de usar conceptos que no fueron previamente definidos, lo que más molestó a los matemáticos

fue el V postulado. A simple vista se puede notar que el quinto postulado no es como los otros: es más complicado. Esta complejidad desconcertó a muchos matemáticos, que se convencieron de que el V no era un postulado sino un teorema, por lo que debería poderse demostrar con ayuda de los otros cuatro postulados. Por más de 20 siglos, generaciones de matemáticos intentaron demostrarlo. Finalmente, en el siglo XIX, el quinto postulado fue tomado como un postulado y se empezó a cuestionar su naturaleza; es decir, se pensó qué sucedería si se negara parte de este postulado.

El primero que lo hizo fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855); inmediatamente, se dio cuenta de que no podría demostrar el V postulado, así que empezó a desarrollar con detalle una nueva geometría que lo ignoraba. Esta nueva geometría completamente consistente se fundamenta en que la suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180° . Gauss nunca publicó sus estudios en este campo.

En 1829, el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski también descubrió esta nueva geometría; mostró su trabajo a Gauss y, con su aprobación, Lobachevski publicó sus descubrimientos y obtuvo el mérito por la investigación.

En 1832, el matemático húngaro Wolfgang Bolyai publicó *Tratado de geometría*, también revisado y aprobado por Gauss. En dicho tratado, Johan Bolyai, el hijo de Wolfgang Bolyai, escribió un apéndice para mostrar las consecuencias de negar el V postulado, llegando a los mismos resultados que Lobachevski publicó en 1829. Todos habían descubierto una nueva geometría: la geometría hiperbólica. Al negar el V postulado, se desarrolló la geometría hiperbólica que se define como el espacio donde la suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180° . Pero también se presentó otra posibilidad: el espacio donde la suma de los ángulos de un triángulo es mayor a 180° . Esta geometría fue llamada proyectiva.

Debido a los descubrimientos matemáticos que se originaron al negarse el V postulado, nacieron dos geometrías y se abrió la posibilidad de que existieran más, por lo que se hizo una definición general del concepto geometría. El matemático alemán Félix Klein (1849-1925), en el programa de Erlangen, definió una geometría como el estudio de invariantes bajo ciertas transformaciones. A la geometría desarrollada por Gauss, Lobachevsky y Bolyai, que propone que hay más de una recta paralela por un punto exterior a una recta, Klein la denominó hiperbólica; a la geometría en donde no existe paralela alguna por un punto exterior a una recta la nombró geometría elíptica y a la euclidiana, parabólica. La

elíptica e hiperbólica también son llamadas geometrías no euclidianas. Bajo la definición de Félix Klein, la geometría proyectiva es un modelo abstracto de la geometría elíptica, donde la geometría proyectiva es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las proyectividades y se caracteriza porque no hay líneas paralelas .

A partir del siglo XIX, los matemáticos se interesaron en estas nuevas geometrías. Al estudiar geometría proyectiva, se dieron cuenta de que ya había teoría desarrollada por el matemático francés Girard Desargues (1591-1661), en su principal obra *Tratado sobre las secciones cónicas* (1639), casi dos siglos antes del descubrimiento de las geometrías no euclidianas. Para entender por qué Desargues hizo esos estudios , a continuación se explora el camino renacentista.

El camino renacentista (Hay que resolver los problemas)

"El pintor debe pintar respetando las reglas de un cuerpo natural, que debe presentar proporciones exactas."

Leonardo Da Vinci

Este segundo camino, "el camino renacentista", que también lleva al descubrimiento de la geometría proyectiva, lo inauguran arquitectos y artistas durante el Renacimiento al intentar resolver problemas reales como la construcción y la representación fiel de los objetos tridimensionales. Para poder explicar bien en qué consisten los problemas prácticos, debemos de remontarnos a la Edad Media.

La Edad Media es el periodo histórico de Europa que comprende del siglo V al XV, donde se observa el cambio de la cultura clásica a la cultura cristiana. Estos cambios se manifestaron en el arte. Para la geometría proyectiva, la evolución de la pintura medieval es decisiva, por eso se revisarán algunas obras pictóricas del periodo.

Al dar un paseo por el Museo Nacional de la Edad Media de París o Museo Cluny, el visitante puede notar que la mayoría de las piezas de arte, con excepción de la serie de los tapices de *"La dama y el unicornio"*, giran alrededor de la religión cristiana y tienen una función didáctico-religiosa y decorativa. Durante este periodo, los santos, vírgenes o Jesucristo son las figuras representadas en el arte, generalmente en retablos. Los ejemplos de los que se hablarán se encuentran en Oldenburg (1968) que se puede descargar

gratuitamente en el sitio del Museo de Arte Metropolitano, Nueva York.

El retablo pintado por el italiano Andrea Orcagna (1344-1368), Oldenburg (1968), tiene tres niveles y se ven las siguientes imágenes: en el primer nivel, está el juicio final; el segundo nivel está dividido en dos partes: en la del lado izquierdo, se observa un santo obispo, una virgen cargando a un niño y a san Pedro mártir ; del lado derecho, se ve la crucifixión. El tercer nivel también está dividido en dos: del lado izquierdo, se ve a santo Tomás de Aquino con un libro y del lado derecho ,un nacimiento. Hay muchas cosas de valor artístico que señalar sobre este retablo, pero nosotros solo tenemos interés en hacer notar algunas características: primero, en todas las secciones del retablo, el fondo es sólido con algunos detalles; segundo, las figuras principales como la virgen, Jesucristo y santo Tomás de Aquino tienen un tamaño no proporcional a las demás. Esta variación de tamaño en las figuras se debe a que se busca resaltarlas como si estuvieran en un primer plano y las demás atrás. Aunque no se logra esta intención de profundidad, para el espectador queda claro cuáles son las figuras importantes. Si se buscan imágenes de pinturas medievales o arte medieval en Google , se desplegarán miles de pinturas medievales, en su mayoría con motivos religiosos que cumplen con estas dos características, por lo que podemos concluir que su interés no era representar la realidad, sino dramatizar y enfatizar el interés en sus figuras religiosas. La pintura del siguiente periodo, la pintura renacentista, tendrá otros intereses.

El Renacimiento es el nombre del movimiento cultural que se produjo en Europa occidental durante los siglos *XV* y *XVI*, donde se retoman elementos de la cultura clásica y se rechazan los principios del conocimiento medieval; es decir, la religión deja de ser el centro de todo, lo que provoca una gran transformación cultural. En el medievo, todo giraba en torno a la idea de Dios; durante el Renacimiento, el hombre pasa a ser el centro del universo. La lógica y la razón son fuentes del conocimiento y se busca la verdad a través de la reflexión personal y de la investigación. Nuevamente, se observarán ciertos aspectos técnicos de la pintura de la época.

Los pintores medievales tuvieron como intención primordial la representación de imágenes religiosas, pero los pintores renacentistas se centraron en la búsqueda de la representación fidedigna de la realidad; es decir, anhelaban dibujar con exactitud al hombre y su entorno, dibujar el objeto tridimensional en papel. Los artistas renacentistas italianos y franceses realizaron estudios formales sobre cómo representar los objetos inventando varias técnicas.

Una de estas técnicas es el punto de fuga, procedimiento que da origen a la idea de cómo definir una perspectiva. Un ejemplo: en *La última cena*, de Leonardo da Vinci, podemos observar a 12 individuos de un lado de la mesa con una figura central que representa a Jesucristo. En esta pintura, la figura principal es la mesa con sus comensales en un primer plano; en un segundo plano, se aprecia la habitación con un fondo lejano con tres ventanas abiertas. La profundidad de la pintura se logra tomando como punto de fuga la cabeza de Jesús y haciendo que todas las líneas de la habitación se intersecten en su cabeza. Desde el punto de vista de las perspectivas, la pintura es perfecta; esta escena representa los objetos reales.

Por medio del estudio riguroso, los renacentistas lograron hacer muchos tratados de pintura donde se observan principios de formalidad matemática como: *Instrucciones para medir con regla y compás*, de Alberto Durero(1471-1528), *Tratado de la pintura*, recopilación de notas de Leonardo da Vinci, escrita por Peladan, por mencionar algunos (la descripción del contenido de estos tratados se puede encontrar en Galarza y Loera (2015),p.p23). En conclusión, los pintores del Renacimiento habían resuelto el problema de la representación de los objetos tridimensionales abriendo un mundo de posibilidades para sus aplicaciones en la arquitectura y la ingeniería. Al aplicar estas herramientas para realizar construcciones e inventos, fueron desarrollando más teoría matemática, dando los cimientos de la teoría de la geometría proyectiva. De hecho, el mayor exponente de la geometría proyectiva es el ingeniero,arquitecto y matemático francés Girard Desargues(1591-1661).

En su trabajo como ingeniero durante el Renacimiento, Desargues se vio obligado a estudiar los tratados de pintura,con el fin de resolver problemas aplicados; de ahí nació su curiosidad por las propiedades de las perspectivas y su interés por descubrir sus hallazgos en varios libros, donde elaboró una puntual descripción matemática sobre el tema. Sin embargo, Desargues nunca buscó difundir sus descubrimientos,su libro más importante *Borrador de un ensayo sobre los resultados de los encuentros de un cono con un plano* (París 1639) pasó desapercibido en la comunidad matemática . Según el historiador de las matemáticas Carl B. Boyer, es uno de los grandes libros con menor éxito que se hayan producido jamás. De este libro, de carácter matemático y completamente enfocado en la geometría, actualmente solo existe una copia en París. Desargues vivió en una de las épocas de mayor esplendor de las matemáticas en Francia y perteneció al mismo círculo de científicos que Marin Mersenne (1588-1648); mantenía una estrecha relación

con los Pascal (Blaise Pascal (1623-1662) y con su padre Étienne Pascal (1588-1651)), con René Descartes (1597-1650), con Pierre de Fermat (1601-1665) y con Philippe de la Hire (1640-1719). Pese a que Desargues perteneció al círculo de matemáticos franceses importantes de su época, no logró que sus descubrimientos geométricos fueran apreciados y populares, quizá porque casi al mismo tiempo que Desargues publicaba sus estudios en gometría proyectiva, Descartes introdujo las coordenadas cartesianas a la geometría y con esta nueva herramienta matemática nace la geometría analítica que por sus cualidades permitía resolver algunos problemas con mayor facilidad que sólo con los métodos geométricos anteriores y, además, era un campo emocionante y nuevo de investigación para los matemáticos. No obstante, los matemáticos Blaise Pascal y Philippe de la Hire quedaron impresionados con el trabajo de Desargues y decidieron trabajar problemas de la geometría proyectiva. Siguiendo este camino, Pascal y La Hire publicaron trabajos donde se estudiaban las cónicas. Estos tres matemáticos franceses fueron los principales investigadores en geometría proyectiva del siglo *XVII*, pero hubo algunos matemáticos de otros países que hicieron avances relevantes como: Isaac Newton, Colin Maclurin y Giovanni Ceva; sus aportaciones se pueden consultar en Speed (1964). Después de esto, la geometría analítica ganó la atención de todos lo matemáticos, dejando olvidada a la geometría proyectiva hasta el siglo *XIX*.

En el siglo *XIX* renace en Francia cierto interés por la geometría proyectiva, gracias a la geometría descriptiva inventada por el francés Gaspard Monge (1746-1818). La geometría descriptiva es un método para representar objetos sólidos en un plano. Monge desarrolló este método al tener que diseñar fortificaciones militares donde no llegara directamente el fuego enemigo; su objetivo lo logró con argumentos puramente geométricos. Después de varios años trabajando en el ejército, se le otorgó a Monge una cátedra en la *École Polytechnique*. En su cátedra, Monge tuvo varios estudiantes que resultaron ser de los mejores geómetras del siglo *XIX*, entre ellos: Nicolas Léonard Sadi Carnot(1753-1823), Charles-Julien Brianchon (1785-1864) y Jean-Victor Poncelet(1788-1867). Todos hicieron avances en la geometría proyectiva.

Saliendo del *École Polytechnique*, Poncelet entró a la escuela militar en Metz; en 1812, como un oficial joven del ejército de Napoleón, participó en la fallida invasión francesa a Rusia. En 1812 Poncelet fue arrestado y en 1813, llega a su prisión en Sárátov donde para distraerse recuerda sus lecciones con Monge y empieza a desarrollar las ideas para

el primer tratado de geometría proyectiva titulado *Traité des propriétés projectives des figures*.

Si bien Poncelet sale de la cárcel en 1814, publica su tratado hasta 1822, brindándole un fuerte impulso a la geometría proyectiva que no se veía desde los tiempos de Desargues. Este tratado tiene como propósito fundamental estudiar las propiedades invariantes gráficas de las figuras, abordar geoméricamente los puntos al infinito, cónicas y las primeras ideas de la dualidad. Joseph-Diez Gergonne (1771-1859), contemporáneo de Poncelet, contribuyó con el principio de dualidad en la geometría proyectiva y es el primer matemático que empieza a publicar teoremas con doble columna.

Los siguientes avances importantes en la geometría proyectiva en el siglo *XIX* fueron hechos por los geómetras alemanes: Jacob Steiner(1796-1873), Karl George Christian Von Staudt (1798-1867), August Ferdinand Möbius (1790-1868) y Julius Plücker(1801-1868). Steiner publicó sinfín de artículos sobre la dualidad; en su libro *Geometer der Lage*, Staudt definió de una nueva forma las transformaciones proyectivas, utilizando formas armónicas. En sus siguientes publicaciones, Staudt se dedica a hacer complicadas construcciones geométricas. En 1827, Möbius publica *Per barycentrische Calcul*, un libro de geometría proyectiva donde establece el término de razón cruzada. Sin embargo, el contenido más importante de esta publicación es que establece y desarrolla el sistema de coordenadas homogéneas. Después de esta publicación, Plücker introdujo la notación actual de las coordenadas homogéneas. Son estos dos últimos matemáticos alemanes quienes consiguieron darle un tratamiento analítico a la geometría proyectiva . A mediados del siglo *XIX*, el interés de los matemáticos estaba en la geometría proyectiva analítica. Muchos de los descubrimientos en esta área fueron hechos por algebristas(por ejemplo, Arthur Cayley, que buscaba estudiar las invariantes algebraicas). Todos estos avances en la geometría del siglo *XIX* ocurren simultáneos al descubrimiento de las geometrías no euclidianas que se consideraron anteriormente en *el camino matemático*. Los matemáticos de la época se dieron cuenta de que estaban hablando de lo mismo y con esto pudieron hacer generalizaciones de ciertos conceptos proyectivos.

En el siglo *XX* se estudió la aplicación del cálculo a la geometría proyectiva, dándole el nombre de geometría diferencial proyectiva. Después, se vuelve complicado llevar un registro de en qué publicaciones matemáticas se estudia la geometría proyectiva. Las aportaciones con detalle de cada uno de los matemáticos nombrados hasta ahora se encuentran

en Speed (1964) y Coolidge (1934). Es importante señalar que existen 3 artículos escritos a principios del siglo *XX* de autores alemanes que exploran ideas sobre conjuntos convexos en el espacio proyectivo; lamentablemente, no se pudo tener acceso a ellos.

Actualmente, la geometría proyectiva a veces parece estar una vez más olvidada por los matemáticos puros; no obstante ha resultado muy necesaria para ciertas aplicaciones recientes como es la visualización de imágenes por computadora y ha sido fuente de inspiración para generar nuevas ideas. Una de las ideas que ha inspirado la geometría proyectiva es aplicar programación lineal en conjuntos convexos en el espacio proyectivo, dado que en este espacio la dualidad surge de manera natural. Estas ideas se han discutido en Sinden (1963), Calvillo y Mayo (1990) y Calvillo (1990). Los conjuntos convexos proyectivos fueron estudiados a mediados del *XX* en Groot y Vries (1957), Dekker (1965).

Hasta aquí se ha bosquejado la historia de la geometría proyectiva en bajas dimensiones ($n = 2, 3$). Tratar de descubrir los desarrollos que tuvieron lugar desde la segunda mitad del siglo *XIX* hasta ahora sería en sí mismo un trabajo de investigación nada sencillo, por lo que en este escrito nos conformaremos con decir que el desarrollo del álgebra lineal fue decisivo para generalizar los espacios geométricos para cualquier dimensión.

Apéndice B

Polaridad de Apolonio

A continuación se verá otra demostración de la *Observación 5.0.1* paso a paso. Para lograrlo, se toma la siguiente parametrización de un punto (x, y) sobre la circunferencia de radio 1 como: $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$. Lo que se busca demostrar es que el producto interno de cualquier punto sobre la recta polar correspondiente al punto a con el punto a es igual a 1, se probará que siguiendo el dibujo 5.3.

El primer paso es encontrar el punto P_1 y e punto a . Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ puntos sobre la circunferencia, tal como se ven en 5.3,a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les corresponden las siguientes coordenadas:

$$\alpha = (\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, \frac{2t_1}{1+t_1^2}), \beta = (\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}, \frac{2t_2}{1+t_2^2}), \gamma = (\frac{1-t_3^2}{1+t_3^2}, \frac{2t_3}{1+t_3^2}), \delta = (\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}, \frac{2t_4}{1+t_4^2})$$

Para encontrar el punto a , se debe de calcular $l_{\alpha\beta} \cap l_{\gamma\delta}$, así que se necesitan las ecuaciones de $l_{\alpha\beta}$ y $l_{\gamma\delta}$. Utilizando la fórmula para encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos en \mathbb{R}^2 , se llega a: $l(x, y) = x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$ y se definirá a cada recta por medio de sus coeficientes, por lo que si se toma como: $A = y_2 - y_1, B = x_1 - x_2$ y $C = x_2y_1 - x_1y_2$, se define a la recta l como (A, B, C) .

Entonces, para $l_{\alpha\beta}$ se tiene que $A_{\alpha\beta} = \frac{(t_2-t_1)(1+t_1t_2)}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)}$, $B_{\alpha\beta} = \frac{(t_2-t_1)(t_2+t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}$ y $C_{\alpha\beta} = \frac{2(t_2-t_1)(1-t_2t_1)}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)}$. Como $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ y $C_{\alpha\beta}$ comparten el mismo denominador y en el numerador $(t_2 - t_1)$ se puede quitar, así queda:

$$l_{\alpha\beta} = (1 + t_1t_2, t_2 + t_1, 1 - t_1t_2)$$

Siguiendo la misma idea, se tiene que:

$$l_{\gamma\delta} = (1 + t_3t_4, t_3 + t_4, 1 - t_3t_4)$$

El cálculo de $a = l_{\alpha\beta} \cap l_{\gamma\delta}$ se realiza igualando las dos rectas, entonces, $x = \frac{C_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta} - C_{\gamma\delta}B_{\alpha\beta}}{A_{\gamma\delta}B_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta}}$
y $y = \frac{C_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} - C_{\gamma\delta}A_{\alpha\beta}}{B_{\gamma\delta}A_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}}$.

El punto a tiene las siguientes coordenadas:

$$x_{\alpha\beta} = \frac{(1 - t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 - t_3t_4)(t_1 + t_2)}{(1 + t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3t_4)(t_1 + t_2)}$$

$$y_{\alpha\beta} = \frac{2(t_3t_4 - t_1t_2)}{(1 + t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3t_4)(t_1 + t_2)}$$

El punto P_1 se encuentra resolviendo $l_{\alpha\gamma} \cap l_{\beta\delta}$ donde :

$$l_{\alpha\gamma} = (1 + t_1t_3, t_1 + t_3, 1 - t_1t_3)$$

$$l_{\beta\delta} = (1 + t_2t_4, t_2 + t_4, 1 - t_2t_4)$$

Utilizando las ecuaciones para encontrar x y y , pero sustituyendo ahora por los valores de las rectas $l_{\alpha\gamma}, l_{\beta\delta}$, se tiene que las coordenadas del punto P_1 son:

$$x_{P_1} = \frac{(1 - t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 - t_2t_4)(t_1 + t_3)}{(1 + t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 + t_2t_4)(t_1 + t_3)}$$

$$y_{P_1} = \frac{2(t_1t_3 - t_2t_4)}{(1 + t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 + t_2t_4)(t_1 + t_3)}$$

Ya con los puntos P_1 y a queda demostrar que $x_{\alpha\beta}x_{P_1} + y_{\alpha\beta}y_{P_1} = 1$. La expresión $x_{\alpha\beta}x_{P_1} + y_{\alpha\beta}y_{P_1}$ es igual a:

$$\left(\frac{(1 - t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 - t_3t_4)(t_1 + t_2)}{(1 + t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3t_4)(t_1 + t_2)} \right) \left(\frac{(1 - t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 - t_2t_4)(t_1 + t_3)}{(1 + t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 + t_2t_4)(t_1 + t_3)} \right) +$$

$$\left(\frac{2(t_3t_4 - t_1t_2)}{(1 + t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3t_4)(t_1 + t_2)} \right) \left(\frac{2(t_1t_3 - t_2t_4)}{(1 + t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 + t_2t_4)(t_1 + t_3)} \right)$$

Notemos que si $x_{\alpha\beta}x_{P_1} + y_{\alpha\beta}y_{P_1} = 1$ se cumple, entonces, el numerador y denominador de la expresión anterior deben de ser iguales, así que al desarrollarlos y checarlos término a término las dos expresiones coinciden. De esta forma, el denominador queda:

$$((1 - t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 - t_3t_4)(t_1 + t_2))((1 - t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 - t_2t_4)(t_1 + t_3)) +$$

$$(2(t_3t_4 - t_1t_2))(2(t_1t_3 - t_2t_4))$$

que al desarrollarse queda como:

$$-t_4^2 t_1^2 t_2^2 + 2t_4^2 t_1^2 t_2 t_3 - t_4^2 t_1^2 t_3^2 + t_4^2 t_2^2 t_3^2 - 2t_4^2 t_2 t_3 + t_4^2 - 2t_4 t_1 t_2^2 t_3^2 + 2t_4 t_1 t_2^2 + 2t_4 t_1 t_2^2 - 2t_4 t_1 + t_1^2 t_2^2 t_3^2 - 2t_1^2 t_2 t_3 + t_1^2 - t_2^2 + 2t_1 t_3 - t_3^2$$

Por otro lado, el denominador se expresa como:

$$((1 + t_1 t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3 t_4)(t_1 + t_2))(1 + t_1 t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3 t_4)(t_1 + t_2)$$

Al desarrollarse, queda:

$$-t_4^2 t_1^2 t_2^2 + 2t_4^2 t_1^2 t_2 t_3 - t_4^2 t_1^2 t_3^2 + t_4^2 t_2^2 t_3^2 - 2t_4^2 t_2 t_3 + t_4^2 - 2t_4 t_1 t_2^2 t_3^2 + 2t_4 t_1 t_2^2 + 2t_4 t_1 t_2^2 - 2t_4 t_1 + t_1^2 t_2^2 t_3^2 - 2t_1^2 t_2 t_3 + t_1^2 - t_2^2 + 2t_1 t_3 - t_3^2$$

Se tiene que cada término del denominador y numerador coincide; así se puede concluir que $x_{\alpha\beta}x_{P_1} + y_{\alpha\beta}y_{P_1} = 1$. El mismo proceso se puede realizar para el punto P_2 de forma que $x_{\alpha\beta}x_{P_2} + y_{\alpha\beta}y_{P_2} = 1$.

Como los puntos sobre la recta polar son una combinación convexa, entonces, $q = p_1\lambda + (1 - \lambda)p_2$ si se multiplica por el punto a se tiene: $a \cdot q = a \cdot p_1\lambda + (1 - \lambda)a \cdot p_2$ como se probó que $a \cdot p_1 = 1$ y $a \cdot p_2 = 1$, entonces, $a \cdot q = \lambda + (1 - \lambda) = 1$, por lo tanto, el producto interior de a con los puntos en la recta polar es igual a 1.

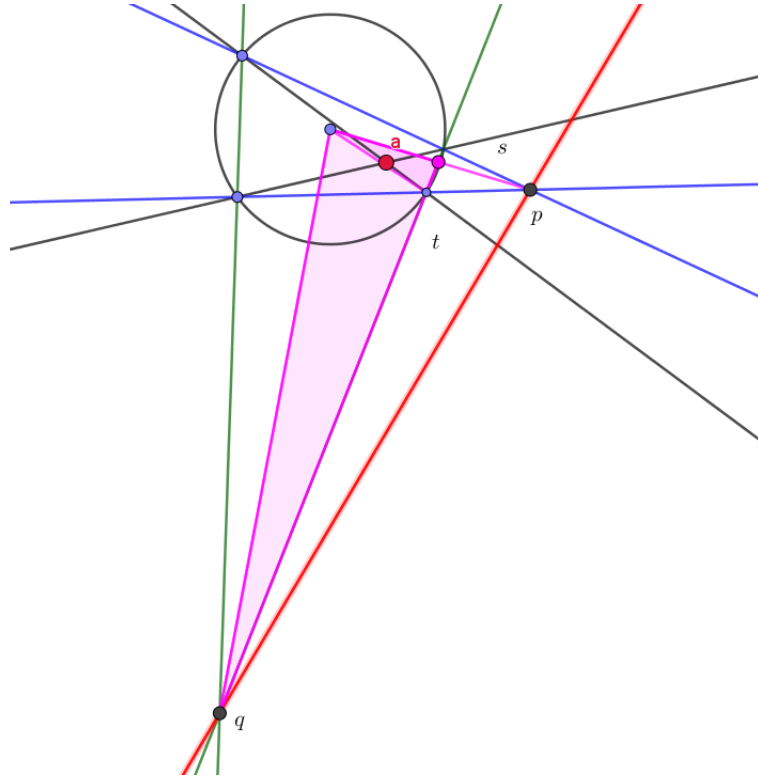


Figura B.1:

Bibliografía

- Alberto S, S. C. (2005). Geometría afín y proyectiva i3. <http://apncs.cie.uma.es/geop2005/>, 14–15.
- Baer, R. (1952). Linear algebra and projective geometry. *Dover editions*, 1–5.
- Birkhoff, G. (1948). Lattice theory. *American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume XXV*, 16–18.
- Bracho, J., y Calvillo, G. (1991). Homotopy classifications of projective convex sets. *Geometriae Dedicata*, 37, 307–311.
- Calvillo, G. (1990). Towards a theory of optimization in projective space. *Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization, Proceedings of the Fifth Mexico-United States Workshop*, 50–59.
- Calvillo, G., y Mayo, G. L. (1990). Polyhedral invariants and a representation theorem in projective geometry. *Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization, Proceedings of the Fifth Mexico-United States Workshop*, 43–49.
- Coolidge, J. (1934). The rise and fall of projective geometry. *Mathematical Association of America*, 217–228.
- Dekker, D. (1965). Convex regions in projective space. *Amer. Math. Monthly* 62, 430–431.
- Dieudonné, J. (1989). A history of algebraic and differential topology, 1900 - 1960. *Birkhouser Boston Basel*, 185–196.
- Friedberg, S. H., Insel, A., y Spence, L. E. (1997a). Linear algebra. *Prentice Hall*, 377–379.
- Friedberg, S. H., Insel, A., y Spence, L. E. (1997b). Linear algebra. *Prentice Hall*, 389–391.
- Friedberg, S. H., Insel, A., y Spence, L. E. (1997c). Linear algebra. *Prentice Hall*, 404.
- Galarza, A. I. R., y Loera, G. S. (2015). Invitación a las geometrías no euclidianas. *Facultad de Ciencias, UNAM*, 23–24.

- Gallier, J. (2010). Geometric methods and applications for computing science and engineering. *Springer*, 107-108.
- Groot, J. D., y Vries, H. (1957). Convex sets in projective sets. *Composito Math* 13, 113–118.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4, 373–395.
- Nello Cristianini, J. S.-T. (2000). An introduction to support vector machines and other kernel-based learning methods. *Cambridge University Press*, 25-40.
- Oldenburg, P. (1968). Medieval art from private collections a special exhibition at the cloisters. *The Metropolitan Museum of Art*, 11–12.
- Rodríguez-Sanjuarjo, J. M., y Sancho, J. M. R. (1998). Geometría proyectiva. *Addison-Wesley*, 107–408.
- Sinden, F. (1963). Duality in convex programming and in projective space. *SIAM Journal*. No.3, II, 535–552.
- Speed, G. M. (1964). A brief history of projective geometry. *University Microfilm, Inc. Ann Arbor Michigan*.
- Winder, R. O. (1966). Partitions of n-space by hyperplanes. *Journal on Applied Mathematics*, Vol. 14, No. 4, 811–818.