



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESTUDIO DE MODELOS DE INTERACCIÓN DINÁMICA EN REDES COMPLEJAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. EN C. EDUARDO JACOBO VILLEGAS

DIRECTORA DE TESIS
DRA. BIBIANA OBREGÓN QUINTANA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. LEV GUZMÁN VARGAS, UPIITA, IPN
DRA. KATYA RODRÍGUEZ VÁZQUEZ, IIMAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO DE 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	3
1. Antecedentes	7
1.1. Teoría de resolución de conflictos	7
1.2. Dinámica de opinión	9
1.3. Objetivos de investigación	12
1.4. Justificación	13
1.5. Hipótesis de investigación	14
2. Marco teórico	15
2.1. Generalidades de las redes	15
2.2. El modelo de conflicto de N actores	20
2.3. El modelo de dinámica de opinión	21
2.4. Principios de psicología social	23
3. Metodología	25
3.1. Teoría de resolución de conflictos	25
3.1.1. Construcción de redes y métricas	26
3.2. Dinámica de opinión	29
3.2.1. Escenarios del modelo de dinámica de opinión	32
4. Resultados y discusión	35
4.1. Teoría de resolución de conflictos	35
4.1.1. Redes de libre escala con mezcla asortativa	35
4.1.2. Redes de libre escala jerárquicas y clubes de ricos	41
4.2. Dinámica de opinión	43
4.2.1. Autoafirmación de opinión sin retroalimentación	44
4.2.2. Autoafirmación de opinión con retroalimentación	44
Conclusiones	52
Bibliografía	54
Apéndice A. Las variables aleatorias G_- y G_+	66

Apéndice B. Resultados analíticos del modelo de conflicto de N actores	69
4.3. Preliminares	69
4.4. Retroalimentación positiva	72
4.4.1. Puntos de equilibrio	72
4.4.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio	73
4.5. Retroalimentación negativa	75
4.5.1. Puntos de equilibrio	75
4.5.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio	76
Apéndice C. Resultados analíticos del modelo de dinámica de opinión	78
4.6. Puntos de equilibrio	78
4.7. Estabilidad de los puntos de equilibrio	79
4.8. Discretización del modelo de dinámica de opinión	81
4.8.1. Propiedades del modelo discreto	83

Introducción

Una red compleja es un conjunto finito de vértices (nodos) y aristas (conexiones o enlaces), en la cual las aristas representan relaciones existentes entre parejas de vértices. Por ejemplo, los vértices pueden simbolizar personas, especies, neuronas, ciudades, computadoras, etc., mientras que, las aristas pueden simbolizar relaciones de amistad, relaciones depredador-presa, sinapsis entre neuronas, rutas comerciales entre ciudades, intercambio de información entre computadoras en internet, etc.

Las redes complejas tienen por objetivo modelar los sistemas en red del mundo real para tratar de comprender sus comportamientos, por esa razón poseen propiedades estadísticas y estructurales (topológicas) basadas en datos observables, que les confieren características específicas, tales como: vértices cuyo número de aristas tienen ciertas distribuciones de probabilidad, configuraciones jerárquicas, correlaciones entre nodos y presencia de comunidades.

En años recientes, el estudio de sistemas dinámicos sobre redes complejas ([1-5]) ha permitido generar modelos matemáticos para verificación de observaciones empíricas previas y predicción de resultados en diversas áreas del conocimiento, como por ejemplo: ecología ([6]), bioquímica ([7, 8]), neurociencias ([9, 10]), epidemiología ([11, 12]), aprendizaje automático ([13]) y ciencias sociales ([14-18]).

En este trabajo se realiza el modelado y análisis de sistemas dinámicos sobre redes complejas en dos áreas de conocimiento: resolución de conflictos sociales y dinámica de opinión. En ambas áreas, se analiza la variación temporal del estado u opinión de los nodos (actores) de la red cuando estos son actualizados tomando en cuenta su estado previo, su inercia al cambio y la cantidad y tipo de conexiones existentes entre ellos. Esto último se refiere a la estructura (o topología) de la red y a las proporciones de retroalimentación cooperativa, competitiva y mixta con las que los actores se relacionan entre sí.

La primera etapa de investigación de este trabajo se enfoca en el área de resolución de conflictos sociales (los resultados se encuentran publicados en [19]). En esta fase del trabajo de investigación se realiza un esfuerzo complementario al hecho en [15] para investigar las propiedades dinámicas obtenidas al generalizar el modelo de conflicto de dos actores de Liebovitch et al. ([20]) a un modelo de conflicto de N actores (ver la sección 2.2) sobre redes con topologías diversas.

A pesar de que Liebovitch et al. ([20]) desarrollaron el modelo de conflicto social de dos

actores a partir de los trabajos de Gottman et al. ([21, 22]) y los conocimientos intuitivos de Deutsch ([23, 24]), previamente este tipo de modelos ya se habían usado en otras áreas del conocimiento, como por ejemplo el modelo de redes neuronales tipo Hopfield ([25]), que posee gran relevancia en neurocomputación artificial ([26]).

La diferencia fundamental entre el trabajo realizado en [15] y el aquí desarrollado es que en [15] los procedimientos fueron implementados sobre redes de mundo pequeño ([27, 28]), mientras que, en el presente trabajo se usan redes de libre escala ([29-31]) y algunas variaciones de estas redes que se obtienen al considerar estructuras jerárquicas ([32-34]), diferentes niveles de mezcla asortativa ([35, 36]) y presencia de clubes de ricos ([37, 38]). Cabe mencionar que en la literatura científica se ha explorado muy poco sobre la influencia de las interacciones cooperativas y competitivas en las dinámicas de redes de libre escala con diferentes niveles de correlación de grados entre nodos y con presencia de clubes de ricos.

La relevancia de utilizar redes de libre escala reside en que estas redes poseen distribuciones de grado más parecidas a las redes sociales del mundo real que otros modelos de redes. Específicamente, las redes de libre escala permiten representar de manera adecuada los nodos con un número excepcionalmente grande de enlaces (*hubs*), así como la proporción de dichos nodos respecto a los nodos escasamente enlazados. Un ejemplo de *hub* son los influencers en la red social digital instagram con la relación $x \sim y$ si x es seguido por y . De esta manera, con el uso de redes de libre escala es factible estudiar la influencia que los *hubs* y sus tipos de correlaciones tienen sobre la evolución dinámica de todo el sistema y algunas situaciones inaccesibles para otro tipo de redes, como por ejemplo, la presencia de élites en el sistema (clubes de ricos).

El objetivo de la primera etapa de investigación consiste en identificar las condiciones de topología, de correlación de grados y de grado de cooperación o competencia en la red que conducen a un sistema a sus configuraciones con menos dispersión de estados (i.e. estados más cercanos al valor cero) o con estados más parecidos entre sí porque justamente estas dos situaciones podrían representar los casos con menor posibilidad de surgimiento de conflicto en la red. La primera situación por la cercanía con el estado neutro (representado por el valor numérico cero) y la segunda debido a que si todos los actores poseen valores de estados semejantes entre sí, entonces el consenso es factible.

Los resultados obtenidos en la primera etapa de investigación permiten establecer que las redes de libre escala preservan la situación reportada en [15], la cual dice que la presencia de cantidades similares de vínculos cooperativos y competitivos en una red generan las configuraciones finales con menor dispersión y más parecidos entre sí, este hecho es muy interesante porque se opone a la creencia popular de que los entornos cooperativos a diferencia de los competitivos, son los únicos que pueden propiciar la ausencia de conflictos.

La segunda etapa de investigación se sitúa en el área de dinámica de opinión. En esta etapa se propone un modelo de dinámica de opinión con enfoque en persuasión que actualiza las opiniones de los actores tomando en cuenta aspectos de diversos principios y teorías de la psicología social que rigen la evolución de las opiniones humanas de manera intrapersonal e interpersonal, como son: sesgo de confirmación ([39-43]), teorías de persuasión fallida ([44-46]),

principio de simpatía ([47-50]) y principio de autoridad ([51-53]), ver la sección 2.4 para una descripción detallada de estos principios.

El modelo de dinámica de opinión que se propone no sólo considera la fuerza de la influencia de las ideologías de los vecinos en la formación y variación de las opiniones de un individuo, sino también características relacionadas con la complejidad del propio individuo, como resistencia al cambio y filias. Abordar de manera simultánea las dos dimensiones anteriores en un sólo modelo no es una característica común en los modelos de dinámica de opinión existentes ([54-57]), por lo cual este estudio comprende el análisis de un enfoque novedoso en el campo de la dinámica de opinión.

Como el modelo de dinámica de opinión propuesto está basado en el modelo de conflicto de N actores, entonces permite estudiar las consecuencias de la cooperación y la competencia entre agentes en la formación de opiniones, esto es relevante porque en general los modelos de dinámica de opinión han prestado poca atención a dicho aspecto ([58, 59]).

El objetivo de la labor que se realiza en el área de dinámica de opinión es establecer un modelo que considere de manera efectiva los rasgos importantes de diversos principios psicológicos relacionados con la persuasión para estudiar la formación, permanencia y cambio de opinión de un actor que constantemente autoafirma su opinión (esto se especifica con la condición $c_{11} > 0$, la cual describe una relación de cooperación entre un actor consigo mismo, para más detalles ver la sección 2.3) y cómo influyen sobre él dos actores que promueven (o apoyan) posturas contrarias.

En la psicología social no se sabe con precisión cómo o si es posible extrapolar la dinámica de opinión de pocos actores a contextos grupales ([60-62]). De este modo, otra implicación positiva del desarrollo de este trabajo consiste en que podría ayudar a arrojar luz sobre esta cuestión.

El modelo que se propone permite estudiar la acción simultánea de dos o más rasgos psicológicos relacionados con la persuasión, por lo que constituye una herramienta útil para establecer hasta que punto una persona es capaz de mantener su opinión inicial (basada en educación, valores, costumbres, etc.), antes de que ciertos factores externos (como la persuasión) logren cambiarla. En este sentido, uno de los resultados más relevantes de la investigación confirma la creencia popular de que los cambios de las posturas originales de los actores son más difíciles cuanto más fuerte es la simpatía inicial que los actores sienten por dichas posturas originales.

En este trabajo las evoluciones de los estados u opiniones de los actores al implementar los respectivos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, se obtienen a través de simulaciones numéricas, mientras que, los análisis de las configuraciones finales del sistema se realizan usando métricas que son estudiadas por medio de enfoques tanto numéricos como analíticos. Además, en el caso del trabajo referente a dinámica de opinión se estudian las respectivas versiones de ecuaciones en diferencias de los sistemas originales porque permiten incluir parámetros de manera conveniente y conseguir resultados analíticos más directos

acerca de las evoluciones numéricas.

Es importante aclarar que en este trabajo no se modelan dinámicas de conflicto y de opinión reales, sino versiones simplificadas de dichos procesos que podrían ser de utilidad para la comprensión de acontecimientos y el diseño de estrategias.

Estructura de la tesis

Esta tesis está dividida en cuatro capítulos cuyos contenidos se describen a continuación.

En el capítulo 1, se expone el estado del arte y las motivaciones que llevaron al desarrollo de este trabajo en las dos áreas que aborda: teoría de resolución de conflictos y dinámica de opinión. Además, en la última sección del capítulo se presentan los objetivos generales y particulares de esta tesis.

En el capítulo 2, se proporcionan definiciones, características técnicas y notas explicativas acerca de los conceptos de redes complejas, modelos matemáticos y psicología social que son usados a lo largo del documento.

En el capítulo 3, se explica detalladamente la metodología seguida para el diseño y ejecución de las evoluciones numéricas y métricas implementadas en este trabajo.

En el capítulo 4, se muestran los resultados de las diversas simulaciones desarrolladas durante el trabajo de investigación. En este capítulo, también se realiza la interpretación y discusión de los resultados para determinar el alcance y las limitaciones de la investigación.

Es importante mencionar que los resultados analíticos obtenidos para los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que describen los modelos de esta tesis, así como los correspondientes a sus versiones de ecuaciones en diferencias, se encuentran en los apéndices de este documento.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se presentan el estado del arte de las dos áreas abordadas: teoría de resolución de conflictos y dinámica de opinión. También, se presenta la motivación para la realización de este trabajo. Además, en la última sección se exponen los objetivos generales y particulares de la tesis.

1.1. Teoría de resolución de conflictos

Un conflicto puede surgir en diversas situaciones, ya sea a nivel intrapersonal, interpersonal, o en contextos más amplios, como en grupos sociales, culturales, de trabajo, etc. En psicología, la teoría de resolución de conflictos es un área que se centra en comprender cómo las personas o grupos manejan los conflictos internos y externos y cómo pueden encontrar soluciones efectivas para sobrellevarlos o superarlos.

La teoría de resolución de conflictos busca proporcionar herramientas y habilidades para abordar los conflictos de manera constructiva, promoviendo relaciones saludables y mejorando el bienestar individual y social. Algunos psicólogos que han realizado contribuciones valiosas a la teoría de resolución de conflictos desde contextos interpersonales e intergrupales, son: Morton Deutsch ([63]), Kurt Lewin ([64]), John W. Burton ([65]), William Ury ([66]) y Mary Parker Follett ([67]).

La teoría del conflicto cooperativo y competitivo, sobre la cual se basa este trabajo, fue inicialmente desarrollada por Morton Deutsch ([68]) y posteriormente expandida por David W. Johnson ([69]). Un conflicto está integrado por más factores que sólo los comportamientos cooperativos y competitivos, como por ejemplo: poder e influencia, percepción social, cognición, creatividad, y personalidad. Sin embargo, las orientaciones cooperativas o competitivas en un conflicto son decisivas para determinar su curso y resultados ([24]).

En la teoría del conflicto cooperativo y competitivo se identifican dos tipos básicos de interdependencia entre las metas de las personas involucradas: cooperativa (o positiva) donde la probabilidad de que una persona logre su meta está positivamente correlacionada con la probabilidad de que la otra logre su meta (i. e. ambas personas se hunden o nadan juntas);

y competitiva (o negativa) donde la probabilidad de que una persona logre su meta está negativamente correlacionada con la probabilidad de que la otra persona alcance su meta (si una persona se hunde, la otra nada, y viceversa).

En los artículos [70-73] se desarrollan investigaciones con enfoques psicológicos y sociales acerca de aprendizaje cooperativo en el siglo XXI, dinámicas cooperativas y competitivas entre hermanos, colaboración en un sistema de *crowdsourcing* gamificado y facetas de las orientaciones competitivas, respectivamente.

Los estudios de cooperación y competencia en el área de teoría de juegos evolutivos son de particular interés porque fueron los primeros en demostrar que las propiedades topológicas de la red pueden ser determinantes en la evolución dinámica de los sistemas ([74-76]). En [77-79] se abordan mecanismos de surgimiento de cooperadores en redes de libre escala, cooperación en el dilema del prisionero y robustez de la cooperación en redes de libre escala, respectivamente.

Con base en los trabajos de Deutsch, en [20] se propuso un modelo matemático no lineal de conflicto cooperativo-competitivo entre dos actores que tuvo un excelente desempeño al ser contrastado con observaciones experimentales previas. Dicho modelo proporcionó predicciones comprobables de forma cuantitativa sobre los conflictos, como por ejemplo, que un conflicto intratable de retroalimentación negativa-negativa (con un ganador y un perdedor claros) puede transformarse en una relación neutra para las partes que lo integran, mediante el cambio unilateral, de la retroalimentación negativa de uno de los actores a retroalimentación positiva.

En la referencia [15], se estudiaron las consecuencias dinámicas de la cooperación y competencia obtenidas al generalizar el modelo propuesto en [20] a un modelo de N actores sobre redes con topologías de mundo pequeño. Un hallazgo importante reportado en [15] fundamenta que los actores evolucionan a opiniones más cercanas entre sí y más cercanas a la opinión neutra (representada por el valor 0), cuando las cantidades de interacciones cooperativas y competitivas de la red son similares, contrario al pensamiento intuitivo de que un sistema social humano funciona mejor cuando todas sus interacciones son cooperativas.

En la presente investigación se realizará un esfuerzo complementario al realizado en [15] para examinar las propiedades dinámicas obtenidas al generalizar el modelo de conflicto de cooperación-competencia de dos actores de Liebovitch et al. ([20]) a un modelo de conflicto de N actores sobre redes con diferentes topologías. Específicamente, se analizará la acción del modelo de conflicto de N actores propuesto en [15] sobre redes con topologías de libre escala.

Un cambio importante entre el presente trabajo y el realizado en [15] es que aquí las interacciones cooperativas y competitivas se establecerán en términos de las aristas y no de los nodos, esto permitirá simular escenarios sociales más realistas al suponer que un actor es capaz de interactuar simultáneamente de manera cooperativa con algunos de sus vecinos y de manera competitiva con otros, en vez de tener un comportamiento homogéneo con su vecindad.

Las redes de libre escala, satisfacen que las distancias entre cualesquiera dos nodos de la red son extraordinariamente pequeñas, además a diferencia de las redes de mundo pequeño, estas redes permiten modelar adecuadamente la existencia de una reducida porción de vértices con una gran cantidad de vecinos (*influencers* o *hubs*), mientras que, al mismo tiempo, la red es tal que la mayoría de los vértices tienen muy pocos vecinos, esta situación se ha reportado en numerosas redes sociales y no sociales del mundo real, ([29-31]).

Usando redes de libre escala se estudiará la dinámica global del sistema al considerar diferentes porcentajes de interacciones cooperativas, competitivas y diversos factores estructurales de la red, como: presencia de configuraciones jerárquicas, clubes de ricos y distintas correlaciones entre los *hubs*. Este análisis es valioso porque en el ámbito de la teoría de resolución de conflictos se ha explorado muy poco sobre la acción conjunta de las interacciones cooperativas o competitivas y las características estructurales mencionadas.

Otro factor importante para el desarrollo de este trabajo es que se ha reconocido que en las interacciones sociales, el porcentaje de cooperadores y competidores no es del todo claro, además es probable que haya cambios con el tiempo. Sin embargo, varios estudios empíricos han reportado que la presencia de cooperación es mayor que la de competencia [14], pero no hay una explicación completa para asumir un porcentaje específico.

Muy recientemente se han considerado dinámicas de cooperación y competencia en contextos de redes multicapa ([80-82]) y otras configuraciones, incluidas las denominadas de orden superior en las que las interacciones entre las unidades no se limitan a pares, sino que pueden ocurrir en grupos de mayor tamaño ([83-85]).

En general, la identificación y comprensión de las condiciones que conforman o promueven un entorno conflictivo, tales como la presencia de conductas cooperativas y/o competitivas, se consideran importantes para el desarrollo de estrategias que conduzcan a alcanzar acuerdos satisfactorios entre las partes, o en su defecto, a mantener un estado regulado de las hostilidades.

1.2. Dinámica de opinión

La dinámica de opinión es un área de estudio multidisciplinaria con presencia en diversos campos de conocimiento, como son: psicología, sociología, economía, finanzas, ciencias políticas y ciencia social computacional ([54, 57, 86-90]).

Los objetivos de la dinámica de opinión son investigar, modelar y evaluar los procesos de evolución de las opiniones de los actores (o agentes) en el curso de sus interacciones sociales para comprender su surgimiento, permanencia, variación y difusión.

Algunos conceptos clave en dinámica de opinión son: polarización, consenso y fragmentación de opinión, los cuales están relacionados con sucesos como: voto político, persuasión, manipulación, propagación de información en redes sociales y surgimiento de características

culturales.

Un punto de partida de los estudios desarrollados en dinámica de opinión lo constituye la teoría de la aguja hipodérmica de Laswell publicada en 1927 ([91]), la cual sugiere que los medios de comunicación son una herramienta capaz de inyectar opiniones, creencias y actitudes en la mente de las personas de manera rápida y efectiva, sin importar las diferencias individuales o el contexto social. Con el paso de los años, los investigadores comenzaron a darse cuenta de que la influencia de los medios de comunicación no era tan directa ni unidireccional como sugiere esa teoría y que las interacciones y la influencia social entre los ciudadanos contribuyen de manera importante en los procesos de construcción de opinión.

Algunos principios y teorías (reportados por la psicología social) que son fundamentales en la construcción y variación de las opiniones tanto en las interacciones intrapersonales como en las interpersonales, son: principio de prueba social ([92]), principio de reciprocidad ([93]), efecto de mera exposición ([94-97]), principio de simpatía ([47-50]), sesgo de confirmación ([39-43]), principio de autoridad ([51-53]), efecto de halo ([98]), perseverancia de opiniones ([99]) y teoría del balance estructural ([100-103]). De este modo, para obtener un modelo que describa debidamente la dinámica de las opiniones de un sistema, es necesario tomar en cuenta estos principios psicológicos según el enfoque de la investigación a desarrollarse, justamente esto es lo que se hace en este trabajo desde el enfoque de la persuasión.

El sesgo de confirmación es la tendencia de las personas a buscar, interpretar y recordar información que apoya sus propias creencias, expectativas o hipótesis, mientras que se discrimina o se da menor importancia a las ideas contrarias. Como advierte Kahneman, incluso los científicos que se comprometen con una teoría tienden a ignorar los datos inconsistentes, concluyendo que los datos son incorrectos, no la teoría ([42]).

El sesgo de confirmación conduce a la polarización principalmente cuando las personas se rodean de información que respalda sus puntos de vista y evitan o desestiman información que los contradice. En [104] se propone un modelo de dinámica de opinión para estudiar las implicaciones del sesgo de confirmación en el surgimiento de grupos de actores con opiniones homogéneas.

El modelo de dinámica de opinión que será propuesto en este trabajo pretende analizar el efecto de la persuasión sobre individuos que están permanentemente bajo el efecto de autoafirmación de opinión (característica fundamental del sesgo de confirmación), para determinar si dichos individuos pueden ser encaminados a adoptar opiniones diferentes a su opinión original cuando son expuestos a ideas que rebaten sus posturas.

En los modelos matemáticos de dinámica de opinión se usan valores numéricos para representar las opiniones (estados) de los actores. De manera clásica, estos modelos se dividen en dos categorías según la cardinalidad del conjunto de opiniones que consideran, a saber: modelos discretos y modelos continuos. Dentro del bloque discreto tenemos: modelo de Sznajd ([105]), modelo del votante ([106, 107]) y modelo de la mayoría ([108]). Por otra parte, algunos ejemplos de modelos continuos son: modelo DeGroot ([109]), modelos de

confianza acotada (como Deffuant-Weisbuch y Hegselmann-Krause, ver [110, 111]) y modelo de opiniones continuas y acciones discretas ([112]).

Varias investigaciones han demostrado la utilidad de los modelos matemáticos de dinámica de opinión en diversos ámbitos, como son: comercio electrónico ([113]), anticonformidad estratégica y polarización ([114]), finanzas y negocios ([89]), transformación de opiniones minoritarias en opiniones mayoritarias ([115]), influencia de los medios en la ideología del contenido en las redes sociales en línea ([104, 116]), dinámica de opinión en grupos sociales heterogéneos ([117]) y democracia en sistemas de votación de dos niveles ([118]).

En esta investigación se construirá un modelo de dinámica de opinión del tipo opiniones continuas y acciones discretas (CODA por sus siglas en inglés). La característica principal de este tipo de modelos es que los actores tienen una opinión que es continua, pero muestran una actitud (postura) discreta. El modelo CODA seminal fue propuesto por Martins en 2008 ([112]). Martins argumenta que muchas actitudes importantes de la vida real son discretas, por ejemplo: manifestarse contra un régimen o no; votar por demócratas, republicanos o abstenerse; fumar o no fumar; elegir entre varias parejas, etc., en todos estos casos la elección de una actitud específica es el resultado de cambios continuos y graduales de opinión.

Los modelos CODA han sido usados en diversos ámbitos, como son: impacto de las opiniones de los compañeros en la iniciación al tabaquismo adolescente ([119]), surgimiento de opiniones extremas ([120]), modelos discretos que se pueden obtener como casos límite del modelo CODA ([121]), modelos CODA con M acciones discretas posibles ([122]), efectos de la atención selectiva en la promoción de nuevos productos ([123]) e impacto de los líderes de opinión en las acciones grupales ([124]).

El modelo de dinámica de opinión que será propuesto se basará en el modelo de conflicto de N actores ([15]), de esa manera, al igual que los modelos CODA, el modelo contará con presencia de memoria (la opinión de un actor al tiempo t afecta su opinión al tiempo $t + 1$) lo cual le brindará la capacidad de modelar situaciones inaccesibles para los modelos discretos clásicos de dinámica de opinión que se caracterizan por la ausencia de memoria, lo que es poco realista en diversos escenarios ([53, 92, 99]).

Dos cambios trascendentales entre el modelo de dinámica de opinión que será propuesto respecto a los modelos CODA son: 1) las reglas de actualización de opiniones estarán basadas en ecuaciones diferenciales, mientras que, en los modelos CODA se usa un enfoque probabilístico de actualización bayesiana, 2) las opiniones de los actores estarán acotadas, mientras que, en los modelos CODA varían sin restricciones en toda la recta real.

Se desea obtener un modelo de dinámica de opinión capaz de modelar sin inconvenientes las interacciones con y sin presencia de homofilia, de esta manera, lograría superar la limitación de los modelos clásicos de confianza acotada que establece que las interacciones entre agentes únicamente pueden existir cuando hay cierto grado de homofilia entre ellos. En particular, en dichos modelos de confianza acotada se tiene que cuando las opiniones de dos actores distan mucho, entonces no hay interacción entre ellos. Sin embargo, en varios estudios se ha

reportado que la interacción entre dos agentes con opiniones muy dispares puede resultar en un alejamiento aún mayor de sus posturas ([125-127]).

Los modelos de dinámica de opinión que pueden describir sin inconvenientes las interacciones con y sin presencia de homofilia podrían ayudar a modelar adecuadamente el principio de autoridad, pues dicho principio implica que en ciertas ocasiones las personas se ven obligadas a seguir la opinión de una figura de autoridad, incluso si esa opinión es incorrecta o contraria a la suya ([51, 52]).

De manera general, los modelos de dinámica de opinión, han prestado poca atención al efecto de la cooperación y la competencia entre agentes en la formación de opiniones, de hecho algunos estudios existentes se enfocan principalmente en la cooperación dejando de lado la competencia ([58]). En este trabajo se usarán digráficas signadas para describir cooperación y competencia en los procesos de generación de opinión en entornos persuasivos, la dirección y el signo de las aristas de las digráficas permitirá asignar roles cooperativos y competitivos entre los nodos de la red.

Un trabajo pionero en dinámica de opinión sobre gráficas signadas es [59], en dicha referencia Altafini estudia protocolos de consenso en presencia de interacciones cooperativas y competitivas que le permiten llegar a la conclusión de que es posible lograr una forma de consenso en presencia de interacciones antagónicas. Otros trabajos sobre dinámica de opinión en redes signadas han estudiado cómo un líder influye en la formación de las opiniones de sus seguidores ([58, 128]). La principal diferencia entre estos modelos y el que será desarrollado reside en que en el último la actualización de los estados de los actores se basará en el modelo de conflicto de N actores en lugar del modelo de Altafini.

Es relevante mencionar que tanto en los trabajos de Altafini como en el aquí presentado se usan actualizaciones de opiniones basadas en ecuaciones diferenciales y no el enfoque de modelación basada en agentes que ha imperado en los últimos años en el área de dinámica de opinión.

Recientemente se han desarrollado diversos trabajos con la intención de determinar un conjunto de principios unificadores que permitan comparar todos los modelos de dinámica de opinión dentro de un solo marco ([55, 129, 130]).

1.3. Objetivos de investigación

A continuación se presentan los objetivos generales y particulares de este trabajo de investigación.

Objetivo general

Investigar las propiedades dinámicas del modelo de conflicto de N actores sobre redes con distintas topologías de libre escala.

Objetivos particulares

1. Realizar estudios analíticos del modelo de conflicto de N actores para establecer algunos comportamientos generales del sistema.
2. Construir redes de libre escala jerárquicas y no jerárquicas.
3. Elaborar el código para simular el modelo de conflicto de N actores.
4. Realizar evoluciones numéricas del modelo de conflicto de N actores sobre redes de libre escala y comparar los resultados con los obtenidos de manera analítica para el modelo de conflicto de N actores.
5. Proponer e implementar métricas para estudiar la dinámica generada por los estados finales de los actores.
6. Proponer un modelo de dinámica de opinión con enfoque en persuasión, basado en el modelo de conflicto de N actores, sobre digráficas de tres nodos.
7. Realizar estudios analíticos del modelo de dinámica de opinión para establecer comportamientos generales del sistema.
8. Elaborar el código para simular el modelo de dinámica de opinión.
9. Realizar evoluciones numéricas sobre las digráficas y comparar los resultados con los obtenidos de manera analítica para el modelo de dinámica de opinión.
10. Modelar y analizar características fundamentales de diversos principios reportados por la psicología social mediante el modelo de dinámica de opinión propuesto.

1.4. Justificación

La realización de este trabajo consiste en, investigar las propiedades dinámicas obtenidas al generalizar el modelo de conflicto de dos actores de Liebovitch et al. ([20]) a un modelo de conflicto de N actores (ver la sección 2.2) sobre redes de libre escala con topologías diversas. Para ello considera la investigación desarrollada por [15], en redes de mundo pequeño.

En particular, esta investigación se enfoca en estudiar el modelo de conflicto de N actores usando redes de libre escala ([29-31]) y algunas variaciones de estas redes que se obtienen al considerar estructuras jerárquicas ([32-34]), diferentes niveles de asortatividad ([35, 36]) y presencia de clubes de ricos ([37, 38]). De esta manera, este trabajo permitirá analizar el modelo de conflicto de N actores sobre redes que poseen distribuciones de grado más allá de mundo pequeño, en las cuales se representan los nodos con un número excepcionalmente grande de enlaces (*hubs*), así como su proporción respecto al resto de nodos de la red, permitiendo saber cómo la presencia de este tipo de nodos, y las formas en las que se relacionan entre sí y con el resto de los nodos de la red, afectan la evolución dinámica de todo el sistema

en escenarios que son inaccesibles para otros tipos de redes, como las redes de mundo pequeño.

Por otra parte, en este trabajo también se explorará si el modelo de conflicto de N actores o ligeras variaciones de este, pueden ser de utilidad para modelar características importantes de fenómenos del área de dinámica de opinión, como por ejemplo la persuasión, una resolución favorable de esta proposición permitiría expandir el alcance del modelo de conflicto de N actores.

1.5. Hipótesis de investigación

En cualquier versión de las redes de libre escala la presencia de cantidades similares de interacciones cooperativas y competitivas genera la menor divergencia de los valores de los estados de los actores. A medida que los *hubs* poseen grados más grandes en las redes de libre escala (es decir, para valores bajos del exponente de la distribución de grado) las dispersiones de las métricas son mayores en los casos donde las interacciones son mayoritariamente cooperativas o competitivas.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se incluyen las definiciones, referencias, notas técnicas y notas explicativas de los conceptos de redes complejas, modelos matemáticos y psicología social que son usados a lo largo de la presente tesis.

2.1. Generalidades de las redes

Definición 1 Una **red** G es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito de **vértices** (nodos) y E es un conjunto de **aristas** (conexiones o enlaces) que relacionan parejas de nodos de V . Los elementos de E se representan como parejas ordenadas de elementos de V , es decir $E \subset V \times V$. En la figura 2.1 se muestra un ejemplo de una red.

Definición 2 El **orden** de una red, $G = (V, E)$, se define como la cantidad de elementos del conjunto V .

Definición 3 Sea $G = (V, E)$ una red. Se dice que G es una **red no dirigida** si las parejas ordenadas (a, b) y (b, a) representan la misma arista para cada par de elementos $a, b \in V$. Por ejemplo, una red en la cual las aristas representan carreteras entre ciudades es una red no dirigida, pues si existe una carretera de una ciudad A a una ciudad B , entonces también existe una carretera de la ciudad B a la ciudad A . Por otro lado, se dice que G es una **red dirigida (o digráfica)** si existen $a, b \in V$ tales que las parejas ordenadas (a, b) y (b, a) representan distintas aristas. Por ejemplo, una red en la cual las aristas representan relaciones de confianza entre personas es una red dirigida, pues si una persona A confía en una persona B , no es cierto que necesariamente la persona B también confía en la persona A .

Nota 1 La definición 3, implica que la presencia de una arista en el conjunto de aristas de una red está determinada por el tipo de la red en cuestión, es decir, si es una red dirigida o no dirigida. Por ejemplo, si $G = (V, E)$ es una red no dirigida y $(v, w) \in E$, entonces se tiene que $(w, v) \in E$.

Definición 4 Dada una red $G = (V, E)$ y $v \in V$, se dice que $w \in V$ es un **nodo vecino** del nodo v si y sólo si $(v, w) \in E$.

Definición 5 Dada una red $G = (V, E)$, el **grado** de un nodo $v \in V$ se define como la cantidad total de nodos vecinos que tiene v . Al mínimo (respectivamente máximo) número que es igual al grado de algún nodo de la red, se le conoce como **grado mínimo de la red** (respectivamente **grado máximo de la red**).

Definición 6 Dada una red $G = (V, E)$, y $v \in V$ se dice que v es un **hub** de G , si el grado de v es excepcionalmente grande comparado con el grado de la mayoría de los vértices de G . En la práctica generalmente se considera que un nodo es un hub de una red si está enlazado (mediante una arista) al menos al 80 % del total de nodos de la red y la proporción entre los nodos que son hubs respecto a los que no lo son es de 20 % a 80 %.

Definición 7 Dada una red no dirigida G con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_N\}$. Se dice que una sucesión $\{p_1, \dots, p_N\}$ es una **sucesión de grados** de la red G si para cada $1 \leq i \leq N$ se tiene que el nodo v_i posee grado p_i . En general, las sucesiones de grado de las redes suelen ordenarse de manera decreciente.

Definición 8 Sea $G = (V, E)$ una red. Las aristas de la forma (a, a) para cada $a \in V$, son conocidas como **lazos**.

La siguiente definición es importante porque constituye una forma de representar redes usando matrices. Esto es fundamental cuando se introducen dinámicas sobre una red a través de ecuaciones diferenciales vinculadas a las aristas de la red, tal como se hace en este trabajo.

Definición 9 Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La **matriz de adyacencia**, A , de una red dirigida $G = (V, E)$ es aquella que satisface: 1) A es una matriz cuadrada de dimensión n , 2) $A_{ij} = 1$ si y sólo si $(v_i, v_j) \in E$ y 3) $A_{ij} = 0$ si y sólo si $(v_i, v_j) \notin E$.

Si ahora suponemos que G es una red no dirigida, entonces por la nota 1 la matriz de adyacencia de G se define como en el caso en que G es dirigida, pero suponiendo que si $(v_j, v_i) \in E$, entonces $(v_i, v_j) \in E$. Esta última condición implica que las matrices de adyacencia de las redes no dirigidas siempre son simétricas. La figura 2.1 muestra un ejemplo de la matriz de adyacencia de una red no dirigida.

Definición 10 Se dice que una red es una **red signada** si sus aristas son asignadas con signos positivos y negativos. De este modo, las aristas de una red signada permiten especificar los tipos de interacciones entre vértices. En este trabajo las aristas negativas denotarán retroalimentación competitiva y las positivas retroalimentación cooperativa.

Definición 11 Sea $A \in M_{N \times N}$ la matriz de adyacencia de una red de orden N . Dados $c_{ij} \in \mathbb{R}$, con $1 \leq i, j \leq N$, se dice que una matriz $C \in M_{N \times N}$ es **la matriz de interacción** de la red si se cumple que: si $A_{ij} = 0$, entonces $C_{ij} = 0$; y si $A_{ij} \neq 0$, entonces $C_{ij} = c_{ij}$. En otras palabras, la matriz de interacción se obtiene a partir de la matriz de adyacencia al considerar diversos valores numéricos (tanto positivos como negativos) en sus entradas no nulas. De esta manera, la matriz de interacción describe una red cuyas aristas tienen peso $(|c_{ij}|)$ y signo $(\text{sgn}(c_{ij}))$. La figura 2.1 muestra la matriz de interacción de una red.

Definición 12 *El porcentaje de entradas positivas en la matriz de interacción, denotado por p^+ , se refiere al porcentaje de entradas positivas respecto a las entradas no nulas de la matriz de interacción (ver la figura 2.1). De esta manera, cuando $p^+ = 0$ todas las interacciones entre los actores de la red son competitivas (en este trabajo dos entradas negativas de la matriz de interacción asociadas a una arista significan que la arista describe una interacción competitiva entre los vértices correspondientes a dichas entradas), en cambio, si $p^+ = 100$ todas las interacciones entre los actores de la red son cooperativas (en este trabajo dos entradas positivas de la matriz de interacción asociadas a una arista significan que la arista describe una interacción cooperativa entre los vértices correspondientes a dichas entradas).*

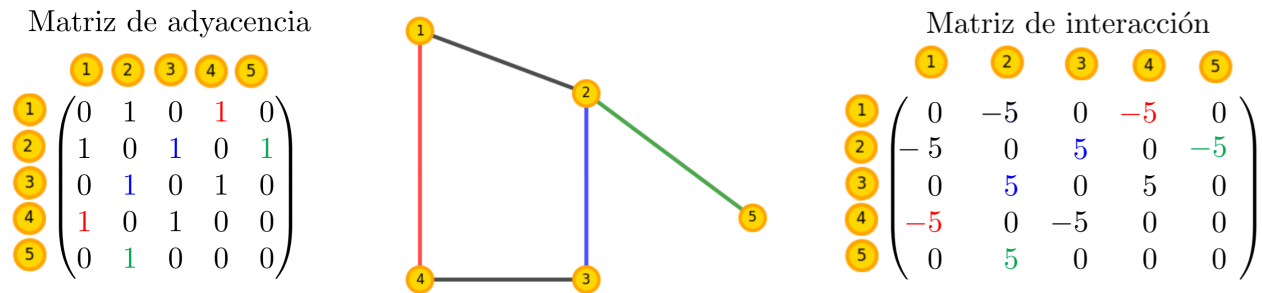


Figura 2.1: Las matrices de adyacencia y de interacción de una red no dirigida con 5 vértices y 5 aristas. En esta red el porcentaje de entradas positivas en la matriz de interacción es de 40% (ver la definición 12) y las aristas (2,3), (1,4) y (2,5) denotan interacciones cooperativa, competitiva y mixta, respectivamente (ver la definición 31).

Definición 13 *Se dice que una red es completa si cualesquiera dos nodos de la red conforman una arista de la red. Las redes completas son las que poseen el máximo número de aristas (sin considerar lazos) dentro del conjunto que contiene a todas las redes con un mismo conjunto de vértices.*

Definición 14 *Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y sea $G = (V, E)$ una red. Dados dos vértices $v_{s_1}, v_{s_p} \in V$, se dice que una secuencia de vértices de la red, $v_{s_1}v_{s_2} \dots v_{s_{p-1}}v_{s_p}$, es un camino entre los vértices v_{s_1} y v_{s_p} , si se cumple que: 1) $v_{s_i} \neq v_{s_{i+1}}$, 2) $(v_{s_i}, v_{s_{i+1}}) \in E$ y 3) todas las aristas conformadas por vértices consecutivos de la secuencia son diferentes. Si $v_{s_1}v_{s_2} \dots v_{s_p}$ es un camino entre los vértices v_{s_1} y v_{s_p} , y además $v_{s_1} = v_{s_p}$, entonces se dice que el camino es cerrado.*

Definición 15 *La longitud de un camino es la cantidad de nodos presentes en la secuencia del camino menos uno. Por ejemplo, se tiene que el camino abc posee longitud 2.*

Definición 16 *La distancia entre dos nodos a, b , la cual es denotada por $d(a, b)$, se define como la mínima longitud que posee un camino entre ellos, es decir*

$$d(a, b) = \min\{s \mid \text{existe un camino entre } a \text{ y } b \text{ de longitud } s\}.$$

Cuando no existen caminos entre dos vértices la distancia entre ellos no está definida.

Definición 17 Decimos que una red es **conexa** si entre cualesquiera dos vértices existe un camino entre ellos.

Definición 18 Sea $G = (V, E)$ una red conexa. El **diámetro** de G se define como

$$\text{diámetro}(G) = \max\{d(a, b) | a, b \in V\}.$$

Definición 19 El **coeficiente de correlación de grados**, r , propuesto en [35], se define como

$$r = \frac{M^{-1} \sum_i j_i k_i - [M^{-1} \sum_i \frac{1}{2}(j_i + k_i)]^2}{M^{-1} \sum_i \frac{1}{2}(j_i^2 + k_i^2) - [M^{-1} \sum_i \frac{1}{2}(j_i + k_i)]^2},$$

donde j_i, k_i son los grados de los vértices que forman la i -ésima arista, con $i \in \{1, \dots, M\}$.

Definición 20 La definición 19 implica que $r \in [-1, 1]$. Decimos que la red es: **asortativa**, si $r > 0$; **disortativa**, si $r < 0$; y **neutra**, si $r = 0$. A grandes rasgos, una red es asortativa, si las aristas unen nodos de grados altos con nodos de grados altos; disortativa, cuando las aristas unen nodos de grados altos con nodos de grados bajos; y neutra, si los enlaces entre nodos se realizan de manera aleatoria respecto a su grado. En [35] se comprueba que la red de coautores científicos en física es asortativa; la red alimentaria marina es disortativa; y la red del modelo de Barabási-Albert es neutra.

Definición 21 La expresión **correlación entre nodos** de una red se refiere a la diversidad de tipos de redes según su coeficiente de correlación de grados (asortativas, disortativas o neutras). En algunos trabajos también se le suele llamar **mezcla asortativa** de la red. En esta tesis se estudia cómo la correlación entre nodos afecta las configuraciones de las opiniones finales de un sistema social.

Definición 22 Sea $G = (V, E)$ una red. El **coeficiente de clustering** o simplemente **clustering** de G , denotado por C , es un valor que nos permite cuantificar el nivel de transitividad existente en la red, donde la relación sobre la cual se define la transitividad es “formar una arista”. De esta manera, la red es transitiva si siempre que $(a, b), (b, c) \in E$, entonces $(a, c) \in E$. El coeficiente de clustering se define como

$$C = \frac{\text{número de caminos cerrados de longitud tres}}{\text{número de caminos de longitud dos}}.$$

De este modo, $C \in [0, 1]$, donde $C = 1$ significa que la red posee transitividad perfecta. Es importante mencionar que según la definición 14, dados $u, v, w \in V$, se tiene que los caminos uvw y wvu son distintos, por lo cual deben ser contados separadamente para el cálculo de C .

Definición 23 Dada una red G , una **subred** de G es una red formada por un subconjunto del conjunto de vértices de G y por todas las aristas de G formadas por la unión de vértices en dicho subconjunto.

Definición 24 Dada una red G , un **club de ricos** de G es una subred de G formada por un subconjunto de los hubs de la red, tal que sus vértices cumplen dos condiciones: 1) están bien conectados entre sí (es decir, existe una cantidad elevada de aristas entre ellos) y 2) están preferentemente unidos entre ellos que con el resto de los vértices de la red. A la primera condición se le llama conectividad del club de ricos, y a la segunda, distribución de enlaces nodo-nodo (para más detalles ver [37]).

Definición 25 El **coeficiente de club de ricos** se define como el cociente entre el total de aristas existentes y el total de aristas posibles entre los nodos que conforman el club de ricos. En esta tesis se construyen clubes de ricos que poseen coeficiente de club de ricos igual a 1, es decir, clubes de ricos en los cuales sus vértices forman una red completa.

Definición 26 La **distribución de grado de una red**, $P(k)$, donde k es el grado, es una función de densidad de probabilidad que determina la posibilidad de que un vértice elegido de manera aleatoria tenga grado k . La distribución de grado de la red permite describir varias propiedades relacionadas con la conectividad de la red.

Definición 27 Se dice que una **red es de mundo pequeño** si la red tiene un coeficiente de clustering alto y se satisface que el promedio de la distancia entre sus nodos es de orden $\log(N)$, donde N es el orden de la red. Generalmente, la distribución de grado de una red de mundo pequeño es aproximada mediante distribuciones de tipo Poisson. Las referencias [27, 28, 30, 131-133] dan ejemplos y descripciones de propiedades de las redes de mundo pequeño.

Nota 2 La propiedad de mundo pequeño (o de seis grados de separación) establece que cualesquiera dos personas en el planeta, sin importar su posición geográfica, pueden ser conectadas a través de una cadena de seis o menos conocidos comunes. Esto constituye la base de los modelos de redes de mundo pequeño, en las cuales la distancia entre cualesquiera dos nodos de la red es pequeña.

Definición 28 Las variables aleatorias con funciones de densidad de la forma

$$P(k) = Ck^{-\alpha},$$

donde $\alpha > 0$ es una constante y C es una constante de normalización de la densidad, se conocen como distribuciones de tipo **ley de potencias**, a la constante α se le llama **exponente de la ley de potencias**.

Definición 29 Se dice que una **red es de libre escala** si se satisface que su distribución de grado es de tipo ley de potencias y su diámetro es de orden $\log(N)$, donde N es el orden de la red. Se ha observado que el promedio de la distancia entre los nodos de una red de libre escala es de orden $\log(\log(N))$. La principal característica de estas redes es que permiten modelar adecuadamente la existencia de una pequeña cantidad de vértices con una gran cantidad de vecinos (*hubs*), mientras que, al mismo tiempo la mayoría de los vértices en la red presentan muy pocos vecinos.

Nota 3 Las redes de libre escala han desempeñado un papel trascendental en la comprensión de procesos dinámicos en áreas muy diversas como: comunicaciones digitales ([134, 135]), nivel de sistema autónomo de internet ([37, 136]), redes de colaboradores en proyectos de código abierto ([137]), inteligencia artificial ([138, 139]), optimización ([140]), transporte ([141, 142]), neurología ([143, 144]), epidemiología ([145, 146]), redes de sensores inalámbricos ([147]), biología ([148, 149]), evolución de comportamientos cooperativos ([150, 151]) y dinámica de opinión ([152, 153]).

Definición 30 Se dice que una *red es jerárquica* si la red es de libre escala y posee un alto valor de coeficiente de clustering.

Nota 4 En [32] se argumentó que varias redes reales tienen estructura jerárquica, entre ellas están: *world wide web*, red de actores de Hollywood, internet en el nivel de dominio, red de comercio mundial y redes metabólicas.

2.2. El modelo de conflicto de N actores

El modelo de conflicto de N actores que se usa en la primera etapa de investigación de este trabajo fue tomado de [15] y está dado por:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -m_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij} c_{ij} \tanh(x_j(t)), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.1)$$

donde $x_i(t)$ es el estado del actor i al tiempo t , $m_i > 0$ es la tendencia hacia la opinión neutral del actor i (o la inercia al cambio del actor i), N es el número de actores (nodos) de la red, A es la matriz de adyacencia de la red ($A_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq N$), $|c_{ij}|$ es la fuerza de la retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i , $\text{sgn}(c_{ij})$ describe el tipo de retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i (positiva para cooperación y negativa para competencia) y \tanh es la función tangente hiperbólica.

Nota 5 Debido a que $dx_i(t)/dt = -m_i x_i(t)$ tiene por solución $e^{-m_i x_i(t)}$ (donde $m_i > 0$), se sigue que si un actor no recibe retroalimentación por parte de sus vecinos, entonces su estado evolucionará al estado neutro (el estado neutro está representado por el valor 0 y es un estado sin posibilidad de surgimiento de conflicto), lo cual es un comportamiento deseado del modelo, pues el surgimiento de un conflicto entre actores es imposible en ausencia de interacciones entre ellos, justamente este hecho es el motivo por el que se pide que $m_i > 0$, para $1 \leq i \leq N$.

Nota 6 La hipótesis $A_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq N$, implica que el primer sumando del lado derecho de la igualdad describe completamente la dinámica autodependiente de un actor, esta condición determina la ausencia de lazos en las redes sobre las que se usa el modelo de conflicto de N actores. Esto implica que en la primera etapa de investigación los actores nunca se retroalimentan a sí mismos, lo cual cambia en la segunda etapa de investigación, donde los actores sí pueden retroalimentarse a sí mismos.

Nota 7 La retroalimentación cooperativa y competitiva entre actores es definida conforme al trabajo desarrollado por el psicólogo social Morton Deutsch ([23, 24]), quien es considerado uno de los fundadores de la teoría de resolución de conflictos. Las ideas de cooperación y competencia de Deutsch [23, 24] pueden describirse de la siguiente manera: un actor ejerce retroalimentación cooperativa sobre otro, si al poseer estado positivo, entonces incrementa el estado positivo del otro actor, y al poseer estado negativo, entonces incrementa el estado negativo del otro actor; en tanto que, un actor ejerce retroalimentación competitiva sobre otro, si al poseer estado positivo, entonces incrementa el estado negativo del otro actor, y al poseer estado negativo, entonces incrementa el estado positivo del otro actor. De este modo, en el modelo de conflicto (2.1) se tiene que cuando $c > 0$, entonces $c \tanh(x_j)$ describe retroalimentación cooperativa por parte de x_j , y cuando $c < 0$, entonces $c \tanh(x_j)$ describe retroalimentación competitiva por parte de x_j .

Definición 31 Sean x_i, x_j dos nodos de una red. Decimos que la **interacción** entre los actores x_i, x_j según el modelo de conflicto (2.1) es: **cooperativa**, si $c_{ij}, c_{ji} > 0$; **competitiva**, si $c_{ij}, c_{ji} < 0$; y **mixta**, si c_{ij}, c_{ji} tienen signos opuestos. En la figura 2.1 podemos ver que las aristas (2,3), (1,4) y (2,5) denotan interacciones cooperativa, competitiva y mixta, respectivamente.

Nota 8 Si tomamos $c_{ij} \in \{q, -q\}$ para algún $q \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq i, j \leq N$, entonces $c \tanh(x_j)$ satisface tres condiciones referentes al modelo de conflicto establecidas en [20]: 1) los actores influyen proporcionalmente entre ellos, 2) a niveles altos de influencia la retroalimentación de los actores no tiende a infinito, sino que converge a un valor fijo, 3) el cambio de la retroalimentación ejercida de un nodo hacia otro se pueda dar cambiando simplemente el signo de un parámetro del modelo.

2.3. El modelo de dinámica de opinión

El modelo de dinámica de opinión, con enfoque en persuasión, que se propone en la segunda etapa de investigación de este trabajo está dado por:

$$\begin{aligned} dx_0(t)/dt &= -m_0 x_0(t) + c_{02} \tanh(x_2(t)) \\ dx_1(t)/dt &= -m_1 x_1(t) + c_{10} \tanh(x_0(t)) + c_{11} \tanh(x_1(t)) + c_{12} \tanh(x_2(t)) \\ dx_2(t)/dt &= -m_2 x_2(t) + c_{20} \tanh(x_0(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $c_{02}, c_{20} < 0$, $c_{10}, c_{12} \geq 0$, $c_{11} > 0$, $x_i(t)$ es el estado del actor x_i al tiempo t , $m_i > 0$ representa la tendencia hacia la opinión neutra del actor x_i (o la inercia al cambio del actor x_i), $|c_{ij}|$ es la magnitud de la fuerza de autoridad que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i , $\text{sgn}(c_{ij})$ describe el tipo de retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i (cooperación/competencia) y $|\tanh(x_j(t))|$ es la magnitud de la fuerza de la persuasión al tiempo t que es emitida por el actor x_j .

Nota 9 En el modelo de dinámica de opinión se consideran exclusivamente redes con tres actores, x_0, x_1, x_2 , en las que se satisface que los actores x_0, x_2 conforman un subsistema de ecuaciones de dos actores del tipo (2.1), es decir, la dinámica de las opiniones de los

actores x_0 y x_2 en el modelo de dinámica de opinión está dada por el modelo de conflicto (con $N = 2$). Note que en particular, en el modelo de dinámica de opinión los actores x_0, x_2 no están influenciados por el actor x_1 ; sin embargo, el actor x_1 sí está influenciado por los actores x_0, x_2 . Esto último implica que las redes sobre las cuales se usa la ecuación (2.2) son redes dirigidas (digráficas).

Nota 10 Todos los parámetros del sistema de ecuaciones (2.2) son iguales a los del sistema (2.1), pero en el modelo de dinámica de opinión se consideran dos maneras en que un actor influye sobre otro, a saber, fuerza de autoridad y fuerza de persuasión, mientras que en el modelo de conflicto no se hace distinción entre dichas formas de influencia.

Nota 11 En el modelo (2.2) se piden restricciones específicas sobre los signos de los términos c_{ij} , esto es justamente lo que posibilita el estudio de la persuasión en la red, pues los actores x_0, x_2 brindan retroalimentación cooperativa al actor x_1 atrayéndolo hacia sus respectivas posturas (ver la nota 7), mientras que entre ellos la retroalimentación es competitiva, generando que evolucionen hacia posturas iguales en magnitud pero contrarias en signo (ver la parte de retroalimentación fuerte negativa-negativa en [20]).

Nota 12 Dos diferencias esenciales entre el modelo de dinámica de opinión y el modelo de conflicto de N actores son: 1) el modelo de dinámica de opinión sí considera redes con lazos, esto debido a la presencia del término $c_{11} > 0$ que indica que el actor x_1 se retroalimenta positivamente a sí mismo a través del tiempo (ver la nota 14), 2) en el modelo de dinámica de opinión, a diferencia del modelo de conflicto, se piden restricciones específicas sobre los signos de los términos c_{ij} , esto permite estudiar la postura adoptada por x_1 cuando es persuadido por dos actores que defienden posturas contrarias en constante relación de competencia entre sí.

Nota 13 Cuando el actor x_1 no recibe influencia por parte de los actores x_0, x_2 para adoptar sus respectivas opiniones, se tiene que el modelo (2.2) satisface las siguientes tres condiciones fundamentales relacionadas con la autoafirmación de opinión y por ende con el sesgo de confirmación (ver la definición 33): 1) si la opinión inicial del actor x_1 es cero (opinión neutra), su opinión final será también cero, 2) si la opinión inicial del actor x_1 es ligeramente positiva su postura final será más positiva, 3) si la opinión inicial del actor x_1 es ligeramente negativa su postura final será más negativa. Estos tres hechos se ilustran en la tabla 4.1.

La siguiente definición es propia de este trabajo y se formula porque tiene consecuencias positivas en la estructura de la tesis.

Definición 32 *En este trabajo se dice que un **escenario es simple** cuando puede describirse mediante la variación de un sólo parámetro del modelo de dinámica de opinión y, además, el valor de todos los parámetros no se modifica externamente durante el desarrollo de cada simulación (ver la tabla 3.3). Por otra parte, se dice que un **escenario es compuesto** si su descripción requiere de la variación simultánea de más de un parámetro del modelo de dinámica de opinión o de la variación de manera externa de algún parámetro en algún momento de cada simulación (ver la tabla 3.4).*

2.4. Principios de psicología social

En esta sección se definen algunos principios, sesgos y efectos de la psicología social que se mencionan a lo largo de la tesis, los cuales han sido reportados como fundamentales en la formación y variación de las opiniones. Algunas características de estos principios fueron descritas adecuadamente por el modelo de dinámica de opinión propuesto en este trabajo.

Definición 33 *El sesgo de confirmación es la tendencia de las personas a buscar, interpretar y recordar información que reafirma sus creencias, expectativas o hipótesis preexistentes, mientras que, ignoran o dan mucho menor crédito a la información que las contradice (para más detalles consultar [39-43]).*

Nota 14 La hipótesis $c_{11} > 0$ en el modelo de dinámica de opinión (2.2) implica que el actor x_1 autoafirma permanentemente su opinión, pues se retroalimenta cooperativamente a sí mismo todo el tiempo (ver la definición 31 y la nota 7). Esta característica del actor x_1 se mantiene presente durante todo el trabajo desarrollado en dinámica de opinión debido a su estrecha relación con el sesgo de confirmación, el cual ha sido descrito como un fenómeno ubicuo en las interacciones sociales (ver [39]).

Definición 34 *En este trabajo la persuasión fallida se refiere a una situación en la que, a pesar de los intentos de los actores persuasores por persuadir a un receptor para adoptar sus posturas esto no sucede. En la psicología social se han analizado situaciones que pueden dar lugar a la persuasión fallida, o generar que los receptores se vuelvan más resistentes a cambiar su opinión o comportamiento, algunos conceptos y teorías relacionadas con estos sucesos son: teoría de la inoculación, teoría de la disonancia cognitiva y reactancia psicológica ([44-46, 154, 155]).*

Definición 35 *En este trabajo el término persuasión inicial se usa para referirse a las diferentes capacidades persuasivas de los mensajes o argumentos que influyen en la opinión o comportamiento de una persona en el primer contacto. Hay varios factores que pueden aumentar la fuerza de persuasión inicial, por ejemplo: mensajes claros y simples ([156-158]), mensajes presentados en forma narrativa ([159-161]), si el receptor se encuentra en deuda con el emisor debido a algún favor o acto de generosidad (principio de reciprocidad, ver [53, 162]), la percepción de que una oferta es limitada en cantidad o tiempo (principio de escasez, ver [53]), argumentos que son aceptados por la mayoría (principio de sanción social, ver [48]) y argumentos difíciles de refutar (modelo de la inoculación, ver [154, 163]).*

Definición 36 *La homofilia o principio de simpatía sugiere que las personas tienen una tendencia a favorecer y relacionarse con individuos cuyas opiniones son semejantes a las suyas en detrimento de miembros de otros grupos de opinión ([47-50]).*

Definición 37 *El principio de autoridad manifiesta que las personas suelen sentirse más inclinadas a seguir las órdenes o consejos de una persona que perciben como una figura de autoridad o experta en un tema determinado. En particular, las personas pueden ser persuadidas para actuar en contra de sus propias convicciones y valores si se les da una orden por parte de una figura de autoridad ([51-53]).*

Definición 38 *El principio de sanción social dice que en ciertas situaciones las personas determinan su actitud o forma de pensar con base en las acciones o la forma de pensar de la mayoría. Una posible causa de este comportamiento es que las personas creen que la posibilidad de equivocación disminuye si se guían por el comportamiento de la mayoría. ([53, 164]).*

Definición 39 *La teoría del balance estructural dice que las personas o grupos tienen una necesidad innata de mantener un equilibrio entre sus pensamientos, sentimientos y comportamientos en sus relaciones interpersonales o intergrupales, ante el desequilibrio, se experimenta una incomodidad psicológica que las motiva a restaurar el equilibrio. Algunas formas de restauración de equilibrio pueden involucrar cambios de opinión sobre el tema en cuestión, intentos de persuadir a los demás de adoptar nuestras opiniones o rompimientos de relaciones con las partes discrepantes ([100-103]).*

Capítulo 3

Metodología

A continuación expondremos la metodología seguida en este trabajo de investigación. Para una adecuada descripción de los procesos realizados, este capítulo se divide en dos secciones la primera para describir el trabajo referente a teoría de resolución de conflictos y la segunda para dinámica de opinión.

3.1. Teoría de resolución de conflictos

La dinámica de los estados de los actores que conforman la red fue introducida mediante el modelo de conflicto de N actores (para más detalles del modelo, ver la sección 2.2), el cual está dado por:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -m_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij} c_{ij} \tanh(x_j(t)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

donde $x_i(t)$ es el estado del actor i al tiempo t , $m_i > 0$ es la tendencia hacia la opinión neutral del actor i (o la inercia al cambio del actor i), N es el número de actores (nodos) de la red, A es la matriz de adyacencia de la red ($A_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq N$), $|c_{ij}|$ es la fuerza de la retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i , $\text{sgn}(c_{ij})$ describe el tipo de retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i (cooperación/competencia) y \tanh es la función tangente hiperbólica.

El modelo de conflicto de N actores fue implementado sobre redes de orden 1200 (redes no jerárquicas) y 625 (redes jerárquicas). Dichas redes se tomaron no dirigidas, de esta manera si un actor i brinda retroalimentación a un actor j , entonces el actor j también lo hace sobre el actor i . Además, la condición $A_{ii} = 0$ determinó la ausencia de lazos en las redes usadas.

Basados en [20] se tomaron los valores $m_i = 0.9$ y $|c_{ij}| = 5$, $1 \leq i, j \leq N$, donde lo último se debió a que se observó que la estabilización del sistema de dos actores se da de manera más rápida cuando tomamos $|c_{ij}| = 5$ en lugar de $|c_{ij}| = 3$. Por otro lado, como se satisface la condición $m_i < |c_{ij}|$, $1 \leq i, j \leq N$, entonces la retroalimentación entre cualesquiera dos actores de la red es del tipo retroalimentación fuerte, en [20] se determinó que este tipo de retroalimentación genera configuraciones finales diversas y que cuando ocurre que $m_i > |c_{ij}|$

todos los actores evolucionan al estado neutro, 0.

La diversidad de interacciones cooperativas, competitivas y mixtas se fijaron mediante los porcentajes de entradas positivas en la matriz de interacción, p^+ (ver las definiciones 11 y 12). Las cantidades y tipos de interacciones en la red para diversos valores de p^+ siguen el patrón mostrado en la figura 3.1, una explicación sobre la simetría en dicha figura se da en el apéndice 4.2.2.

La evolución temporal de los estados de los actores x_i , $1 \leq i \leq N$, fue descrita mediante el uso de integración numérica Runge-Kutta de cuarto orden con 1000 pasos en el tiempo, donde los estados iniciales de los actores fueron asignados usando distribuciones uniformes en el intervalo $(-1, 1)$, esto implica que al tiempo inicial, t_0 , la red posee cantidades similares de actores con estados positivos y negativos. La implementación de la integración numérica se hizo utilizando el lenguaje de programación Python.

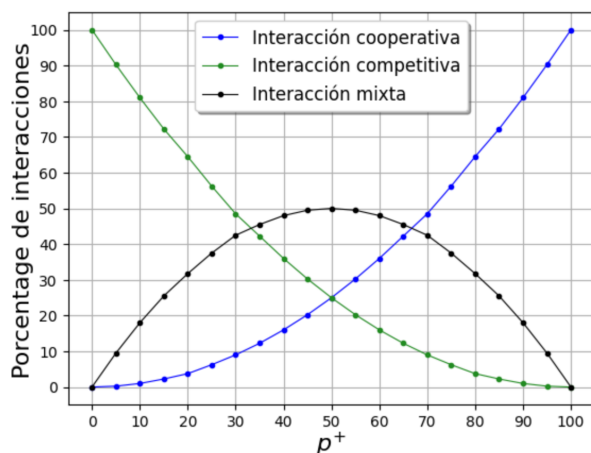


Figura 3.1: Porcentajes totales de los tres tipos de interacciones obtenidas en la red para diferentes valores de p^+ .

3.1.1. Construcción de redes y métricas

En este trabajo se realizaron dos bloques de construcción de redes. Todas las redes construidas fueron conexas, pues por las características del modelo de conflicto de N actores, los nodos aislados no influyen en el estado final del sistema.

El primer bloque de construcción de redes consideró redes de libre escala no jerárquicas de orden 1200, con grado mínimo 2, diversos exponentes de distribución de grado y tres tipos de correlación entre nodos: asortativa, disasortativa y neutra (ver figura 3.2). Los exponentes se tomaron en el intervalo $[2.125, 3.5]$ con saltos de longitud 0.125. A medida que el exponente decrece los *hubs* de la red tienen grados más altos. Por otro lado, si r denota el coeficiente de correlación de grados (ver las definiciones 19, 20 y 21), se instauró que la red es: asortativa, si $r > 0.15$; disortativa, si $r < -0.15$; y neutra, si $-0.030 < r < 0.030$.

En el primer bloque de construcción de redes se utilizó la técnica de construcción de redes de libre escala llamada modelo de configuración, la cual permite crear sucesiones de grados de redes de libre escala con un exponente predeterminado sobre un conjunto arbitrario de nodos, dos aspectos importantes del modelo de configuración son la determinación del grado máximo de la red ([165]) y el método para generar los grados de los nodos (se usó *probability transformation method* descrito en [166]).

Una vez creadas las sucesiones de grados se usó el procedimiento introducido por Doyle et al. ([167]) para producir tres configuraciones de mezcla asortativa. Brevemente, los nodos se ordenaron de mayor a menor según su grado. Luego, para generar una red asortativa, primero se consideró el nodo con el grado más alto y se agregaron enlaces a otros nodos en orden descendente hasta completar su grado, después se hizo lo mismo con el resto de los nodos. De manera opuesta, para generar una red disasortativa, se partió del nodo con mayor grado y se añadieron, en primer lugar, los enlaces a los nodos de menor grado en orden ascendente. Finalmente, para generar una red neutra, los nodos se vincularon de forma aleatoria sin tomar en cuenta sus grados. En todos los casos considerados, se evitó la repetición de enlaces y la creación de lazos.

En el segundo bloque de construcción de redes se crearon redes jerárquicas deterministas de Ravasz-Barabási de orden 625 (ver (d) en la figura 3.2), esto se realizó siguiendo las indicaciones de la referencia [32], en la cual se justifica que dichas redes poseen exponente de distribución de grado $\alpha = 2.161$.

En este trabajo los órdenes de las redes fueron elegidos considerando un valor factible de implementar computacionalmente en una computadora convencional de uso personal. En el caso de las redes jerárquicas, el orden fue de 625 debido a que el orden de las redes jerárquicas deterministas de Ravasz-Barabási aumenta en potencias de 5, de tal manera que el siguiente orden de una red de Ravasz-Barabási con orden mayor a 625 es 3125, pero usar redes de orden 3125 generaba complicaciones por la limitación de la capacidad computacional disponible.

Usando como base las redes jerárquicas se crearon otros dos tipos de redes: la primera consistente de unir nodos no enlazados mediante el cruce de aristas (preservando el grado de los nodos) y la segunda, en la construcción de un club de ricos con el 4% de los *hubs* más conectados de la red, de tal manera que el coeficiente de club de ricos es 1, ver las definiciones 24 y 25. A las redes obtenidas en la primera modificación de las redes jerárquicas se les llamó redes aleatorias y a las de la segunda modificación se les llamó redes jerárquicas con club de ricos.

La construcción de redes aleatorias permitió obtener redes de libre escala no jerárquicas de orden 625 con el propósito de realizar comparaciones entre este tipo de redes y redes jerárquicas del mismo orden. Por otro lado, las redes jerárquicas con club de ricos se usaron para estudiar la influencia global que tienen las élites en el sistema y lo que sucede cuando estas son totalmente cooperativas o competitivas.

Con la intención de medir los cambios en los estados de los actores a través del tiempo, en función de la topología de la red y de la cantidad inicial de interacciones cooperativas,

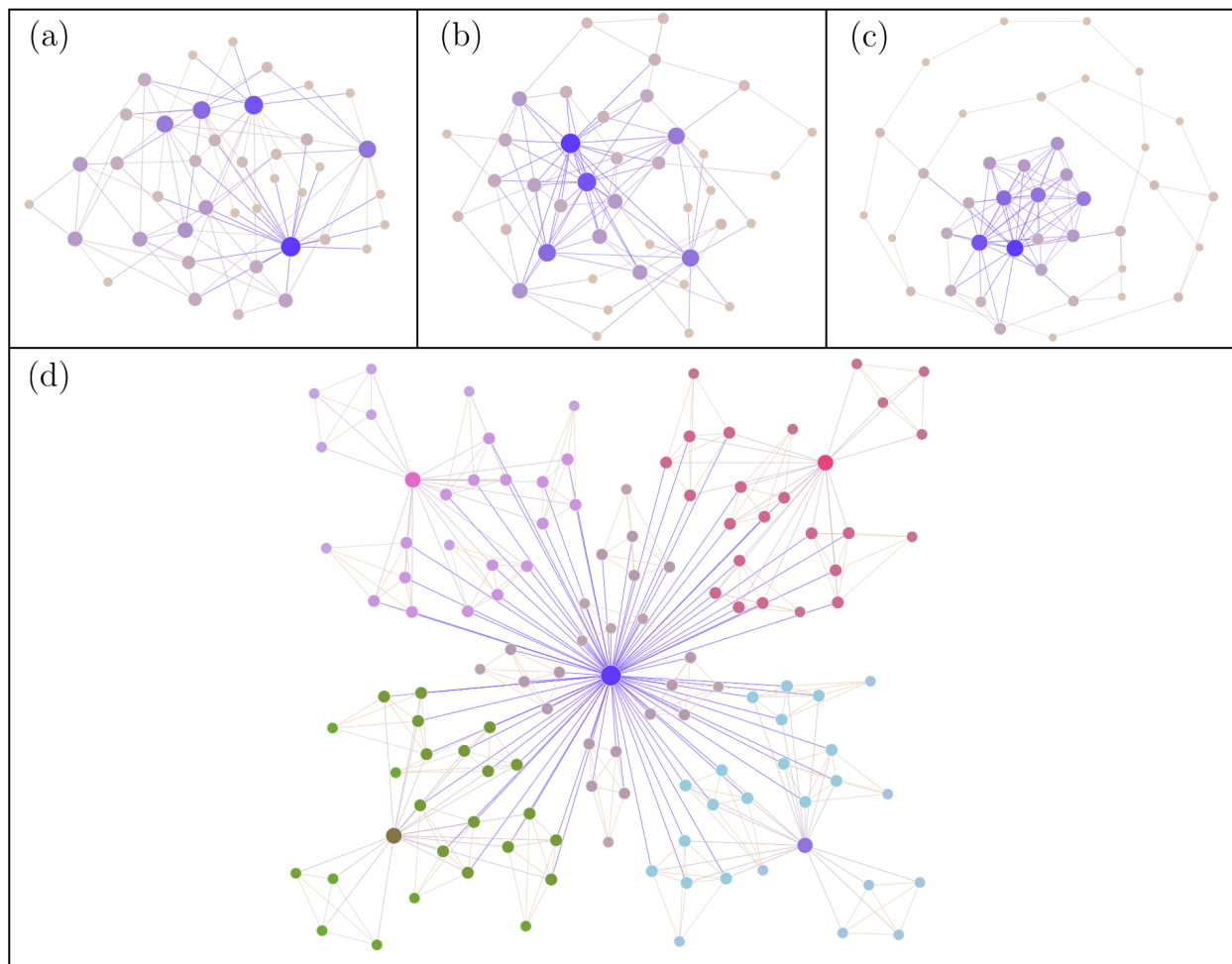


Figura 3.2: Casos ilustrativos de las redes de libre escala usadas en este trabajo. (a) red disortativa, (b) red neutra, (c) red asortativa y (d) red jerárquica determinista de Ravasz-Barabási de orden 625. Los nodos de mayor tamaño y colores profundos representan los *hubs* de la red.

competitivas y mixtas, se usaron las métricas globales que se enlistan a continuación. En todas las métricas N denota el orden de la red.

- El promedio de los valores absolutos de los estados finales,

$$\overline{|x|} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} |x_i|, \quad (3.1)$$

donde $|x_i|$ es el valor absoluto del estado final del i -ésimo actor.

- La distancia de acuerdo al signo,

$$L = |\bar{x}^+ - \bar{x}^-|, \quad (3.2)$$

donde \bar{x}^+ (\bar{x}^-) representa el promedio de todos los estados finales positivos (negativos) de la red.

- La distancia global media,

$$D = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N |x_i - x_j|, \quad (3.3)$$

donde x_i, x_j denotan los estados finales del i -ésimo y j -ésimo actor, respectivamente.

- El rango normalizado del número de nodos negativos y positivos,

$$\delta = \frac{|N^+ - N^-|}{N}, \quad (3.4)$$

donde N^+ (N^-) es el número total de estados finales positivos (negativos) y $N = N^+ + N^-$.

Cada una de las métricas anteriores fue calculada usando el promedio sobre 20 evoluciones independientes.

3.2. Dinámica de opinión

Como se mencionó en la sección 2.3 el modelo de dinámica de opinión usado en este trabajo de investigación está dado por:

$$\begin{aligned} dx_0(t)/dt &= -m_0 x_0(t) + c_{02} \tanh(x_2(t)) \\ dx_1(t)/dt &= -m_1 x_1(t) + c_{10} \tanh(x_0(t)) + c_{11} \tanh(x_1(t)) + c_{12} \tanh(x_2(t)) \\ dx_2(t)/dt &= -m_2 x_2(t) + c_{20} \tanh(x_0(t)) \end{aligned}$$

donde $c_{02}, c_{20} < 0$, $c_{10}, c_{12} \geq 0$, $c_{11} > 0$, $x_i(t)$ es el estado del actor x_i al tiempo t , $m_i > 0$ representa la tendencia hacia la opinión neutra del actor x_i (o la inercia al cambio del actor x_i), $|c_{ij}|$ es la magnitud de la fuerza de autoridad que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i (donde $c_{11} > 0$), $\text{sgn}(c_{ij})$ describe el tipo de retroalimentación que el actor x_j ejerce sobre el actor x_i

(cooperación/competencia) y $|\tanh(x_j(t))|$ es la magnitud de la fuerza de la persuasión al tiempo t que es ejercida por el actor x_j .

Con base en el estudio referente al modelo de conflicto de N actores desarrollado en [19], se tomó el valor constante $m_i = 0.9$ para $i = 0, 1, 2$, esto implica que todos los actores de la red experimentan la misma velocidad de evolución hacia el estado neutral en ausencia de interacciones. Por otra parte, de acuerdo a [20], cuando se cumple que $m_i < c_{ij}$, se tiene que las interacciones entre actores son de retroalimentación fuerte, lo cual genera una mayor diversidad de comportamientos en el sistema que en el caso contrario. En esta tesis se consideraron únicamente interacciones de retroalimentación fuerte.

Para representar la influencia (retroalimentación) entre los actores de la red se usó una digráfica con tres nodos y su respectiva matriz de interacción que especifica las fuerzas y tipos de influencia entre pares de nodos. De acuerdo con el modelo de dinámica de opinión los actores x_0, x_2 no están influenciados por el actor x_1 , pero el actor x_1 sí está influenciado por los actores x_0, x_2 , ver la figura 3.3. Además, el actor x_1 siempre recibe retroalimentación cooperativa de sí mismo (se tomó $c_{11} = 5$).

A lo largo de este trabajo se supuso que x_0, x_2 se relacionan de manera competitiva entre ellos (se tomó $c_{02} = c_{20} = -5$), de esta manera existe repulsión entre sus estados (opiniones). Por otro lado, tanto x_0 como x_2 ejercen una retroalimentación cooperativa sobre x_1 ($c_{10}, c_{12} > 0$), lo cual implica que ambos ejercen atracción sobre x_1 con la intención de persuadirlo a adoptar la postura que cada uno de ellos apoya (ver nota 11).

En este trabajo los actores x_0, x_2 son actores persuasores que apoyan una postura (acción) positiva (\oplus) y una postura negativa (\ominus), respectivamente, por esa razón, en todos los experimentos desarrollados x_0 fue asignado con un estado (opinión) inicial positivo ($x_0(t_0) > 0$) y x_2 con uno negativo ($x_2(t_0) < 0$). Es relevante decir que las dos posturas \oplus y \ominus , están dadas por los valores numéricos w_1 y $-w_1$, respectivamente, donde $w_1 \in \mathbb{R}^+$, es tal que $(w_1, -w_1)$ y $(-w_1, w_1)$ son puntos de equilibrio del modelo de conflicto de dos actores con retroalimentación negativa (ver la proposición 3 del apéndice 4.2.2).

Los estados iniciales de x_0, x_2, x_1 fueron asignados usando distribuciones uniformes y consideraciones específicas (ver tablas 3.2, 3.3 y 3.4) sobre los intervalos $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 1)$, respectivamente. Los estados iniciales se eligieron en esos intervalos con la intención de poder observar adecuadamente los refuerzos de opinión inherentes a la autoafirmación descrita por el sesgo de confirmación.

La opinión inicial del actor x_1 varió dependiendo del experimento en cuestión, por ejemplo, cuando se modeló que el actor x_1 poseía una opinión neutra acerca de las dos posturas \oplus, \ominus , entonces se supuso que $x_1(t_0) = 0$ (donde t_0 es el tiempo inicial de las evoluciones, $t = 0$), en cambio cuando se modeló que el actor x_1 poseía afinidad por alguna de las dos posturas, \oplus o \ominus , se supuso que $x_1(t_0) \neq 0$ y que su signo representaba la postura por la cual el actor x_1 sentía atracción (+ para \oplus y - para \ominus). En la tabla 3.1 se especifican los valores e interpretaciones de todos los parámetros que fueron usados.

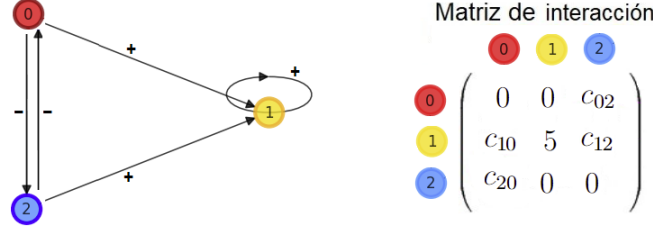


Figura 3.3: Digráfica y su matriz de interacción asociada. En esta imagen se ilustra que los actores x_0, x_2 reciben retroalimentación negativa uno del otro (c_{02}, c_{20} toman valores negativos), pero no reciben retroalimentación de ningún tipo por parte del actor x_1 ($c_{01}, c_{21} = 0$). Por otro lado, el actor x_1 recibe retroalimentación positiva de sí mismo ($c_{11} = 5$) y de los actores x_0, x_2 (c_{10}, c_{12} toman valores positivos).

Tabla 3.1: Valores e interpretación de los parámetros usados.

Parámetro	Descripción	Valores usados
m_i	Tendencia hacia el estado 0.	0.9
$c_{11} = 5$	Autoretroalimentación cooperativa (o positiva) del actor x_1 .	5
$\text{sgn}(c_{ij})$	Tipo de retroalimentación ejercida por el actor x_j sobre el actor x_i	+ (cooperación), - (competencia)
$ c_{ij} $	Fuerza de la autoridad ejercida por el actor x_j sobre el actor x_i .	[2,8]
$x_1(t_0) = 0$	El actor x_1 posee una opinión neutra respecto a las dos posturas existentes.	0
$\text{sgn}(x_1(t_0)) \neq 0$	El actor x_1 tiene preferencia por una de las dos posturas existentes.	+ (preferencia por \oplus), - (preferencia por \ominus)
$ \tanh(x_j(t)) , j \in \{0, 2\}$	Fuerza de la persuasión al tiempo t que es emitida por el actor x_j . La fuerza de la persuasión inicial, $ \tanh(x_j(t_0)) $, fue de gran relevancia para modelar diversas características de los principios psicológicos abordados.	(0, 1)

Todas las evoluciones temporales de las opiniones de los actores fueron realizadas con Python usando el esquema de diferencias finitas (6) del modelo de dinámica de opinión, sobre 1000 o 1300 pasos de tiempo.

3.2.1. Escenarios del modelo de dinámica de opinión

Con la finalidad de establecer un vínculo entre el modelo de dinámica de opinión (2.2) y los principios de psicología social de la sección 2.4, se estudiaron ocho escenarios definidos en términos de las opiniones iniciales de los actores ($x_i(t_0)$) y los valores de las fuerzas de autoridad (c_{ij}). Cada uno de los escenarios abordados en esta tesis fue analizado usando 500 simulaciones independientes.

Los ocho escenarios considerados en esta tesis fueron divididos en dos bloques. El primero consistente de casos en los cuales la autoafirmación de opinión del actor x_1 carece de retroalimentación por parte de los actores x_0 y x_2 (ver la tabla 3.2) y el segundo de casos en los cuales la autoafirmación del actor x_1 sí posee retroalimentación por parte de los actores x_0 y x_2 , ver las tablas 3.3 y 3.4, donde la primera tabla comprende escenarios simples y la segunda escenarios compuestos (ver la definición 32).

Tabla 3.2: Digráficas y parámetros de los escenarios modelados cuando x_1 no recibe retroalimentación por parte de los actores x_0, x_2 .

Autoafirmación de opinión sin retroalimentación			
Escenario	Digráficas y parámetros usados		
Escenario 1: para verificar el refuerzo (o preservación) de la opinión neutra	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) = 0$ $x_2(t_0) \in (-1, 0)$
Escenario 2: para verificar el refuerzo de opiniones no neutras	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) \in (0, 1)$ $x_2(t_0) \in (-1, 0)$ También se analizó el caso $x_1(t_0) \in (-1, 0)$

Tabla 3.3: Digráficas y parámetros de los escenarios simples modelados cuando x_1 recibe retroalimentación por parte de los actores x_0, x_2 .

Autoafirmación de opinión con retroalimentación			
Escenario simple	Digráficas y parámetros usados		
Escenario 3: para estudiar un caso de persuasión fallida	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) = 0$ $x_2(t_0) = -x_0(t_0)$
Escenario 4: para estudiar el efecto de la persuasión inicial ejercida por los persuasores	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) = 0$ $ x_2(t_0) < x_0(t_0)$ También se analizó el caso $ x_2(t_0) > x_0(t_0)$
Escenario 5: para estudiar la evolución de las opiniones cuando existe filia por alguna de ellas	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) \in (0, 1)$ $x_2(t_0) = -x_0(t_0)$ También se analizó el caso $x_1(t_0) \in (-1, 0)$
Escenario 6: para estudiar la influencia causada por las fuerzas de autoridad de los persuasores	<p>Digráfica</p>	<p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & c_{12} \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) = 0$ $x_2(t_0) = -x_0(t_0)$ $c_{12} \in [1.6, 5)$ También se analizó el caso $c_{12} \in (5, 8.4]$

Tabla 3.4: Digráficas y parámetros de los escenarios compuestos modelados cuando x_1 recibe retroalimentación por parte de los actores x_0, x_2 .

Autoafirmación de opinión con retroalimentación	
Escenario compuesto	Digráficas y parámetros usados
<p>Escenario 7: para estudiar la influencia causada por las fuerzas de autoridad de los persuasores cuando se da un cambio de la autoridad dominante</p>	<p>Digráfica</p> <p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} \text{0} & \text{1} & \text{2} \\ \begin{matrix} \text{0} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & c_{12} \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p>$c_{12} \in [1.6, 5), t < 150$ $c_{12} \in (5, 8.4], t \geq 150$ $x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) = 0$ $x_2(t_0) = -x_0(t_0)$</p>
<p>Escenario 8: para estudiar los escenarios 4 y 5 de manera conjunta</p>	<p>Digráfica</p> <p>Matriz de interacción</p> $\begin{matrix} \text{0} & \text{1} & \text{2} \\ \begin{matrix} \text{0} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p>$x_0(t_0) \in (0, 1)$ $x_1(t_0) \in (0, 1)$ 1) $x_2(t_0) < x_0(t_0)$ 2) $x_2(t_0) > x_0(t_0)$ También se analizó el caso $x_1(t_0) \in (-1, 0)$</p>

Capítulo 4

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados de las dos etapas de investigación desarrolladas: teoría de resolución de conflictos y dinámica de opinión. Además, se realiza la interpretación y discusión de los resultados para determinar el alcance y las limitaciones de la investigación.

4.1. Teoría de resolución de conflictos

Con el propósito de efectuar una mejor exposición de los resultados, con base en las métricas descritas en la subsección 3.1.1, esta sección fue dividida en dos subsecciones, la primera referente al trabajo realizado con redes no jerárquicas de orden 1200 y la segunda con redes jerárquicas de orden 625.

4.1.1. Redes de libre escala con mezcla asortativa

En la figura 4.1 se muestran las evoluciones numéricas para tres porcentajes de entradas positivas en la matriz de interacción ($p^+ = 15$, $p^+ = 50$ y $p^+ = 85$) y tres configuraciones de correlación entre nodos (asortativa, disasortativa y neutra).

Para determinar cómo se distribuyen los signos de los estados finales, se calculó la métrica rango normalizado del número de nodos negativos y positivos (δ), que refleja el hecho de que el sistema puede llegar a los casos en los que todos los estados son positivos (negativos) o existen cantidades similares de estados finales positivos y negativos. En el primer caso $\delta = 1$ y en el segundo $\delta = 0$. La figura 4.2 presenta los valores obtenidos de δ para las redes no jerárquicas en términos de p^+ y α .

Como puede verse en la figura 4.2 a medida que α aumenta, el coeficiente δ disminuye hacia una configuración más simétrica respecto al valor $p^+ = 50$, lo que sugiere que la ausencia de *hubs* con grandes números de conexiones favorece una distribución más equilibrada o simétrica de los estados finales positivos y negativos. Por otro lado, el hecho de que los valores más grandes de δ se alcancen en la esquina inferior derecha (donde dominan las interacciones cooperativas o positivas) podría estar ligado al teorema 2 pues las redes con el exponente más pequeño ($\alpha = 2.125$) son las que más se parecen a las redes completas porque tienen las

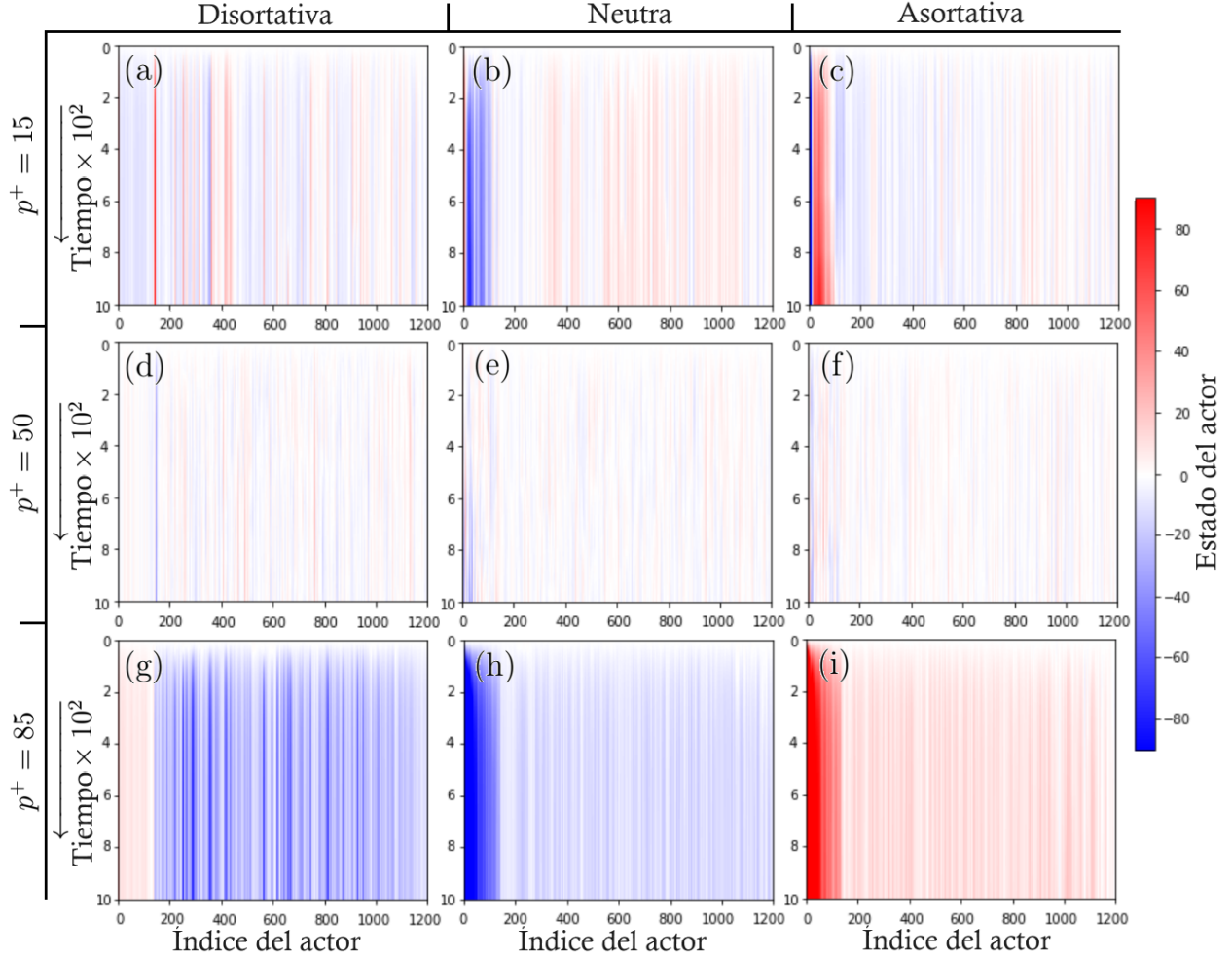


Figura 4.1: Evoluciones temporales de los estados de los actores para tres tipos de mezcla asortativa en redes de libre escala con exponente de distribución de grado $\alpha = 2.125$. Se observa que para el caso en que la mayoría de las interacciones son competitivas, el sistema evoluciona hacia configuraciones donde los actores tienen estados estables pero opuestos (páneos **(a-c)**), lo que se nota principalmente en el estado disortativo (panel **(a)**). Por el contrario, para el caso en el que la mayoría de las interacciones son cooperativas (páneos **(g-i)**), el sistema evoluciona para alcanzar mayores amplitudes donde los estados de los actores tienden a ser marcadamente similares entre sí, y los centros (que corresponden a los índices pequeños en el eje horizontal) son los que alcanzan mayor amplitud, excepto en el caso disasortativo (panel **(g)**), donde la amplitud es menor. Para el caso con una presencia similar de interacciones cooperativas y competitivas (páneos **(d-f)**), los actores se caracterizan por poseer estados inestables con valores más cercanos al estado neutro que en los otros casos.

mayores cantidades de aristas.

En la figura 4.2 también se observa que el caso disasortativo exhibe el menor desequilibrio, seguido por el caso neutro y luego el caso asortativo. Esto revela que la correlación entre nodos juega un papel significativo en las configuraciones finales del sistema.

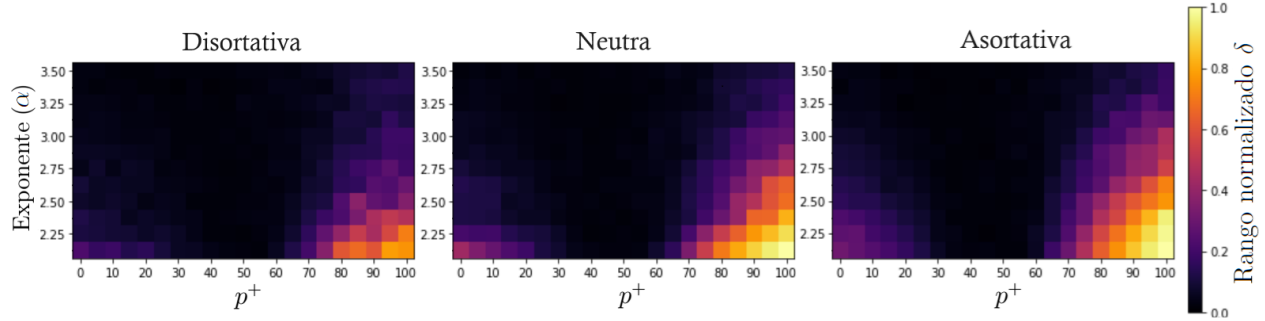


Figura 4.2: Comportamiento de δ en términos de p^+ y el exponente de la distribución de grado de la red para los tres tipos de mezcla asortativa considerados en esta investigación. En los tres casos (disasortativa, neutra y asortativa), conforme p^+ aumenta, el coeficiente δ disminuye llegando a un mínimo (alrededor de $p^+ \sim 50$) y luego aumenta, indicando que los signos de los estados de los actores alcanzan una distribución simétrica con respecto a 0 cuando hay cantidades similares de interacciones cooperativas y competitivas; y que alcanzan el valor máximo de signos similares cuando todas las interacciones son cooperativas ($p^+ = 100$). Además, se observa que los valores cercanos a 1 sólo se obtienen para valores de α cercanos a 2.125.

Los hallazgos realizados usando la métrica δ podrían significar que la posibilidad de consenso es mayor cuando las interacciones de la red son cooperativas porque la cantidad de estados finales con el mismo signo es muy alta; y que dicho consenso sólo podría alcanzarse en presencia de *hubs* con enormes cantidades de vecinos.

Para saber cómo se distribuyen los estados finales de los actores, se construyeron las correspondientes funciones de densidad de probabilidad, $p(x)$, para varias realizaciones independientes que se muestran en la figura 4.3.

Se encontró que $p(x)$ cambia para diferentes configuraciones de correlación de nodos y diferentes valores de p^+ . Específicamente, $p(x)$ es considerablemente más amplio para el caso asortativo en comparación con el caso disortativo, mientras que, en el caso neutro la distribución es más estrecha. Estos resultados, en el contexto de nuestro modelo de red, revelan que en las relaciones cooperativas o competitivas las interacciones entre parejas acumulan valores fuertemente influenciados por las mesetas de la función de interacción tangente hiperbólica, siendo marcadamente diferenciada cuando un tipo de interacción domina, es decir, una mayor amplitud para el caso cooperativo en comparación al caso competitivo.

Es importante señalar que, dado que en la figura 4.3 se representan los resultados de 20 realizaciones independientes, algunas de las cuales tienen más actores en estados finales positivos y otros en estados finales negativos, entonces las medias generales de x_f en todos los casos son cercanas a cero, y la densidad de probabilidad resultante muestra una simetría aproximada respecto al valor 0.

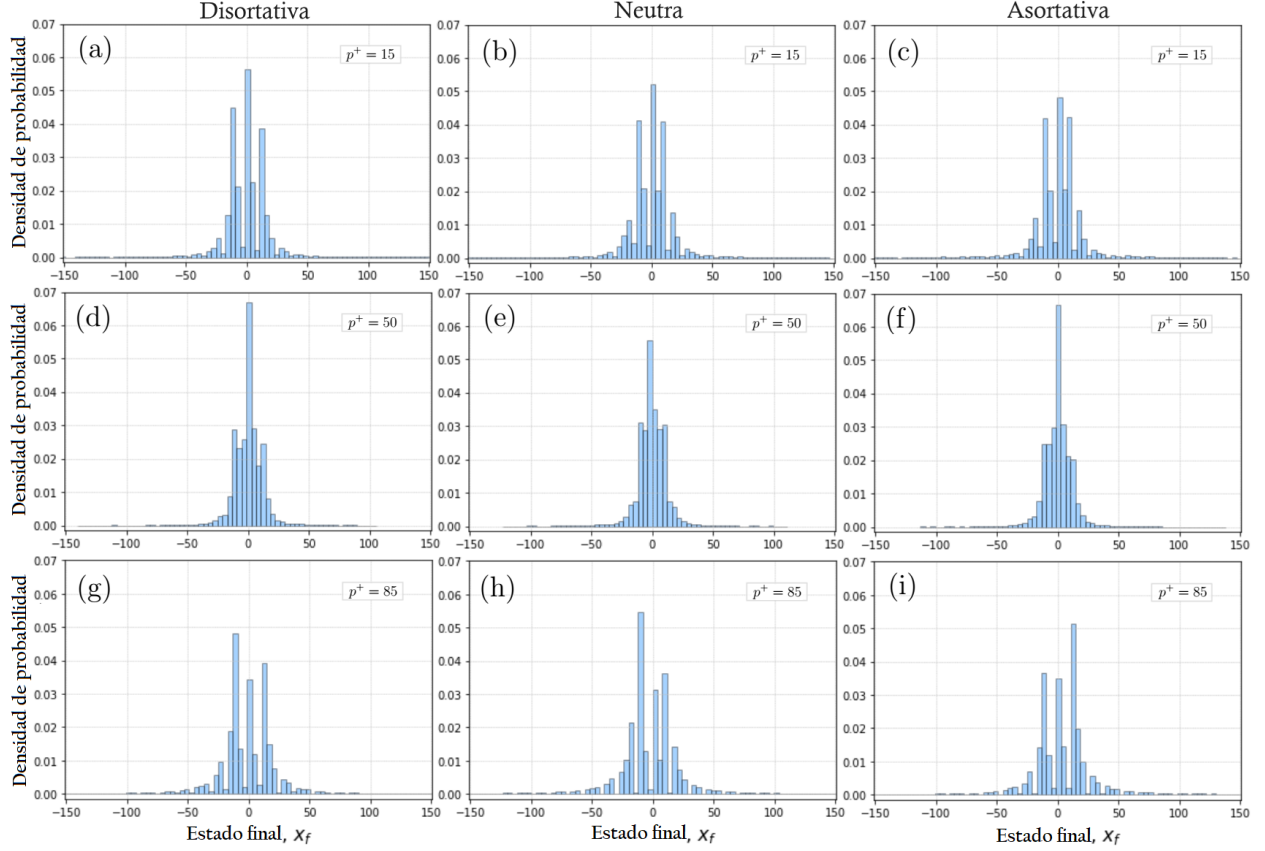


Figura 4.3: Distribuciones de densidad de probabilidad (PDF por sus siglas en inglés) de los estados finales de los actores en las evoluciones numéricas (x_f) para diferentes valores de p^+ y diferentes niveles de mezcla asortativa de las redes de libre escala. **(a-c)** Casos de PDF para redes con interacciones competitivas dominantes, $p^+ = 15$. **(d-f)** Casos de PDF para redes con cantidades similares de interacciones competitivas y cooperativas, $p^+ = 50$. **(g-i)** Casos de PDF para redes con interacciones cooperativas dominantes, $p^+ = 85$. Cada PDF representa los resultados de 20 realizaciones independientes.

La figura 4.4 muestra que, para un valor fijo de α , a medida que p^+ aumenta, la distancia promedio entre los actores exhibe un comportamiento decreciente hasta un mínimo (alrededor de $p^+ = 50$) y luego aumenta hasta un máximo, cuando todos los actores son cooperadores. Se observa un comportamiento similar para valores mayores de α , excepto que las amplitudes son de menor intensidad, debido a que los *hubs* son cada vez más pequeños en orden.

En la métrica distancia global media, cuando se comparan las tres configuraciones de correlación de nodos, se observa que la divergencia más pequeña se da para el caso disortativo, seguida por el caso neutro y luego por el caso asortativo (ver las figuras 4.4 y 4.5). Se observan patrones similares para las otras dos métricas, de las cuales la métrica promedio de los valores absolutos presenta los valores más bajos.

Los hallazgos indican que la mayor divergencia en los estados finales corresponden a los

casos en los que todas las interacciones son cooperativas o competitivas, mientras que el sistema es más estrecho cuando la población entre cooperadores y competidores está equilibrada. Además, en general, la divergencia más grande se da para el caso asortativo y la más pequeña para el caso disortativo. Lo anterior podría significar que debido a la mayor cercanía de las métricas con el estado neutro, 0, el surgimiento de un conflicto podría ser menos probable en presencia de correlaciones disortativas entre nodos y de cantidades equilibradas de interacciones cooperativas y competitivas ($p^+ = 50$), este hecho no fue verificado en este trabajo, pero se desea estudiar en el futuro.

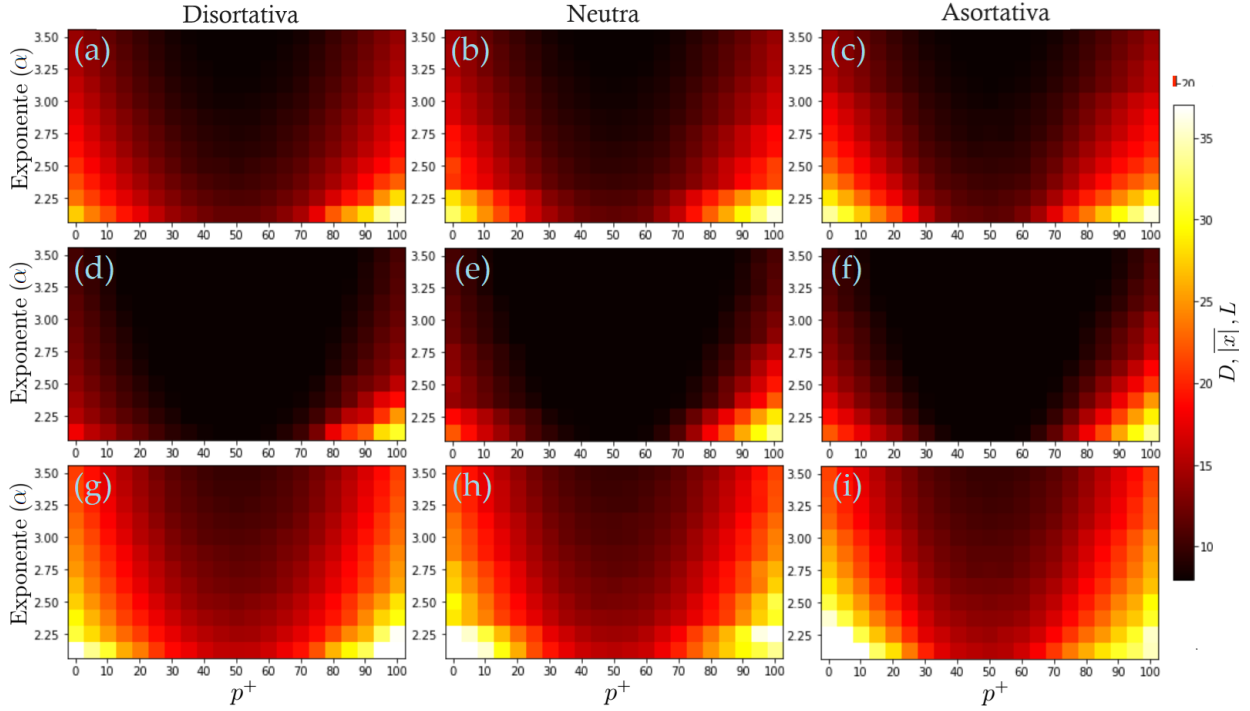


Figura 4.4: Resultados de las simulaciones para las métricas D , $\overline{|x|}$ y L . **(a–c)** Comportamiento de la distancia global media (D). **(d–f)** Comportamiento del promedio de los valores absolutos ($\overline{|x|}$). **(g–i)** Comportamiento de la distancia según el signo (L). Se observa que en los tres tipos de correlación de nodos: disortativa, neutra y asortativa, las métricas tienen valores bajos cuando $p^+ \sim 50$, y estos valores disminuyen aún más a medida que el exponente crece (es decir, cuando los *hubs* tienen menos conexiones). Es de destacar que se observa una mayor divergencia en el caso asortativo en comparación con el caso disortativo. Cada valor representa el promedio de 20 realizaciones independientes.

Se observó que para las redes asortativas y neutras, la separación entre los promedios (positivos y negativos) medidos por L , refleja una relación asimétrica con respecto al valor $p^+ = 50$ (figura 4.5 (e)), siendo mayor en el caso donde todas las interacciones son competitivas en comparación con el caso en el que todas las interacciones son cooperativas, porque en el último caso, los estados finales tienden a ser todos positivos o todos negativos, lo que conduce a una separación menor. El caso disortativo L tiende a ser más simétrico, indicando que las correlaciones de grado negativas conducen a una separación de los promedios (positivos y

negativos) de la misma magnitud.

Cuando el exponente α es mayor (figura 4.5 (b),(d),(f)), la separación entre las curvas correspondientes a los diferentes tipos de mezcla asortativa casi desaparece, probablemente esto está relacionado a que la reducción del tamaño del orden de los *hubs* es responsable de una menor dispersión de los estados de los actores en toda la red.

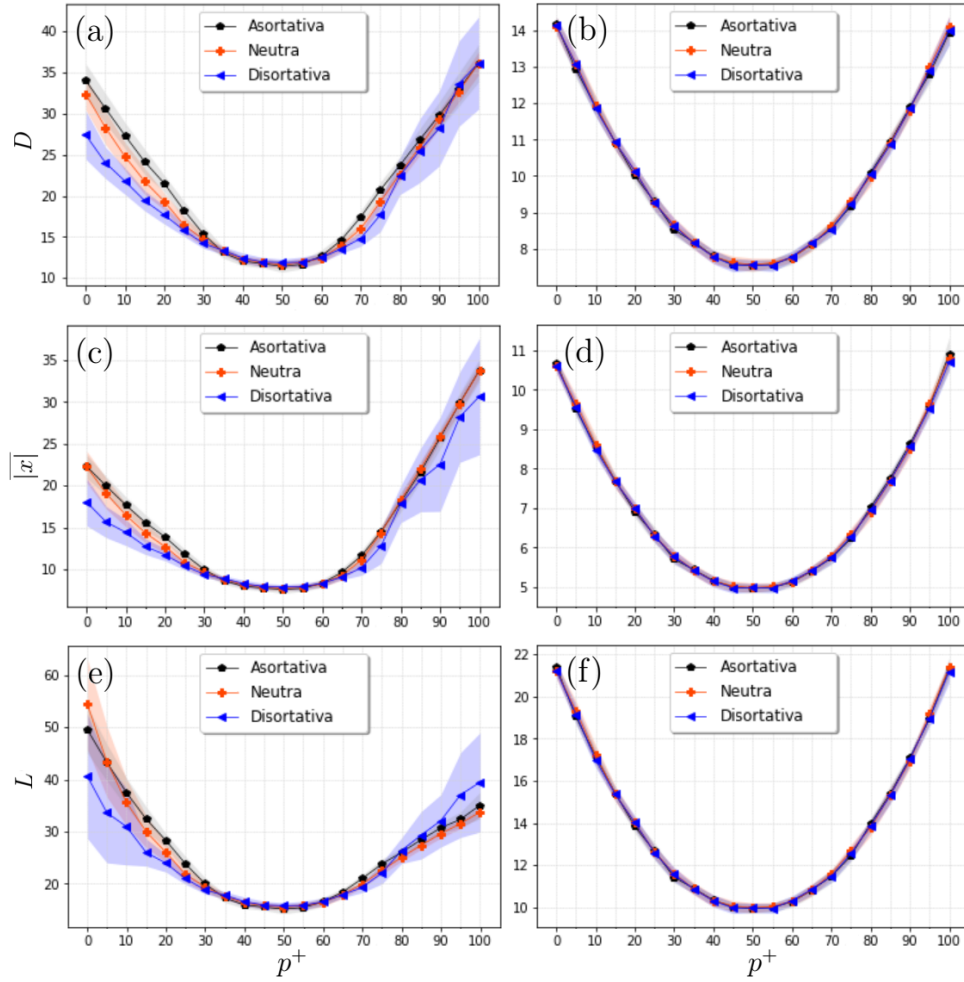


Figura 4.5: Perfiles de la distancia global media (D), el promedio de los valores absolutos ($|x|$) y la distancia según el signo (L) para dos valores de exponente α . Para el exponente $\alpha = 2.125$ (páneos (a,c,e)), la asimetría de las métricas con respecto a el valor $p^+ = 50$ se acentúa cuando la red es asortativa; para D y $|x|$, el sistema es menos divergente para el caso en que los competidores dominan (páneos (a,c)), y lo contrario ocurre para L (panel (e)). Para el caso en el que el exponente es $\alpha = 3.5$ (páneos (b,d,f)), el sistema es menos sensible a los diferentes tipos de mezcla asortativa. Las regiones en colores claros representan la desviación estándar determinada a partir de 20 realizaciones independientes.

4.1.2. Redes de libre escala jerárquicas y clubes de ricos

En esta sección se muestran y discuten los resultados sobre las redes jerárquicas de libre escala y el efecto de construir un club de ricos con los *hubs* más conectados en dichas redes. También, se analizan las consecuencias de suponer que todas las interacciones del club de ricos son cooperativas (o competitivas).

Como se mencionó en la subsección 3.1.1 las redes aleatorias que se construyeron a partir de las redes jerárquicas fueron de utilidad para realizar comparaciones entre los resultados obtenidos para redes no jerárquicas y los obtenidos para redes jerárquicas del mismo orden.

Al igual que en el caso de las redes no jerárquicas, en las redes jerárquicas y con club se ricos se observó que la métrica rango normalizado del número de nodos negativos y positivos (δ) es muy cercana a 1 para valores de p^+ muy cercanos a 100.

En los paneles (a), (c), (e) de la figura 4.6 se observa que las métricas D , $\overline{|x|}$ y L tienen comportamientos visiblemente diferenciados para las redes jerárquicas, aleatorias y jerárquicas con club de ricos. La presencia de un club de ricos genera la mayor asimetría respecto al valor $p^+ = 50$, es decir, la mayor discrepancia entre los escenarios donde la red es completamente cooperativa y completamente competitiva. La agregación de vínculos entre *hubs*, al crear el club de ricos, genera una marcada elevación (disminución) de los valores de las métricas en ambientes altamente cooperativos (competitivos).

En la métrica $\overline{|x|}$ (figura 4.6 (c)) podemos ver que las redes jerárquicas (sin club de ricos) producen valores más cercanos al estado neutro en comparación con las redes aleatorias; sin embargo, esto no implica que los estados finales de los actores en las redes jerárquicas sean siempre más cercanos entre sí (figura 4.6 (a)) o que la distancia entre los promedios de estados positivos y negativos sea menor que en las redes aleatorias (4.6 (e)). Lo anterior se debe a que para ambientes mayoritariamente cooperativos las redes aleatorias poseen muchos más estados finales con el mismo signo que las redes jerárquicas. Otra implicación de esta última afirmación es que las redes aleatorias generan más probabilidad de consenso que las redes jerárquicas debido a sus valores menores para la métrica D (figura 4.6 (a)).

A diferencia de las redes de libre escala no jerárquicas (como la red aleatoria) se observa que en las redes jerárquicas las métricas siguen un patrón específico en función de p^+ : cuando la mayoría de las interacciones son competitivas, las métricas son relativamente bajas, siendo la más baja para el caso jerárquico con club de ricos. A medida que p^+ aumenta hacia el valor 50, las métricas decaen hacia un mínimo y luego conforme los valores de p^+ aumentan hacia su valor máximo las métricas crecen continuamente también hacia sus valores máximos.

Al comparar los casos en los que el club de los ricos es enteramente cooperativo y competitivo (ver figura 4.6 (b,d,f)), se puede observar que las métricas exhiben un comportamiento muy diferenciado; mientras que el caso cooperativo se describen por valores altos y con cierta simetría respecto al valor $p^+ = 50$, en el caso competitivo son bajos y más asimétricos.

Es importante mencionar que aunque el club de ricos competitivo genera valores más cercanos al estado neutro en comparación con el cooperativo (4.6 (d)) esto no implica que la distancia entre los promedios de estados positivos y negativos sea menor en este tipo de redes (figura 4.6 (f)). Lo anterior se debe a que en ambientes mayoritariamente cooperativos el club de ricos cooperativo produce muchos más estados finales con el mismo signo que en el caso de un club de ricos competitivo. Por otra parte la figura 4.6 (b), implica que aunque un club de ricos cooperativo genere una gran cantidad de estados finales del mismo signo (en ambientes marcadamente cooperativos), estos estados finales pueden estar muy separados entre sí, lo cual no es idóneo para el surgimiento de consenso.

Los hallazgos indican que la menor divergencia en los estados finales corresponden a los casos en los que: 1) las interacciones mixtas dominan el sistema (o análogamente, las cantidades de interacciones cooperativas y competitivas son iguales), 2) la red posee estructura jerárquica en vez de estructura aleatoria y 3) el club de ricos es competitivo. Lo anterior podría significar que debido a la mayor cercanía de las métricas con el estado neutro, 0, el surgimiento de un conflicto podría ser menos probable en estos tres casos, este hecho no fue validado en este trabajo, pero en el futuro se espera poder estudiar cada uno de los casos para confirmarlo o descartarlo.

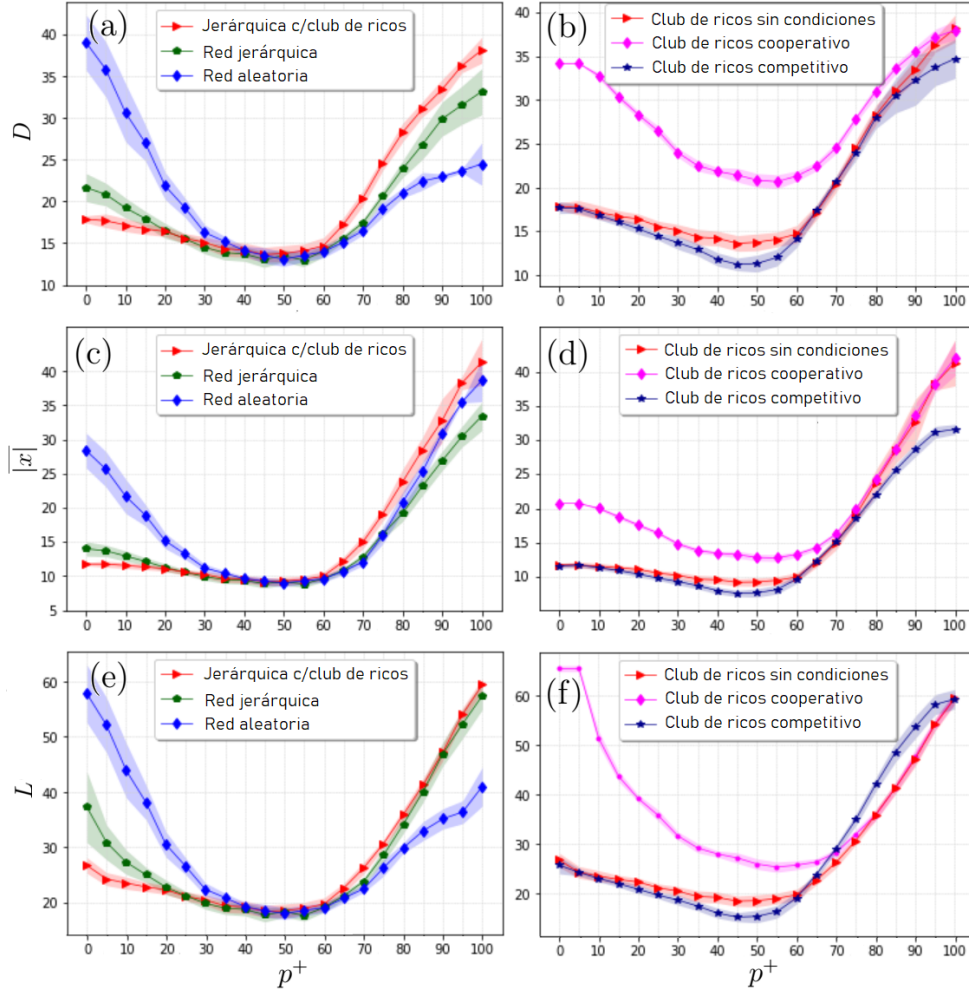


Figura 4.6: Resultados de las simulaciones para las métricas D , $\overline{|x|}$ y L en las redes jerárquicas y redes con clubes de ricos. Se observa que la presencia de un club de ricos genera la mayor asimetría respecto al valor $p^+ = 50$ en las tres métricas (páneos (a,c,e)). Los páneos (b,d,f) muestran los comportamientos de las métricas cuando las interacciones entre los *hubs* que forman el club de ricos son todas cooperativas o competitivas (en todas las métricas la curva que representa la red jerárquica con club de ricos y la que representa la red con club de ricos sin condiciones son iguales, esto se hizo así con propósitos de comparación entre todos los páneos). En los diagramas puede observarse que los clubes de ricos cooperativos aumentan significativamente la divergencia de todo el sistema, mientras que la presencia de clubes de ricos competitivos la reduce. Las regiones en colores claros representan la desviación estándar determinada a partir de 20 realizaciones independientes.

4.2. Dinámica de opinión

En cuanto al trabajo realizado en el área de dinámica de opinión se estudió cómo la opinión inicial de un actor que está permanentemente bajo el efecto de la autoafirmación de opinión se ve influenciada por sus filias y la influencia que ejercen sobre él dos actores persuasores, quienes apoyan posturas contrarias.

En el modelo de dinámica de opinión propuesto, se tiene que siempre existe interacción entre los actores x_0 y x_2 con el actor x_1 aún cuando sus opiniones sean muy dispares, de este modo el modelo propuesto es capaz de describir sin inconvenientes las interacciones con y sin presencia de homofilia, lo cual supera la limitación de los modelos clásicos de confianza acotada que sólo describen interacciones entre actores con presencia de homofilia.

En todas las simulaciones realizadas se supuso que x_0 y x_2 se relacionan de manera competitiva entre sí. Como los valores iniciales de x_0 y x_2 siempre se tomaron positivo y negativo, respectivamente, entonces x_0 y x_2 convergen a las posturas \oplus y \ominus , respectivamente (ver las proposiciones 4 y 5 del apéndice), donde $\oplus = w_1$, $\ominus = -w_1$ y $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w = 5 \tanh(w)/0.9$.

Es importante mencionar que los resultados de todas las simulaciones realizadas (ver tablas 4.1, 4.2 y 4.3) fueron consistentes con los puntos de equilibrio reportados para el modelo de dinámica de opinión en el teorema 4.

4.2.1. Autoafirmación de opinión sin retroalimentación

Como se muestra en la tabla 4.1, cuando el actor x_1 no recibe retroalimentación por parte de los actores x_0, x_2 , entonces su opinión inicial determina su postura final. Esto se ajusta correctamente al efecto esperado por la autoafirmación de opinión de un individuo quien no recibe influencias externas para cambiar sus creencias.

4.2.2. Autoafirmación de opinión con retroalimentación

Para una exposición más precisa de los resultados, esta sección fue dividida en dos subsecciones: escenarios simples y escenarios compuestos (ver la definición 32).

Escenarios simples

Los resultados de las evoluciones numéricas para los escenarios simples se muestran en la tabla 4.2. A continuación, se discuten aspectos importantes de cada uno de esos principios.

La persuasión fallida puede ocurrir por varias razones, por ejemplo, cuando las personas se sienten presionadas o que su libertad de elección está siendo amenazada, es más probable que rechacen la persuasión y mantengan sus creencias originales (esto se conoce como reactancia psicológica, ver [45]). Otra causa de persuasión fallida es la disonancia cognitiva (ver [155]), la cual sugiere que cuando las personas se enfrentan a información persuasiva que contradice sus creencias preexistentes, entonces pueden experimentar un malestar psicológico interno que los lleva a resistir la persuasión y reforzar sus creencias originales con el propósito de reducir dicho malestar. En el escenario 3 la frustración de la persuasión se da porque los actores x_0 y x_2 ejercen exactamente el mismo poder persuasivo sobre el actor x_1 (pero en direcciones opuestas), lo cual genera un efecto de suma cero que impide la modificación de la

Tabla 4.1: Resultados de los escenarios analizados cuando x_1 no recibe retroalimentación por parte de los actores x_0, x_2 . Los gráficos muestran 20 simulaciones independientes de las evoluciones de las opiniones de x_0, x_1 y x_2 , en las cuales una de ellas fue trazada con colores profundos y las demás con colores claros.

Autoafirmación de opinión sin retroalimentación		
Escenario	Resultado	
Escenario 1		<p>Como se observa en el gráfico, cuando la opinión inicial de x_1 es neutra respecto a ambas posturas, entonces dicha opinión se preserva a través del tiempo.</p>
Escenario 2		<p>Debido a la autoafirmación de opinión, cuando x_1 tiene simpatía por \oplus (gráfico grande), entonces dicha opinión se refuerza y $x_1 \rightarrow \oplus$. Análogamente, cuando x_1 tiene simpatía por \ominus (gráfico pequeño), se tiene que $x_1 \rightarrow \ominus$.</p>

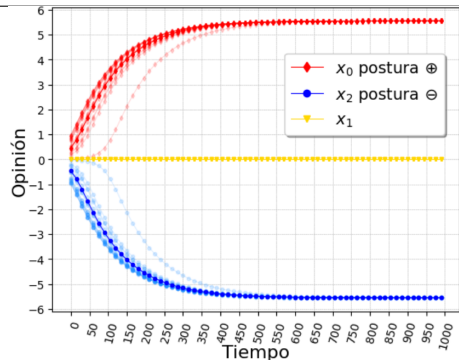
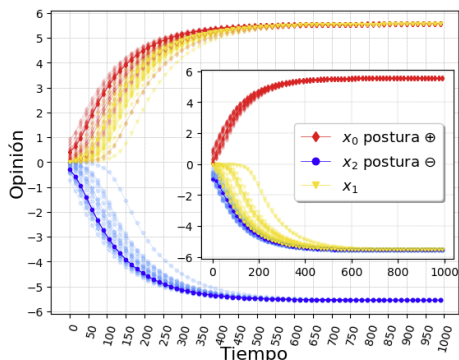
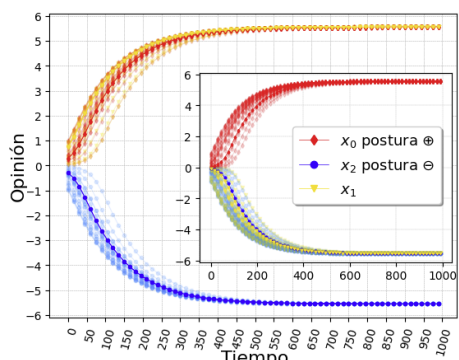
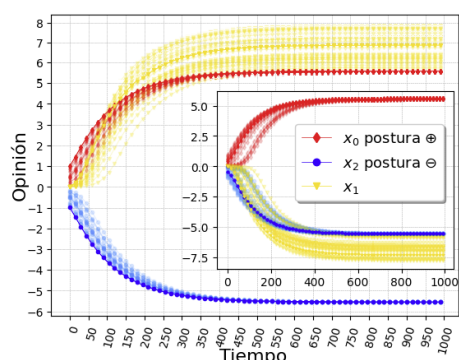
opinión neutra de x_1 (ver el punto 2 de la proposición 5).

En el modelo de dinámica de opinión propuesto la persuasión inicial es estudiada en el escenario 4 que modela la magnitud del impacto sobre el receptor, causado por los mensajes persuasivos iniciales de los emisores, por esa razón la persuasión inicial se define en términos de $x_i(t_0)$, $i \in \{0, 2\}$. Como se mencionó en la definición 35 existen diversos motivos por los cuales la influencia inicial de un mensaje o argumento pueden tener más o menos fuerza persuasiva sobre un receptor, algunas de esas causas podrían estar relacionadas con la claridad y simplicidad de los mensajes, el principio de sanción social, el principio de reciprocidad y el modelo de la inoculación. De esta manera, el modelo propuesto tiene la versatilidad de tomar en cuenta diversas causas que generan diferencias en el poder persuasivo inicial de los mensajes o argumentos. En general, se observa que el receptor adopta la postura con la mayor fuerza de influencia inicial.

Respecto al escenario 5 (ligado al principio de simpatía), se observó que existe una dependencia positiva entre $|x_1(t_0)|$ y la rapidez con la que el actor x_1 converge a la postura por la cual siente preferencia. Se observa que pese a que $x_1(t_0) \neq 0$ sea muy cercano a cero,

la simpatía inicial de x_1 determina la evolución de su opinión.

Tabla 4.2: Resultados de los estudios de escenarios simples. Los gráficos muestran 20 simulaciones independientes, en las cuales una de ellas fue trazada con colores profundos.

Autoafirmación de opinión con retroalimentación	
Escenario simple	Resultado
Escenario 3	 <p>Todo el tiempo, x_0 y x_2 influyen sobre x_1 con la misma autoridad y fuerza de influencia (ver la proposición 5), en consecuencia x_1 conserva su opinión neutra inicial a lo largo del tiempo.</p>
Escenario 4	 <p>En este escenario, x_0 y x_2 influyen sobre x_1 con la misma autoridad. En el gráfico grande, la fuerza de influencia inicial ejercida por x_0 sobre x_1 es mayor que la ejercida por x_2 sobre x_1, en consecuencia x_1 adopta la postura \oplus. Cuando se intercambian los papeles de x_0 y x_2, se tiene que x_1 adopta la postura \ominus (gráfico pequeño).</p>
Escenario 5	 <p>En este escenario, x_0 y x_2 influyen sobre x_1 con la misma autoridad y fuerza de influencia. Si x_1 tiene simpatía por \oplus (respectivamente, \ominus), entonces $x_1 \rightarrow \oplus$ (respectivamente, $x_1 \rightarrow \ominus$). El gráfico grande muestra el caso $x_1 \rightarrow \oplus$ y el pequeño $x_1 \rightarrow \ominus$.</p>
Escenario 6	 <p>En este escenario, x_0 y x_2 ejercen la misma fuerza de influencia sobre x_1. Cuando x_0 tiene mayor fuerza de autoridad sobre x_1 que x_2, entonces x_1 tiende hacia posturas afines a \oplus (gráfico grande). Cuando se intercambian los papeles de x_0 y x_2, se tiene que x_1 tiende hacia posturas afines a \ominus (gráfico pequeño).</p>

En cuanto a la fuerza de autoridad (estudiada en el escenario 6), se obtuvo que la fuerza de autoridad que un actor posee sobre x_1 es decisiva para especificar su postura final, el actor persuasor con la mayor fuerza de autoridad logrará persuadir a x_1 para adoptar su postura. Es importante mencionar que en este caso la postura final de x_1 no fue exactamente \oplus o \ominus , sino valores que están positivamente relacionados con la distancia de las fuerzas de autoridad $|c_{10} - c_{12}|$, es decir, entre más grande sea el valor $|c_{10} - c_{12}|$ más grande será la asimetría respecto al eje horizontal entre la postura final de x_1 y la postura del actor que ejerce menos fuerza de autoridad sobre x_1 .

Escenarios compuestos

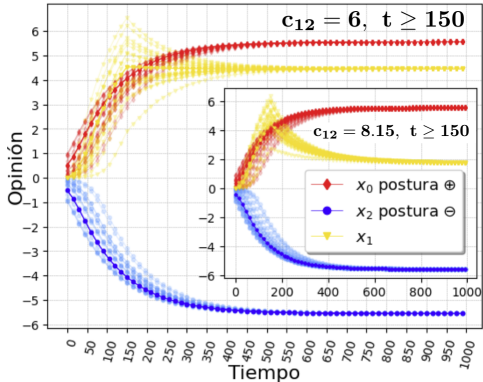
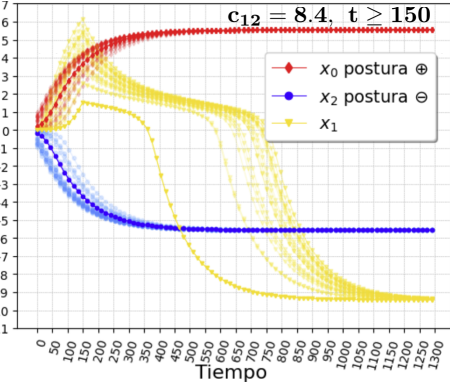
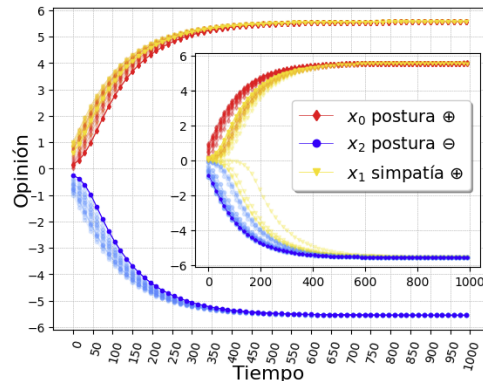
La capacidad del modelo propuesto para permitir el análisis de diversos escenarios compuestos pone de manifiesto su relevancia, debido a que estos principios involucran la mezcla de creencias preexistentes, homofilia e impacto de influencias externas actuando de manera simultánea sobre un actor que pretende definir su postura respecto a un tema.

En este caso, las dinámicas observadas en el sistema son mucho más diversas que aquellas de los experimentos anteriores. Los resultados de las evoluciones numéricas de los escenarios compuestos se muestran en la tabla 4.3. En seguida, se discuten aspectos importantes de cada uno de estos escenarios.

En el escenario 7 se observó que cuando se realiza un cambio de la autoridad dominante sobre x_1 , entonces la tendencia causada por la opinión inicial de x_1 gira con dirección hacia la postura promovida por el nuevo actor con autoridad dominante. A diferencia de lo que sucedía en el escenario 6, cuando se realiza un cambio de la autoridad dominante, entonces la postura final del actor x_1 no necesariamente está próxima a la postura del nuevo actor con autoridad dominante. Se notó que se requiere un cambio fuerte de autoridad dominante (valores grandes de la nueva fuerza de autoridad dominante respecto al antiguo valor dominante) para que la postura final del actor x_1 sea afín a la postura del nuevo actor dominante (ver las figuras en la tercera fila de la tabla 4.3 donde se muestran tres valores diferentes de cambio de autoridad y la autoridad antigua tiene un valor constante igual a 5).

El escenario 8 describe sin lugar a dudas la situación más compleja analizada en este trabajo. El caso más interesante de dicho escenario surge cuando el actor x_1 tiene simpatía por alguna de las dos posturas, \oplus o \ominus , pero el actor que promueve la postura contraria tiene la mayor de las fuerzas de influencia inicial (ver el gráfico pequeño de la figura ubicada en la cuarta fila de la tabla 4.3). A pesar de que en muchos casos x_1 converge a la postura por la cual siente simpatía, interesantemente, se observó que esto no siempre ocurre, pues en ocasiones la persuasión inicial del actor con simpatía contraria es capaz de jalar a x_1 hacia su postura. De este modo, tal como ocurre en situaciones de la vida real, el modelo es capaz de describir situaciones en las que es posible persuadir a una persona a adoptar una postura por la cuál originalmente no sentía simpatía. De hecho, en la figura 4.7 se puede observar que cuanto mayor es la simpatía de x_1 hacia la postura \oplus (respectivamente \ominus) menor es la posibilidad de que la postura final de x_1 sea \ominus (respectivamente \oplus).

Tabla 4.3: Resultados de los estudios de escenarios compuestos. Los gráficos muestran 20 simulaciones independientes de las evoluciones de las opiniones de x_0 , x_1 y x_2 , en las cuales una de ellas fue trazada con colores profundos y las demás con colores claros.

Autoafirmación de opinión con retroalimentación	
Escenario compuesto	Resultado
Escenario 7	<div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>Como se observa en todos los gráficos, cuando $c_{10} > c_{12}$ ($t < 150$) se tiene que x_1 tiende a valores afines a \oplus, pero cuando ocurre el cambio $c_{10} < c_{12}$ (para $t \geq 150$) la tendencia de x_1 gira hacia \ominus. Sucede algo análogo cuando x_2 posee la autoridad dominante inicial y luego esta autoridad dominante cambia a x_0.</p>
Escenario 8	<div style="display: flex; justify-content: space-between;">  <div style="width: 45%;"> <p>se identificaron cuatro situaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ si $x_1(t_0) > x_2(t_0)$, entonces $x_1 \rightarrow \oplus$. ■ si $x_2(t_0) < x_0(t_0) + x_1(t_0)$, entonces $x_1 \rightarrow \oplus$. ■ si $x_2(t_0) - x_0(t_0) < 0.18$ y $x_1(t_0) > 0.08$, entonces $x_1 \rightarrow \oplus$. ■ si $x_2(t_0) - x_0(t_0) > 0.3$, $x_1(t_0) < 0.08$ y $x_0(t_0) < 0.6$, entonces $x_1 \rightarrow \ominus$. </div> </div> <p>Cuando x_1 tiene simpatía por \oplus, se tienen dos casos: 1) si la influencia inicial de x_0 sobre x_1 es mayor que la de x_2 sobre x_1, entonces x_1 tiende a \oplus (gráfico grande), 2) cuando la influencia inicial de x_2 sobre x_1 es mayor que la de x_0 sobre x_1 (gráfico pequeño),</p> <p>Por otro lado, cuando x_1 tiene simpatía por \ominus, ocurren situaciones análogas a las reportadas anteriormente.</p>

En el escenario 8 se puede observar que cuando x_1 tiene simpatía hacia la postura \oplus no existe una relación lineal entre la postura final de x_1 y las influencias iniciales de x_0 y x_2 (ver los mapas de calor del primer renglón de la figura 4.7), esto provoca que en multiples situaciones x_1 converja a la postura por la cual siente simpatía a pesar de que suceda que $x_1(t_0) < |x_2(t_0)|$, como por ejemplo, cuando el valor inicial $x_0(t_0)$ es lo suficientemente grande para provocar que $|x_2(t_0)| < x_0(t_0) + x_1(t_0)$. Sin embargo, existen casos en las cuales no se cumple que $|x_2(t_0)| < x_0(t_0) + x_1(t_0)$, pero aún así x_1 converge a la postura \oplus (ver las zonas del primer renglón de la figura 4.7 donde los valores de $x_0(t_0)$ son cercanos a cero).

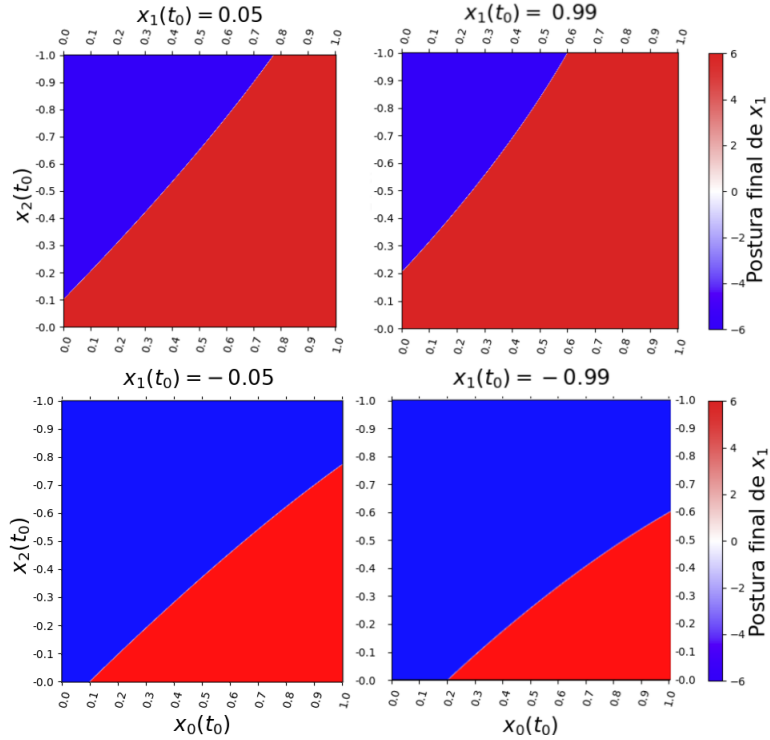


Figura 4.7: Relación existente entre las fuerzas de persuasión inicial $x_0(t_0)$, $x_2(t_0)$ y las posturas finales del actor x_1 cuando x_1 tiene simpatía inicial por alguna de las dos posturas \oplus o \ominus . Se muestran dos valores diferentes de $x_1(t_0)$ que describen la simpatía inicial del actor x_1 hacia la postura \oplus (gráficos del primer renglón) y hacia la postura \ominus (gráficos del segundo renglón). En todos los gráficos la separación entre las posturas finales positiva (zona roja) y negativa (zona azul) no es una línea recta.

En la figura 4.7 se observa que cuando el actor x_1 tiene preferencia por alguna de las dos posturas (\oplus o \ominus) y recibe casi nula retroalimentación por parte del actor persuasor que respalda su postura, entonces una opinión inicial por parte del actor persuasor que no apoya la postura de x_1 con valor de aproximadamente el doble del valor de $x_1(t_0)$ será capaz de provocar que la opinión del actor x_1 evolucione hacia la postura por la cual originalmente no tenía preferencia.

En esta investigación se trabajó exclusivamente con redes de tres actores, esto es una limitante para el estudio de los factores que rigen la persuasión en el mundo real. El incremento

del número de actores en el modelo podría repercutir positivamente en la descripción de características fundamentales de nuevos principios psicológicos tales como el principio de sanción social y la teoría del balance estructural (ver las definiciones 38 y 39 de la sección 2.4).

En el desarrollo de la investigación siempre se supuso que todos los individuos tienen la misma inercia al cambio de opinión ($m_i = 0.9$); sin embargo, es relevante mencionar que el modelo permite estudiar los casos donde esto no sucede, lo cual podría ampliar el alcance del modelo, por ejemplo a entornos donde existen individuos cerrados a los cambios de postura.

Conclusiones

En el trabajo referente a teoría de resolución de conflictos se analizaron los resultados de dinámicas de cooperación y competencia para un grupo de actores dispuestos en redes de libre escala (donde las conectividades están dominadas por un pequeño grupo de *hubs*). Los hallazgos reflejan que la presencia de *hubs* en la red y la forma en que estos se enlazan entre sí y con el resto de los nodos de la red (correlación entre nodos) impactan significativamente las configuraciones finales del sistema.

Los resultados de esta investigación posibilitan la identificación de los casos en los cuales el sistema genera dispersiones menores en los estados de los actores (métricas $\overline{|x|}$ y L) y en los cuales los estados de todos los actores son cercanos entre sí (métricas δ y D), esto es importante porque justamente en estos dos casos podría existir la menor posibilidad de surgimiento de un conflicto, en el primer caso debido a la cercanía con el estado neutro y en el segundo debido a que las opiniones altamente similares, en toda la red, conducen al consenso.

Las redes de libre escala disortativas y las redes jerárquicas con clubes de ricos competitivos se caracterizaron por poseer las divergencias mínimas de entre todos los tipos de correlación de grados entre nodos y redes con clubes de ricos analizadas, respectivamente.

El desarrollo de este trabajo corroboró que conforme aumenta la presencia de *hubs* con enormes cantidades de vecinos (valores bajos del exponente de la distribución de grado) también aumentan las dispersiones de las métricas cuando se consideran redes donde las interacciones dominantes son cooperativas o competitivas, lo cual corrobora la hipótesis de investigación.

Los descubrimientos realizados podrían significar que la posibilidad de consenso es mayor en presencia de *hubs* con enormes cantidades de vecinos y presencia dominante de interacciones cooperativas (valores altos de p^+) porque es en estos casos cuando existen más opiniones similares en todo el sistema. Además, parece ser que las redes no jerárquicas generan más posibilidad de consenso que las redes jerárquicas.

Las métricas de las redes jerárquicas siempre mostraron un patrón específico de comportamiento en función del parámetro p^+ , mientras que, las de las redes no jerárquicas mostraron mucha variación.

Tanto en los resultados reportados aquí sobre redes de libre escala como en los resultados

anteriores reportados sobre redes de mundo pequeño (ver [15]) se encontró el mismo resultado, que la presencia de cantidades similares de interacciones cooperativas y competitivas generan como resultado la menor divergencia de los valores de los estados de los nodos de entre todas las configuraciones estudiadas, lo cual verifica la hipótesis de investigación.

La cuestión de si una estrategia similar (ya sea cooperativa o competitiva) adoptada por un grupo de *hubs* bien conectado es capaz de guiar la dinámica resultante de todo el sistema ha sido parcialmente respondida en esta investigación. En el esquema del modelo utilizado, un club de ricos cooperativo conduce a una mayor divergencia del sistema, mientras que, un club de ricos competitivo conduce a una divergencia menor.

Los hallazgos de este trabajo son relevantes en el contexto de los estudios sobre la importancia de la presencia de interacciones negativas o antagónicas, que se consideran cruciales en la dinámica de los sistemas sociales ([14, 168-170]). Además, los resultados de esta investigación podrían ser de utilidad para modelar aspectos referentes a polarización política ([171-180]), diseñar estudios de modelos de conflicto en redes temporales ([80, 181-184]) y analizar comportamientos cooperativos relacionados con la teoría de juegos evolutivos ([33, 74, 185-188]).

En cuanto al trabajo realizado en dinámica de opinión, se observó que el modelo propuesto es capaz de describir de manera adecuada la acción particular y conjunta de varias características fundamentales de diversos principios psicológicos ligados a las creencias pre-existentes, homofilia, resistencia al cambio e impacto de influencias externas en los procesos de permanencia, formación y difusión de opiniones sociales en ambientes donde se considera que el actor receptor está permanentemente bajo el efecto de la autoafirmación de opinión (característica fundamental del sesgo de confirmación).

El modelo propuesto describe sin inconvenientes las interacciones con y sin presencia de homofilia, lo que le brinda la capacidad de modelar adecuadamente la fuerza de autoridad que es ejercida por un actor persuasor sobre un actor receptor a pesar de que sus opiniones originales sean muy dispares, lo cual no es posible en otros modelos de dinámica de opinión.

Una de las características más destacadas del modelo propuesto es que permite analizar el efecto simultáneo de dos acciones que promueven posturas contrarias en un proceso persuasivo donde el actor receptor está permanentemente autoafirmando su opinión. Gracias a lo anterior es posible determinar de forma cuantitativa hasta que punto un individuo es capaz de mantener su opinión preexistente antes de que la persuasión ejercida sobre él sea capaz de modificarla. Es relevante mencionar que en realidad el modelo permite estudiar las consecuencias dinámicas de tres acciones simultáneas sobre un receptor, a saber: persuasión inicial (escenario 4), homofilia (escenario 5) y fuerza de autoridad (escenario 6), pero dicho análisis se pretende desarrollar en trabajos posteriores.

Este trabajo sugiere que a pesar de que las personas estén permanentemente bajo el efecto de la autoafirmación de opinión, es posible que las interacciones que tienen con quienes los rodean sean capaces de persuadirlas a adoptar posturas diferentes a aquellas con las que sim-

patizaban originalmente. Una pregunta interesante que surge de este resultado es ¿las personas estamos constantemente bajo el efecto de la autoafirmación de opinión en nuestra vida diaria?.

En trabajos subsecuentes, se pretende extender el modelo a digráficas con más de tres actores, así como estudiar lo que sucede cuando se permite que x_0 y x_2 se relacionen de manera cooperativa entre sí y de manera competitiva con x_1 , se espera que algunas combinaciones de esos tipos de interacciones sean capaces de predecir situaciones de consenso, ya que con los tipos de interacciones consideradas actualmente el consenso es imposible porque x_0 y x_2 siempre tienden hacia posturas contrarias.

Otros aspectos que podrían considerarse en investigaciones futuras son: el efecto sobre la dinámica del sistema cuando se permite que x_1 ejerza retroalimentación (positiva o negativa) sobre los actores que pretenden influenciarlo, métodos para agregar más posturas finales al sistema y estrategias que le confieran al modelo la capacidad de tomar en cuenta la influencia ejercida por los medios digitales de comunicación.

El modelo de dinámica de opinión propuesto podría contribuir positivamente en la comprensión de las posturas adoptadas por las personas cuando son expuestas a tácticas persuasivas específicas. De esta manera, el modelo podría ayudar a los decisores, gerentes y profesionales de la comunicación a diseñar mejores estrategias de persuasión o igualmente beneficiar a los receptores, quienes al reconocer ciertas estrategias persuasivas podrían tomar medidas para contrarrestarlas.

Bibliografía

1. Menczer, F., Fortunato, S. y Davis, C. A. *A first course in network science* (Cambridge University Press, 2020).
2. Pirani, M., Costa, T. y Sundaram, S. *Stability of dynamical systems on a graph* en *53rd IEEE Conference on Decision and Control* (2014), 613-618.
3. Bahador, N. y Lankarany, M. Uncovering the Origins of Instability in Dynamical Systems: How Can the Attention Mechanism Help? *Dynamics* **3**, 214-233 (2023).
4. Ji, P. *et al.* Signal propagation in complex networks. *Physics Reports* **1017**, 1-96 (2023).
5. Barzel, B. y Barabási, A.-L. Universality in network dynamics. *Nature physics* **9**, 673-681 (2013).
6. Portillo, J. R., Soler-Toscano, F. y Langa, J. A. Global structural stability and the role of cooperation in mutualistic systems. *Plos one* **17**, e0267404 (2022).
7. Maslov, S., Sneppen, K. e Ispolatov, I. Spreading out of perturbations in reversible reaction networks. *New journal of physics* **9**, 273 (2007).
8. Guo, Y. y Amir, A. Exploring the effect of network topology, mRNA and protein dynamics on gene regulatory network stability. *Nature communications* **12**, 130 (2021).
9. Stern, M., Sompolinsky, H. y Abbott, L. F. Dynamics of random neural networks with bistable units. *Physical Review E* **90**, 062710 (2014).
10. Kuśmierz, L., Ogawa, S. y Toyozumi, T. Edge of chaos and avalanches in neural networks with heavy-tailed synaptic weight distribution. *Physical Review Letters* **125**, 028101 (2020).
11. Lee, S., Rocha, L. E., Liljeros, F. y Holme, P. Exploiting temporal network structures of human interaction to effectively immunize populations. *PloS one* **7**, e36439 (2012).
12. McGail, A. M., Feld, S. L. y Schneider, J. A. You are only as safe as your riskiest contact: Effective COVID-19 vaccine distribution using local network information. *Preventive medicine reports* **27**, 101787 (2022).
13. Vasiliauskaite, V. y Antulov-Fantulin, N. Universality of neural dynamics on complex networks. *arXiv preprint arXiv:2301.04900* (2023).
14. Isakov, A., Fowler, J. H., Airoidi, E. M. y Christakis, N. A. The Structure of Negative Social Ties in Rural Village Networks. *Sociological Science* **6**, 197-218. ISSN: 2330-6696 (2019).

15. Fernández-Rosales, I. Y., Liebovitch, L. S. y Guzmán-Vargas, L. The dynamic consequences of cooperation and competition in small-world networks. *PLoS One* **10**, e0126234 (2015).
16. Estrada, E. Rethinking structural balance in signed social networks. *Discrete Applied Mathematics* **268**, 70-90 (2019).
17. Kirkley, A., Cantwell, G. T. y Newman, M. E. Balance in signed networks. *Physical Review E* **99**, 012320 (2019).
18. Li, G. J. y Porter, M. A. Bounded-confidence model of opinion dynamics with heterogeneous node-activity levels. *Phys. Rev. Res.* **5**, 023179 (2023).
19. Jacobo-Villegas, E., Obregón-Quintana, B., Guzmán-Vargas, L. y Liebovitch, L. S. Conflict Dynamics in Scale-Free Networks with Degree Correlations and Hierarchical Structure. *Entropy* **24**, 1571 (2022).
20. Liebovitch, L. S. *et al.* Dynamics of two-actor cooperation–competition conflict models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **387**, 6360-6378 (2008).
21. Gottman, J., Swanson, C. y Swanson, K. en *The Dynamic Perspective in Personality and Social Psychology* 326-340 (Psychology Press, 2002).
22. Gottman, J. M., Murray, J. D., Swanson, C. C., Tyson, R. y Swanson, K. R. *The mathematics of marriage: Dynamic nonlinear models* (MIT Press, 2005).
23. Deutsch, M. *The resolution of conflict: Constructive and destructive processes* (Yale University Press, 1973).
24. Deutsch, M., Coleman, P. T. y Marcus, E. C. *The handbook of conflict resolution: Theory and practice* (John Wiley & Sons, 2011).
25. Hopfield, J. J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the national academy of sciences* **81**, 3088-3092 (1984).
26. Korner, E. *et al.* *Neurocomputing research developments* (Nova Science Publishers, Inc., 2007).
27. Watts, D. J. y Strogatz, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *nature* **393**, 440-442 (1998).
28. Estrada, E. y Knight, P. A. *A first course in network theory* (Oxford University Press, USA, 2015).
29. Barabási, A.-L. y Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *science* **286**, 509-512 (1999).
30. Posfai, M. y Barabási, A.-L. *Network science* (Cambridge University Press, 2016).
31. Newman, M. *Networks* (Oxford university press, 2018).
32. Ravasz, E. y Barabási, A.-L. Hierarchical organization in complex networks. *Physical review E* **67**, 026112 (2003).
33. Li, Y.-x., Jin, X.-g., Kong, F.-s. y Luo, H.-l. Strategic games on a hierarchical network model. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A* **9**, 271-278 (2008).

34. Liang, D., Fu, Y. y Xu, Z. Three-way group consensus decision based on hierarchical social network consisting of decision makers and participants. *Information Sciences* **585**, 289-312 (2022).
35. Newman, M. E. Assortative mixing in networks. *Physical review letters* **89**, 208701 (2002).
36. Cantwell, G. T. y Newman, M. Mixing patterns and individual differences in networks. *Physical Review E* **99**, 042306 (2019).
37. Zhou, S. y Mondragón, R. J. The rich-club phenomenon in the Internet topology. *IEEE communications letters* **8**, 180-182 (2004).
38. Pedreschi, N., Battaglia, D. y Barrat, A. The temporal rich club phenomenon. *Nature Physics* **18**, 931-938 (2022).
39. Nickerson, R. S. Confirmation bias: A ubiquitous phenomenon in many guises. *Review of general psychology* **2**, 175-220 (1998).
40. Gilovich, T., Griffin, D. y Kahneman, D. *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (Cambridge university press, 2002).
41. Hergovich, A., Schott, R. y Burger, C. Biased evaluation of abstracts depending on topic and conclusion: Further evidence of a confirmation bias within scientific psychology. *Current Psychology* **29**, 188-209 (2010).
42. Kahneman, D. *Thinking, fast and slow* (Macmillan, 2011).
43. Ross, L. y Nisbett, R. E. *The person and the situation: Perspectives of social psychology* (Pinter & Martin Publishers, 2011).
44. McGuire, W. J. y Papageorgis, D. The relative efficacy of various types of prior belief-defense in producing immunity against persuasion. *The Journal of Abnormal and Social Psychology* **62**, 327 (1961).
45. Brehm, J. W. A theory of psychological reactance. (1966).
46. Knowles, E. S. y Linn, J. A. *Resistance and persuasion* (Psychology Press, 2004).
47. Tajfel, H., Billig, M. G., Bundy, R. P. y Flament, C. Social categorization and intergroup behaviour. *European journal of social psychology* **1**, 149-178 (1971).
48. Cialdini, R. B. *Influence: Science and practice* (Pearson education Boston, MA, 2009).
49. Galinsky, A. y Schweitzer, M. *Friend & foe: When to cooperate, when to compete, and how to succeed at both* (Currency, 2015).
50. Scheler, M. *The nature of sympathy* (Routledge, 2017).
51. Milgram, S. Behavioral study of obedience. *The Journal of abnormal and social psychology* **67**, 371 (1963).
52. Bickman, L. The social power of a uniform 1. *Journal of applied social psychology* **4**, 47-61 (1974).
53. Cialdini, R. B. *Influence: The psychology of persuasion* (Collins New York, 2007).

54. Urena, R., Kou, G., Dong, Y., Chiclana, F. y Herrera-Viedma, E. A review on trust propagation and opinion dynamics in social networks and group decision making frameworks. *Information Sciences* **478**, 461-475 (2019).
55. Galam, S. Opinion dynamics and unifying principles: A global unifying frame. *Entropy* **24**, 1201 (2022).
56. Wang, X., Jiang, B. y Li, B. Opinion dynamics on social networks. *Acta Mathematica Scientia* **42**, 2459-2477 (2022).
57. Marconi, L. en *AI in the Financial Markets: New Algorithms and Solutions* 117-135 (Springer, 2023).
58. Bai, L., Shi, L., Chen, H., Shao, J. y Cheng, Y. *Opinion dynamics driven under leadership in cooperation-competition social networks* en *2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation (ICCA)* (2020), 141-146.
59. Altafini, C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE transactions on automatic control* **58**, 935-946 (2012).
60. Heider, F. *The psychology of interpersonal relations* (Psychology Press, 1982).
61. Martínez, F. L. Sociología y teoría social analíticas. La ciencia de las consecuencias inintencionadas de la acción. *Revista Española de Investigaciones Sociológicas (REIS)* **164**, 163-166 (2018).
62. Keuschnigg, M., Lovsjö, N. y Hedström, P. Analytical sociology and computational social science. *Journal of Computational Social Science* **1**, 3-14 (2018).
63. Deutsch, M. Conflict resolution: Theory and practice. *Political Psychology*, 431-453 (1983).
64. Lewin, K. Resolving social conflicts; selected papers on group dynamics. (1948).
65. Burton, J. *Conflict: Human needs theory* (Springer, 1990).
66. Ury, W. The power of a positive No: Save the deal save the relationship and still say No. *New York: Bantam Dell* (2007).
67. Follett, M. P. *Creative experience* (Longmans, Green y company, 1924).
68. Deutsch, M. A theory of co-operation and competition. *Human relations* **2**, 129-152 (1949).
69. Johnson, D. W. Social interdependence: interrelationships among theory, research, and practice. *American psychologist* **58**, 934 (2003).
70. Johnson, D. W. y Johnson, R. T. Cooperative Learning in 21st Century.[Aprendizaje cooperativo en el siglo XXI]. *Anales de Psicología/Annals of Psychology* **30**, 841-851 (2014).
71. Hernandez-Pena, L. *et al.* The role of dominance in sibling relationships: differences in interactive cooperative and competitive behavior. *Scientific Reports* **13**, 11863 (2023).
72. Morschheuser, B., Hamari, J. y Maedche, A. Cooperation or competition—When do people contribute more? A field experiment on gamification of crowdsourcing. *International Journal of Human-Computer Studies* **127**, 7-24 (2019).

73. Orosz, G. *et al.* The Four Faces of Competition: The Development of the Multidimensional Competitive Orientation Inventory. *Frontiers in Psychology* **9**. ISSN: 1664-1078 (2018).
74. Nowak, M. A. y May, R. M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature* **359**, 826-829 (1992).
75. Lieberman, E., Hauert, C. y Nowak, M. A. Evolutionary dynamics on graphs. *Nature* **433**, 312-316 (2005).
76. Santos, F. C., Rodrigues, J. y Pacheco, J. M. Graph topology plays a determinant role in the evolution of cooperation. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **273**, 51-55 (2006).
77. Ichinose, G. y Sayama, H. Invasion of cooperation in scale-free networks: accumulated versus average payoffs. *Artificial Life* **23**, 25-33 (2017).
78. Ashlock, D. A. *Cooperation in prisoner's dilemma on graphs* en *2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games* (2007), 48-55.
79. Ichinose, G., Tenguishi, Y. y Tanizawa, T. Robustness of cooperation on scale-free networks under continuous topological change. *Physical Review E* **88**, 052808 (2013).
80. Li, A. *et al.* Evolution of cooperation on temporal networks. *Nature communications* **11**, 1-9 (2020).
81. Civilini, A., Anbarci, N. y Latora, V. Evolutionary game model of group choice dilemmas on hypergraphs. *Physical Review Letters* **127**, 268301 (2021).
82. Inaba, M. y Akiyama, E. Evolution of cooperation in multiplex networks through asymmetry between interaction and replacement. *Scientific Reports* **13**, 9814 (2023).
83. Guo, H *et al.* Evolutionary games on simplicial complexes. *Chaos, Solitons & Fractals* **150**, 111103 (2021).
84. Xu, Y., Feng, M., Zhu, Y. y Xia, C. Multi-player snowdrift game on scale-free simplicial complexes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 127698 (2022).
85. Boccaletti, S. *et al.* The structure and dynamics of networks with higher order interactions. *Physics Reports* **1018**, 1-64 (2023).
86. Holyst, J. A., Kacperski, K. y Schweitzer, F. Social impact models of opinion dynamics. *Annual Reviews Of Computational Physics IX*, 253-273 (2001).
87. Xia, H., Wang, H. y Xuan, Z. Opinion dynamics: A multidisciplinary review and perspective on future research. *International Journal of Knowledge and Systems Science (IJKSS)* **2**, 72-91 (2011).
88. Tena-Sanchez, J. y Jose Leon-Medina, F. Models of the dynamics of opinion. A literature review. *Revista Internacional de Sociologia* **77** (2019).
89. Zha, Q. *et al.* Opinion dynamics in finance and business: a literature review and research opportunities. *Financial Innovation* **6**, 1-22 (2020).
90. Manzan, S. Big data and computational social science for economic analysis and policy. *Handbook of computational social science for policy* (2023).

91. Lasswell, H. D. *Propaganda technique in the world war* 2015.
92. Asch, S. E. Opinions and social pressure. *Scientific American* **193**, 31-35 (1955).
93. Fehr, E. y Gächter, S. Fairness and retaliation: The economics of reciprocity. *Journal of economic perspectives* **14**, 159-182 (2000).
94. Zajonc, R. B. Attitudinal effects of mere exposure. *Journal of personality and social psychology* **9**, 1 (1968).
95. Tom, G., Nelson, C., Srzentic, T. y King, R. Mere exposure and the endowment effect on consumer decision making. *The Journal of psychology* **141**, 117-125 (2007).
96. Zebrowitz, L. A., White, B. y Wieneke, K. Mere exposure and racial prejudice: Exposure to other-race faces increases liking for strangers of that race. *Social cognition* **26**, 259-275 (2008).
97. Bornstein, R. F. y Craver-Lemley, C. Mere exposure effect. *Cognitive illusions*, 241-258 (2022).
98. Forgas, J. P. y Laham, S. M. en *Cognitive illusions* 286-300 (Psychology Press, 2016).
99. Kuran, T. The tenacious past: Theories of personal and collective conservatism. *Journal of Economic Behavior & Organization* **10**, 143-171 (1988).
100. Heider, F. Attitudes and cognitive organization. *The Journal of psychology* **21**, 107-112 (1946).
101. Cartwright, D. y Harary, F. Structural balance: a generalization of Heider's theory. *Psychological review* **63**, 277 (1956).
102. Estrada, E. y Benzi, M. Walk-based measure of balance in signed networks: Detecting lack of balance in social networks. *Physical Review E* **90**, 042802 (2014).
103. Gao, Z., Li, Y., Wang, Y. y Liu, Q. Distributed tracking control of structural balance for complex dynamical networks based on the coupling targets of nodes and links. *Complex & Intelligent Systems* **9**, 881-889 (2023).
104. Chen, T., Wang, X. y Tsourakakis, C. E. *Polarizing Opinion Dynamics with Confirmation Bias* en *International Conference on Social Informatics* (2022), 144-158.
105. Sznajd-Weron, K. y Sznajd, J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C* **11**, 1157-1165 (2000).
106. Clifford, P. y Sudbury, A. A model for spatial conflict. *Biometrika* **60**, 581-588 (1973).
107. Redner, S. Reality-inspired voter models: A mini-review. *Comptes Rendus Physique* **20**, 275-292 (2019).
108. Galam, S. Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach. *Journal of Mathematical Psychology* **30**, 426-434 (1986).
109. DeGroot, M. H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical association* **69**, 118-121 (1974).
110. Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F. y Weisbuch, G. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems* **3**, 87-98 (2000).

111. Kan, U., Feng, M. y Porter, M. A. An adaptive bounded-confidence model of opinion dynamics on networks. *Journal of Complex Networks* **11**, 415-444 (2023).
112. Martins, A. C. Continuous opinions and discrete actions in opinion dynamics problems. *International Journal of Modern Physics C* **19**, 617-624 (2008).
113. Wan, Y., Ma, B. y Pan, Y. Opinion evolution of online consumer reviews in the e-commerce environment. *Electronic Commerce Research* **18**, 291-311 (2018).
114. Lipiecki, A. y Sznajd-Weron, K. Polarization in the three-state q-voter model with anticonformity and bounded confidence. *Chaos, Solitons & Fractals* **165**, 112809 (2022).
115. Juul, J. S. y Porter, M. A. Hipsters on networks: How a minority group of individuals can lead to an antiestablishment majority. *Physical Review E* **99**, 022313 (2019).
116. Brooks, H. Z. y Porter, M. A. A model for the influence of media on the ideology of content in online social networks. *Physical Review Research* **2**, 023041 (2020).
117. Kurmyshev, E., Juárez, H. A. y González-Silva, R. A. Dynamics of bounded confidence opinion in heterogeneous social networks: Concord against partial antagonism. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **390**, 2945-2955 (2011).
118. Kirsch, W. y Toth, G. Collective bias models in two-tier voting systems and the democracy deficit. *Mathematical Social Sciences* **119**, 118-137 (2022).
119. Sun, R. y Mendez, D. An application of the Continuous Opinions and Discrete Actions (CODA) model to adolescent smoking initiation. *Plos one* **12**, e0186163 (2017).
120. Martins, A. C. R. Mobility and social network effects on extremist opinions. *Phys. Rev. E* **78**, 036104 (3 2008).
121. Martins, A. C. Discrete opinion models as a limit case of the CODA model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **395**, 352-357 (2014).
122. Martins, A. C. Discrete opinion dynamics with M choices. *The European Physical Journal B* **93**, 1-10 (2020).
123. Si, X.-M. *et al.* Effects of selective attention on continuous opinions and discrete decisions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **389**, 3711-3719 (2010).
124. Ancona, C., De Lellis, P. y Iudice, F. L. Influencing Opinions in a Nonlinear Pinning Control Model. *IEEE Control Systems Letters* (2023).
125. Mark, N. P. Culture and competition: Homophily and distancing explanations for cultural niches. *American sociological review*, 319-345 (2003).
126. Balenzuela, P., Pinasco, J. P. y Semeshenko, V. The undecided have the key: Interaction-driven opinion dynamics in a three state model. *PloS one* **10**, e0139572 (2015).
127. Duggins, P. A Psychologically-Motivated Model of Opinion Change with Applications to American Politics. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* **20**, 13. ISSN: 1460-7425 (2017).
128. Shi, L., Liu, Q., Shao, J., Cheng, Y. y Zheng, W. X. A Cooperation-Competition Evolutionary Dynamic Model Over Signed Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control* (2023).

129. Kozitsin, I. V. A general framework to link theory and empirics in opinion formation models. *Scientific reports* **12**, 5543 (2022).
130. Devia, C. A. y Giordano, G. A framework to analyze opinion formation models. *Scientific Reports* **12**, 13441 (2022).
131. De Sola Pool, I. y Kochen, M. Contacts and influence. *Social networks* **1**, 5-51 (1978).
132. Newman, M., Barabási, A.-L. y Watts, D. J. *The structure and dynamics of networks* (Princeton university press, 2011).
133. Backstrom, L., Boldi, P., Rosa, M., Ugander, J. y Vigna, S. *Four degrees of separation* en *Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference* (2012), 33-42.
134. Aparicio, S., Villazón-Terrazas, J. y Álvarez, G. A model for scale-free networks: application to twitter. *Entropy* **17**, 5848-5867 (2015).
135. Khan, M. A. *et al.* A novel cooperative link selection mechanism for enhancing the robustness in scale-free IoT networks en *2020 International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC)* (2020), 2222-2227.
136. Bakhshaliyev, K. y Gunes, M. H. Generation of 2-mode scale-free graphs for link-level internet topology modeling. *Plos one* **15**, e0240100 (2020).
137. Gasparini, M., Izquierdo, J. L. C., Clarisó, R., Brambilla, M. y Cabot, J. *Analyzing rich-club behavior in open source projects* en *Proceedings of the 15th International Symposium on Open Collaboration* (2019), 1-9.
138. Orabona, F. y Pál, D. Scale-free online learning. *Theoretical Computer Science* **716**, 50-69 (2018).
139. Feng, R., Yang, Y., Hu, W., Wu, F. y Zhang, Y. *Representation learning for scale-free networks* en *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence* **32** (2018).
140. Ji, J. *et al.* An artificial bee colony algorithm search guided by scale-free networks. *Information Sciences* **473**, 142-165 (2019).
141. Juárez-López, R., Obregón-Quintana, B, Hernández-Pérez, R, Reyes-Ramírez, I y Guzmán-Vargas, L. Evaluating the transport in small-world and scale-free networks. *Chaos, Solitons & Fractals* **69**, 100-106 (2014).
142. Zhang, J., Ma, J. y Li, H.-J. An efficient link closing strategy for improving traffic capacity on scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **604**, 127887 (2022).
143. Martinello, M. *et al.* Neutral theory and scale-free neural dynamics. *Physical Review X* **7**, 041071 (2017).
144. Kardan, O. *et al.* Improvements in task performance after practice are associated with scale-free dynamics of brain activity. *Network Neuroscience*, 1-63 (2023).
145. Pastor-Satorras, R., Castellano, C., Van Mieghem, P. y Vespignani, A. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of modern physics* **87**, 925 (2015).
146. Okudaira, A. Epidemic Spreading and Localization in Multilayer Scale-free Networks. *Journal of Information Processing* **31**, 97-111 (2023).

147. Qiu, T., Liu, J., Si, W. y Wu, D. O. Robustness optimization scheme with multi-population co-evolution for scale-free wireless sensor networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking* **27**, 1028-1042 (2019).
148. Barabasi, A.-L. y Oltvai, Z. N. Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature reviews genetics* **5**, 101-113 (2004).
149. Cho, D.-Y., Kim, Y.-A. y Przytycka, T. M. Chapter 5: Network biology approach to complex diseases. *PLoS computational biology* **8**, e1002820 (2012).
150. Perc, M. Evolution of cooperation on scale-free networks subject to error and attack. *New Journal of Physics* **11**, 033027 (2009).
151. Xie, F., Zhao, Z. y Yang, P. *Higher Order Preference on the Evolution of Cooperation on Barabási–Albert Scale-Free Network* en *Advances in Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery: Proceedings of the ICNC-FSKD 2021 17* (2022), 137-149.
152. Alves, T., Alves, G., Lima, F. y Macedo-Filho, A. Phase diagram of a continuous opinion dynamics on Barabasi–Albert networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2020**, 033203 (2020).
153. Li, Z., Chen, X., Yang, H.-X. y Szolnoki, A. Game-theoretical approach for opinion dynamics on social networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **32** (2022).
154. McGuire, W. J. Resistance to persuasion conferred by active and passive prior refutation of the same and alternative counterarguments. *The Journal of Abnormal and Social Psychology* **63**, 326 (1961).
155. Festinger, L. Conflict, decision, and dissonance. (1964).
156. Miller, G. A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological review* **63**, 81 (1956).
157. Simon, H. A. *Administrative behavior* (Simon y Schuster, 2013).
158. O'keefe, D. J. en *The Handbook of Communication Skills* 319-335 (Routledge, 2018).
159. Appel, M. y Richter, T. Persuasive effects of fictional narratives increase over time. *Media Psychology* **10**, 113-134 (2007).
160. Moyer-Gusé, E. Toward a theory of entertainment persuasion: Explaining the persuasive effects of entertainment-education messages. *Communication theory* **18**, 407-425 (2008).
161. Oschatz, C. y Marker, C. Long-term persuasive effects in narrative communication research: A meta-analysis. *Journal of Communication* **70**, 473-496 (2020).
162. Schwartz, B. The social psychology of the gift. *American journal of Sociology* **73**, 1-11 (1967).
163. McGuire, W. J. Inducing resistance to persuasion. Some contemporary approaches. *CC Haaland and WO Kaelber (Eds.), Self and Society. An Anthology of Readings, Lexington, Mass.(Ginn Custom Publishing) 1981, pp. 192-230.* (1964).

164. Ash, S. E. Effects of group pressure upon the modification and distortion of judgements. *Group dynamics* (1953).
165. Boguná, M., Pastor-Satorras, R. y Vespignani, A. Cut-offs and finite size effects in scale-free networks. *The European Physical Journal B* **38**, 205-209 (2004).
166. Bertotti, M. L. y Modanese, G. The configuration model for Barabasi-Albert networks. *Applied Network Science* **4**, 1-13 (2019).
167. Doyle, J. C. *et al.* The “robust yet fragile” nature of the Internet. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **102**, 14497-14502 (2005).
168. Everett, M. G. y Borgatti, S. P. Networks containing negative ties. *Social networks* **38**, 111-120 (2014).
169. Rawlings, C. M. y Friedkin, N. E. The structural balance theory of sentiment networks: Elaboration and test. *American Journal of Sociology* **123**, 510-548 (2017).
170. Szell, M., Lambiotte, R. y Thurner, S. Multirelational organization of large-scale social networks in an online world. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **107**, 13636-13641 (2010).
171. Leonard, N. E., Lipsitz, K., Bizyaeva, A., Franci, A. y Lelkes, Y. The nonlinear feedback dynamics of asymmetric political polarization. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **118**, e2102149118 (2021).
172. Finkel, E. J. *et al.* Political sectarianism in America. *Science* **370**, 533-536 (2020).
173. Iyengar, S., Lelkes, Y., Levendusky, M., Malhotra, N. y Westwood, S. J. The origins and consequences of affective polarization in the United States. *Annual Review of Political Science* **22**, 129-146 (2019).
174. Westwood, S. J. y Peterson, E. The inseparability of race and partisanship in the United States. *Political Behavior*, 1-23 (2020).
175. Yang, V. C., Abrams, D. M., Kernell, G. y Motter, A. E. Why are US parties so polarized? A “satisficing” dynamical model. *SIAM Review* **62**, 646-657 (2020).
176. Pierson, P. y Schickler, E. Madison’s constitution under stress: A developmental analysis of political polarization. *Annual Review of Political Science* **23**, 37-58 (2020).
177. Baldassarri, D. y Gelman, A. Partisans without constraint: Political polarization and trends in American public opinion. *American Journal of Sociology* **114**, 408-446 (2008).
178. Hill, S. J. y Tausanovitch, C. A disconnect in representation? Comparison of trends in congressional and public polarization. *The Journal of Politics* **77**, 1058-1075 (2015).
179. Bednar, J. Polarization, diversity, and democratic robustness. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **118**, e2113843118 (2021).
180. Bakker, B. N., Lelkes, Y. y Malka, A. Reconsidering the link between self-reported personality traits and political preferences. *American Political Science Review* **115**, 1482-1498 (2021).
181. Thompson, W. H., Brantefors, P. y Fransson, P. From static to temporal network theory: Applications to functional brain connectivity. *Network Neuroscience* **1**, 69-99 (2017).

182. Holme, P. y Saramäki, J. Temporal networks. *Physics reports* **519**, 97-125 (2012).
183. Lee, S., Rocha, L. E., Liljeros, F. y Holme, P. Exploiting temporal network structures of human interaction to effectively immunize populations. *PloS one* **7**, e36439 (2012).
184. Gelardi, V., Le Bail, D., Barrat, A. y Claidiere, N. From temporal network data to the dynamics of social relationships. *Proceedings of the Royal Society B* **288**, 20211164 (2021).
185. Guo, H *et al.* The dynamics of cooperation in asymmetric sub-populations. *New Journal of Physics* **22**, 083015 (2020).
186. Guo, H *et al.* Evolutionary games on simplicial complexes. *Chaos, Solitons & Fractals* **150**, 111103 (2021).
187. Smith, J. M. *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge university press, 1982).
188. Peters, H. *Game theory: A Multi-leveled approach* (Springer, 2015).
189. Mickens, R. E. *Nonstandard finite difference models of differential equations* (world scientific, 1994).
190. Anguelov, R. y Lubuma, J. M.-S. Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* **17**, 518-543 (2001).

Apéndice A. Las variables aleatorias G_- y G_+

En este apéndice se mostrará que los valores de los porcentajes de entradas positivas en la matriz de interacción de una red (ver la definición 12) determinan las cantidades de interacciones cooperativas, competitivas y mixtas de la red (ver la definición 31). Dicha relación está descrita por dos variables aleatorias, G_- y G_+ , que poseen una relación de simetría entre ellas (ver el teorema 1).

Definición 40 *Dada una red arbitraria G con un total de a aristas y tal que su matriz de interacción contiene un porcentaje r de entradas positivas, $0 < r < 100$ (los porcentajes 0 y 100 no se incluyen porque estos generan cantidades evidentes de interacciones cooperativas, competitivas y mixtas en la red), definimos las variables aleatorias G_- y G_+ como aquellas que describen la cantidad total de aristas negativas-negativas (interacciones competitivas) y positivas-positivas (interacciones cooperativas) existentes en la red, respectivamente.*

A continuación se determinarán las funciones de densidad de G_- y G_+ . Primero se estudiará la variable aleatoria G_- .

Sea M el total de configuraciones de la matriz de interacción con un porcentaje r de entradas positivas y exactamente m aristas negativas-negativas y sea T el total de configuraciones de la matriz de interacción con un porcentaje r de entradas positivas, entonces la función de densidad de la variable aleatoria $G_-(a, r)$ está dada por

$$P(G_- = m) = \frac{M}{T}.$$

En seguida, se procederá a describir M y T en términos de a y r .

La matriz de interacción de una red con a aristas posee $2a$ entradas no nulas, las cuales pueden ser positivas (+1) o negativas (-1). De esta manera, si hay un porcentaje r de entradas positivas en la matriz de interacción, entonces el total de entradas positivas estará dado por $2a(r/100)$, lo cual implica que

$$T = \binom{2a}{2a(r/100)}.$$

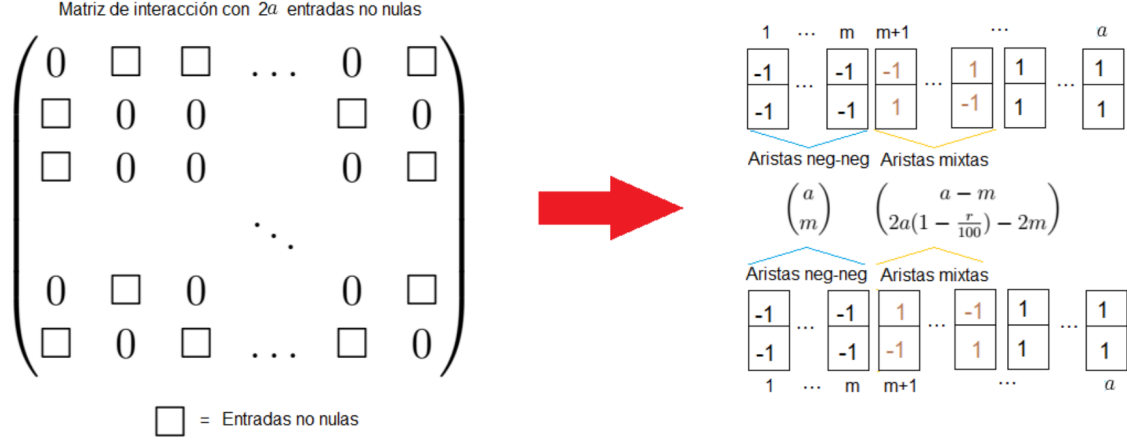


Figura 4.8: Visualización de dos configuraciones que poseen exactamente m aristas negativas-negativas (interacciones competitivas) sobre una red con a aristas, en la que se ha fijado un porcentaje r de valores positivos en las entradas no nulas de la matriz de interacción de la red.

Es importante notar que T está bien definida sólo cuando $2a(r/100) \in \mathbb{N}$, por ejemplo, T estará bien definida para todas las redes tales que a es múltiplo de 100 (i.e. $a \equiv_{100} 0$).

Por otro lado, se tiene que el total de entradas negativas en la matriz de interacción es $2a(1 - \frac{r}{100})$, para obtener todas las configuraciones de la matriz de interacción que tienen exactamente m aristas negativas-negativas, podemos recurrir a generar arreglos como los que se muestran en la figura 4.8, una vez especificadas las m aristas que serán negativas, el resto de entradas negativas de la matriz de interacción formarán aristas mixtas, en total la red tendrá $2a(1 - \frac{r}{100}) - 2m$ aristas mixtas. Es importante notar que una misma arista mixta puede obtenerse de dos maneras, la primera siendo el extremo inicial de la arista y la segunda siendo el extremo final (esta es la razón del factor que contiene una potencia de 2 en la siguiente expresión), en consecuencia

$$M = \binom{a}{m} \binom{a-m}{2a(1-\frac{r}{100})-2m} 2^{2a(1-\frac{r}{100})-2m}.$$

Por todo lo hecho anteriormente, se concluye que la función de densidad de la variable aleatoria $G_-(a, r)$ es

$$P(G_- = m) = \frac{\binom{a}{m} \binom{a-m}{2a(1-\frac{r}{100})-2m} 2^{2a(1-\frac{r}{100})-2m}}{\binom{2a}{2a(r/100)}}. \quad (4.1)$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho para G_- se puede comprobar que la función de

densidad de la variable aleatoria $G_+(a, r)$ es

$$P(G_+ = m) = \frac{\binom{a}{m} \binom{a-m}{2a(r/100) - 2m} 2^{2a(r/100) - 2m}}{\binom{2a}{2a(r/100)}}. \quad (4.2)$$

Es importante mencionar, que al igual que en el caso G_- , la anterior función de densidad está bien definida sólo cuando $2a(r/100) \in \mathbb{N}$.

Teorema 1 (Simetría entre G_- y G_+) *Dada una red arbitraria con un total de a aristas, si r es un número tal que $0 < r < 100$ y $2a(r/100) \in \mathbb{N}$, entonces*

$$G_-(a, r) = G_+(a, 100 - r).$$

Dem. Como las variables aleatorias son discretas bastará ver que sus funciones de densidad coinciden. De la ecuación 4.2 se tiene que la función de densidad de $G_+(a, 100 - r)$ es

$$P(G_+ = m) = \frac{\binom{a}{m} \binom{a-m}{2a(\frac{100-r}{100}) - 2m} 2^{2a(\frac{100-r}{100}) - 2m}}{\binom{2a}{2a(\frac{100-r}{100})}}.$$

Los numeradores de la expresión anterior y el dado por la ecuación 4.1 coinciden, en consecuencia la demostración estará concluida si se demuestra que los denominadores también coinciden,

$$\begin{aligned} \binom{2a}{2a(\frac{100-r}{100})} &= \frac{2a!}{(2a - 2a[1 - \frac{r}{100}])!(2a[1 - \frac{r}{100}])!} \\ &= \frac{2a!}{(2a[\frac{r}{100}])!(2a - 2a[\frac{r}{100}])!} \\ &= \binom{2a}{2a(\frac{r}{100})}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $G_-(a, r) = G_+(a, 100 - r)$. ■

En particular, el teorema anterior permite afirmar que para cualquier red con a aristas, se cumple que $G_-(a, 50) = G_+(a, 50)$.

Por otra parte, si $2a(r/100) \in \mathbb{N}$, entonces al graficar las esperanzas de las variables aleatorias G_- y G_+ , se obtendrá por resultado el patrón simétrico mostrado en la figura 3.1. De esta manera, el teorema 1 demuestra que la diversidad de interacciones cooperativas, competitivas y mixtas de una red está determinada por el porcentaje de entradas positivas en su matriz de interacción.

Apéndice B. Resultados analíticos del modelo de conflicto de N actores

4.3. Preliminares

Nota 15 Las funciones hiperbólicas $\tanh(x)$ y $\operatorname{sech}(x)$ se definen como

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Usando las definiciones anteriores se puede verificar que

$$\tanh'(x) = \operatorname{sech}^2(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sech}'(x) = -\tanh(x)\operatorname{sech}(x).$$

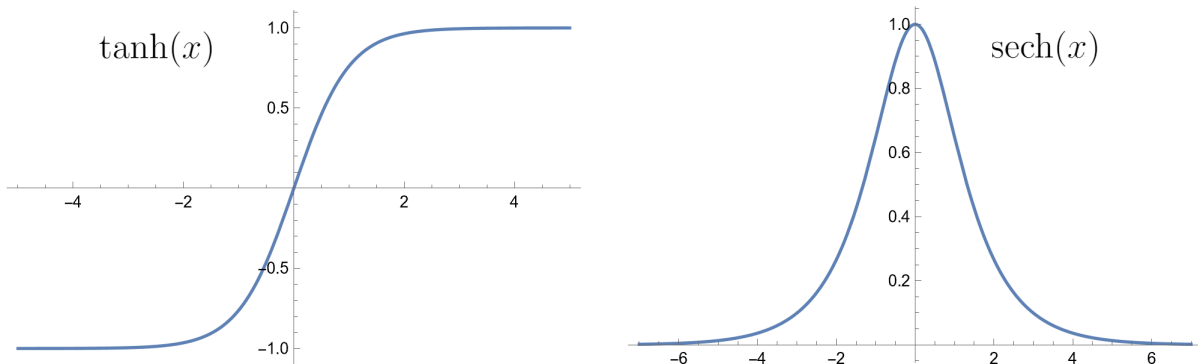


Figura 4.9: Ilustraciones de las gráficas de las funciones $\tanh(x)$ y $\operatorname{sech}(x)$ en el intervalo $(-7,7)$. La función $\tanh(x)$ es una función impar tal que $-1 < \tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $\operatorname{sech}(x)$ es una función par tal que $0 < \operatorname{sech}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definición 41 Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_N) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= F_N(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $F_1, \dots, F_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que un vector $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ es un **punto de equilibrio** si se cumple que

$$F_i(y_1, \dots, y_N) = 0, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Nota 16 El sistema de ecuaciones diferenciales (4.3) es **autónomo** porque la variable independiente (t) no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema. Todos los sistemas de ecuaciones diferenciales abordados en esta tesis son sistemas autónomos.

Nota 17 La matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones diferenciales (4.3) en un punto de equilibrio $\hat{z} = (z_1, \dots, z_N)$ está dada por

$$J(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(z_1, \dots, z_N) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(z_1, \dots, z_N) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(z_1, \dots, z_N) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(z_1, \dots, z_N) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(z_1, \dots, z_N) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N}(z_1, \dots, z_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1}(z_1, \dots, z_N) & \frac{\partial F_N}{\partial x_2}(z_1, \dots, z_N) & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(z_1, \dots, z_N) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Teorema 2 (Primera Aproximación o Principio de linealización) Si \hat{z} es un punto de equilibrio del sistema (4.3) tal que su matriz Jacobiana, $J(\hat{z})$, tiene todos sus eigenvalores con parte real distinta de cero, entonces

1. \hat{z} es asintóticamente estable si y sólo si todos los eigenvalores de $J(\hat{z})$ poseen parte real negativa.
2. \hat{z} es inestable si y sólo si $J(\hat{z})$ posee un eigenvalor con parte real positiva.

Las siguientes notas serán de gran utilidad en el desarrollo de este apéndice.

Nota 18 En la figura 4.10 se ilustran las tres soluciones de la ecuación

$$y_1 = [5(N - 1) \tanh(y_1)]/0.9,$$

las cuales son precisamente las intersecciones de las gráficas de las funciones $h(x) = x$ y $g_N(x) = [5(N - 1) \tanh(x)]/0.9$. Como la función $\tanh(x)$ es impar, entonces las soluciones no nulas son simétricas respecto al valor 0. Haciendo aproximaciones numéricas se puede verificar que las soluciones positivas de la ecuación anterior para $N = 2$ y $N = 3$ son $w_1 \sim 5.5553$ y $w_1 \sim 11.1111$, respectivamente.

Nota 19 En la figura 4.11 se ilustran las tres soluciones de la ecuación

$$y_1 = [5 \tanh(y_1) + (5 - c) \tanh(w_1)]/0.9, \quad (4.5)$$

donde la constante c es tal que $c \in [2, 8]$ y $w_1 \in \mathbb{R}^+$ es la solución positiva de la ecuación de la nota 18 para $N = 2$ (i. e. $w_1 \sim 5.5553$).

Nota 20 En la figura 4.12 se muestran las tres soluciones de la ecuación (4.5) con las mismas gráficas de la figura 4.11 y además se ilustran las intersecciones de esas gráficas con las rectas $x = \omega$ y $x = -\omega$ donde $\omega \in \mathbb{R}^+$ y $-\omega$ son las dos soluciones de la ecuación

$$0 = -0.9 + 5 \operatorname{sech}^2(x). \quad (4.6)$$

Nótese que esta ecuación tiene dos soluciones por la paridad de la función $\operatorname{sech}^2(x)$ (ver la nota 15). Además, haciendo aproximaciones numéricas se puede verificar que $\omega \sim 1.502$.

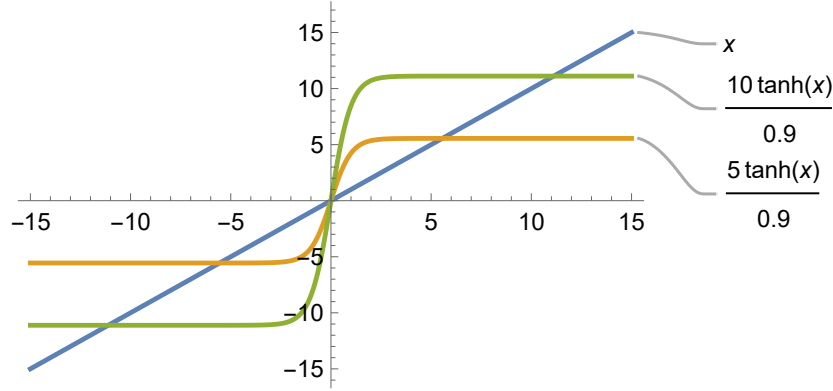


Figura 4.10: Las funciones $h(x) = x$ y $g_N(x) = [5(N-1) \tanh(x)]/0.9$ tienen tres intersecciones. En esta imagen se muestran los casos para $N = 2$ (curva amarilla) y $N = 3$ (curva verde). Nótese que la función $g_N(x)$ es tal que $g_N(x) \in \left(-\frac{5(N-1)}{0.9}, \frac{5(N-1)}{0.9}\right) \forall x \in \mathbb{R}$.

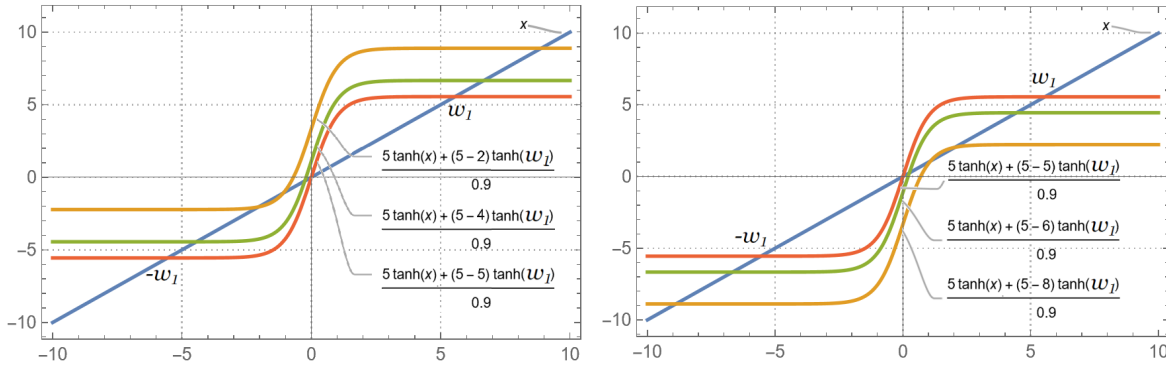


Figura 4.11: Las funciones $h(x) = x$ y $g_c(x) = [5 \tanh(x) + (5 - c) \tanh(w_1)]/0.9$ tienen tres intersecciones para cada $c \in [2, 8]$. En la imagen izquierda se muestran las intersecciones para $c \leq 5$, mientras que, en la imagen derecha se muestran las intersecciones para $c \geq 5$.

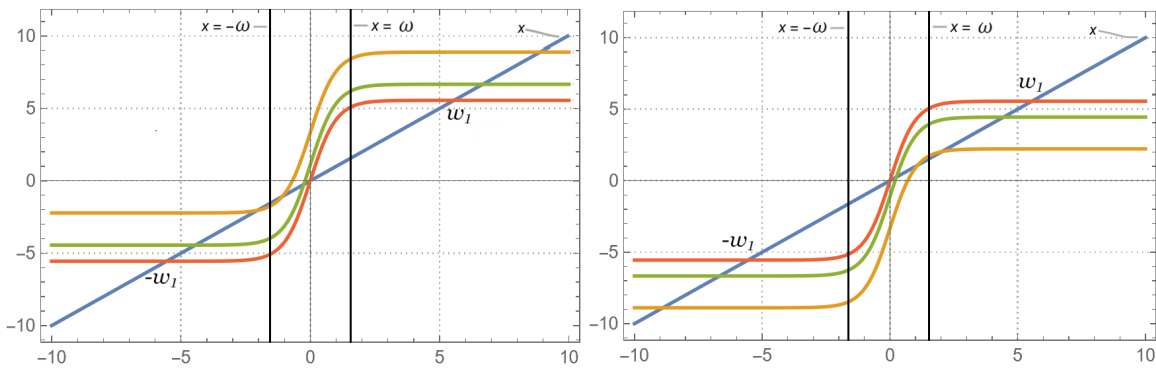


Figura 4.12: Intersecciones de las gráficas de las funciones $h(x) = x$ y $g_c(x)$ de la figura 4.11 con las rectas $x = \omega$ y $x = -\omega$, donde $c \in [2, 8]$ y $\omega \in \mathbb{R}^+$ es solución de la ecuación (4.6). En la imagen izquierda se muestran las intersecciones para $c \leq 5$, mientras que, en la imagen derecha se muestran las intersecciones para $c \geq 5$.

4.4. Retroalimentación positiva

4.4.1. Puntos de equilibrio

Proposición 1 *Si el modelo de conflicto de N actores es considerado con retroalimentación positiva sobre una red completa de orden N , entonces existen 3 puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales subyacente, a saber*

$$\hat{z} = \hat{0}, \quad \hat{w} = (w_1, \dots, w_1) \quad y \quad -\hat{w} = (-w_1, \dots, -w_1),$$

donde $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w_1 = [5(N-1) \tanh(w_1)]/0.9$.

Dem. Cuando el modelo de conflicto de N actores es considerado con retroalimentación positiva, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales subyacente está dado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = -0.9x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N 5 \tanh(x_j), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N. \quad (4.7)$$

Sea $\hat{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$0 = -0.9y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N 5 \tanh(y_j), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N. \quad (4.8)$$

En particular, para $i = 1$ e $i = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= -0.9y_1 + \sum_{j=2}^N 5 \tanh(y_j) \\ 0 &= -0.9y_2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N 5 \tanh(y_j), \end{aligned}$$

si restamos a la primera expresión la segunda obtenemos

$$0 = -0.9y_1 + 0.9y_2 + 5 \tanh(y_2) - 5 \tanh(y_1),$$

lo cual implica que,

$$0.9y_1 + 5 \tanh(y_1) = 0.9y_2 + 5 \tanh(y_2). \quad (4.9)$$

Procediendo de manera análoga, si consideramos $i = 2$, $i = 3$ y luego restamos, se obtiene que

$$0.9y_2 + 5 \tanh(y_2) = 0.9y_3 + 5 \tanh(y_3). \quad (4.10)$$

De esta manera, de (4.9) y (4.10) se sigue que

$$0.9y_1 + 5 \tanh(y_1) = 0.9y_2 + 5 \tanh(y_2) = 0.9y_3 + 5 \tanh(y_3).$$

Repitiendo el proceso anterior N veces, se deduce que

$$0.9y_i + 5 \tanh(y_i) = 0.9y_j + 5 \tanh(y_j) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq N. \quad (4.11)$$

De la ecuación (4.11) se sigue que si evaluamos las entradas de \hat{y} en la función de una variable real $f(x) = 0.9x + 5 \tanh(x)$, entonces se obtiene el mismo valor.

Por otro lado, se tiene que la función $f(x) = 0.9x + 5 \tanh(x)$ es inyectiva (función uno a uno), pues su derivada siempre es positiva,

$$f'(x) = 0.9 + 5 \operatorname{sech}^2(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de esta manera, se infiere que todas las entradas de \hat{y} son iguales, es decir

$$y_1 = y_2 = \dots = y_N.$$

Como todas las entradas de \hat{y} son iguales, entonces sustituyendo en la ecuación (4.8) se deduce que

$$0.9y_1 = 5(N-1) \tanh(y_1), \quad \text{es decir } y_1 = [5(N-1) \tanh(y_1)]/0.9,$$

de lo cual se sigue el resultado que quería demostrarse (ver la nota 18). ■

4.4.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Proposición 2 *Si el modelo de conflicto de N actores es considerado con retroalimentación positiva sobre una red completa de orden N , entonces los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales subyacente (4.7) son tales que*

$$\hat{0} \text{ es inestable y } \hat{w}, -\hat{w} \text{ son asintóticamente estables,}$$

donde $\hat{w} = (w_1, \dots, w_1)$ y $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w_1 = [5(N-1) \tanh(w_1)]/0.9$.

Dem. Cuando el modelo de conflicto de N actores es considerado con retroalimentación positiva, entonces la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones diferenciales subyacente en el punto de equilibrio \hat{w} está dada por:

$$J(\hat{w}) = \begin{pmatrix} -0.9 & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & -0.9 & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & -0.9 & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & -0.9 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

A continuación, se calcularán los eigenvalores de $J(\hat{w})$, lo cual implica obtener el determinante, Δ , de la matriz 4.13

$$J(\hat{w}) - \lambda I = \begin{pmatrix} -0.9 - \lambda & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & -0.9 - \lambda & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & -0.9 - \lambda & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & \dots & 5 \operatorname{sech}^2(w_1) & -0.9 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Sean $a = -0.9 - \lambda$ y $b = 5\text{sech}^2(w_1)$. Restando a todos los renglones el primero y después sumando a la primera columna todas las demás, se obtiene que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & & & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b-a & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ b-a & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(N-1)b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}.$$

Como el determinante de una matriz triangular superior es el producto de las entradas de la diagonal, entonces

$$\Delta = [a + (N - 1)b](a - b)^{N-1}.$$

Sustituyendo los valores de a y b ,

$$\Delta = [-0.9 - \lambda + (N - 1)5\text{sech}^2(w_1)](-0.9 - \lambda - 5\text{sech}^2(w_1))^{N-1},$$

de este modo, los eigenvalores del sistema linealizado son

$$\lambda_1 = -0.9 + (N - 1)5\text{sech}^2(w_1) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0.9 - 5\text{sech}^2(w_1). \quad (4.14)$$

Nótese que $\lambda_2 < 0$ (sus dos términos son negativos). Por otro lado, tenemos que

$$\lambda_1 < 0 \iff (N - 1)5\text{sech}^2(w_1) < 0.9.$$

A continuación demostraremos que $\lambda_1 < 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (N - 1)5\text{sech}^2(w_1) < 0.9 &\iff [(N - 1)5/0.9] \text{sech}^2(w_1) < 1 \\ \text{usando la definición de } w_1 &\iff \frac{w_1}{\tanh(w_1)} \text{sech}^2(w_1) < 1 \\ \text{usando la nota 15} &\iff w_1 \left(\frac{e^{w_1} + e^{-w_1}}{e^{w_1} - e^{-w_1}} \right) \left(\frac{2}{e^{w_1} + e^{-w_1}} \right)^2 < 1 \\ &\iff \frac{4w_1}{(e^{w_1} - e^{-w_1})(e^{w_1} + e^{-w_1})} < 1 \\ &\iff \frac{4w_1}{(e^{2w_1} - e^{-2w_1})} < 1 \\ &\iff 4w_1 < e^{2w_1} - e^{-2w_1} \\ \text{tomando } f(x) = e^x - e^{-x} - 2x &\iff 0 < f(2w_1). \end{aligned}$$

Debido a que

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad f^{(2)}(x) = e^x - e^{-x} \quad \text{y} \quad f^{(3)}(x) = e^x + e^{-x},$$

se tiene que $f^{(2)}(x)$ es creciente en \mathbb{R} (porque $f^{(3)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$), luego como $0 = f^{(2)}(0)$, se deduce que $0 < f^{(2)}(x)$, $\forall x > 0$, por consiguiente,

$$f'(x) \text{ es una función creciente en el intervalo } (0, \infty). \quad (4.15)$$

Por otro lado, por el principio de la segunda derivada tenemos que 0 es un mínimo local de $f'(x)$, pero $0 = f'(0)$, entonces por (4.15) se infiere que $0 < f'(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$. Observemos que $f'(x)$ es una función par, por lo tanto $0 < f'(x)$, $\forall x \in (-\infty, 0)$. De lo anterior y del hecho de que $f(x)$ es una función continua, se deduce que $f(x)$ es una función creciente en \mathbb{R} . De esta manera, puesto que $0 = f(0)$ y $w_1 \in (0, \infty)$ se tiene que $0 < f(2w_1)$, de lo cual se sigue que

$$\lambda_1 < 0. \quad (4.16)$$

Dado que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, por el teorema 2 se concluye que \hat{w} es asintóticamente estable. Nótese que como la función $\text{sech}(x)$ es una función par (ver nota 15), entonces $J(-\hat{w}) = J(\hat{w}) =$, por lo tanto, $-\hat{w}$ es también asintóticamente estable.

Finalmente, se analizará el caso del punto crítico $\hat{0}$. De (4.12) y de que $\text{sech}(0) = 1$, se tiene que

$$J(\hat{0}) = \begin{pmatrix} -0.9 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & -0.9 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & -0.9 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & -0.9 \end{pmatrix}$$

Procediendo de manera análoga al caso del punto de equilibrio \hat{w} se obtiene que los eigenvalores del sistema linealizado en $\hat{0}$ son

$$\lambda_1 = -0.9 + 5(N - 1) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0.9 - 5, \quad (4.17)$$

pero $N \geq 2$ (dos es el mínimo número de actores que se considera en el modelo de conflicto de N actores), por consiguiente $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, por lo tanto el teorema 2 permite afirmar que $\hat{0}$ es inestable. ■

4.5. Retroalimentación negativa

4.5.1. Puntos de equilibrio

Proposición 3 *El sistema de ecuaciones diferenciales subyacente al modelo de conflicto de 2 actores con retroalimentación negativa,*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -0.9x_1 - 5 \tanh(x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -0.9x_2 - 5 \tanh(x_1), \end{aligned} \quad (4.18)$$

posee 3 puntos de equilibrio, a saber

$$\hat{z} = \hat{0}, \quad \hat{w} = (w_1, -w_1) \quad \text{y} \quad -\hat{w} = (-w_1, w_1),$$

donde $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w_1 = 5 \tanh(w_1)/0.9$.

Dem. Sea $\hat{y} = (y_1, y_2)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= -0.9y_1 - 5 \tanh(y_2) \\ 0 &= -0.9y_2 - 5 \tanh(y_1), \end{aligned} \quad (4.19)$$

si sumamos a la primera expresión la segunda obtenemos

$$0 = -0.9y_1 - 0.9y_2 - 5 \tanh(y_2) - 5 \tanh(y_1),$$

lo cual implica que,

$$0.9y_1 + 5 \tanh(y_1) = -0.9y_2 - 5 \tanh(y_2). \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.20) se sigue que si evaluamos las entradas de \hat{y} en la función de una variable real $f(x) = 0.9x + 5 \tanh(x)$, entonces se tiene que

$$f(y_1) = -f(y_2).$$

Observemos que $f(x)$ es una función impar, por consiguiente $f(y_1) = f(-y_2)$. Nótese que $f'(x) = 0.9 + 5 \operatorname{sech}^2(x) > 0$, por lo cual $f(x)$ es una función creciente en \mathbb{R} (en particular $f(x)$ es una función inyectiva en \mathbb{R}), por lo tanto

$$y_1 = -y_2. \quad (4.21)$$

Por otro lado, de la primera ecuación de (4.19) se sabe que y_1 satisface $y_1 = -5 \tanh(y_2)/0.9$, de este modo, al sustituir (4.21) y usar que la función \tanh es impar, se deduce que

$$y_1 = 5 \tanh(y_1)/0.9.$$

de esto último, la nota 18 y (4.21) se sigue el resultado que quería demostrarse. ■

4.5.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Proposición 4 *Los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales subyacente al modelo de conflicto de 2 actores con retroalimentación negativa son tales que*

$\hat{0}$ es inestable y $\hat{w}, -\hat{w}$ son asintóticamente estables,

donde $\hat{w} = (w_1, -w_1)$ y $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w_1 = 5 \tanh(w_1)/0.9$.

Dem. Las matrices Jacobianas del sistema de ecuaciones (4.18) en los puntos de equilibrio $-\hat{w}$, \hat{w} y $\hat{0}$ son

$$J(-\hat{w}) = J(\hat{w}) = \begin{pmatrix} -0.9 & -5 \operatorname{sech}^2(w_1) \\ -5 \operatorname{sech}^2(w_1) & -0.9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J(\hat{0}) = \begin{pmatrix} -0.9 & -5 \\ -5 & -0.9 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Nótese los determinantes de $J(\hat{w}) - \lambda I$ y $J(\hat{\theta}) - \lambda I$ son iguales a los respectivos determinantes calculados en la proposición 2 para $N = 2$. De esta manera, por las cuentas realizadas en la proposición 2 se deduce que $\hat{\theta}$ es inestable y $\hat{w}, -\hat{w}$ son asintóticamente estables, además, los eigenvalores del sistema linealizado en \hat{w} (y en $-\hat{w}$) están dados por

$$\lambda_1 = -0.9 + 5\text{sech}^2(w_1) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0.9 - 5\text{sech}^2(w_1), \quad (4.22)$$

mientras que, los eigenvalores del sistema linealizado en $\hat{\theta}$ son

$$\lambda_1 = -0.9 + 5 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0.9 - 5. \quad (4.23)$$

■

Apéndice C. Resultados analíticos del modelo de dinámica de opinión

El modelo de dinámica de opinión con los parámetros usados en este trabajo de investigación está dado por

$$\begin{aligned} dx_0(t)/dt &= -0.9x_0(t) - 5 \tanh(x_2(t)) \\ dx_1(t)/dt &= -0.9x_1(t) + 5 \tanh(x_1(t)) + 5 \tanh(x_0(t)) + c_{12} \tanh(x_2(t)) \\ dx_2(t)/dt &= -0.9x_2(t) - 5 \tanh(x_0(t)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde la constante c_{12} es tal que $c_{12} \in [2, 8]$.

En las demostraciones de este apéndice se usará de manera relevante que el subsistema del sistema (4.24), formado por $dx_0(t)/dt$ y $dx_2(t)/dt$ es precisamente el sistema (4.18).

4.6. Puntos de equilibrio

Teorema 3 *El sistema (4.24) posee 9 puntos de equilibrio, los cuales tienen la forma*

$$(0, r, 0), \quad (w_1, s, -w_1) \quad y \quad (-w_1, q, w_1),$$

donde $w_1 \in \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación $w_1 = 5 \tanh(w_1)/0.9$, $r \in \{0, w_1, -w_1\}$ y s, q toman por valores las tres soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} s &= [5 \tanh(s) + (5 - c_{12}) \tanh(w_1)]/0.9 \quad y \\ q &= [5 \tanh(q) + (c_{12} - 5) \tanh(w_1)]/0.9, \end{aligned}$$

respectivamente.

Dem. Sea $\hat{y} = (y_0, y_1, y_2)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= -0.9y_0 - 5 \tanh(y_2) \\ 0 &= -0.9y_1 + 5 \tanh(y_1) + 5 \tanh(y_0) + c_{12} \tanh(y_2) \\ 0 &= -0.9y_2 - 5 \tanh(y_0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

En particular, se tiene que (y_0, y_2) es un punto de equilibrio del sistema (4.18), por lo cual la proposición 3 nos permite afirmar que $(y_0, y_2) \in \{(0, 0), (w_1, -w_1), (-w_1, w_1)\}$.

Caso 1. Si $(y_0, y_2) = (0, 0)$.

En este caso, de (4.25) se sigue que $y_1 = 5 \tanh(y_1)/0.9$. De esta manera, usando la nota 18 se deduce que los puntos de la forma $(0, w, 0)$ con $w \in \{0, w_1, -w_1\}$, son puntos de equilibrio del sistema (4.24).

Caso 2. Si $(y_0, y_2) = (w_1, -w_1)$.

En este caso, de (4.25) se sigue que $y_1 = [5 \tanh(y_1) + (5 - c_{12}) \tanh(w_1)]/0.9$. De esta manera, por la nota 19 existen exactamente tres valores de y_1 que satisfacen esta condición.

Caso 3. Si $(y_0, y_2) = (-w_1, w_1)$.

En este caso, de (4.25) se sigue que $y_1 = [5 \tanh(y_1) + (c_{12} - 5) \tanh(w_1)]/0.9$. Nótese que para cada $c_{12} \in [2, 8]$ existe $c \in [2, 8]$ tal que $c_{12} - 5 = 5 - c$, a saber $c = 10 - c_{12}$, lo cual permite reducir este caso al caso 2. De este modo, por la nota 19 existen exactamente tres valores de y_1 que satisfacen la ecuación deseada. ■

4.7. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Teorema 4 *Los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales (4.24), que fueron determinados en la proposición 3, son tales que*

1. los de la forma $(0, r, 0)$ son inestables,
2. dos de la forma $(w_1, s, -w_1)$ son estables y uno es inestable,
3. dos de la forma $(-w_1, q, w_1)$ son estables y uno es inestable.

Dem. En general la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones (4.24) en un punto (x_0, x_1, x_2) está dada por

$$J(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -0.9 & 0 & -5\operatorname{sech}^2(x_2) \\ 5\operatorname{sech}^2(x_0) & -0.9 + \operatorname{sech}^2(x_1) & c_{12}5\operatorname{sech}^2(x_2) \\ -5\operatorname{sech}^2(x_0) & 0 & -0.9 \end{pmatrix}$$

A continuación, se obtendrán los eigenvalores de $J(x_0, x_1, x_2)$. Desarrollando por cofactores sobre el primer renglón de la matriz $J(x_0, x_1, x_2) - \lambda I$ obtenemos que el polinomio característico de $J(x_0, x_1, x_2)$ es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-0.9 - \lambda)[(-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) - \lambda)(-0.9 - \lambda)] - 5\operatorname{sech}^2(x_2)[5\operatorname{sech}^2(x_0)(-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) - \lambda)] \\ &= (-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) - \lambda)[(-0.9 - \lambda)^2 - 5^2\operatorname{sech}^2(x_2)\operatorname{sech}^2(x_0)] \\ &= (-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) - \lambda)[(-0.9 - \lambda) + 5\operatorname{sech}^2(x_1)][(-0.9 - \lambda) - 5\operatorname{sech}(x_2)\operatorname{sech}(x_0)], \end{aligned}$$

por consiguiente los eigenvalores de $J(x_0, x_1, x_2)$ son

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) \\ \lambda_1 &= -0.9 + 5\operatorname{sech}(x_2)\operatorname{sech}(x_0) \\ \lambda_2 &= -0.9 - 5\operatorname{sech}(x_2)\operatorname{sech}(x_0). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Caso 1. Puntos de equilibrio de la forma $(0, r, 0)$.

De (4.26) se tiene que los puntos de equilibrio de la forma $(x_0, x_1, x_2) = (0, r, 0)$ son tales que $\lambda_1 = -0.9 + 5 > 0$. Como en este caso los tres eigenvalores son no nulos (si $r \in \{w_1, -w_1\}$ se puede ver que $\lambda_0 \neq 0$ usando la definición de w_1 y la identidad $\text{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$), entonces por el teorema 2 se deduce que estos puntos de equilibrio son inestables.

Nótese que siempre se cumple que

$$\lambda_2 < 0 \quad (4.27)$$

porque sus dos términos siempre son negativos. Por otro lado, si $x_0, x_2 \in \{w_1, -w_1\}$, por la paridad de la función $\text{sech}(x)$ se sigue que $\lambda_1 = -0.9 + 5\text{sech}^2(w_1)$, luego por (4.14) y (4.16), tomando $N = 2$, se obtiene que

$$\lambda_1 < 0. \quad (4.28)$$

De esta manera, por (4.27) y (4.28) se deduce la estabilidad de los puntos de equilibrio que no son de la forma $(0, r, 0)$ depende completamente del signo del eigenvalor λ_0 . Para analizar el comportamiento de λ_0 es importante observar que si $\omega \in \mathbb{R}^+$ es solución de la ecuación $0 = -0.9 + \text{sech}^2(x)$ se cumple que,

$$\begin{aligned} \text{si } m \text{ es tal que } |m| > \omega, \text{ entonces } -0.9 + 5\text{sech}^2(m) < 0 \quad \text{y} \\ \text{si } m \text{ es tal que } |m| < \omega, \text{ entonces } -0.9 + 5\text{sech}^2(m) > 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

esto se debe a que la función $\text{sech}^2(x)$ es par y con comportamiento decreciente en el intervalo $(0, \infty)$, ver la nota 15.

Caso 2. Puntos de equilibrio de la forma $(w_1, s, -w_1)$.

En este caso, cuando $c_{12} < 5$ se tiene que s toma dos valores negativos y uno positivo (ver la figura 4.11). Denotemos por s_1, s_2 a los valores negativos de tal manera que $s_1 < s_2$ y denotemos por s_3 al valor positivo. Como se tiene que $|s_1|, s_3 > \omega$ y $|s_2| < \omega$ (ver figura 4.12), entonces de (4.29) se sigue que los puntos de equilibrio $(w_1, s_1, -w_1)$ y $(w_1, s_3, -w_1)$ son estables y $(w_1, s_2, -w_1)$ es inestable.

Por otra parte, cuando $c_{12} > 5$ se tiene que s toma dos valores positivos y uno negativo (ver la figura 4.11). Denotemos por s_4 al valor negativo y por s_5, s_6 a los valores positivos de tal manera que $s_5 < s_6$. Como se tiene que $|s_4|, s_6 > \omega$ y $s_5 < \omega$ (ver figura 4.12), entonces de (4.29) se sigue que $(w_1, s_4, -w_1)$ y $(w_1, s_6, -w_1)$ son puntos de equilibrio estables y $(w_1, s_5, -w_1)$ es inestable.

Caso 3. Puntos de equilibrio de la forma $(-w_1, q, w_1)$.

En este caso, por hipótesis se tiene que q y s son soluciones de las ecuaciones

$$y_1 = [5 \tanh(y_1) + (c_{12} - 5) \tanh(w_1)]/0.9 \quad \text{y} \quad y_1 = [5 \tanh(y_1) + (5 - c_{12}) \tanh(w_1)]/0.9,$$

respectivamente. Nótese que para cada $c_{12} \in [2, 8]$ existe $c \in [2, 8]$ tal que $c_{12} - 5 = 5 - c$, a saber $c = 10 - c_{12}$, lo cual permite reducir este caso al caso 2. Por lo tanto, se concluye que dos puntos de equilibrio de la forma $(-w_1, q, w_1)$ son estables y uno es inestable. ■

4.8. Discretización del modelo de dinámica de opinión

Para discretizar el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de dinámica de opinión usaremos un esquema no estándar de diferencias finitas. Los esquemas no estándar de diferencias finitas fueron desarrollados por Mickens ([189]) y consisten en métodos numéricos para aproximar un sistema de ecuaciones diferenciales a través de sistemas de ecuaciones en diferencias (versiones discretas del sistema) que son consistentes con el sistema diferencial original, especialmente con las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

Teorema 5 Sea $\phi(h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(h) = h + \mathcal{O}(h^2) \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ y } 0 < \phi(h) < 1, \quad h > 0. \quad (4.30)$$

Supongamos que el sistema (4.3) tiene un número finito de puntos de equilibrio y que para cada $\lambda \in \Omega$ se satisface que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde $\Omega = \bigcup_{\hat{y} \in \Gamma} \sigma(J(\hat{y}))$ con Γ siendo el conjunto de todos los puntos de equilibrio del sistema (4.3) y $\sigma(J(\hat{y}))$ el conjunto de los eigenvalores del Jacobiano del sistema (4.3) en el punto de equilibrio \hat{y} . Sea $q = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Omega\}$, si $J(\hat{y})$ es una matriz diagonalizable para cada $\hat{y} \in \Gamma$, entonces los siguientes esquemas de diferencias finitas

1. esquema no estándar explícito de Euler $\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\phi(hq)/q} = F(x(t_k)),$

2. esquema no estándar de Runge-Kutta de segundo orden $\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\phi(hq)/q} = \frac{F(x(t_k)) + F(x(t_k) + (\phi(hq)/q)F(x(t_k)))}{2},$

donde $x(t_k) = \begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ \vdots \\ x_N(t_k) \end{pmatrix}$ y $F(x(t_{k+1})) = \begin{pmatrix} F_1(x(t_k)) \\ F_2(x(t_k)) \\ \vdots \\ F_N(x(t_k)) \end{pmatrix}$, son estables elementales.

Dem. La demostración de este teorema está en la página 526 de la referencia [190]. Es importante mencionar que en [190] se pide que todos los eigenvalores del Jacobiano $J(\hat{y})$ sean simples para cada punto de equilibrio \hat{y} ; sin embargo, se menciona que dicha condición puede ser remplazada por la condición de que $J(\hat{y})$ sea diagonalizable para cada punto de equilibrio \hat{y} (ver el renglón siguiente a (3.5) en la página 523 de [190]).

■

Nota 21 La condición (4.30) es satisfecha por la función $\phi(h) = 1 - e^{-h}$ (ver *remark 14* en la página 527 de [190]).

Teorema 6 El modelo de dinámica de opinión (4.24) posee un esquema estable elemental no estándar explícito de Euler de la forma

$$\begin{aligned} x_0(n+1) &= cx_0(n) - 5k \tanh(x_2(n)) \\ x_1(n+1) &= cx_1(n) + 5k \tanh(x_1(n)) + 5k \tanh(x_0(n)) + c_{12}k \tanh(x_2(n)) \\ x_2(n+1) &= cx_2(n) - 5k \tanh(x_0(n)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde c, k son constantes positivas, $c_{12} \in [2, 8]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Dem. Se verificará que el sistema (4.24) cumple las hipótesis del teorema 5.

Por el teorema 3 el sistema (4.24) tiene un número finito de puntos de equilibrio. Para cada $\lambda \in \Omega$ (donde Ω es como en el teorema 5) se tiene que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, lo anterior fue verificado en los análisis realizados en los casos 1, 2 y 3 del teorema 4.

A continuación se demostrará que $J(\hat{y})$ es diagonalizable para cada punto de equilibrio \hat{y} . En general la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones (4.24) en un punto (x_0, x_1, x_2) está dada por

$$J(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -0.9 & 0 & -5\operatorname{sech}^2(x_2) \\ 5\operatorname{sech}^2(x_0) & -0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1) & c_{12}\operatorname{sech}^2(x_2) \\ -5\operatorname{sech}^2(x_0) & 0 & -0.9 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que $J(x_0, x_1, x_2)$ se transforma en una matriz diagonal realizando las siguientes operaciones elementales de matrices en ese orden: 1) restar a la primera columna el producto de $5\operatorname{sech}^2(x_0)/(-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1))$ con la segunda columna (los análisis realizados sobre el eigenvalor λ_0 en el teorema 4 permiten afirmar que el denominador no es cero), 2) restar a la tercera columna el producto de $c_{12}\operatorname{sech}^2(x_2)/(-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_1))$ con la segunda columna, 3) restar a la primera columna la tercera columna, 4) sumar al tercer renglón el primer renglón, 5) sumar a la tercera columna el producto de $5\operatorname{sech}^2(x_2)/(-0.9 + 5\operatorname{sech}^2(x_2))$ con la primera columna (los análisis realizados sobre el eigenvalor λ_0 en el teorema 4 permiten afirmar que el denominador no es cero).

Por todo lo hecho anteriormente y la nota 21, se sigue del teorema 5 que el sistema (4.24) posee un esquema estable elemental no estándar explícito de Euler de la forma

$$\begin{aligned} x_0(n+1) &= x_0(n) + (\phi(hq)/q)[-0.9x_0(n) - 5 \tanh(x_2(n))] \\ x_1(n+1) &= x_1(n) + (\phi(hq)/q)[-0.9x_1(n) + 5 \tanh(x_1(n)) + 5 \tanh(x_0(n)) + c_{12} \tanh(x_2(n))] \\ x_2(n+1) &= x_2(n) + (\phi(hq)/q)[-0.9x_2(n) - 5 \tanh(x_0(n))] \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $\phi(y) = 1 - e^{-y}$, $q = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Omega\}$ y $t_n = t_0 + nh$ con $n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0$ y $h = 1$. Nótese que la última condición implica que $\phi(hq)/q = \phi(q)/q$.

Como $0 < 5\operatorname{sech}(x)\operatorname{sech}(y) \leq 5 \forall x, y \in \mathbb{R}$, entonces de (4.26) se deduce que

$$q = |-0.9 - 5\operatorname{sech}^2(0)| = 5.9,$$

Sean $c := 1 - 0.9(\phi(q)/q)$ y $k := \phi(q)/q$. Por las definiciones de ϕ y q se sigue que $k \in \mathbb{R}^+$. Por otra parte,

$$0 < c \iff 0 < 1 - 0.9(\phi(q)/q) \iff \phi(q) < q/0.9,$$

pero se cumple que $1 < q/0.9$ y por definición $\phi(q) < 1$, por lo cual se deduce que $\phi(q) < q/0.9$, en consecuencia se concluye que $0 < c$.

Por lo tanto, tomando $c = 1 - 0.9(\phi(q)/q)$ y $k = \phi(q)/q$ el sistema (4.32) se transforma en el sistema (4.31). ■

4.8.1. Propiedades del modelo discreto

Proposición 5 *El subsistema de diferencias finitas del sistema (4.31),*

$$\begin{aligned}x_0(n+1) &= cx_0(n) - 5k \tanh(x_2(n)) \\x_2(n+1) &= cx_2(n) - 5k \tanh(x_0(n)),\end{aligned}\tag{4.33}$$

donde c, k son constantes positivas, es tal que

1. si $x_0(0) > 0$ y $x_2(0) < 0$, entonces $x_0(n) > 0$ y $x_2(n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$,
2. si $x_0(0) = -x_2(0)$, entonces $x_0(n) = -x_2(n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$,

Dem. La demostración de 1. se hará por inducción.

Paso base. Supongamos que $x_0(0) > 0$ y $x_2(0) < 0$, por demostrar que $x_0(1) > 0$ y $x_2(1) < 0$. Tenemos que $x_0(1) = cx_0(0) - 5k \tanh(x_2(0))$, como la función $\tanh(x)$ respeta el signo (i. e. al ser evaluada en números positivos se obtienen números positivos y análogamente con los números negativos) y $c, k \in \mathbb{R}^+$ entonces $x_0(1) > 0$. Por otro lado, $x_2(1) = cx_2(0) - 5k \tanh(x_0(0))$, nuevamente, usando que la función $\tanh(x)$ respeta el signo y que $c, k \in \mathbb{R}^+$ se sigue que $x_2(1) < 0$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $x_0(n) > 0$ y $x_2(n) < 0$.

Paso inductivo. Por demostrar que $x_0(n+1) > 0$ y $x_2(n+1) < 0$.

La demostración de este hecho es similar a la realizada en el paso base.

La demostración de 2. también se hará por inducción.

Paso base. Supongamos que $x_0(0) = -x_2(0)$, por demostrar que $x_0(1) = -x_2(1)$.

$$\begin{aligned}x_0(1) &= cx_0(0) - 5k \tanh(x_2(0)) \\&= -cx_2(0) - 5k \tanh(-x_0(0)) \quad \text{usando que } x_0(0) = -x_2(0) \\&= -cx_2(0) + 5k \tanh(x_0(0)) \quad \text{usando que la función } \tanh(x) \text{ es impar} \\&= -x_2(1)\end{aligned}$$

Hipótesis de inducción. Supongamos que $x_0(n) = -x_2(n)$.

Paso inductivo. Por demostrar que $x_0(n+1) = -x_2(n+1)$.

La demostración de este hecho es similar a la realizada en el paso base.

■