



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE EL CASO DP-FINITO DE LA CONJETURA DE SHELAH

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
DAVID ERNÁN HUERTA GUERRERO

DIRECTOR
DR. CRISTHIAN EMMANUEL GARAY LÓPEZ
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C. (CIMAT)

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Mis estudios de maestría y el presente trabajo han sido posibles gracias al apoyo económico del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) y el Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).

Objetivo del texto

El presente trabajo es una compilación, accesible a matemáticos de diversas formaciones, del estudio que realicé con la finalidad de entender la prueba del Dr. Will Johnson del caso dp-finito de la conjetura de Shelah que habla sobre campos sin la propiedad de independencia; en la cual me he encontrado con ideas geométricas, algebraicas y analíticas; que convergen en la teoría de modelos.

La conjetura de Shelah a la que nos referimos propone una clasificación para campos con teorías “dependientes”. Específicamente, dice lo siguiente:

Conjetura. *Sea K un campo cuya teoría es dependiente, entonces cumple alguna de las siguientes propiedades:*

- *es finito*
- *es algebraicamente cerrado*
- *es realmente cerrado, es decir, elementalmente equivalente a \mathbb{R}*
- *admite una valuación henseliana no trivial*

Se introducirá la noción “rango de dependencia de una teoría”, que denotaremos $\text{dp-rk}(T)$ para una teoría T ; y el teorema que probaremos, que es un caso particular de la conjetura anterior, es:

Teorema. *(Will Johnson, 2020). Sea K un campo cuya teoría tiene rango de dependencia finito, entonces cumple alguna de las siguientes propiedades:*

- *es finito*
- *es algebraicamente cerrado*
- *es realmente cerrado, es decir, elementalmente equivalente a \mathbb{R}*
- *admite una valuación henseliana no trivial*

De hecho, combinando el teorema de Johnson con la proposición 3.11 y el teorema 3.13 en [5] se logra caracterizar por completo a los campos con rango de dependencia finito¹.

¹Ver el inciso 5 del corolario 4.16 en [38].

Índice general

1	Preliminares y generalidades	7
1.1	Nociones de álgebra y topología	7
1.1.1	Recorrido por algunas definiciones axiomáticas comunes	7
1.1.2	Valuaciones y anillos de valuación	10
1.1.3	Nociones de teoría del orden	13
1.2	Nociones de lógica matemática	15
1.2.1	Lenguajes multivariados de primer orden	16
1.2.2	Estructuras y noción de verdad	22
1.2.3	Una hipótesis monstruosa	32
1.2.4	Definibilidad	42
1.2.5	Secuencias indiscernibles	49
2	Clasificación de campos dp-finitos	53
2.1	Ingredientes de la prueba del teorema de Johnson	53
2.1.1	El filtro canónico	53
2.1.2	Subespacios vectoriales tipo-definibles de un campo	63
2.1.3	Campos filtrados	64
2.1.4	W-filtros	67
2.1.5	Diccionarios	75
2.1.6	Revolturas	85
2.2	Prueba del teorema de Johnson	87
2.2.1	Localización de W-filtros	87
2.2.2	El filtro canónico es un W-filtro	95
2.2.3	Argumentos finales	98

1 Preliminares y generalidades

1.1. Nociones de álgebra y topología

A lo largo de esta sección, introduciremos algunos conceptos y resultados de las áreas de cada subsección, con aplicación específica a la prueba del teorema de Johnson. Dado que asumimos familiaridad con todos o la mayoría de estas áreas y sus resultados más conocidos, esta sección no pretende ser exhaustiva en cuanto a enunciar los resultados básicos en álgebra o topología, ni tampoco todas las definiciones necesarias para trabajar con ellos. Para consulta de lo previamente mencionado, me gustaría recomendar al lector los siguientes libros:

- Topology (James Dugundji)
- Topology (James Munkres)
- An introduction to the theory of groups (Joseph Rotman)
- Abstract algebra (David Dummit)
- Teoría de Galois (Felipe Zaldívar)
- Introduction to commutative algebra (Michael Atiyah, Ian Macdonald)

Dichas recomendaciones son únicamente mi preferencia personal para consulta de estos temas, pero existen muchas otras opciones que cumplen con dicha finalidad.

1.1.1. Recorrido por algunas definiciones axiomáticas comunes

Esta subsección tiene como única finalidad que los axiomas que enlistaremos sirvan como guía visual para la construcción de lenguajes formales y los conceptos relacionados a estos, en la sección dedicada a preliminares de lógica matemática. Deséo hacer hincapié en lo siguiente: que un axioma aparezca enlistado a continuación no quiere decir que el significado semántico que le damos en español a dicho axioma pueda interpretarse correctamente¹ en el contexto de la lógica multivariada, que definiremos en dicha sección². Esto es intencional y pretende motivar al lector a preguntarse sobre los alcances y limitaciones de dicha lógica, sobre la existencia de otros tipos de lógicas “más poderosas”, y sobre qué ventajas y desventajas existen al elegir trabajar en una y no en alguna otra.

Comenzamos por recordar, de manera breve, algunas axiomatizaciones para los objetos matemáticos que atañen a este trabajo. Asumimos familiaridad con lo que significa –intuitivamente–

¹Esto es: que todos sus modelos (definición 1.2.2.16) cumplan la propiedad que tratamos de expresar simbólicamente.

²Ver comentario 1.1.1.17.

1 Preliminares y generalidades

que una estructura dada como una una tupla cumpla un axioma escrito en símbolos lógicos (por ejemplo, lo que significa que un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ cumpla el axioma $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$).

Definición 1.1.1.1. *Un grupo es una estructura $(\mathbb{G}, +, 0)$ que cumple los axiomas*

1. $\forall x(x + 0 = x)$
2. $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (z + y) + z)$
3. $\forall x \exists y(x + y = 0)$

Definición 1.1.1.2. *Un grupo $(\mathbb{G}, +, 0)$ es abeliano si cumple el axioma*

4. $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

Definición 1.1.1.3. *Un anillo es una estructura $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0)$ tal que $(\mathbb{A}, +, 0)$ es un grupo abeliano y, además, cumple los axiomas*

5. $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
6. $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$
7. $\forall x \forall y \forall z((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$

Definición 1.1.1.4. *Un anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0)$ es conmutativo si cumple el axioma*

8. $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

Definición 1.1.1.5. *Un anillo (conmutativo) con unidad es una estructura $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0, 1)$ tal que $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0)$ es un anillo (conmutativo) y, además, cumple los axiomas*

9. $\forall x(1 \cdot x = x)$
10. $\forall x(x \cdot 1 = x)$

Definición 1.1.1.6. *Un dominio entero es un anillo conmutativo con unidad que cumple el axioma*

11. $\forall x \forall y(x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$

Definición 1.1.1.7. *Un anillo de división es un anillo con unidad que cumple el axioma*

12. $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$

Definición 1.1.1.8. *Un campo es un anillo de división conmutativo.*

Comentario 1.1.1.9. *Si somos demasiado estrictos, podríamos decir que un campo no es un anillo (a secas), de acuerdo a las definiciones anteriores, ya que un campo es una tupla $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ y un anillo es una tupla $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0)$ a la que le faltaría el 1 para siquiera ser el mismo tipo de objeto. Si bien esta aclaración es poco relevante para la mayoría de las áreas de la matemática; esto no es una trivialidad en lógica matemática. Solucionaremos esto mediante el siguiente esquema de definiciones:*

“Cualquier clase de estructuras dada mediante una definición por axiomas contiene como elementos a todas las estructuras en las que dichos axiomas tengan sentido y se cumplan.”

En particular: dado que los axiomas de anillo tienen sentido en campos, tenemos derecho a decir que todo campo es un anillo.

Este comentario cobrará mayor sentido cuando hablemos de reductos y expansiones de estructuras en la siguiente sección; y, en particular, justificará que toda la teoría desarrollada para estructuras “puras” (es decir, aquellas que no tienen más funciones o constantes especificadas que la necesarias para interpretar sus axiomas) es válida para estructuras “impuras” (e. g. un campo sería un grupo impuro, en este sentido; así que tendrá sentido aplicar todos los teoremas de la teoría de grupos al grupo aditivo o al grupo de unidades de dicho campo).

Definición 1.1.1.10. Dado un anillo \mathbb{A} , un \mathbb{A} -módulo es una estructura $(\mathbb{A}, M, +, \cdot, 0)$, donde $\mathbb{A} = (A, +_A, \cdot_A, 0_A)$ es un anillo, $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano y, además, se cumplen los axiomas

$$13. \forall x \in A \forall m \in M \forall n \in M (x \cdot (m + n) = x \cdot m + x \cdot n)$$

$$14. \forall x \in A \forall y \in A \forall m \in M ((x +_A y) \cdot m = x \cdot m + y \cdot m)$$

$$15. \forall x \in A \forall y \in A \forall m \in M ((x \cdot_A y) \cdot m = x \cdot (y \cdot m))$$

Si $\mathbb{A} = (A, +_A, \cdot_A, 0_A, 1_A)$ es un anillo con unidad, pediremos además, que

$$16. \forall m \in M (1_A \cdot m = m)$$

Definición 1.1.1.11. Un \mathbb{K} -espacio vectorial es un \mathbb{K} -módulo, donde \mathbb{K} es un campo.

Definición 1.1.1.12. Un ideal (propio/no trivial) de un anillo \mathbb{A} es un subconjunto (propio) de \mathbb{A} que con las operaciones restringidas de \mathbb{A} tiene estructura de \mathbb{A} -módulo.

Definición 1.1.1.13. Un ideal primo de un anillo \mathbb{A} es un ideal no trivial I de \mathbb{A} que cumple

$$17. \forall x \in A \forall y \in A (x \cdot y \in I \rightarrow (x \in I \vee y \in I))$$

Definición 1.1.1.14. Un ideal no trivial I de un anillo \mathbb{A} es maximal si lo es respecto a la contención de ideales propios de \mathbb{A} ; es decir, si $\text{Ideal}(J, \mathbb{A})$ es la conjunción de fórmulas (construida a partir de los axiomas anteriores) que dice que J es un ideal propio de \mathbb{A} , entonces I es maximal si cumple

$$18. \text{Ideal}(I, \mathbb{A}) \wedge \forall J ((\text{Ideal}(J, \mathbb{A}) \wedge I \subseteq J) \rightarrow I = J)$$

Con la confianza de que los ejemplos anteriores reflejan bien la idea informal de que todos estos conceptos pueden ser escritos “en un lenguaje apropiado”, por ahora dejamos hasta aquí los ejemplos de axiomatizaciones en áreas del álgebra y, como complemento, procedemos ahora a enumerar algunos axiomas provenientes de la topología.

Definición 1.1.1.15. Diremos que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y se cumplen los axiomas:

1 Preliminares y generalidades

19. $\emptyset \in \mathcal{T}$

20. $X \in \mathcal{T}$

21. $\forall \mathcal{U}(\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \rightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T})$

22. $\forall \mathcal{U}((\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \wedge |\mathcal{U}| < \infty) \rightarrow \bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{T})$.

Definición 1.1.1.16. Diremos que un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es Hausdorff si cumple el axioma

23. $\forall x \in X \forall y \in X (x \neq y \rightarrow \exists U \in \mathcal{T} \exists V \in \mathcal{T} (x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset))$

Nos detenemos aquí pues, nuevamente, creo que es claro lo que intento evidenciar: informalmente, todo esto se puede expresar “en un lenguaje apropiado”. Con esta idea, es tentador considerar “ese lenguaje apropiado”, sus axiomas y sus consecuencias lógicas como objetos de estudio en derecho propio; aunque, claramente, habrá que ser mucho más claros y formales en cuanto a qué quiere decir eso de “ser un lenguaje apropiado” si pretendemos hacer esto.

Comentario 1.1.1.17. Resulta que hay muchas maneras de elegir lenguajes apropiados para estudiar cualquier teoría; y esta elección no es para nada irrelevante. Por ejemplo: en lógica de segundo orden –es decir, aquella que permite cuantificar sobre todos los subconjuntos y , a su vez, sobre los elementos de dichos subconjuntos– se tiene muchísima capacidad para escribir definiciones del lenguaje natural en símbolos; pero, a cambio de eso, resulta ser que la lógica de segundo orden es sumamente difícil de estudiar. Por otro lado, uno puede restringirse a lógica de primer orden –o, equivalentemente³, a lógica multivariada– y perder poder expresivo (e. g. la lógica de segundo orden puede expresar el axioma 22 de la definición 1.1.1.15, pues tiene una fórmula para expresar que un conjunto es finito⁴, mientras que la de primer orden no la tiene⁵), pero ganar facilidad en el estudio. Una de las partes más divertidas acerca de la lógica matemática es, precisamente, el encontrar maneras ingeniosas de expresar propiedades de orden superior dentro de la lógica de primer orden; cuyas propiedades son mucho más fáciles de trabajar.

1.1.2. Valuaciones y anillos de valuación

A continuación, hacemos un recorrido por algunas definiciones y resultados básicos relativos a la teoría de campos valuados.

En lo que sigue, \mathbb{K} es un campo.

³Ver 6.1 en [23].

⁴El enunciado “toda función inyectiva es suprayectiva” es expresable en segundo orden y se cumple en un conjunto si y sólo si este es finito.

⁵Esto es inmediato del teorema 1.2.2.24; ya que, para cada n , la fórmula $\kappa_n := \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i \approx x_j))$ se interpreta como “hay al menos n elementos distintos”; entonces si existiera una fórmula ∞ que expresara la negación de “ser finito”, habría algún subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\{\kappa_n\}_{n \in F} \models \infty$; lo cual nos diría que todo conjunto con más de $\max(F) \in \mathbb{N}$ elementos sería infinito; que es absurdo.

Definición 1.1.2.1. Diremos que un anillo es local si tiene un único ideal maximal. Si \mathbb{A} es un anillo local con ideal maximal \mathfrak{m} , le llamaremos campo residual al campo dado por el cociente $k = \frac{\mathbb{A}}{\mathfrak{m}}$.

Observación 1.1.2.2. Un anillo \mathbb{A} es local con ideal maximal \mathfrak{m} si y sólo si para todo $x \in \mathbb{A}$ se cumple

$$(x, 1 - x) \in \mathbb{A}^\times \times \mathfrak{m}, \text{ o bien, } (1 - x, x) \in \mathbb{A}^\times \times \mathfrak{m}$$

es decir, todos sus elementos son unidades o elementos del ideal maximal; y el conjunto de unidades de \mathbb{A} es la clase lateral $1 + \mathfrak{m}$.

Definición 1.1.2.3. Sea \mathbb{A} un anillo local con ideal maximal \mathfrak{m} . Diremos que \mathbb{A} es henseliano si para todo polinomio $f \in \mathbb{A}[X]$ y $c \in \mathbb{A}$ tales que $f(c) \in \mathfrak{m}$ y $f'(c) \notin \mathfrak{m}$, existe $x \in c + \mathfrak{m}$ (necesariamente único⁶) tal que $f(x) = 0$.

Definición 1.1.2.4. Sea \mathbb{A} un anillo conmutativo con unidad y sea \mathbb{B} un anillo que contiene a \mathbb{A} como subanillo. Diremos que $x \in \mathbb{B}$ es un entero de \mathbb{A} en \mathbb{B} si es raíz de algún polinomio mónico con coeficientes en \mathbb{A} . Si \mathbb{A} es un dominio entero, denotaremos $\overline{\mathbb{A}} := \{x \in \text{Frac}(\mathbb{A}) : x \text{ es entero de } \mathbb{A}\}$. Diremos que \mathbb{A} es enteramente cerrado o cerrado bajo enteros si $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$.

Definición 1.1.2.5. Un anillo de valuación de \mathbb{K} es un subanillo $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{K}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{K}^\times$, se cumple $x \in \mathcal{O}$ o bien $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}$. Diremos que un anillo –cualquiera– es de valuación si es un dominio entero que es un anillo de valuación de su campo de fracciones.

Definición 1.1.2.6. Un anillo multivaluado es una intersección de anillos de valuación $\mathbb{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

Si I es finito, diremos que \mathbb{A} es finitamente valuado; o m -valuado si $|I| = m$.

Definición 1.1.2.7. Una valuación de \mathbb{K} es una función $v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{G} \cup \{\infty\}$ que cumple, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$:

1. $v(a) = \infty \iff a = 0$
2. $v(ab) = v(a) + v(b)$
3. $\min\{v(a), v(b)\} \leq v(a + b)$

donde $(\mathbb{G} \cup \{\infty\}, \leq, +)$ es un orden total con una operación binaria que cumple:

- (a) ∞ es el máximo; es decir: $\forall x (x \leq \infty)$.
- (b) ∞ es absorbente por ambos lados respecto a $+$; es decir: $\forall x (x + \infty = \infty + x = \infty)$ (en particular, ∞ es idempotente).
- (c) $(\mathbb{G}, +|_{\mathbb{G} \times \mathbb{G}})$ es un grupo abeliano.
- (d) \leq es invariante bajo traslaciones; es decir: si $a, b, c \in \mathbb{G}$ y $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

⁶cf. lema 2.1 en [22]

1 Preliminares y generalidades

Si v_1, \dots, v_n son valuaciones en \mathbb{K} , diremos que $(\mathbb{K}, v_1, \dots, v_n)$ es un campo multivaluado; o n -valuado si queremos especificar el número de valuaciones. En el caso particular de que $n = 1$; es decir, v es una valuación de \mathbb{K} , simplemente diremos que (\mathbb{K}, v) es un campo valuado.

La siguiente proposición resume lo que hay que saber sobre valuaciones y anillos de valuación para nuestros fines. No entraré en detalles pues estos resultados son estándar y existe amplia bibliografía disponible para su consulta. En particular, invito al lector a consultar [22] y [1]. El primer inciso es el corolario 6.7 en [33].

Proposición 1.1.2.8.

1. Si \mathbb{A} es un anillo finitamente valuado, entonces hay una única forma de escribir $\mathbb{A} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ como una intersección finita de anillos de valuación incomparables entre sí. Los anillos \mathcal{O}_i son exactamente las localizaciones de \mathbb{A} en sus ideales maximales.
2. Sea \mathcal{O} un anillo de valuación de \mathbb{K} , entonces:
 - a) \mathcal{O} es local
 - b) \mathcal{O} es cerrado bajo enteros⁷.
 - c) Los anillos de valuación y las valuaciones de \mathbb{K} se inducen entre sí de manera canónica⁸.

Comentario 1.1.2.9. Respecto al punto 2.c de la definición anterior, agregamos que el anillo de valuación dado por una valuación de \mathbb{K} está dado por $\{x \in \mathbb{K} : 0 \leq v(x)\}$ y su ideal maximal es $\{x \in \mathbb{K} : 0 < v(x)\}$.

Definición 1.1.2.10. Si v es una valuación de \mathbb{K} , denotaremos

1. $\mathcal{O}_v := \{x \in \mathbb{K} : 0 \leq v(x)\}$ al anillo de valuación de \mathbb{K} asociado v .
2. $\mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v \setminus v^{-1}[\{0\}]$ al ideal maximal de \mathcal{O}_v .
3. $k_v := \frac{\mathcal{O}_v}{\mathfrak{m}_v}$ al campo residual de (\mathbb{K}, v)
4. $\text{res}_v : \mathcal{O}_v \rightarrow k_v$ al residuo de \mathcal{O}_v ; es decir, su proyección en el campo residual.

Definición 1.1.2.11. Diremos que un campo valuado y su respectiva valuación son henselianos, si su anillo de valuación asociado lo es.

La siguiente proposición es consecuencia de la proposición 2.10 en [12]⁹.

Proposición 1.1.2.12. Son equivalentes para un campo valuado (\mathbb{K}, v) :

1. (\mathbb{K}, v) es henseliano.
2. Para toda extensión finita \mathbb{L}/\mathbb{K} existe un único anillo de valuación de \mathbb{L} que contiene a \mathcal{O}_v .

⁷Proposición 3.8 en [22]

⁸Ver la sección “Correspondence between valuation rings and valuations” en la página 82 de [22].

⁹Ver definición 3.8 y observación 3.9 en [12].

3. Para toda extensión algebraica \mathbb{L}/\mathbb{K} existe un único anillo de valuación de \mathbb{L} que contiene a \mathcal{O}_v .
4. Para toda extensión separable \mathbb{L}/\mathbb{K} existe un único anillo de valuación de \mathbb{L} que contiene a \mathcal{O}_v .

1.1.3. Nociones de teoría del orden

Los resultados y definiciones de esta subsección están basados o son extraídos del capítulo 9 en [39].

Definición 1.1.3.1. *Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado tal que cualesquiera dos de sus elementos tienen un supremo y un ínfimo. En particular, si $a, b \in \mathbb{P}$, donde \mathbb{P} es un retículo, denotaremos a su supremo $a \vee b$ y a su ínfimo $a \wedge b$.*

Definición 1.1.3.2. *Un retículo \mathbb{P} es modular si para cualesquiera $a, b, x \in \mathbb{P}$, con $a \leq b$, se cumple:*

$$(x \vee a) \wedge b = (x \wedge b) \vee a$$

\mathbb{P} es acotado si tiene un máximo y un mínimo.

Para lo que resta de esta sección, \mathbb{P} será un retículo modular. Denotaremos \perp y \top a su mínimo y a su máximo, respectivamente; si existen. En general, no asumimos la existencia de \perp y/o \top , salvo cuando hagamos mención a ellos.

Definición 1.1.3.3. *Si \mathbb{P} tiene mínimo, \mathbb{P}^+ denotará al orden inducido en $\mathbb{P} \setminus \{\perp\}$.*

Definición 1.1.3.4. *Un n -cubo en \mathbb{P} es un morfismo de retículos $C : [n] \rightarrow \mathbb{P}$ (es decir, una función que preserva ínfimos y supremos), donde $[n]$ es el retículo de subconjuntos de $n = \{0, \dots, n-1\}$. Diremos que C es estricto si es inyectivo. Nos referiremos a $C(\emptyset)$ como el origen de C y a $C(n)$ como el tope de C . El conjunto de los n -cubos estrictos de \mathbb{P} será denotado $\text{Hom}([n] \hookrightarrow \mathbb{P})$, el conjunto de los n -cubos estrictos con origen b será denotado $\text{Hom}([n] \xrightarrow{b} \mathbb{P})$ y conjunto de los n -cubos estrictos con tope b será $\text{Hom}([n] \xrightarrow{b} \mathbb{P})$.*

Definición 1.1.3.5. *Definimos, para cada $b \in \mathbb{P}$:*

$$\text{Cb}(\mathbb{P}) := \sup\{n : \text{Hom}([n] \hookrightarrow \mathbb{P}) \neq \emptyset\}$$

$${}_b\text{Cb}(\mathbb{P}) := \sup\{n : \text{Hom}([n] \xrightarrow{b} \mathbb{P}) \neq \emptyset\}$$

$$\text{Cb}_b(\mathbb{P}) := \sup\{n : \text{Hom}([n] \xrightarrow{b} \mathbb{P}) \neq \emptyset\}$$

Al primero de estos números nos referiremos como el rango cúbico de \mathbb{P} .

Definición 1.1.3.6. *Sea $A := \{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{P}$*

1 Preliminares y generalidades

- A es independiente sobre $b \in \mathbb{P}$ si está acotado inferiormente por b y, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, se cumple

$$a_i \wedge \left(\bigvee_{j \neq i} a_j \right) = b$$

A es dependiente sobre b si no es independiente sobre b .

- A es co-independiente sobre $b \in \mathbb{P}$ si está acotado superiormente por b y, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, se cumple

$$a_i \vee \left(\bigwedge_{j \neq i} a_j \right) = b$$

A es co-dependiente sobre b si no es co-independiente sobre b .

- A es (co)-independiente si es (co)-independiente sobre \perp (\top).
- A es (co)-dependiente si no es (co)-independiente sobre \perp (\top).

Al conjunto de subconjuntos de \mathbb{P} de tamaño n (co)-independientes sobre b lo denotaremos ${}_b\mathbb{P}^{(n)}$ ($\mathbb{P}_b^{(n)}$)

Observación 1.1.3.7. En la definición anterior, si \mathbb{P} es un retículo acotado inferiormente, entonces A es dependiente si existe i tal que $\perp < a_i \wedge \left(\bigvee_{j \neq i} a_j \right)$. Del mismo modo, si \mathbb{P} es acotado superiormente, entonces A es co-dependiente si existe i tal que $a_i \vee \left(\bigwedge_{j \neq i} a_j \right) < \top$

Más adelante, el rango cúbico de un retículo de ciertos subanillos de un campo arbitrario cobrará un papel central en la prueba del teorema de Johnson. El siguiente teorema nos ayudará a conectar el rango cúbico de dicho retículo –que, a su vez, relacionaremos con el dp-rango¹⁰– con la cantidad de anillos incomparables entre sí en dicho retículo. La idea fundamental de la prueba del teorema de Johnson es la de codificar –el retículo de– ciertos engrosamientos de una V -topología (provisionalmente, esto simplemente significa que dicha topología está inducida por un sub-anillo de valuación) definible en un campo.

Teorema 1.1.3.8. Sea $b \in \mathbb{P}$

- La función $f : \text{Hom}([n] \xrightarrow{b} \mathbb{P}) \rightarrow {}_b\mathbb{P}^{(n)}$ dada por $f(C) = \{C(\{i\})\}_{i \in n}$ es una biyección entre los n -cubos con origen b y los subconjuntos de tamaño n de \mathbb{P} independientes sobre b .
- Si $A \in {}_b\mathbb{P}^{(n)}$, entonces $f^{-1}(A)$ es un cubo estricto si y sólo si $b < a$ para todo $a \in A$.
- Lo análogo a los dos incisos anteriores es válido para n -cubos con tope b y subconjuntos de tamaño n co-independientes sobre b si definimos $g(C) = \{C(n \setminus \{i\})\}_{i \in n}$.

¹⁰Ver definición (1.2.5.5)

Demostración. Ver 9.6 en [39]. □

Definición 1.1.3.9.

■ Diremos que un subconjunto $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ es un *prefiltro* en \mathbb{P} si se cumplen:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Si $x, y \in \mathcal{F}$, entonces $x \wedge y \in \mathcal{F}$

Diremos que \mathcal{F} es un *filtro* de \mathbb{P} si, además, se cumple la condición:

3. Si $x \in \mathbb{P}$ y $x \leq y$, entonces $y \in \mathcal{F}$
- Si \mathcal{F} es un prefiltro de \mathbb{P} , el conjunto $\{y \in \mathbb{P} : \exists x \in \mathcal{F}(x \leq y)\}$ es un filtro de \mathbb{P} y, le llamaremos, el *filtro generado por \mathcal{F}* . También diremos que \mathcal{F} es una *base de dicho filtro*.
- Las nociones “preideal”, “ideal”, “ideal generado por un preideal” y “base de un ideal” se definen de manera dual: cambiando \leq por \geq y cambiando \wedge por \vee .

Definición 1.1.3.10.

1. Una *cadena* en \mathbb{P} es un subconjunto totalmente ordenado de \mathbb{P} .
2. Una *descomposición en cadenas* de \mathbb{P} es una partición de \mathbb{P} en la que cada clase de equivalencia es una cadena de \mathbb{P} .
3. Una *anticadena* es un subconjunto $W \subseteq \mathbb{P}$ tal que cualesquiera dos de sus elementos son incomparables bajo el orden de \mathbb{P} .
4. La *anchura* de \mathbb{P} se define como el supremo de los cardinales de cualquier anticadena de \mathbb{P} .

El siguiente resultado es conocido como teorema de Dilworth y es válido para órdenes parciales de anchura finita en general, no sólo para retículos. Su prueba puede ser consultada en [14] para el caso de órdenes parciales finitos, y en [8] para el caso de órdenes parciales posiblemente infinitos pero de anchura finita.

Teorema 1.1.3.11. *En cualquier conjunto parcialmente ordenado de anchura finita \mathbb{P} , esta también puede ser caracterizada como el tamaño de la descomposición más pequeña en cadenas de \mathbb{P} . En particular: si \mathbb{P} tiene anchura n , entonces admite una descomposición en n cadenas de \mathbb{P} .*

1.2. Nociones de lógica matemática

En esta sección introduciremos un lenguaje “apropiado” para poder expresar formalmente todo lo relativo a “cumplir axiomas” que, en la subsección 1.1.1, mencionamos de manera heurística. Para hacer esto, la idea es: fijarnos en qué símbolos necesitamos para hablar de una teoría, a lo cual le llamaremos “tipo de semejanza”; posteriormente dar reglas explícitas para la formación de “fórmulas”, que serán ciertas sucesiones de símbolos; y, por último, añadir reglas sobre cómo interpretaremos semánticamente –es decir, qué significado le daremos a– estas sucesiones.

1.2.1. Lenguajes multivariados de primer orden

Para aterrizar ideas, comencemos por pensar en un área puntual de la matemática: el álgebra lineal. Su objeto de estudio son los espacios vectoriales y su teoría –de primer orden¹¹– se expresa mediante propiedades lógicas del siguiente estilo:

- Los axiomas de espacio vectorial; es decir: los axiomas de campo aplicados a una estructura \mathbb{F} junto de los axiomas de \mathbb{F} -módulo (ver subsección 1.1.1).
- La fórmula que dice que el espacio tiene un conjunto generador de tamaño n :

$$\exists x_1 \in V \dots \exists x_n \in V \forall y \in V \exists \lambda_1 \in \mathbb{F} \dots \exists \lambda_n \in \mathbb{F} (y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

- La fórmula que dice que el espacio tiene un conjunto linealmente independiente de tamaño n :

$$\exists x_1 \in V \dots \exists x_n \in V \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i \neq 0 \wedge \forall \lambda_1 \in \mathbb{F} \dots \forall \lambda_n \in \mathbb{F} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \rightarrow \bigwedge_{i=1}^n \lambda_i = 0) \right)$$

- Una fórmula que denota ortogonalidad entre vectores:

$$v \perp w$$

Estas fórmulas cuentan con las siguientes características:

- símbolos V y \mathbb{F} para denotar al espacio vectorial y al campo
- un símbolo \perp que denota una relación de ortogonalidad
- símbolos para denotar a las operaciones: suma de \mathbb{F} , producto de \mathbb{F} , suma de V y producto de escalares de \mathbb{F} con vectores de V
- símbolos para los elementos importantes de \mathbb{F} y V : los neutros aditivo y multiplicativo de \mathbb{F} y el neutro aditivo de V
- cuantificadores: \forall, \exists
- conectivos: \wedge, \rightarrow
- símbolo(s)¹² de igualdad
- una notación para negar (que podemos pensar como un conectivo de aridad 1)
- paréntesis, que no tienen significado, pero se incluyen para facilitar la lectura

¹¹Ver comentario 1.1.1.17.

¹²El símbolo de igualdad de V no tiene por qué ser el mismo que el de \mathbb{F} .

- reglas –que en este caso son implícitas– para distinguir cuáles sucesiones de símbolos son fórmulas y cuáles no (por ejemplo: $1 = 0$ es una fórmula mientras que $1 \rightarrow 0$ no lo es¹³)
- una interpretación –también implícita– de lo que significa cada símbolo, que va acompañada de una forma de decidir si “lo que dice” una fórmula es verdadero o falso, es decir, de una noción de verdad

y, esencialmente, las numerosas definiciones de esta y la subsección siguiente sirven para que todos los lenguajes con los que trabajaremos se obtengan mediante una implementación de lo que resulta, en general, al pedir que se especifiquen las características anteriores.

Definición 1.2.1.1. *Dado un conjunto \mathbf{V} , la estrella de Kleene de \mathbf{V} se define como:*

$$\mathbf{V}^* := \bigcup_{n \geq 1} \mathbf{V}^n$$

es decir, \mathbf{V}^* es el conjunto de sucesiones finitas de elementos de \mathbf{V} .

Definición 1.2.1.2. *Un tipo de semejanza para un lenguaje de primer orden es una función $\tau : \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{V}^*$; donde \mathbf{V}^* , \mathbf{R} , \mathbf{F} , \mathbf{C} son ajenos dos a dos, $\emptyset \neq \mathbf{V}$ es finito, $\tau[\mathbf{F}] \cap \mathbf{V} = \emptyset$ y $\tau[\mathbf{C}] \subseteq \mathbf{V}$. A los elementos de $\mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C}$ los llamaremos símbolos de τ . En particular, a los símbolos de \mathbf{V} los llamaremos etiquetas de valencia o símbolos de igualdad, a los símbolos de \mathbf{R} los llamaremos relacionales o de relación, a los símbolos de \mathbf{F} los llamaremos funcionales o de función y a los símbolos de \mathbf{C} los llamaremos puntuales o de constante.*

Comentario 1.2.1.3. *Quisiera resaltar que en lógica matemática podemos trabajar con símbolos sin especificar exactamente qué son (es decir, podemos tratarlos como objetos básicos). Sin embargo, aquellos lectores que se muestren incómodos con esto pueden pensar en cada símbolo como su conjunto favorito pues, al final del día, lo que nos interesa de los símbolos es que podamos formar sucesiones con ellos y asignarle un significado a esas sucesiones¹⁴. Asimismo, sirve enfatizar que, dado que estamos manejando dos lenguajes –el español, al que nos referiremos como “metalenguaje”, y el lenguaje formal \mathcal{L}_τ –, si no se tiene cuidado al contextualizar los símbolos, podría caerse en la malinterpretación del texto; por ejemplo: no es lo mismo decir “para toda x , x es azul”, “para toda variable x , x es azul” o “ $\forall x(\text{Azul}(x))$ ”; la primera es una propiedad en el metalenguaje sobre los objetos cuantificados, la segunda es una propiedad en el metalenguaje sobre las variables que cuantifican a dichos objetos y la tercera es una sucesión de símbolos en un lenguaje formal que, en principio, no tiene significado alguno. Como última nota a lo anterior, la distinción entre la igualdad en el metalenguaje y la igualdad en el lenguaje formal la enfatizamos aún más, reservando el símbolo “=” para la igualdad en el metalenguaje; y usando el símbolo alternativo “ \approx ” como igualdad en el lenguaje formal; en particular y para hacer esto aún más claro, está permitido escribir $\approx = \approx$ y esto significa que el símbolo “ \approx ” es igual a si mismo.*

¹³Obsérvese que $1 = 0$ dice “algo” –si bien, falso– mientras que, a priori, $1 \rightarrow 0$ no tiene ningún significado razonable.

¹⁴En otras palabras, los símbolos particulares que utilizamos para denotar conceptos son irrelevantes para estos; por ejemplo: si acordáramos que el símbolo que utilizamos para denotar al primer número natural es “ \mathbb{R} ”, que el símbolo para denotar al segundo número natural es “ Λ ”, que el símbolo para la suma de naturales es “4” y que el símbolo de igualdad es #; entonces la expresión $\mathbb{R}4\mathbb{R}\#\Lambda$ se interpretaría en español como “uno más uno es igual a dos”.

1 Preliminares y generalidades

Con el comentario anterior en mente, proponemos lo siguiente sin miedo a malinterpretación:

Notación 1.2.1.4. Dada una etiqueta de valencia, $V \in \mathbf{V}$, utilizaremos, según convenga, la notación $\approx_V := V$. Habitualmente usaremos la notación \approx_V cuando nos refiramos a V como símbolo de igualdad y utilizaremos simplemente V cuando nos refiramos a este elemento de \mathbf{V} como etiqueta de valencia. Si V está claro del contexto, simplemente escribiremos \approx en vez de \approx_V .

Ejemplo 1.2.1.5. Si quisieramos hablar de espacios vectoriales: necesitamos dos tipos de elementos, los elementos del campo y los vectores, que corresponden a dos etiquetas de valencia F (del inglés “field”) y V (de “vector”), necesitamos símbolos para el producto por escalares y el producto del campo, símbolos para la suma de vectores y la suma del campo, y símbolos para el cero del campo, el 1 del campo y el cero del espacio vectorial. Un tipo de semejanza de este estilo sería una función¹⁵

$$\tau : \emptyset \dot{\cup} \{\bullet_1, \bullet_2, +_1, +_2\} \dot{\cup} \{0_1, 0_2, 1\} \rightarrow \{F, V\}^*$$

donde los elementos que aparecen en el dominio y en el contradominio son conjuntos arbitrarios, distintos entre sí; a los que les hemos asignado esa notación; pero, en principio, no tienen por qué ser campos, espacios vectoriales ni funciones o elementos de estos. Si quisieramos hablar de otras propiedades, por ejemplo, si F tiene un orden, para referirnos a el, habría que agregar un símbolo relacional $<$, de modo que:

$$\tau : \{<\} \dot{\cup} \{\bullet_1, \bullet_2, +_1, +_2\} \dot{\cup} \{0_1, 0_2, 1\} \rightarrow \{F, V\}^*$$

A los símbolos anteriores, les añadimos los siguientes:

Definición 1.2.1.6. Los símbolos lógicos de \mathcal{L}_τ son:

- Para cada etiqueta de valencia $V \in \mathbf{V}$, un conjunto infinito numerable de símbolos de variable $\text{Var}(V) := \left\{ x_n^V \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\text{Var}(V_1) \cap \text{Var}(V_2) = \emptyset$ si $V_1 \neq V_2$.
- Símbolos auxiliares: paréntesis izquierdo “(”, paréntesis derecho “)” y coma “,”. Al conjunto de estos tres símbolos lo denotaremos Aux .
- Símbolos conectivos: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$.
- Símbolos cuantificadores: \forall, \exists .

Por el resto del capítulo, fijamos un tipo de semejanza τ como en la definición 1.2.1.2.

Definición 1.2.1.7. El alfabeto de símbolos de primer orden de tipo τ , al que denotaremos $\mathcal{A}(\tau)$, es el conjunto formado por los símbolos de τ y los símbolos lógicos de \mathcal{L}_τ ; es decir:

$$\mathcal{A}(\tau) := \mathbf{V} \dot{\cup} \mathbf{R} \dot{\cup} \mathbf{F} \dot{\cup} \mathbf{C} \dot{\cup} \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}} \text{Var}(V) \right) \dot{\cup} \text{Aux} \dot{\cup} \{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow\} \dot{\cup} \{\forall, \exists\}$$

¹⁵Ver ejemplo 1.2.1.13 para los detalles de su regla de correspondencia.

Definición 1.2.1.8. Una expresión de tipo τ o τ -expresión es un elemento de $\mathcal{A}(\tau)^*$.

Ejemplo 1.2.1.9.

- $\forall x(x \approx x)$
- $\exists)(\forall \rightarrow, \rightarrow \rightarrow \rightarrow \forall$
- $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \forall$
- $x \leftrightarrow \wedge$
- $(, x) \approx xyx, xyx$

son, todas, expresiones del lenguaje (donde tanto x como y representan cualesquiera símbolos de primer orden; que podrían ser, en particular, símbolos de variable).

Comentario 1.2.1.10. En el ejemplo anterior, ocurre la primera instancia en la que se aprecia lo cuidadosos que tenemos que ser a la hora de estudiar un lenguaje formal desde otro lenguaje –en nuestro caso, el español–: tanto x como y , en principio, no son símbolos –de variable– del lenguaje que estamos construyendo, sino variables del español, que estamos suponiendo que pueden tomar valores en el conjunto de símbolos de primer orden y, en particular, podemos reemplazar por símbolos de variable de $\mathcal{A}(\tau)$. Por decir, en nuestro ejemplo (1.2.1.5), podríamos hacer $x := \overset{F}{x_0}$, $y := \forall$; y el último inciso del ejemplo nos diría que $(, \overset{F}{x_0}) \approx \overset{F}{x_0} \vee \overset{F}{x_0}, \overset{F}{x_0} \vee \forall$ es una expresión de tipo τ . A los conceptos y símbolos que tengan sentido en el metalenguaje, también les agregaremos el prefijo “meta” cuando haya riesgo de confusión. El presente comentario que expresado entonces, de manera más simple, diciendo que tanto x como y son metavariabes y no símbolos de variable de tipo τ .

Comentario 1.2.1.11. Procuraremos denotar metavariabes mediante las letras que resultan más familiares para la práctica matemática; de manera que, habitualmente tendremos: f, g, h serán metavariabes que representan símbolos funcionales; x, y, z serán metavariabes que representan símbolos de variable; R será una metavariabes que representa símbolos relacionales; U, V, W serán metavariabes que representan símbolos de variable de alguna valencia que utilizaremos para referirnos a subconjuntos; etc.

Definición 1.2.1.12. El conjunto de objetos del lenguaje de primer orden de tipo τ , al que denotaremos $\text{Obj}(\mathcal{L}_\tau)$, y su respectiva valencia, $\mathbf{v}(x)$, vendrán dados recursivamente, como sigue:

1. $\mathbf{V} \cup \text{Dom}(\tau) \cup \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}} \text{Var}(V) \right) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{L}_\tau)$, $\mathbf{v}|_{\mathbf{V}} = \text{Id}_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{v}|_{\text{Dom}(\tau)} = \tau$ y para todo $V \in \mathbf{V}$ la valencia de las variables de V es V ; es decir: $\mathbf{v}[\text{Var}(V)] = \{V\}$.
2. Si $f \in \mathbf{F}$ es tal que $\mathbf{v}(f) = (V_1, \dots, V_{n+1})$ y $t_1, \dots, t_n \in \text{Obj}(\mathcal{L}_\tau)$ son tales que $\mathbf{v}(t_i) = V_i$, entonces $f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Obj}(\mathcal{L}_\tau)$ y $\mathbf{v}(f(t_1, \dots, t_n)) = V_{n+1}$.
3. Ninguna otra expresión es un objeto del lenguaje de primer orden de tipo τ .

1 Preliminares y generalidades

En particular tenemos la siguiente función de valencia $\mathbf{v} : \text{Obj}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow \mathbf{V}^*$.

Ejemplo 1.2.1.13. Dado que queremos que las valencias representen a los tipos de elementos con los que estamos trabajando, continuando con el ejemplo (1.2.1.5), habría que pedir que $\mathbf{v}(0_1) = \tau(0_1) = F$, $\mathbf{v}(0_2) = \tau(0_2) = V$, $\mathbf{v}(1) = F$, $\mathbf{v}(\bullet_1) = \tau(\bullet_1) = (F, F, F)$, $\mathbf{v}(\bullet_2) = \tau(\bullet_2) = (F, V, V)$, $\mathbf{v}(+_1) = \tau(+_1) = (F, F, F)$, $\mathbf{v}(+_2) = \tau(+_2) = (V, V, V)$ y $\mathbf{v}(<) = \tau(<) = (F, F)$; lo que codificará en el lenguaje: 0_1 es un elemento de F ; 0_2 es un elemento de V ; 1 es un elemento de F ; \bullet_1 es una función que toma elementos de $F \times F$ y los hace corresponder con elementos de F ; \bullet_2 es una función que toma elementos de $F \times V$ y los hace corresponder con elementos de V ; $+_1$ es una función que toma elementos de $F \times F$ y los hace corresponder con elementos de F ; $+_2$ es una función que toma elementos de $V \times V$ y los hace corresponder con elementos de V ; $<$ es una relación binaria de elementos de F . De este modo, también:

$$\mathbf{v}(+_2(\bullet_2(x_0, 0_2), x_{47})) = V$$

pues $\mathbf{v}(\bullet_2) = (F, V, V)$, $(F, V) = (\mathbf{v}(x_0), \mathbf{v}(0_2))$, $\mathbf{v}(+_2) = (V, V, V)$ y $(V, V) = (\mathbf{v}(+_2(\bullet_2(x_0, 0_2))), \mathbf{v}(x_{47}))$. Esto último codifica de manera formal lo que habitualmente escribiríamos como $x_0 \cdot 0 + x_{47} \in V$; que es una expresión más parecida a aquellas que solemos utilizar para referirnos a vectores.

Definición 1.2.1.14. Los términos de tipo τ son los objetos t del lenguaje, que no son ni símbolos relacionales, ni etiquetas de valencia; tales que $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{V}$. Denotaremos \mathbf{T}_τ al conjunto de términos de tipo τ .

Observación 1.2.1.15. Todos los términos son variables, constantes o bien de la forma $f(t_1, \dots, t_n)$ donde t_1, \dots, t_n son términos y f un símbolo funcional. De este modo podemos ver que los términos son precisamente las representaciones formales de las manipulaciones que realizamos mediante funciones a elementos de un dominio.

Comentario 1.2.1.16. En esencia, los términos son aquellas expresiones que representarán elementos de algún tipo.

Ejemplo 1.2.1.17.

- $+_2(\bullet_2(x_0, 0_2), x_{47})$
- 0_1
- $+_2(x_1, x_8)$

son términos; mientras que

- $x \approx x$
- $\bullet_2(0_2, 0_2)$

no lo son, pues ni siquiera son objetos (para la segunda de estas expresiones, notar que el producto por escalar no puede multiplicar dos vectores, lo cual está codificado en que las valencias $\mathbf{v}(0_2) = V$, $\mathbf{v}(\bullet_2) = (F, V, V)$).

Definición 1.2.1.18. Una fórmula atómica de tipo τ es una expresión de la forma $t_1 \underset{V}{\approx} t_2$ o de la forma $R(t_1, \dots, t_n)$; donde t_1, \dots, t_n son términos, $R \in \mathbf{R}$ y las valencias son compatibles; es decir, en el primer caso $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = V$, mientras que en el segundo caso $\mathbf{v}(R) = (\mathbf{v}(t_1), \dots, \mathbf{v}(t_n))$.

Definición 1.2.1.19. El conjunto de fórmulas de tipo τ viene dado recursivamente como sigue:

1. Las fórmulas atómicas de tipo τ son fórmulas de tipo τ .
2. Si α y β son fórmulas de tipo τ , y x es un símbolo de variable de \mathcal{L}_τ , entonces son fórmulas de tipo τ :
 - $\neg(\alpha)$
 - $(\alpha) \rightarrow (\beta)$
 - $(\alpha) \vee (\beta)$
 - $(\alpha) \wedge (\beta)$
 - $(\alpha) \leftrightarrow (\beta)$
 - $\forall x(\alpha)$
 - $\exists x(\alpha)$
3. Ninguna otra expresión es fórmula de \mathcal{L}_τ .

Al conjunto de fórmulas de tipo τ lo denotaremos Φ_τ .

Definición 1.2.1.20. Una subfórmula de una fórmula α es una subsucesión de α , formada por elementos consecutivos de α , que es una fórmula en si misma.

Comentario 1.2.1.21. De la misma manera que en la definición anterior, le añadiremos el prefijo “sub” a los conceptos en los que tenga sentido y no haya riesgo de malinterpretación. Por decir: una subexpresión será una subsucesión de una expresión que sea una expresión en si misma –o sea, cualquier subsucesión–, un subespacio vectorial de un espacio vectorial será un subconjunto que tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones restringidas; etc. No considero necesario incluir una definición sumamente formal para cada “sub-algo” pues casi siempre se sobreentiende del contexto; y reservaré esta práctica para situaciones en las de verdad exista riesgo de malinterpretación.

Ejemplo 1.2.1.22. $\forall x_1^F(\forall x_0^V(\bullet_2(x_1^F, x_0^V) \approx 0_2))$ es una fórmula, mientras que $\forall x_1^F \forall x_0^V(\bullet_2(x_1^F, x_0^V) \approx 0_2)$ no lo es, ya que, si analizamos las reglas de construcción de estas, no puede existir ninguna fórmula con una subexpresión de la forma $\forall x_1^F \forall$. Por otro lado, $\bullet_2(x_1^F, x_0^V) \approx 0_2$ es una subfórmula –atómica– de $\forall x_1^F(\forall x_0^V(\bullet_2(x_1^F, x_0^V) \approx 0_2))$.

Comentario 1.2.1.23. En la práctica y en la medida de lo posible, haremos las simplificaciones prudentes a todas estas reglas para facilitar la lectura y escritura. Por ejemplo: pese a que $\forall x_1^F \forall x_0^V(\bullet_2(x_1^F, x_0^V) \approx 0)$ no es fórmula, no hay ningún riesgo de malinterpretación si nos referimos a

1 Preliminares y generalidades

“la fórmula $\forall x_1^F \forall x_0^V (\bullet(x_1, x_0) \approx 0)$ ”; pues se entiende perfectamente en qué orden habría que añadir paréntesis y cuales subíndices hay que agregar para obtener la fórmula $\forall x_1^F (\forall x_0^V (\bullet(x_1, x_0) \approx 0_2))$, a la que nos referimos. Lo mismo pasa si escribimos $x \approx 0_2 \rightarrow \forall y (\bullet(y, x) \approx 0_2)$; entendemos que x representa una variable de tipo vector, y representa una variable de tipo escalar, \bullet representa al producto por escalares y que lo anterior se lee “si equis es igual a cero entonces, para toda ye, ye por equis es igual a cero”; que se representaría formalmente mediante dos variables, digamos x_0^V y x_0^F , y la fórmula $(x_0^V \approx 0) \rightarrow (\forall x_0^F (\bullet(x_0^F, x_0^V) \approx 0_2))$.

1.2.2. Estructuras y noción de verdad

Definición 1.2.2.1. Una interpretación para τ o τ -interpretación es una funcional

$$\mathfrak{I} : \mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C} \rightarrow \text{Set}$$

donde Set es la clase de todos los conjuntos¹⁶; tal que

- Si $R \in \mathbf{R}$ es tal que $\mathbf{v}(R) = (V_1, \dots, V_n)$, entonces

$$\mathfrak{I}(R) \subseteq \mathfrak{I}(V_1) \times \dots \times \mathfrak{I}(V_n)$$

- Si $f \in \mathbf{F}$ es tal que $\mathbf{v}(f) = (V_1, \dots, V_{n+1})$, entonces

$$\mathfrak{I}(f) : \mathfrak{I}(V_1) \times \dots \times \mathfrak{I}(V_n) \rightarrow \mathfrak{I}(V_{n+1})$$

- Si $c \in \mathbf{C}$ es tal que $\mathbf{v}(c) = V$, entonces

$$\mathfrak{I}(c) \in \mathfrak{I}(V)$$

Definición 1.2.2.2. Una estructura de tipo τ o τ -estructura es una 4-tupla

$$\mathbb{S} := (\mathfrak{I}[\mathbf{V}], \mathfrak{I}[\mathbf{R}], \mathfrak{I}[\mathbf{F}], \mathfrak{I}[\mathbf{C}])$$

donde \mathfrak{I} es una interpretación para τ . A los elementos de $\mathfrak{I}[\mathbf{V}]$ los llamaremos universos de \mathbb{S} y a los elementos de $\mathfrak{I}[\mathbf{R}]$, $\mathfrak{I}[\mathbf{F}]$ y $\mathfrak{I}[\mathbf{C}]$ los llamaremos, respectivamente, relaciones, funciones y constantes (o puntos) distinguidas de \mathbb{S} .

Ejemplo 1.2.2.3. Tomemos una \mathbb{R} -álgebra en concreto, digamos $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, las matrices de 3×3 con coeficientes en \mathbb{R} . Podemos expresar esta \mathbb{R} -álgebra como la estructura

$$\mathbb{R}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) := (\{\mathbb{R}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}, \emptyset, \{\cdot_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, \cdot_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\}, \{0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, 1_{\mathbb{R}}, 1_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\})$$

donde hemos dejado implícito que hay una interpretación para algún tipo apropiado

$$\tau : \emptyset \dot{\cup} \{+1, +2, \bullet_1, \bullet_2, \bullet_3\} \dot{\cup} \{0_1, 0_2, 1_1, 1_2\} \rightarrow \{F, R\}$$

¹⁶También podríamos trabajar un universo de Grothendieck, si quisiéramos omitir trabajar con una clase propia.

Notación 1.2.2.4. Cuando se sobreentienda “qué es cada cosa”, permitiremos omitir las llaves para delimitar los universos, relaciones, funciones y constantes de una estructura; así como los conjuntos que sean vacíos bajo la interpretación. Por ejemplo, la estructura del ejemplo anterior podríamos escribirla simplemente como

$${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, \cdot_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, 0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, 1_{\mathbb{R}}, 1_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$$

utilizaremos ambas formas de escribir; según veamos conveniente.

Observación 1.2.2.5. Obsérvese que una misma estructura \mathbb{S} puede ser de varios tipos “compatibles” (es decir, tales que existe una interpretación del tipo que coincide en la imagen con la interpretación original). Podríamos introducir notación adicional para lidiar con esto cuando nos querramos referir al “tipo de semejanza de \mathbb{S} ”, pero simplemente aclaramos que cuando nos referimos a esto, en realidad estaremos diciendo “aquel tipo de semejanza compatible con \mathbb{S} que sea apropiado para nuestros fines”. Dicho esto, denotaremos $\mathfrak{t}(\mathbb{S})$ al tipo de semejanza de \mathbb{S} .

En adelante, denotaremos $\text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ al conjunto de todos los símbolos de variable de \mathcal{L}_τ y $\mathbb{S} := (\mathfrak{J}[\mathbf{V}], \mathfrak{J}[\mathbf{R}], \mathfrak{J}[\mathbf{F}], \mathfrak{J}[\mathbf{C}])$ a una estructura de tipo τ con su respectiva función de interpretación. También, el conjunto de elementos de \mathbb{S} lo denotaremos mediante el abuso de notación:

$$\mathbb{S} := \bigcup \mathfrak{J}[\mathbf{V}]$$

es decir, utilizaremos el mismo símbolo para referirnos a la 4-tupla \mathbb{S} y a su conjunto de elementos.

Comentario 1.2.2.6. En principio, la notación anterior sí podría llegar a ser ambigua, ya que distintas estructuras pueden compartir el mismo conjunto de elementos (e. g. $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}, <)$). Solucionaremos esto, según veamos apropiado en cada situación, si es que esto llegase a generar, más adelante, algún problema de ambigüedad en la redacción.

Por otro lado, si una estructura tiene varios universos V_1, \dots, V_n ; digamos, la del ejemplo anterior; V_i denotará a la estructura formada por V_i como único universo, y las relaciones, funciones y constantes distinguidas que no tengan nada que ver con otros universos. Por ejemplo, en el caso del ejemplo anterior

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$$

Definición 1.2.2.7. Una asignación para las variables de \mathcal{L}_τ en \mathbb{S} es una función $\mathbf{a} : \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow \mathbb{S}$, tal que, para todo $V \in \mathbf{V}$, $\text{Im}(\mathbf{a}|_{\text{Var}(V)}) \subseteq \mathfrak{J}(V)$. Una asignación parcial es una restricción $\mathbf{b} = \mathbf{c}|_X$ de una asignación \mathbf{c} a un subconjunto de variables $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$.

Definición 1.2.2.8. Sea t un término de tipo τ y $\mathbf{a} : \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow \bigcup \mathfrak{J}[\mathbf{V}]$ una asignación de variables. La interpretación de t en \mathbb{S} bajo la asignación \mathbf{a} , a la cual denotaremos $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}]$, viene dada recursivamente como sigue:

1. Si $t = x \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}] = \mathbf{a}(x)$.
2. Si $t \in \mathbf{C}$, $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}] = \mathfrak{J}(c)$.

1 Preliminares y generalidades

3. Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}] = \mathfrak{J}(f)(t_1^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}], \dots, t_n^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}])$.

Dado que la interpretación de símbolos de constante es la misma, indiferentemente de la asignación, podemos hacer $c^{\mathbb{S}} := \mathfrak{J}(c)$ para $c \in \mathbf{C}$. En concordancia con esto también usaremos las notaciones $f^{\mathbb{S}} := \mathfrak{J}(f)$, $R^{\mathbb{S}} := \mathfrak{J}(R)$ y $V^{\mathbb{S}} = \mathfrak{J}(V)$, para $f \in \mathbf{F}$, $R \in \mathbf{R}$ y $V \in \mathbf{V}$.

Observación 1.2.2.9. Si $\mathfrak{v}(t) = V$ entonces para toda asignación de variables como en la definición anterior se cumple que $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}] \in \mathfrak{J}(V)$.

Ejemplo 1.2.2.10. En el ejemplo (1.2.2.3), si $\mathbf{a} : \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es una asignación tal que

$$\mathbf{a} \left(\begin{matrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ x_0 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \cdot_3(+_1(1_1, 1_1), +_2(1_2, \begin{matrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ x_0 \end{matrix}))_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}] &= \cdot_3^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}(+_1(1_1, 1_1)_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}], +_2(1_2, \begin{matrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ x_0 \end{matrix})_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}]) \\ &= \cdot_3^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}(+_1^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}(\mathbf{1}_1^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}], \mathbf{1}_1^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}]), +_2^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}(\mathbf{1}_2^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}], \begin{matrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ x_0 \end{matrix}^{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}[\mathbf{a}])) \\ &= \cdot_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \left(+_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \left(+_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \left(\mathbf{1}_{{}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \\ &= (1 + 1) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 8 & 12 & 12 \\ 14 & 16 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 1.2.2.11. Dada una asignación de variables $\mathbf{a} : \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow \bigcup \mathfrak{J}[\mathbf{V}]$ y una asignación parcial $\mathbf{b} : X \rightarrow \bigcup \mathfrak{J}[\mathbf{V}]$, denotaremos $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ a la asignación dada por

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle (x) = \begin{cases} \mathbf{a}(x) & x \notin X \\ \mathbf{b}(x) & x \in X \end{cases}$$

Dado que nos interesan asignaciones parciales con dominios de una sola variable, ocasionalmente nos referiremos a la asignación \mathbf{b} mediante su gráfica; es decir: $\mathbf{b} = \{(x, \mathbf{b}(x))\}_{x \in X}$. A continuación, fijamos una asignación de variables \mathbf{a} y una fórmula α de \mathcal{L}_τ .

Definición 1.2.2.12. Definimos por recursión la noción “ \mathbf{a} satisface α en \mathbb{S} ”, lo cual denotaremos $\mathbb{S} \models \alpha[\mathbf{a}]$, de la manera siguiente:

1. Para α una fórmula atómica:

- $\mathbb{S} \models t_1 \approx t_2[\mathbf{a}]$ si y sólo si $t_1^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}] = t_2^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models R(t_1, \dots, t_n)[\mathbf{a}]$ si y sólo si $(t_1^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}], \dots, t_n^{\mathbb{S}}[\mathbf{a}]) \in R^{\mathbb{S}}$

2. Para α construida en los siguientes pasos de la recursión mediante la cual definimos el conjunto de fórmulas:

- $\mathbb{S} \models \neg(\beta)[\mathbf{a}]$ si y sólo si $\mathbb{S} \not\models \neg(\gamma)[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models (\beta) \rightarrow (\gamma)[\mathbf{a}]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models \beta[\mathbf{a}] \implies \mathbb{S} \models \gamma[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models (\beta) \vee (\gamma)[\mathbf{a}]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models \beta[\mathbf{a}]$ o $\mathbb{S} \models \gamma[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models (\beta) \wedge (\gamma)[\mathbf{a}]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models \beta[\mathbf{a}]$ y $\mathbb{S} \models \gamma[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models (\beta) \leftrightarrow (\gamma)[\mathbf{a}]$ si y sólo si son equivalentes: $\mathbb{S} \models \beta[\mathbf{a}]$ y $\mathbb{S} \models \gamma[\mathbf{a}]$
- Para cada $V \in \mathbf{V}$, $\mathbb{S} \models \forall x_n^V(\beta)[\mathbf{a}]$ si y sólo si para todo $a \in V^{\mathbb{S}}$ se cumple $\mathbb{S} \models \beta \left[\langle \mathbf{a} \mid \{(x_n^V, a)\} \rangle \right]$
- Para cada $V \in \mathbf{V}$, $\mathbb{S} \models \exists x_n^V(\beta)[\mathbf{a}]$ si y sólo si existe $a \in V^{\mathbb{S}}$ tal que $\mathbb{S} \models \beta \left[\langle \mathbf{a} \mid \{(x_n^V, a)\} \rangle \right]$

Ejemplo 1.2.2.13. Si tomamos ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ del ejemplo (1.2.2.3), \mathbf{a} una asignación de variables para dicha estructura tal que $\mathbf{a}(x_0) = 1_{\mathbb{R}}$, y cualquier variable x de valencia $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (es decir, que toma valores en matrices); se cumple $\mathbf{a}(x_0) \cdot \mathbf{a}(x) = \mathbf{a}(x)$ (con \cdot el producto por escalares); por lo que para toda asignación \mathbf{b} se cumple

$${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \models \cdot_3(x_0, x) \approx x[\langle \mathbf{b} \mid \{(x_0, 1_{\mathbb{R}})\} \rangle]$$

entonces para toda asignación \mathbf{b} y toda variable x de la valencia adecuada, se tiene:

$${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \models \exists x_0(\cdot_3(x_0, x) \approx x)[\mathbf{b}]$$

lo anterior pasa para cualquier asignación y variable x de la valencia adecuada, por lo que para toda asignación \mathbf{c} , para toda $a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y toda variable x de la valencia adecuada

$${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \models \exists x_0(\cdot_3(x_0, x) \approx x)[\langle \mathbf{c} \mid \{(x, a)\} \rangle]$$

es decir, para toda \mathbf{c} y toda x de la valencia adecuada:

$${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \models \forall x \exists x_0(\cdot_3(x_0, x) \approx x)[\mathbf{c}]$$

Comentario 1.2.2.14. Los ejemplos anteriores nos inclinan a suponer que las únicas variables relevantes en la interpretación de términos son aquellas que aparecen en estos, y las relevantes en la satisfacibilidad de fórmulas son aquellas que no aparecen cuantificadas. Esto es cierto y, más adelante, lo enunciaremos con precisión.

Notación 1.2.2.15. Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto finito de variables o estamos en el contexto en el que nos interese hablar sobre asignaciones parciales –digamos \mathbf{a} – con dominio X , las notaciones $\forall X$ y $\forall \mathbf{a}$ serán abreviaciones para la expresión $\forall x_1 \dots \forall x_n$. También escribiremos $\exists X$ y $\exists \mathbf{a}$ para abreviar $\exists x_1 \dots \exists x_n$.

Definición 1.2.2.16. Si Γ es un conjunto de fórmulas de tipo τ , escribiremos $\mathbb{S} \models \Gamma[\mathbf{a}]$, que se leerá “ \mathbf{a} satisface Γ en \mathbb{S} ”, si $\mathbb{S} \models \alpha[\mathbf{a}]$ para toda $\alpha \in \Gamma$. Asimismo escribiremos $\mathbb{S} \models \Gamma$ si $\mathbb{S} \models \Gamma[\mathbf{a}]$ para toda asignación \mathbf{a} y en este caso diremos que \mathbb{S} es un modelo de Γ . Si en el caso anterior $\Gamma = \{\alpha\}$ consta de una única fórmula, escribiremos $\mathbb{S} \models \alpha$ y diremos que α es verdadera en \mathbb{S} o que \mathbb{S} es modelo de α . Finalmente, diremos que α es falsa en \mathbb{S} si $\mathbb{S} \models \neg\alpha$.

Definición 1.2.2.17. Diremos que un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \Phi_\tau$ es satisfacible si existe una estructura \mathbb{B} y una asignación de variables $\mathbf{b} : \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \rightarrow B$ tal que $\mathbb{B} \models \Gamma[\mathbf{b}]$. Diremos que Γ es finitamente satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible.

Ejemplo 1.2.2.18. Si Γ está conformado por los axiomas de grupo, anillo o campo, Γ es satisfacible; pues cualquier grupo, anillo o campo cumple, respectivamente, dichos axiomas (con cualquier asignación, como veremos más adelante; pues dichos axiomas no tienen variables sin cuantificar). Por otro lado, si Σ es cualquier conjunto desde el cual “se puede deducir una contradicción” –esto tiene una definición, pero por ahora entiéndase de manera heurística–, entonces Γ no es satisfacible; por ejemplo, si $\Sigma = \{\neg(x \approx x)\}$ para algún símbolo de variable x .

El siguiente teorema es el primero de los dos pilares fundamentales de la lógica de primer orden y es llamado teorema de compacidad:

Teorema 1.2.2.19. Son equivalentes para un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \Phi_\tau$:

- Γ es satisfacible.
- Γ es finitamente satisfacible.

Demostración. puede consultarse en [21]. □

Comentario 1.2.2.20. En [21], la prueba del teorema anterior, y todas las demás que vienen incluidas ahí, se encuentran hechas para el caso de una sola etiqueta de valencia (1-variada); sin embargo; existe una manera natural de traducir la lógica multi-variada a la lógica 1-variada¹⁷. De manera heurística, sólo diré que podemos convertir cada etiqueta de valencia en un símbolo relacional y añadir algunos requerimientos extra sobre la formación de términos y fórmulas. Por ejemplo: la fórmula que expresa que existe un elemento en el campo –el 1– que induce mediante el producto por escalares el morfismo identidad en sus espacios vectoriales; es decir la fórmula

$$\exists^F c \forall^V v (c \cdot v \approx v)$$

podemos escribirla en la forma

$$\exists c (F(c) \wedge \forall y (V(y) \rightarrow (c \cdot y \approx y)))$$

que sólo necesita una etiqueta de valencia.

Esta será la última vez que aclaremos esto: en adelante, aceptaremos que cualquier prueba hecha para lógica 1-variada se puede traducir de manera apropiada a una prueba para lógica multi-variada.

Observación 1.2.2.21. Puede ocurrir que α no sea verdadera ni falsa en \mathbb{S} , pues pueden existir asignaciones que satisfagan α y asignaciones que satisfagan $\neg\alpha$.

Ejemplo 1.2.2.22. La fórmula $\exists x(x \cdot y \approx 1)$ es satisfacible en campos, mediante cualquier asignación que haga $y \neq 0$, pero claramente ninguna asignación que haga $y = 0$ la satisface; por lo tanto, dicha fórmula no es verdadera ni falsa en campos.

¹⁷Ver sección 6.1 en [23].

Definición 1.2.2.23. *Dados dos conjuntos de fórmulas de tipo τ , Γ y Σ : diremos que Σ es consecuencia semántica de Γ , lo cual denotaremos $\Gamma \models \Sigma$, si y sólo si para toda \mathbb{E} estructura de tipo τ y para toda asignación \mathbf{b} para las variables de \mathcal{L}_τ en \mathbb{E} , si $\mathbb{E} \models \Gamma[\mathbf{b}]$ entonces $\mathbb{E} \models \Sigma[\mathbf{b}]$.*

Equivalente al teorema de compacidad, es el siguiente teorema¹⁸:

Teorema 1.2.2.24. *Son equivalentes para un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \Phi_\tau$ y una fórmula $\varphi \in \Phi_\tau$:*

- $\Gamma \models \varphi$.
- Existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.

Ejemplo 1.2.2.25. *Pensando nuevamente en campos, sería fácil escribir $\neg(y \approx 0) \models \exists x(x \cdot y \approx 1)$; pero hay que tener cuidado: no toda estructura del tipo de semejanza de campos es un campo –por ejemplo, cualquier anillo con unidad tiene el mismo tipo de semejanza–. Lo que tendríamos que escribir para expresar correctamente lo anterior sería:*

$$\{\text{Axiomas de campo}\} \cup \{\neg(y \approx 0)\} \models \exists x(x \cdot y \approx 1)$$

Definición 1.2.2.26. *Diremos que un símbolo s aparece en una expresión ϵ si y sólo si $s \in \text{Im}(\epsilon)$ (recordar que $\epsilon : n \rightarrow \mathcal{A}(\tau)$ es una sucesión finita de símbolos).*

Ejemplo 1.2.2.27. *El símbolo \forall y el símbolo \rightarrow aparecen en la expresión $(\rightarrow)\forall$; mientras que el símbolo \approx no aparece.*

Definición 1.2.2.28. *Definimos por recursión la noción “la variable $x \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ aparece libre en la fórmula α ”:*

1. *Para fórmulas atómicas: x aparece libre en una fórmula atómica si y sólo si aparece en dicha fórmula.*
2. *Para fórmulas construidas por recursión a partir de las atómicas:*
 - *Si $\alpha = \neg(\beta)$, x aparece libre en α si y sólo si x aparece libre en β .*
 - *Si $\alpha = (\beta)C(\gamma)$, con $C \in \{\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ un conectivo binario, x aparece libre en α si y sólo si x aparece libre en β o en γ .*
 - *Si $\alpha = C\gamma(\beta)$, con $C \in \{\forall, \exists\}$ un cuantificador, x aparece libre en α si y sólo si x aparece libre en β y $x \neq \gamma$.*

Si x aparece libre en α , también diremos que x es una variable libre de α .

Ejemplo 1.2.2.29. *En la fórmula $\exists z\forall x((x \approx y) \rightarrow (z \approx y))$, la única variable que aparece libre es y , pues z y x aparecen “dentro del alcance de un cuantificador” y ninguna otra variable aparece en ella.*

Definición 1.2.2.30. *Un término $t \in \mathbf{T}_\tau$ es cerrado si no aparecen variables en él.*

¹⁸Ver sección 1.2 en [21].

Ejemplo 1.2.2.31. $+(0, 1)$ es un término cerrado, mientras que $+(x, 0)$ no lo es si x es un símbolo de variable.

Definición 1.2.2.32. Si $\Gamma \subseteq \Phi_\tau$, denotaremos ${}^0\Gamma$ al conjunto formado por las fórmulas de Γ en las que no aparece ninguna variable libre.

- Un enunciado o fórmula cerrada de tipo τ es una fórmula $\varphi \in {}^0\Phi_\tau$.
- Una teoría de tipo τ es un conjunto de enunciados de tipo τ .

Proposición 1.2.2.33. Sea t un término de tipo τ y \mathbf{b}, \mathbf{b}' dos asignaciones de variables cualesquiera en \mathbb{S} :

1. Si $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}'(x)$ para toda $x \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ tal que x aparece en t , entonces $t^{\mathbb{S}}[\mathbf{b}] = t^{\mathbb{S}}[\mathbf{b}']$.
2. Si $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}'(x)$ para toda $x \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ tal que x aparece libre en α , entonces $\mathbb{S} \models \alpha[\mathbf{b}]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models \alpha[\mathbf{b}']$.

Demostración. Por (B-F) inducción sobre la formación de términos y fórmulas (véase [20]). □

Corolario 1.2.2.34. En términos cerrados y en enunciados las asignaciones son irrelevantes.

Corolario 1.2.2.35. Si α es un enunciado de tipo τ , son equivalentes:

- $\mathbb{S} \models \alpha$
- $\mathbb{S} \not\models \neg(\alpha)$

Comentario 1.2.2.36. El corolario anterior nos dice que, restringido a enunciados, el símbolo de negación es consistente con la semántica de la negación en el metalenguaje, a diferencia de lo que pasa en fórmulas en general (observación 1.2.2.21). En este sentido es que se dice que la propiedad de ser verdadero o falso le corresponde a los enunciados y no a las fórmulas en general. Tiene mucho sentido si lo pensamos un momento: ¿qué valor de verdad le correspondería a algo del estilo “ x es mi amigo”? y, por otro lado, una vez que acotamos la variable x (la cuantificamos) o la sustituimos por un valor concreto, e. g. “Mario”, el valor de verdad se determina de acuerdo a si la estructura “mundo real” (que, para este caso particular, podríamos pensarla como una estructura con un universo y una relación binaria distinguida) hace verdad los enunciados “todos son mis amigos”, “hay alguien que es mi amigo” y “Mario es mi amigo”.

Definición 1.2.2.37. Sean t, t_0 términos de tipo τ , sea $x \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ tal que $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(t)$ y sea α una fórmula de tipo τ . Definiremos por recursión las siguientes dos abreviaturas:

- $(t_0)_t^x$ es una abreviatura para “la sustitución de t en lugar de cada ocurrencia de la variable x en t_0 ”
- $(\alpha)_t^x$ es una abreviatura para “la sustitución de t en lugar de cada ocurrencia libre de la variable x en α ”

Usando la observación (1.2.1.15), es válido definir por recursión para términos de la manera siguiente:

1. ■ Si $t_0 \in \mathbf{C}$ entonces $(t_0)_t^x = t_0$
 - Si $t_0 \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ entonces $(t_0)_t^x = \begin{cases} t & t_0 = x \\ t_0 & t_0 \neq x \end{cases}$
2. Si t_0 es de la forma $f(t_1, \dots, t_n)$ con t_1, \dots, t_n términos y f un símbolo funcional entonces $(t_0)_t^x = f((t_1)_t^x, \dots, (t_n)_t^x)$.

Ahora para fórmulas

1. atómicas:
 - Si $\alpha = t_1 \approx t_2$ donde t_1 y t_2 son términos entonces $(\alpha)_t^x = (t_1)_t^x \approx (t_2)_t^x$.
 - Si $\alpha = R(t_1, \dots, t_n)$ donde $R \in \mathbf{R}$ y t_1, \dots, t_n son términos entonces $(\alpha)_t^x = R((t_1)_t^x, \dots, (t_n)_t^x)$.
2. para fórmulas construidas a partir de conectivos y cuantificadores:
 - Si $\alpha = \neg(\beta)$ entonces $(\alpha)_t^x = \neg((\beta)_t^x)$
 - Si $\alpha = (\beta)C(\gamma)$ con $C \in \{\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ entonces $(\alpha)_t^x = ((\beta)_t^x)C((\gamma)_t^x)$
 - Si $\alpha = \mathcal{C}y(\beta)$ con $\mathcal{C} \in \{\forall, \exists\}$, $y \in \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ y $z \neq x$ es la primera variable que no aparece en α ni en t (esto tiene sentido pues ambas sucesiones de símbolos son finitas) tal que $\mathbf{v}(z) = \mathbf{v}(y)$ entonces

$$(\alpha)_t^x = \begin{cases} \alpha & x \text{ no aparece libre en } \alpha \\ \mathcal{C}y((\beta)_t^x) & x \text{ aparece libre en } \alpha, \text{ "y" no aparece en } t \\ \mathcal{C}z(((\beta)_z^y)_t^x) & x \text{ aparece libre en } \alpha, \text{ "y" aparece en } t \end{cases}$$

Comentario 1.2.2.38. En la definición anterior, puede resultar conveniente decir un poco más sobre el último apartado: lo único que este nos dice es que, a la hora de hacer la sustitución de una variable, no queremos introducir variables cuantificadas donde antes no existían.

El siguiente ejemplo es tomado de [21]; de donde también nos hemos inspirado para varias de las definiciones que utilizamos, incluida específicamente, la definición anterior (cf. definición 1.16 en [21], p. 7).

Ejemplo 1.2.2.39. Consideremos la fórmula $(\exists w(\neg(w \approx v)))_{f(c,w)}^v$ donde w, v representan símbolos de variable y $f(c, w)$ un término; entonces, siguiendo la definición anterior:

$$(\exists w(\neg(w \approx v)))_{f(c,w)}^v = \exists z(((\neg(w \approx v))_z^w)_{f(c,w)}^v)$$

donde z es la primera variable de la misma valencia que w que no aparece en $\exists w(\neg(w \approx v))$ ni en $f(c, w)$. Continuamos:

$$\begin{aligned} \exists z(((\neg(w \approx v))_z^w)_{f(c,w)}^v) &= \exists z((\neg((w \approx v)_z^w))_{f(c,w)}^v) = \exists z((\neg(z \approx v))_{f(c,w)}^v) \\ &= \exists z(\neg((z \approx v)_{f(c,w)}^v)) = \exists z(\neg(z \approx f(c, w))) \end{aligned}$$

Proposición 1.2.2.40. *La aplicación repetida de sustituciones de términos cerrados en lugar de ocurrencias (libres) de variables –distintas– en un término (fórmula) puede hacerse en cualquier orden; es decir: si $t \in \mathbf{T}_\tau$, $\alpha \in \Phi_\tau$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ son variables distintas de tipo τ y $\{t_i\}_{i=1}^n$ son términos cerrados de tipo τ tales que, para toda i , $\mathbf{v}(x_i) = \mathbf{v}(t_i)$, entonces, para toda permutación $\pi : n \rightarrow n$, se cumple que $(\dots(t_0)_{t_1}^{x_1} \dots)_{t_n}^{x_n} = (\dots(t_0)_{t_{\pi(1)}}^{x_{\pi(1)}} \dots)_{t_{\pi(n)}}^{x_{\pi(n)}}$ y también $(\dots(\alpha)_{t_1}^{x_1} \dots)_{t_n}^{x_n} = (\dots(\alpha)_{t_{\pi(1)}}^{x_{\pi(1)}} \dots)_{t_{\pi(n)}}^{x_{\pi(n)}}$.*

Demostración. Basta con ver que $((t)_{t_1}^{x_1})_{t_2}^{x_2} = ((t)_{t_2}^{x_2})_{t_1}^{x_1}$ y $((\alpha)_{t_1}^{x_1})_{t_2}^{x_2} = ((\alpha)_{t_2}^{x_2})_{t_1}^{x_1}$ si t es un término en el que no aparecen las variables x_i , α es una fórmula en la que las variables x_i no aparecen libres y t_i son términos cerrados. Esto es inmediato de la definición para cualquier paso de la construcción de términos o fórmulas; con la posible excepción de aquellos pasos en los que agregamos cuantificadores. Para estos pasos, como t_1, \dots, t_n son términos cerrados, el último apartado de la definición (1.2.2.37) nos dice que

$$((\mathcal{C}y(\beta))_{t_1}^{x_1})_{t_2}^{x_2} = \begin{cases} \alpha & x_1, x_2 \text{ no aparecen libres en } \alpha \\ \mathcal{C}y((\beta)_{t_1}^{x_1}) & x_1 \text{ aparece libre en } \alpha \text{ y } x_2 \text{ no aparece libre en } (\mathcal{C}y(\beta))_{t_1}^{x_1} \\ \mathcal{C}y((\beta)_{t_2}^{x_2}) & x_1 \text{ no aparece libre en } \alpha \text{ y } x_2 \text{ aparece libre en } (\mathcal{C}y(\beta))_{t_1}^{x_1} = \mathcal{C}y(\beta) \\ \mathcal{C}y(((\beta)_{t_1}^{x_1})_{t_2}^{x_2}) & x_1 \text{ aparece libre en } \alpha \text{ y } x_2 \text{ aparece libre en } (\mathcal{C}y(\beta))_{t_1}^{x_1} = \mathcal{C}y((\beta)_{t_1}^{x_1}) \end{cases}$$

que nos permitiría concluir la prueba por inducción sobre la construcción de términos y fórmulas. \square

Definición 1.2.2.41. *Dado $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, una presustitución de X por términos cerrados es una función $X_0 : X \rightarrow \mathbf{T}_\tau$ tal que, para toda $x \in X$, $X_0(x)$ es un término cerrado de la misma valencia que x ; es decir, si $\mathbf{v}(x) = V$, entonces $\mathbf{v}(X_0(x)) = V$.*

Gracias a la proposición anterior, las siguientes notaciones no dependen de ningún orden en particular.

Definición 1.2.2.42. *Si X es un conjunto de variables, X_0 es una presustitución de X por términos cerrados y $\{x_1, \dots, x_n\}$ es el conjunto de variables de X que aparecen en un término t_0 (fórmula α), entonces denotaremos:*

$$t_0(X_0) := (\dots(t_0)_{X_0(x_1)}^{x_1} \dots)_{X_0(x_n)}^{x_n} \quad \alpha(X_0) := (\dots(\alpha)_{X_0(x_1)}^{x_1} \dots)_{X_0(x_n)}^{x_n}$$

Por otro lado, introducimos la notación $\Gamma(X) := \Gamma$ para cualquier conjunto de términos (fórmulas) Γ tal que toda variable (libre) de cualquier término (fórmula) de Γ pertenece al conjunto X . Asimismo, denotaremos $\Gamma(X_0) := \{\beta(X_0) : \beta \in \Gamma\}$. También hacemos $\beta(X) := \beta$ para cualquier término (fórmula) $\beta \in \{\beta\}(X)$ (es decir, la notación $\beta(X)$ nos indica que las variables (libres) del término (fórmula) β pertenecen a X). Por último, denotaremos $\beta(X, Y) := \beta(X \sqcup Y)$, $\Gamma(X, Y) := \Gamma(X \sqcup Y)$, $\beta(X_0, Y_0) := \beta(X_0 \sqcup Y_0)$ y $\Gamma(X_0, Y_0) := \Gamma(X_0 \sqcup Y_0)$ para conjuntos de variables ajenos y presustituciones por términos cerrados para los mismos. Las notaciones $\beta(X_0, Y)$, $\beta(X, Y_0)$, $\Gamma(X_0, Y)$ y $\Gamma(X, Y_0)$ denotarán que únicamente aplicamos presustituciones en el subconjunto correspondiente de $X \sqcup Y$.

Observación 1.2.2.43. *Es fácil probar, usando la definición recursiva de términos y fórmulas, que: si $t(X)$ es un término, $\alpha(X)$ es una fórmula y X_0 es una presustitución de X por términos cerrados, entonces $t(X_0)$ y $\alpha(X_0)$ son, respectivamente, un término cerrado y un enunciado.*

Teorema 1.2.2.44. *Sea \mathbf{a} una asignación de variables de \mathcal{L}_τ en \mathbb{S} . Con las hipótesis de la definición (1.2.2.37) se cumplen:*

- $t_0^\mathbb{S} [\langle \mathbf{a} | \{(x, t^\mathbb{S}[\mathbf{a}])\} \rangle] = ((t_0)_t^x)^\mathbb{S}[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models \alpha [\langle \mathbf{a} | \{(x, t^\mathbb{S}[\mathbf{a}])\} \rangle]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models (\alpha)_t^x[\mathbf{a}]$

Demostración. [21], p. 8-10. □

El teorema anterior nos dice que la acción de hacer variar en interpretaciones de términos lo que vale una asignación en una variable puede caracterizarse mediante una sustitución puramente formal en el lenguaje \mathcal{L}_τ , sin cambiar la asignación. Por otro lado, de acuerdo a la proposición (1.2.2.33), la interpretación de términos bajo cualquier asignación y la satisfacción de cualquier asignación para una fórmula en \mathbb{S} dependen únicamente de los valores de dicha asignación en una cantidad finita de variables. Combinando estas dos ideas, la interpretación de términos y la satisfacción de fórmulas pueden caracterizarse completamente mediante manipulaciones formales en el lenguaje; especificando una cantidad finita de sustituciones, una por cada variable que aparece en los términos y una por cada variable que aparece libre en las fórmulas. Lo anterior queda expresado de manera más elegante en el siguiente corolario:

Corolario 1.2.2.45. *si X_0 es una presustitución de X por términos cerrados, donde X contiene a las variables que aparecen (libres) en $t_0(\alpha)$, entonces*

- $t_0(X)^\mathbb{S} [\langle \mathbf{a} | \{(x, X_0(x)^\mathbb{S}[\mathbf{a}])\}_{x \in X} \rangle] = t_0(X_0)^\mathbb{S}[\mathbf{a}]$
- $\mathbb{S} \models \alpha(X) [\langle \mathbf{a} | \{(x, X_0(x)^\mathbb{S}[\mathbf{a}])\}_{x \in X} \rangle]$ si y sólo si $\mathbb{S} \models \alpha(X_0)[\mathbf{a}]$

Comentario 1.2.2.46. *En el corolario anterior $t_0(X_0)$ y $\alpha(X_0)$ son, respectivamente, un término cerrado y un enunciado, por lo que, de hecho, la asignación \mathbf{a} está prácticamente de adorno, de acuerdo a la proposición (1.2.2.33). En principio, esto vuelve tentador pensar que podríamos prescindir completamente de la noción de asignación y trabajar únicamente con la variación formal de términos; el problema es que los términos son complicados de escribir salvo cuando son constantes o variables; por ejemplo: en el lenguaje de cualquier anillo con unidad $\mathbb{A} = (\{\mathbb{A}\}, \emptyset, \{+, \cdot\}, \{0, 1\})$, no tenemos una fórmula $f(c_1, c_1) \approx c_2$ para referirnos a algo tan sencillo como lo es el que $1+1=2$ en dicho anillo. Aún peor, pueden haber $-y$, por un argumento de cardinalidad, suelen haber elementos de \mathbb{A} que no pueden ser representados mediante un término. La primera solución a este predicamento podría ser añadir a nuestro lenguaje todos los elementos de \mathbb{A} como símbolos de constante, pero entonces tendríamos que usar un lenguaje distinto para cada anillo \mathbb{A} . Si quisieramos trabajar con la clase de todos los anillos para hallar propiedades de esta a partir de su lenguaje y los teoremas derivados de sus axiomas, esto sería un grave problema. Idealmente, nos gustaría que existiera entonces un anillo “monstruosamente grande”, que tenga suficientes elementos para representar a cualquier otro anillo dentro de el, y añadir sus elementos como constantes.*

1.2.3. Una hipótesis monstruosa

Retomemos la idea que discutimos en el comentario (1.2.2.46): si nos adentráramos más en esta área –la teoría de modelos–, rápidamente nos daríamos cuenta de que no es una simple suposición decir que el cardinal del lenguaje en el que trabajamos puede traernos dolores de cabeza (por ejemplo, véase la sección sobre el teorema de Löwenheim-Skolem en [21]); y es fácil ver que dicho cardinal está determinado por la cantidad de símbolos en el tipo de semejanza. Un intento de solucionar el predicamento planteado en dicho comentario sería suponer que tenemos una clase de todos los símbolos y trabajar en el lenguaje correspondiente; pero esto nos incapacitaría a hablar del lenguaje como un objeto de la teoría que estemos utilizando¹⁹. Por otro lado, podemos inspirarnos en otras áreas que hayan enfrentado algún problema similar en su formalismo. Pensemos, por ejemplo, en la construcción de los números reales desde ZFC; más específicamente en la completación de \mathbb{Q} : durante gran parte de la historia se dedujeron propiedades acerca de \mathbb{R} que dependían de la convergencia de sucesiones de racionales, sin tener una definición clara de qué es un número real o de la noción de convergencia. Mediante la aceptación de la existencia y consistencia de esa estructura a la que llamamos racionales y sus propiedades evidentes internas, pudieron probarse algunas de sus propiedades externas y, la mayor parte del tiempo, la falta de formalismo representó poco o ningún problema. Por poner algunos ejemplos de propiedades externas de \mathbb{Q} que se pueden “probar” heurísticamente sin hacer referencia explícita a los reales como objeto definido formalmente, mencionamos los siguientes:

- $\pi \notin \mathbb{Q}$
- Existen puntos en la recta que no son solución de ningún polinomio con coeficientes en \mathbb{Q} .
- Los racionales son densos en la recta.
- La sucesión de racionales $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ no converge a un número racional.

Ahora, pensando en la discusión anterior, consideremos la siguiente afirmación

Dado un conjunto de propiedades consistentes entre sí, existe un modelo de estas que es lo suficientemente grande para albergar toda la matemática relevante que estemos desarrollando en un momento dado.

Por ejemplo: si dicho conjunto de propiedades son axiomas de una teoría de conjuntos, lo anterior afirma la existencia de un universo de Groethendieck equivariante²⁰ para dichos axiomas. Claramente la afirmación anterior, a la que por ahora llamaremos “axioma perezoso”, debe hacerse más

¹⁹En cierto sentido, podríamos argumentar que esto ya lo hacemos, implícitamente, cada vez que nos inventamos una notación para un concepto nuevo; pues dicha notación ya existía en la clase “todos los símbolos que se le puedan llegar a ocurrir a alguien”. Si esto es una clase propia o no respecto a alguna teoría de conjuntos, es una pregunta puramente filosófica que depende en gran medida de la respuesta a “¿qué es un símbolo?”. Por ejemplo: de acuerdo a nuestra definición, todos los conjuntos son símbolos de algún tipo de semejanza, por lo que la clase de todos los símbolos es la clase de todos los conjuntos; sin embargo, esto no quiere decir que no exista una buena definición de “todos los símbolos que necesitamos” que nos permitiera trabajar dentro de un conjunto y no una clase propia.

²⁰Esto es, los objetos con las mismas propiedades son conjugados bajo algún grupo de automorfismos de este universo.

precisa si es que queremos utilizarla, al estilo de un axioma formal, para deducir teoremas.

El objetivo de esta sección es enunciar de manera precisa un “axioma perezoso” con el que podamos trabajar; sin entrar en demasiados detalles acerca de por qué podemos hacer esto y bajo qué restricciones. Refiero al lector interesado en profundizar en el tema a [16], al capítulo 10 de [32] y a [18].

Definición 1.2.3.1. *Sea τ un tipo de semejanza. Una expansión de τ es un tipo de semejanza ρ tal que todo símbolo de τ es también símbolo de ρ y $\rho|_{\text{Dom}(\tau)} = \tau$. Denotaremos esto como $\tau \subseteq \rho$.*

Definición 1.2.3.2. *Sea $\mathbb{S} = (\mathfrak{J}[\mathbf{V}], \mathfrak{J}[\mathbf{R}], \mathfrak{J}[\mathbf{F}], \mathfrak{J}[\mathbf{C}])$ una estructura de tipo τ y tomemos ρ una expansión de τ . Una expansión de \mathbb{S} al tipo ρ es una estructura $\mathbb{S}' = (\mathfrak{J}'[\mathbf{V}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{R}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{F}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{C}'])$ de tipo ρ tal que $\mathfrak{J}'|_{\mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C}} = \mathfrak{J}$. También diremos que \mathbb{S} es un reducto al tipo τ de \mathbb{S}' .*

Comentario 1.2.3.3. *Con la definición anterior, lo que nos dice el comentario (1.1.1.9) es que toda expansión de una estructura que pertenece a una clase de estructuras dada axiomáticamente también pertenece a dicha clase. Hacemos especial énfasis en que es en este sentido que debe interpretarse el enunciado del teorema de Johnson; pues, pues de la definición (1.2.5.5), será claro que el rango de dependencia de un campo es una propiedad que depende de si este tiene estructura adicional a la de ser campo y, de ser así, cuál.*

Ejemplo 1.2.3.4. *$(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ es una expansión de $(\mathbb{R}, <)$ y $(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}})$ es un reducto de $(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}})$. En particular, $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ es un orden total y $(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}})$ es un monoide conmutativo.*

Dado que las expansiones $\tau \subseteq \rho$ preservan la interpretación de todos los símbolos de τ , si además hacemos la convención de que usamos los mismos símbolos lógicos a la hora de expandir el lenguaje \mathcal{L}_{τ} al lenguaje \mathcal{L}_{ρ} podemos convenir que siempre que tengamos $\tau \subseteq \rho$, se tendrá $\mathcal{A}(\tau) \subseteq \mathcal{A}(\rho)$; y, en consecuencia, toda expresión de tipo τ será también una expresión de tipo ρ .

Notación 1.2.3.5. *Usaremos las siguientes notaciones para denotar los conjuntos de todas las relaciones y funciones de los universos de \mathbb{S} :*

- $\text{Fun}(\mathbb{S}) := \{f : V_1^{\mathbb{S}} \times \dots \times V_n^{\mathbb{S}} \rightarrow V_{n+1}^{\mathbb{S}} : (V_1, \dots, V_{n+1}) \in \mathbf{V}^*\}$
- $\text{Rel}(\mathbb{S}) := \{R \subseteq V_1^{\mathbb{S}} \times \dots \times V_n^{\mathbb{S}} : (V_1, \dots, V_n) \in \mathbf{V}^*\}$

Definición 1.2.3.6. *Definimos un nuevo tipo de semejanza $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}} : \mathbf{R}' \cup \mathbf{F}' \cup \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{V}'^*$ que vendrá dado como sigue:*

- $\mathbf{V}' := \mathbf{V} \sqcup \{\mathbb{S}\}$
- $\mathbf{R}' := \mathbf{R} \sqcup \text{Rel}(\mathbb{S}) \sqcup \{R \subseteq \mathbb{S}^n : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{F}' := \mathbf{F} \sqcup \text{Fun}(\mathbb{S}) \sqcup \{f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{C}' := \mathbf{C} \sqcup \left(\bigsqcup_{V \in \mathbf{V}} V^{\mathbb{S}} \right) \sqcup \mathbb{S}$

1 Preliminares y generalidades

donde $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}|_{\mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C}} = \tau$, $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(R) = (V_1, \dots, V_n)$ si $R \subseteq V_1^{\mathbb{S}} \times \dots \times V_n^{\mathbb{S}}$, $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(R) = \underbrace{(\mathbb{S}, \dots, \mathbb{S})}_{n \text{ veces}}$ si $R \subseteq \mathbb{S}^n$,
 $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(f) = (V_1, \dots, V_{n+1})$ si $f : V_1^{\mathbb{S}} \times \dots \times V_n^{\mathbb{S}} \rightarrow V_{n+1}^{\mathbb{S}}$, $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(f) = \underbrace{(\mathbb{S}, \dots, \mathbb{S})}_{n+1 \text{ veces}}$ si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}$, $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(c) = V$ si
 $c \in V^{\mathbb{S}}$ y $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(c) = \mathbb{S}$ si $c \in \mathbb{S}$.

Comentario 1.2.3.7. En la definición anterior abusamos ligeramente de la notación, por ejemplo, al decir que definimos $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(R) = (V_1, \dots, V_n)$ si $R \in \text{Rel}(\mathbb{S})$ y $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}(R) = (\mathbb{S}, \dots, \mathbb{S})$ si $R \in \{T \subseteq \mathbb{S}^n : n \in \mathbb{S}\}$ ya que el primer conjunto de relaciones está contenido en el segundo. En realidad, deberíamos escribir algo así como $R \times \{1\}$ y $R \times \{2\}$ para hablar propiamente de los elementos de la unión ajena. Asimismo, en sentido conjuntista tradicional, toda función es una relación por lo que no se tendría la condición $\mathbf{R}' \cap \mathbf{F}' = \emptyset$ requerida para que lo anterior defina un tipo de semejanza. Todo esto se soluciona de manera muy fácil, considerando conjuntos de símbolos biyectables con los conjuntos que aparecen en la definición anterior y tales que sean ajenos dos a dos. Omitimos hacer esto, salvo que sea absolutamente necesario, ya que la complejidad añadida en la escritura no aporta nada para la finalidad que hemos definido esto. Al final del día, la definición anterior la hemos hecho con la intención de tener un lenguaje suficientemente rico para hablar de todo lo que podíamos hacer en \mathbb{S} desde fuera de \mathcal{L}_{τ} , de tal forma que podamos regresar a propiedades de \mathbb{S} dadas por su lenguaje original mediante la acción de restringirnos a trabajar con fórmulas del mismo.

Observación 1.2.3.8. $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}$ es una expansión de τ .

A continuación, definimos una expansión de \mathbb{S} al tipo $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}$:

Definición 1.2.3.9. La expansión discreta de \mathbb{S} es la estructura de tipo $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}$ dada por

$$\mathfrak{D}(\mathbb{S}) := (\mathfrak{J}'[\mathbf{V}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{R}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{F}'], \mathfrak{J}'[\mathbf{C}'])$$

donde $\mathfrak{J}'|_{\mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C}} = \mathfrak{J}$ y para cada símbolo nuevo $s \notin \mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C}$ se tendrá $\mathfrak{J}'(s) = s$.

Observación 1.2.3.10. El conjunto de elementos de $\mathfrak{D}(\mathbb{S})$ es el mismo que el de \mathbb{S} pues, por definición, viene dado como:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathfrak{J}'[\mathbf{V}'] &= \bigcup_{V \in \mathbf{V}'} \mathfrak{J}'(V) = \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}} \mathfrak{J}'(V) \right) \cup \mathfrak{J}'(\mathbb{S}) = \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}} \mathfrak{J}(V) \right) \cup \mathbb{S} \\ &= \left(\bigcup \mathfrak{J}[\mathbf{V}] \right) \cup \mathbb{S} = \mathbb{S} \cup \mathbb{S} = \mathbb{S} \end{aligned}$$

Observación 1.2.3.11. Notemos que, dado que todos los elementos de \mathbb{S} son términos cerrados (símbolos de constante) de tipo $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}$, toda asignación $\mathbf{b} : \text{Var}(\mathcal{L}_{\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}}) \rightarrow \mathbb{S}$ es, de hecho, una presustitución de $\text{Var}(\mathcal{L}_{\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}})$ por términos cerrados de tipo $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}$. Más aún, de acuerdo al corolario 1.2.2.45, como $\mathbf{T}_{\tau} \subseteq \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}}$, tenemos la siguiente factorización para asignaciones de variables de \mathcal{L}_{τ} :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_{\tau} & \xrightarrow{-\mathfrak{D}(\mathbb{S})[\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle]} & \mathbb{S} \\ \downarrow & & \uparrow -\mathfrak{D}(\mathbb{S})[\mathbf{a}] \\ \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}} & \xrightarrow{-(\mathbf{b})} & \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_{\mathbb{S}}} \end{array}$$

Claramente $_{{\mathfrak{D}}(\mathbb{S})}[\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle] |_{\mathbf{T}_\tau} = _{{\mathbb{S}}}[\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle]$ y, de hecho, $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b}$, por lo que tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_\tau & \xrightarrow{_{{\mathbb{S}}}[\mathbf{b}]} & \mathbb{S} \\ \downarrow & & \uparrow _{{\mathfrak{D}}(\mathbb{S})}[\mathbf{a}] \\ \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_\mathbb{S}} & \xrightarrow{_{{\mathbb{S}}}(\mathbf{b})} & \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_\mathbb{S}} \end{array}$$

Además, notemos que $c^{\mathfrak{D}(\mathbb{S})}[\mathbf{a}] = c^{\mathfrak{D}(\mathbb{S})} = c$ para todo $c \in \mathbb{S}$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_\tau & \xrightarrow{_{{\mathbb{S}}}[\mathbf{b}]} & \mathbb{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_\mathbb{S}} & \xrightarrow{_{{\mathbb{S}}}(\mathbf{b})} & \mathbf{T}_{\mathfrak{D}_\mathbb{S}} \end{array}$$

de modo que la presustitución por términos cerrados de tipo $\mathfrak{D}_\mathbb{S}$ extiende a la noción de asignaciones de tipo τ , tal y como lo menciona informalmente el comentario (1.2.2.46).

Con justificación en lo anterior, dada cualquier asignación \mathbf{b} o asignación parcial de las variables de \mathcal{L}_τ en \mathbb{S} , tenemos permitido usar la notaciones $\Gamma(\mathbf{b})$, $t(\mathbf{b})$, $\alpha(\mathbf{b})$, etc. descritas en (1.2.2.42) para fórmulas y términos de tipo $\mathfrak{D}_\mathbb{S}$. Resumimos esto en la siguiente definición:

Definición 1.2.3.12. Si $\alpha(X) \in \mathcal{L}_\tau$ es una fórmula y $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S}$ una asignación en \mathbb{S} , definimos:

$$\mathbb{S} \models \alpha(\mathbf{a}) : \iff \mathfrak{D}(\mathbb{S}) \models \alpha(\mathbf{a})$$

Definición 1.2.3.13. Dado un conjunto de variables $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, la aridad de X será la tupla formada por los cardinales de los subconjuntos de X de variables de una misma valencia; es decir:

$$\mathbf{a}(X) := (|X \cap \text{Var}(V)|)_{V \in \mathbf{V}}$$

La aridad de una asignación será la aridad de su dominio.

Definición 1.2.3.14. Dada una tupla de cardinales $\bar{n} := (\kappa_V)_{V \in \mathbf{V}}$ y dos conjuntos X, Y de variables de aridad \bar{n} , un cambio de variables de Y a X es una biyección $f : X \rightarrow Y$ tal que, para toda $V \in \mathbf{V}$, $f[X \cap \text{Var}(V)] = Y \cap \text{Var}(V)$.

Observación 1.2.3.15. Para cada $V \in \mathbf{V}$ y para cada conjunto de variables $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, el conjunto $X \cap \text{Var}(V)$ tiene un buen orden canónico, dado por $x_i < x_j : \iff i < j$. Más aún, si definimos la función “sucesor” en cada uno de estos órdenes de la manera que resulta natural ($s_V^X(x_i) := \min(\{x \in X \cap \text{Var}(V) : x_i < x\})$), podemos generar todos los elementos de $X \cap \text{Var}(V)$ a partir de su mínimo, mediante aplicaciones de dicha función.

Ejemplo 1.2.3.16. Supongamos que tenemos, por decir, 3 valencias distintas; las cuales por comodidad denotamos mediante variables x_i, y_i, z_i . Si tomamos $X = \{y_2, y_6, y_4, z_1, z_9, z_2, x_9, x_8, x_{47}, x_3\}$,

1 Preliminares y generalidades

tendríamos que sus subconjuntos de variables de la misma valencia se encuentran bien ordenados de la siguiente manera:

$$x_3 < x_8 < x_9 < x_{47}$$

$$y_2 < y_4 < y_6$$

$$z_1 < z_2 < z_9$$

Proposición 1.2.3.17. *Dados dos conjuntos de variables de la misma aridad X, Y , existe un único cambio de variables $f_{Y,X} : X \rightarrow Y$ tal que se cumplen las siguientes dos condiciones para toda $V \in \mathbf{V}$:*

- $f_{Y,X}(\text{mín}(X \cap \text{Var}(V))) = \text{mín}(Y \cap \text{Var}(V))$
- $f_{Y,X} \circ s_V^X = s_V^Y \circ f_{Y,X}$

Demostración. Dos conjuntos del mismo cardinal, bien ordenados mediante el mismo tipo de orden (todas las variables tienen el orden de los naturales) tienen un isomorfismo de orden canónico; y este cumple lo propuesto. \square

Definición 1.2.3.18. *Dada una asignación $\mathbf{a} : Y \rightarrow \mathbb{S}$ y un conjunto $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ de aridad $\mathbf{a}(Y)$, denotaremos $\mathbf{a}^X := \mathbf{a} \circ f_{Y,X}$.*

Observación 1.2.3.19. *Si $\mathbf{a} : Y \rightarrow \mathbb{S}$ es una asignación de aridad \bar{n} y $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ es un conjunto de variables de aridad \bar{n} , entonces \mathbf{a}^X es una asignación parcial para las variables de X .*

Definición 1.2.3.20. *Denotaremos*

$$\mathbf{A}_\mathbb{S} := \{\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S} : X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \wedge \forall x \in X (\mathbf{a}(x) \in \mathbf{v}(x)^\mathbb{S})\}$$

al conjunto de todas las asignaciones de variables en \mathbb{S} . Por otro lado, si $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, denotaremos

$$\mathbb{S}^X := \{\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S} : \forall x \in X (\mathbf{a}(x) \in \mathbf{v}(x)^\mathbb{S})\}$$

al conjunto de asignaciones parciales con dominio $X \subseteq \text{Var}(V)$.

Comentario 1.2.3.21. *Dado que nos interesa hablar de los conjuntos de variables que aparecen en fórmulas y estas son sucesiones finitas, en adelante supondremos que los conjuntos de variables sobre los que trabajaremos son finitos. Obviaré mencionar esto nuevamente, pues me parece interesante dejar abierta la posibilidad de re-leer este trabajo y ver hasta dónde se puede llegar usando lógica infinitaria (en términos simples: aquella que permite fórmulas infinitas).*

La siguiente definición la utilizaremos únicamente para justificar el comentario (1.2.3.24); que, esencialmente, sirve para poder trabajar sin ambigüedad –en cuanto al orden en el que sustituimos variables en una fórmula– con la noción de “tupla”.

Definición 1.2.3.22. Para cada fórmula $\alpha : n \rightarrow \mathcal{A}(\tau)$ (recordando que es una sucesión finita de símbolos) y cada $Y \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$ de la misma aridad que $\text{Var}(\alpha)$, denotaremos $\alpha^Y : n \rightarrow \mathcal{A}(\tau)$ a la expresión dada por

$$\alpha^Y(k) := \begin{cases} \alpha(k) & \alpha(k) \notin \text{Var}(\alpha) \\ (f_{Y, \text{Var}(\alpha)} \circ \alpha)(k) & \alpha(k) \in \text{Var}(\alpha) \end{cases}$$

Observación 1.2.3.23. Es fácil ver que la expresión α^Y de la definición anterior también es una fórmula²¹ y, de hecho, para cualquier asignación $\mathbf{a} : \text{Var}(\alpha) \rightarrow \mathbb{S}$ y Y de la misma aridad que $\text{Var}(\alpha)$:

$$\mathbb{S} \models \alpha(\mathbf{a}) \iff \mathbb{S} \models \alpha^Y(\mathbf{a}^Y)$$

Comentario 1.2.3.24. Lo anterior nos dice que la satisfacibilidad de una fórmula baja a un cociente apropiado; en el cual podemos hablar de satisfacibilidad de una clase de fórmulas bajo una clase de asignaciones. Si observamos cuidadosamente lo anterior, no estamos más que formalizando la idea de satisfacibilidad de una fórmula bajo una “tupla” de variables de aridad compatible. En este sentido, para cada $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$, \mathbb{S}^X no es más que un conjunto de $-$ representantes para todas las $-$ tuplas de aridad $\mathbf{a}(X)$.

Con el comentario anterior en mente, cuando hablemos de un conjunto de parámetros $C \subseteq \mathbf{A}_\mathbb{S}$, siempre podremos suponer que dicho conjunto tiene un sólo representante para cada una de las tuplas que aparecen representadas en el, lo cual elimina cualquier posible problema de cardinalidad que pudiese surgir más adelante como consecuencia de trabajar con asignaciones y no con tuplas en primer lugar; específicamente, a la hora de hablar de saturación (definición (1.2.3.31)).

Definición 1.2.3.25. Sea $C \subseteq \mathbf{A}_\mathbb{S}$ y $\Delta \subseteq \Phi_\tau$. Denotaremos

$$\Delta|^C := \{\alpha(Z, \mathbf{a}^Y) : \alpha(Z, Y) \in \Delta \wedge X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau) \wedge \mathbf{a}(Y) = \mathbf{a}(X) \wedge \mathbf{a} \in C \cap \mathbb{S}^X\}$$

Definición 1.2.3.26. Sea $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$. Un X -tipo de \mathbb{S} sobre $C \subseteq \mathbf{A}_\mathbb{S}$ es un conjunto $\Gamma(X) \subseteq \Phi_\tau|^C$ en el que $X = \text{Var}(\Gamma)$ es exactamente el conjunto de variables que aparecen en las fórmulas de Γ y tal que cumple la siguiente condición de satisfacibilidad finita: para todo subconjunto finito $\Gamma_0(X) \subseteq \Gamma(X)$ existe una asignación $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S}$ tal que $\mathbb{S} \models \Gamma_0(\mathbf{a})$.

Ejemplo 1.2.3.27. El conjunto $\left\{ < (0, y) \wedge < \left(y, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ (donde $<$ es el símbolo relacional para el orden en \mathbb{R}) es un y -tipo de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$; pues cualquier subconjunto finito de esas fórmulas es satisfacible en \mathbb{R} , por la propiedad arquimediana.

Definición 1.2.3.28. Sea $X \subseteq \text{Var}(\mathcal{L}_\tau)$. Diremos que un X -tipo de \mathbb{S} sobre C es completo si es maximal en el conjunto de X -tipos de \mathbb{S} sobre C respecto a la contención. Equivalentemente, si Γ es un X -tipo sobre C , diremos que es completo si y sólo si para toda $\alpha \in \Phi|^C$ con $\text{Var}(\alpha) = X$ se cumple $\{\alpha, \neg\alpha\} \cap \Gamma \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los X -tipos de \mathbb{S} completos sobre C los denotaremos $\mathbf{S}_C^X(\mathbb{S})$

²¹Por ejemplo, si $\alpha = \forall x_9 \exists y_2 (x_9 \approx 1 \wedge y_2 \approx 2 \rightarrow \exists x_5 (R(x_5, y_2)))$ y $Y = \{x_1, x_2, y_1\}$, entonces $\alpha^Y = \forall x_2 \exists y_1 (x_2 \approx 1 \wedge y_1 \approx 2 \rightarrow \exists x_1 (R(x_1, y_1)))$

Definición 1.2.3.29. Diremos que un X -tipo de \mathbb{S} , $\Gamma(X)$, se realiza si existe una asignación $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S}$ tal que $\mathbb{S} \models \Gamma(\mathbf{a})$. En dicho caso, diremos que \mathbf{a} realiza a Γ .

Ejemplo 1.2.3.30. Si consideramos el y -tipo de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ dado en el ejemplo anterior

$$\left\{ \langle (0, y) \wedge \langle y, \frac{1}{n} \rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

este no se realiza –como y -tipo de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ –, pues no existe $y \in \mathbb{R}$ mayor a cero y menor que cualquier elemento de la sucesión $\frac{1}{n}$.

Nótese que, de acuerdo al teorema de compacidad, todo X -tipo de \mathbb{S} es satisfacible, pero esto no necesariamente ocurre con asignaciones en la estructura \mathbb{S} . Cuando esto último sí ocurra, nos referiremos a esta propiedad como saturación.

Definición 1.2.3.31. Sea $\kappa \leq |\mathbb{S}|$ un cardinal. Diremos que \mathbb{S} es κ -saturada si para todo $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}}$, si $|C| < \kappa$ y $\Gamma \in \mathbf{S}_{\mathbb{S}}^X(C)$, Γ se realiza. Diremos que \mathbb{S} es saturada si es $|\mathbb{S}|$ -saturada.

Observación 1.2.3.32. Si \mathbb{S} es saturada, en particular, es $|V^{\mathbb{S}}|$ -saturada para todo $V \in \mathbf{V}$. De hecho, se puede probar que todos los universos infinitos de una estructura saturada tienen cardinal $|\mathbb{S}|$, notando que debe realizarse el tipo $\{\neg(x \approx_V k) : k \in \kappa_V\}$, para todo $V \in \mathbf{V}$ y $\kappa_V \subseteq \mathbb{S}$ de cardinal menor a $|\mathbb{S}|$ (si $|V^{\mathbb{S}}| < |\mathbb{S}|$, podríamos tomar $\kappa_V = V^{\mathbb{S}}$).

Definición 1.2.3.33. Dadas dos τ -estructuras \mathbb{A}, \mathbb{B} , diremos que son elementalmente equivalentes, lo cual denotaremos $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, si para todo enunciado $\alpha \in {}^0\Phi_{\tau}$ se cumple:

$$\mathbb{A} \models \alpha \iff \mathbb{B} \models \alpha$$

Definición 1.2.3.34. Dadas dos τ -estructuras \mathbb{A}, \mathbb{B} , diremos que \mathbb{A} es una subestructura de \mathbb{B} o que \mathbb{B} es una extensión de \mathbb{A} , lo cual denotaremos $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, si se cumplen las siguientes condiciones:

- $V^{\mathbb{A}} \subseteq V^{\mathbb{B}}$ para todo $V \in \mathbf{V}$
- $R^{\mathbb{A}} = R^{\mathbb{B}} \cap (V_1^{\mathbb{A}} \times \dots \times V_n^{\mathbb{B}})$ para todo $R \in \mathbf{R}$ de valencia $\mathbf{v}(R) = (V_1, \dots, V_n)$
- $f|_{\mathbb{A}} = f^{\mathbb{B}}|_{\text{Dom}(f^{\mathbb{A}})}$ para todo $f \in \mathbf{F}$
- $c^{\mathbb{A}} = c^{\mathbb{B}}$ para toda $c \in \mathbf{C}$

Diremos que \mathbb{A} es una subestructura elemental de \mathbb{B} o que \mathbb{B} es una extensión elemental de \mathbb{A} , lo cual denotaremos $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, si, además, para toda fórmula $\alpha(X) \in \Phi_{\tau}$ y toda asignación $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{A}$, se cumple

$$\mathbb{A} \models \alpha(\mathbf{a}) \iff \mathbb{B} \models \alpha(\mathbf{a})$$

Observación 1.2.3.35. Si $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ y α es un enunciado, en particular:

$$\mathbb{A} \models \alpha \iff \mathbb{B} \models \alpha$$

por lo que

$$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B} \implies \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$$

A continuación definimos los morfismos entre estructuras. Dicha definición tiene como casos particulares a la mayoría de los morfismos que usamos en otras áreas de la matemática.

Definición 1.2.3.36. *Dadas dos τ -estructuras \mathbb{A} y \mathbb{B} , un morfismo $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ será una función entre sus conjuntos de elementos que conmuta con las interpretaciones, en el siguiente sentido:*

- Si $R \in \mathbf{R}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$, entonces:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbb{A}} \iff (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathbb{B}}$$

- Si $f \in \mathbf{F}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$, entonces

$$h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- Si $c \in \mathbf{C}$, entonces:

$$h(c^{\mathbb{A}}) = c^{\mathbb{B}}$$

los monomorfismos serán los morfismos inyectivos, los epimorfismos serán los morfismos supra-yectivos y los isomorfismos serán los morfismos biyectivos. En particular, si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, diremos que h es un endomorfismo de \mathbb{A} y a los endomorfismos biyectivos les llamaremos automorfismos. Por último, diremos que h es elemental si, para toda fórmula $\alpha(X) \in \Phi_{\tau}$ y toda $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{A}$ se tiene

$$\mathbb{A} \models \alpha(\mathbf{a}) \iff \mathbb{B} \models \alpha(h \circ \mathbf{a})$$

Por otro lado, si h cumple lo anterior pero sólo está definida en un subconjunto $C \subseteq \mathbb{A}$, diremos que h es un morfismo parcial de \mathbb{A} en \mathbb{B} (cambiando \mathbb{A} por C en la definición anterior en donde tenga sentido). Como caso particular importante de todo lo anterior: diremos que h es un endomorfismo elemental parcial de \mathbb{A} si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ y $h : C \rightarrow \mathbb{A}$ es un morfismo elemental parcial de \mathbb{A} en \mathbb{A} .

Observación 1.2.3.37. *La condición ser morfismo elemental, aplicada a una fórmula atómica $x \approx y$, nos permite probar de manera inmediata que todo morfismo elemental es un monomorfismo. Debido a esto, nos referiremos a los morfismos elementales como “encajes elementales”. Por otro lado, dado cualquier encaje elemental $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, se cumple $h[\mathbb{A}] \preceq \mathbb{B}$.*

Observación 1.2.3.38. *Todo isomorfismo es un encaje elemental (cf. teorema 1.6 en [21], p. 22) y si existe un encaje elemental entre dos estructuras entonces estas son elementalmente equivalentes. En particular, los modelos de una teoría son cerrados bajo isomorfismos.*

Teorema 1.2.3.39. *Dado un conjunto A y una función inyectiva $i : A \hookrightarrow \mathbb{S}$, existe una estructura \mathbb{S}' que contiene a A y un isomorfismo $\bar{i} : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{S}$ que extiende a i . Más aún: dados dos conjuntos A, B tales que $|A| = |B| \leq |\mathbb{S}|$, cualquier biyección $\alpha : A \rightarrow B$ se extiende a un isomorfismo entre dos estructuras del mismo tipo de \mathbb{S} y que son, ambas, isomorfas a \mathbb{S} .*

Demostración. Probaremos la segunda parte del teorema y de la prueba se desprenderá la primera parte como caso particular de la construcción que haremos (tomando α como la biyección inducida por i en su imagen, $B = \text{Im}(i) = D$, $b_A|_B = \alpha^{-1}$ y $b_A|_{\mathbb{S} \setminus B} = \text{Id}_{\mathbb{S} \setminus B}$). Sea $\alpha : A \rightarrow B$ una biyección

1 Preliminares y generalidades

y $D \subseteq \mathbb{S}$ un subconjunto de \mathbb{S} de cardinal $|A|$, entonces hay una biyección $b_A : \mathbb{S} \rightarrow (\mathbb{S} \setminus D) \sqcup A$ tal que $b_A[D] = A$ y podemos definir $b_B : \mathbb{S} \rightarrow (\mathbb{S} \setminus D) \sqcup B$ como $b_B|_D = \alpha \circ b_A|_D$ y $b_B|_{\mathbb{S} \setminus D} = b_A|_{\mathbb{S} \setminus D}$. Evidentemente b_B también es una biyección y $b_B|_D \circ (b_A|_D)^{-1} = \alpha$. Ahora supongamos que \mathbb{S} viene dado mediante la función de interpretación

$$\mathbb{S} := (\mathfrak{J}[\mathbf{V}], \mathfrak{J}[\mathbf{R}], \mathfrak{J}[\mathbf{F}], \mathfrak{J}[\mathbf{C}])$$

y, para cada $i \in \{A, B\}$, consideremos las funcionales $\mathfrak{J}_i : \mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{C} \rightarrow \text{Set}$ dadas como

$$\mathfrak{J}_i(x) := \left\{ \begin{array}{l} b_i[\mathfrak{J}(x)] \\ \text{Si } x \in \mathbf{V} \\ \text{---} \\ \{(b_i(a_1), \dots, b_i(a_n)) \in b_i[\mathfrak{J}(V_1)] \times \dots \times b_i[\mathfrak{J}(V_n)] : (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{J}(x)\} \\ \text{Si } x \in \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{v}(x) = (V_1, \dots, V_n) \\ \text{---} \\ x_i : b_i[\mathfrak{J}(V_1)] \times \dots \times b_i[\mathfrak{J}(V_n)] \rightarrow b_i[V_{n+1}] \\ \quad \quad \quad (b_i(a_1), \dots, b_i(a_n)) \mapsto b_i(a_{n+1}) \\ \text{Si } x \in \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{v}(x) = (V_1, \dots, V_{n+1}) \\ \text{---} \\ b_i[\mathfrak{J}(x)] \in b_i[\mathfrak{J}(\mathbf{v}(x))] \\ \text{Si } x \in \mathbf{C} \text{ y } \mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(x) \end{array} \right.$$

Claramente \mathfrak{J}_i son interpretaciones de tipo $\mathfrak{t}(\mathbb{S})$; donde se tiene para cada universo de \mathbb{S} :

$$V^{(\mathbb{S} \setminus D) \sqcup i} = b_i[V^{\mathbb{S}}]$$

Se sigue que b_i es un isomorfismo entre las estructuras \mathbb{S} y $(\mathbb{S} \setminus D) \sqcup i$ para cada $i \in \{A, B\}$ y entonces $b_B \circ b_A^{-1} : (\mathbb{S} \setminus D) \sqcup A \rightarrow (\mathbb{S} \setminus D) \sqcup B$ es un isomorfismo y, además:

$$(b_B \circ b_A^{-1})|_A = b_B|_D \circ (b_A|_D)^{-1} = \alpha$$

□

Observación 1.2.3.40. *De la prueba anterior también tenemos el resultado de que una biyección $b : \mathbb{S} \rightarrow A$ siempre puede considerarse un isomorfismo entre \mathbb{S} y la estructura inducida en A por b mediante el procedimiento anterior.*

Corolario 1.2.3.41. *Cualquier biyección con un subconjunto de \mathbb{S} es un encaje elemental parcial entre una estructura isomorfa a \mathbb{S} y \mathbb{S} .*

Demostración. Los isomorfismos son elementales y sus restricciones son, por lo tanto, encajes elementales parciales. □

Definición 1.2.3.42. *Dado un cardinal κ , diremos que \mathbb{S} es κ -homogénea si cumple la condición: si $C \subseteq \mathbb{S}$ tiene cardinal $|C| < \kappa$ y $h : C \rightarrow \mathbb{S}$ es un encaje elemental parcial, entonces para toda $a \in \mathbb{S}$ existe un encaje elemental parcial $\hat{h} : C \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{S}$ tal que $\hat{h}|_C = h$. Diremos que \mathbb{S} es homogénea si es $|\mathbb{S}|$ -homogénea.*

La siguiente proposición nos dice que en estructuras homogéneas, los encajes elementales parciales son restricciones de automorfismos y su prueba puede ser consultada en [11], p. 133.

Proposición 1.2.3.43. *Son equivalentes*

- \mathbb{S} es homogénea.
- Si $C \subseteq \mathbb{S}$ y $|C| < |\mathbb{S}|$, todo encaje elemental parcial $h : C \rightarrow \mathbb{S}$ se extiende a un automorfismo de \mathbb{S} .

Corolario 1.2.3.44. *Si \mathbb{S} es homogénea, cualesquiera dos subestructuras elementales isomorfas de \mathbb{S} de cardinal menor al de \mathbb{S} son conjugadas bajo algún automorfismo de \mathbb{S} .*

Necesitamos una definición más para poder enunciar correctamente el axioma perezoso; al que hicimos referencia al inicio de esta sección.

Definición 1.2.3.45. *Una teoría T es completa si para todo enunciado $\alpha \in {}^0\Phi_\tau$ se tiene $\{\alpha, \neg\alpha\} \cap T \neq \emptyset$.*

Axioma perezoso 1.2.3.46. *Si una teoría completa tiene un modelo infinito entonces tiene un modelo (suficientemente) saturado y homogéneo “grande” (es decir, cuyos universos son más grandes que cualquier cardinal con el que estemos trabajando) tal que todos sus modelos pequeños (es decir, de cardinal estrictamente menor) se encajan elementalmente en el.*

Nos referiremos al modelo descrito en el corolario anterior como modelo monstruo de la teoría.

Ejemplo 1.2.3.47. *Si \mathbb{R}^* es un modelo monstruo de la teoría de \mathbb{R} (es decir, aquellos enunciados verdaderos en \mathbb{R}), entonces el y -tipo del ejemplo 1.2.3.27 se realiza; por lo que existe $x^* \in \mathbb{R}^*$ tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N} (0 < x^* < \frac{1}{n})$$

es decir, en \mathbb{R}^ tenemos infinitesimales.*

Comentario 1.2.3.48. *Respecto a por qué le he llamado “perezoso” al axioma anterior: hay toda una discusión²² acerca de “¿qué tan saturado y homogéneo necesita y/o puede ser realmente el monstruo?”. La razón es que, en principio, uno puede salirse con la suya con modelos κ -saturados y κ -homogéneos, para algún κ suficientemente grande; y esto tiene la ventaja de modificar de manera menos agresiva ZFC. Dicha discusión nos desviaría demasiado del tema central de este texto y las pruebas serían esencialmente las mismas, salvo la molesta aclaración constante de que siempre estaríamos trabajando en un modelo suficientemente saturado.*

Observación 1.2.3.49. *Todos los submodelos isomorfos pequeños –respecto a algún modelo monstruo– de una teoría completa con un modelo infinito son conjugados bajo automorfismos del monstruo.*

Terminamos esta sección con el siguiente teorema, que nos da una ventaja inmediata de trabajar en el monstruo.

²²Ver, por ejemplo: [16], [18] y [32].

Teorema 1.2.3.50. Si \mathbb{M} es un monstruo, $\mathbb{K} \preceq \mathbb{M}$ es pequeño y $C \subseteq \mathbb{M} \setminus \mathbb{K}$ es pequeño, entonces para toda biyección $\alpha : C \rightarrow D$, con $D \subseteq \mathbb{M} \setminus \mathbb{K}$, existe un automorfismo $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ tal que $h|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ y $h|_C = \alpha$.

Demostración. Por el teorema de Löwenheim-Skolem²³, existe una extensión elemental pequeña $\mathbb{K} \preceq \mathbb{L} \preceq \mathbb{M}$ con $|\mathbb{K} \cup C| < |\mathbb{L}|$. Observemos que $\text{Id}_{\mathbb{K}} \cup \alpha : \mathbb{K} \dot{\cup} C \rightarrow \mathbb{K} \dot{\cup} D$ es una biyección; entonces por la prueba del teorema 1.2.3.39 y su corolario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbb{K} \cup C \subseteq \mathbb{L}$ y que $\text{Id}_{\mathbb{K}} \cup \alpha$ es un encaje elemental parcial de $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{M}$ en $(\mathbb{L} \setminus (\mathbb{K} \dot{\cup} C)) \sqcup (\mathbb{K} \dot{\cup} D) \subseteq \mathbb{M}$. Por homogeneidad, existe un automorfismo de \mathbb{M} que extiende a $\text{Id}_{\mathbb{K}} \cup \alpha$. \square

Corolario 1.2.3.51. Si $\mathbb{K} \preceq \mathbb{M}$ y $C \subseteq \mathbb{M} \setminus \mathbb{K}$ son pequeños, toda función inyectiva $h : C \rightarrow \mathbb{M}$ se extiende a un automorfismo de \mathbb{M} .

1.2.4. Definibilidad

Una vez establecido el axioma anterior, procedemos a definir un modelo monstruo apropiado para nuestros fines.

Definición 1.2.4.1. Dadas dos estructuras, digamos

$$\mathbb{E} = (\mathcal{J}[\mathbf{V}], \mathcal{J}[\mathbf{R}], \mathcal{J}[\mathbf{F}], \mathcal{J}[\mathbf{C}]) \quad \mathbb{E}' = (\mathcal{J}'[\mathbf{V}'], \mathcal{J}'[\mathbf{R}'], \mathcal{J}'[\mathbf{F}'], \mathcal{J}'[\mathbf{C}'])$$

denotaremos

$$\mathbb{E} \cup \mathbb{E}' := ((\mathcal{J} \sqcup \mathcal{J}')[\mathbf{V} \sqcup \mathbf{V}'], (\mathcal{J} \sqcup \mathcal{J}')[\mathbf{R} \sqcup \mathbf{R}'], (\mathcal{J} \sqcup \mathcal{J}')[\mathbf{F} \sqcup \mathbf{F}'], (\mathcal{J} \sqcup \mathcal{J}')[\mathbf{C} \sqcup \mathbf{C}'])$$

le llamaremos a esta estructura la unión de \mathbb{E} y \mathbb{E}' .

Observación 1.2.4.2. El conjunto de elementos de $\mathbb{E} \cup \mathbb{E}'$ viene dado por:

$$\begin{aligned} \bigcup (\mathcal{J} \cup \mathcal{J}')[\mathbf{V} \sqcup \mathbf{V}'] &= \bigcup_{V \in \mathbf{V} \sqcup \mathbf{V}'} (\mathcal{J} \sqcup \mathcal{J}')(V) = \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}} \mathcal{J}(V) \right) \cup \left(\bigcup_{V \in \mathbf{V}'} \mathcal{J}'(V) \right) \\ &= \left(\bigcup \mathcal{J}[\mathbf{V}] \right) \cup \left(\bigcup \mathcal{J}'[\mathbf{V}'] \right) = E \cup E' \end{aligned}$$

donde E denota el conjunto de elementos de \mathbb{E} y E' denota el conjunto de elementos de \mathbb{E}' .

Definición 1.2.4.3. La potencia de una τ -estructura \mathbb{E} será la estructura dada por:

$$\mathcal{P}(\mathbb{E}) := (\{\mathcal{P}(V^{\mathbb{E}})\}_{V \in \mathbf{V}}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$$

Definición 1.2.4.4. Definimos por recursión la expansión discreta de orden n de \mathbb{S} , a la que denotaremos $\mathbb{S}(n)$, como:

$$1. \mathbb{S}(1) := \mathfrak{D}(\mathbb{S})$$

²³Ver sección 2.1 en [21].

$$2. \mathbb{S}(n+1) := \mathfrak{D}(\mathbb{S}(n) \cup \mathcal{P}(\mathbb{S}(n)))$$

Observación 1.2.4.5. *Los elementos de $\mathbb{S}(n+1)$ son*

$$\mathbb{S}(n+1) = \bigcup_{0 \leq m \leq n} \mathcal{P}^m(\mathbb{S})$$

donde $\mathcal{P}^m(\mathbb{S}) = \underbrace{\mathcal{P}(\dots\mathcal{P}(\mathbb{S}))}_{m \text{ veces}}$.

En adelante supondremos que, para alguna n suficientemente grande (esto quedará más claro conforme avancemos), $\mathbb{S}(n)^*$ es un modelo monstruo de una teoría completa de tipo $\mathfrak{t}(\mathbb{S}(n))$ de la cual $\mathbb{S}(n)$ es un modelo. Todos los cardinales con los que trabajaremos, excepto los que correspondan a los universos de $\mathbb{S}(n)^*$ serán pequeños, salvo que aclaremos lo contrario (esto es particularmente importante para los conjuntos de parámetros $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}(n)^*}$, para poder usar la saturación de $\mathbb{S}(n)^*$).

Definición 1.2.4.6. *Denotaremos, para cada $\tau \subseteq \rho \subseteq \mathfrak{t}(\mathbb{S}(n))$, $\mathbb{S}|\rho := \mathbb{S}(n)|_\rho$ y $\mathbb{S}|\rho^* := \mathbb{S}(n)^*|_\rho$. En particular: $\mathbb{S}^* := \mathbb{S}(n)^*|_\tau$ y, para cada $m \leq n$ $\mathbb{S}(m)^* := \mathbb{S}(n)^*|_{\mathfrak{t}(\mathbb{S}(m))}$.*

Observación 1.2.4.7. *$(\mathbb{S}|\rho)^*$ es un modelo monstruo de $T|_\rho$ para todo $\tau \subseteq \rho \subseteq \mathfrak{t}(\mathbb{S}(n))$. En particular, $\mathbb{S}(m)^*$ es un modelo monstruo de $T|_{\mathfrak{t}(\mathbb{S}(m))}$, $\mathbb{S}(m) \preceq \mathbb{S}(m)^*$ para toda $m \leq n$, \mathbb{S}^* es un modelo monstruo de $T|_\tau$ y $\mathbb{S} \preceq \mathbb{S}^*$.*

Dado que el modelo monstruo es obtenido de una teoría completa que tenga “algún modelo infinito” y no de ninguno de sus modelos particulares, enfatizamos que, al definir algo para \mathbb{S} que dependa de \mathbb{S}^* , no hemos perdido generalidad para \mathbb{S} ; es decir, \mathbb{S} (resp. $\mathbb{S}(m)$) representará una subestructura elemental arbitraria de \mathbb{S}^* (resp. $\mathbb{S}(m)^*$).

Comentario 1.2.4.8. *Cualquier propiedad de $\mathbb{S}(n)^*$ “razonablemente acotada” (de primer orden, sobre un conjunto pequeño de parámetros) que tenga “suficiente evidencia a su favor” (finitamente satisfacible) es, de hecho cierta y $\mathbb{S}(n)^*$ tiene al menos un “testigo” (una asignación) de que así es; que es a lo que se refiere la saturación. Más aún, dado que $\mathbb{S}(m) \preceq \mathbb{S}(m)^*$ para todo $m \leq n$, los elementos de $\mathbb{S}(m)^*$ se comportan, cuando nos referimos a ellos con parámetros obtenidos desde \mathbb{S} y sus primeras $m-1$ potencias, exactamente igual a los elementos de las primeras m potencias de \mathbb{S} , para cada $m \leq n$ (cumplen las mismas propiedades de primer orden); por lo que si queremos probar una propiedad de orden m , de \mathbb{S} , dada por un conjunto de enunciados $\Gamma \subseteq \mathfrak{F}|\mathbf{A}_{\mathbb{S}(m)}$, para la cual tenemos evidencia que nos inclina a pensar que es cierta, basta con verificar que $\mathbb{S}(m)^* \models F$ para todo subconjunto finito $F \subseteq \Gamma$. Si queremos restringirnos aún más y probar propiedades de \mathbb{S} , que correspondan al lenguaje de tipo τ expandido con los elementos de \mathbb{S} , aprovechamos que $\mathbb{S} \preceq \mathbb{S}^*$ y hacemos lo correspondiente.*

Comentario 1.2.4.9. *Pareciera tentador pensar que esta construcción nos brinda un marco de referencia suficientemente rico para trabajar con lógicas de orden superior dentro de la lógica multivariada de primer orden. En general, al trabajar en lógica, hay que tener mucho cuidado con esta clase de conclusiones apresuradas. Tomemos como ejemplo $\mathbb{S}(2)^*$: si bien, es cierto*

1 Preliminares y generalidades

que esta estructura es suficientemente rica para expresar todas las propiedades de orden 2, de \mathbb{S} ; al cuantificar sobre variables para subconjuntos de algún universo de \mathbb{S} (digamos, por ejemplo, variables de valencia $\mathcal{P}(V^{\mathbb{S}})$ para alguna $V \in \mathbf{V}$) y tratar de trasladar dicha propiedad a otra $\mathfrak{t}(\mathbb{S}(2))$ -estructura \mathbb{E} , sólo sabemos que dichos cuantificadores corren sobre el universo $\mathcal{P}(V^{\mathbb{S}})^{\mathbb{E}}$, pero dicho universo no tiene por qué coincidir con el conjunto potencia de $V^{\mathbb{E}}$. De hecho, la observación (1.2.3.32) nos da un ejemplo concreto en el que lo anterior no pasa; ya que, según dicha observación, si \mathbb{S} es infinito y denotamos S a la etiqueta de valencia para el conjunto de elementos de \mathbb{S} , entonces:

$$|\mathcal{P}(S)^{\mathbb{S}(2)^*}| = |\mathcal{P}(S^{\mathbb{S}})^{\mathbb{S}(2)^*}| = |S^{\mathbb{S}(2)^*}| < |\mathcal{P}(S^{\mathbb{S}(2)^*})|$$

de manera que los cuantificadores sobre variables de tipo $\mathcal{P}(S)$ en $\mathbb{S}(2)^*$ no corren sobre todos los subconjuntos de $S^{\mathbb{S}(2)^*}$ (de hecho, hay una cantidad grande de subconjuntos que estamos omitiendo).

Definición 1.2.4.10. Sean $D \subseteq \mathbb{S}^X$ y $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}^*}$ un conjunto pequeño de parámetros:

- Diremos que D es definible (en \mathbb{S}) sobre C o C -definible si existe $\alpha(X) \in \mathcal{L}_{\tau}|^C$ tal que $D = \{\mathbf{a} \in \mathbb{S}^X : \mathbb{S} \models \alpha(\mathbf{a})\}$. En este caso, denotaremos $\alpha(X)^{\mathbb{S}} := \alpha(\mathbb{S}^X) := D$; o $\alpha(X, \mathbf{b})^{\mathbb{S}} := \alpha(\mathbb{S}^X, \mathbf{b})$ cuando queramos especificar que $\alpha(X, \mathbf{b}) \in \Phi|^C$ es una fórmula que proviene de la sustitución de variables por libres por la asignación $\mathbf{b} \in C$ en una fórmula $\alpha(X, Y) \in \Phi$.
- Diremos que D es \vee -definible sobre C o (C, \vee) -definible si se puede expresar como una unión de una cantidad pequeña de conjuntos definibles sobre C .
- Diremos que D es tipo-definible sobre C o (C, \wedge) -definible si se puede expresar como una intersección de una cantidad pequeña de conjuntos definibles sobre C . Equivalentemente, diremos lo anterior si D es el conjunto de asignaciones que satisface algún conjunto de fórmulas $\Gamma(X) \subseteq \Phi|^C$. Usaremos la notación $\Gamma(X)^{\mathbb{S}} = D$.

Si $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{E}}$ para alguna estructura \mathbb{E} diremos que D es \mathbb{E} -definible o definible con parámetros en \mathbb{E} (\vee -definible, tipo-definible). En particular, si $\mathbb{E} = \mathbb{S}$, diremos que D es internamente definible (\vee -definible, tipo-definible); si \mathbb{E} es el modelo monstruo diremos que D es externamente definible (\vee -definible, tipo-definible). Por último, si $C = \emptyset$, simplemente diremos que D es definible (\vee -definible, tipo-definible).

Notación 1.2.4.11. Si $D \subseteq \mathbb{A}^X$ es un conjunto C -definible y $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es un morfismo, denotaremos:

$$h[D] := \{h \circ \mathbf{a} : \mathbf{a} \in D\}$$

o bien, en notación de tuplas:

$$h[D] := \{(h(x_1), \dots, h(x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

Comentario 1.2.4.12. Habitualmente se considera que los conjuntos definibles en una estructura son aquellos a los que yo les he llamado internamente definibles y no los \emptyset -definibles. He decidido adoptar esta otra convención únicamente por preferencia personal.

Comentario 1.2.4.13. *En particular, por cómo estructuramos la definición anterior nos dice que, al hablar de un conjunto definible, \forall -definible o tipo-definible sobre el monstruo, siempre suponemos que está definido sobre algún conjunto pequeño del mismo.*

Definición 1.2.4.14. *Diremos que un conjunto tipo-definible (definible) –sobre algún conjunto de parámetros– tiene una propiedad definida para conjuntos de fórmulas (fórmulas) si el conjunto de fórmulas (fórmula) que lo define tiene dicha propiedad.*

Definición 1.2.4.15. *Si C es un conjunto de parámetros, diremos que una familia de conjuntos \mathcal{F} es uniformemente C -definible (o, simplemente, “ C -definible” cuando no exista riesgo de malinterpretación) en \mathbb{S} si existe una fórmula $\varphi(X, Y) \in \Phi^C$ tal que*

$$\mathcal{F} = \{\varphi(\mathbb{S}^X, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \mathbb{S}^Y\}$$

Adoptaremos las mismas convenciones para los distintos valores de C que en la definición 1.2.4.10.

Ejemplo 1.2.4.16.

- *El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\}$ es definible en \mathbb{R} , mediante la fórmula $\cdot(x, x) \approx 0$.*
- *El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\}$ es $\{2\}$ -definible en \mathbb{Q} , mediante la fórmula $\cdot(x, x) \approx 2$ de $\Phi^{\{2\}}$ (donde 2 representa a cualquier asignación parcial $\mathbf{a} : \{y\} \rightarrow \{2\}$); y, en particular, es internamente definible en \mathbb{Q} .*
- *$\{\pi\}$ no es definible en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, pues esto nos diría que hay un polinomio que lo tiene como solución y cuyos coeficientes podemos obtener mediante sumas y productos de los neutros de la suma y el producto (es decir, sus coeficientes necesariamente estarían en \mathbb{Q} y π tendría que ser algebraico en dicho campo); sin embargo, es internamente definible de manera trivial, mediante $x \approx \pi$. Por otro lado, $\{\pi\}$ es definible en la expansión de la estructura anterior mediante sus elementos como constantes –es decir $(\{\mathbb{R}\}, \emptyset, \{+, \cdot\}, \mathbb{R})$ –, ya que, en ese lenguaje, $x \approx \pi$ es una fórmula sin parámetros. Además*

$$\{\pi\} = \bigcap_{\frac{m}{n} < \pi < \frac{p}{q}} \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{1 + \dots + 1}_m < x \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n \wedge x \underbrace{(1 + \dots + 1)}_q < \underbrace{1 + \dots + 1}_p\}$$

por lo que $\{\pi\}$ es tipo-definible en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

- *$(\mathbb{Q}, <)$ es una subestructura elemental de $(\mathbb{R}, <)$ ([25], p. 4), por lo que $(\mathbb{R}, <) \preceq (\mathbb{Q}, <)^*$ y entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x < \pi\}$ es externamente definible en $(\mathbb{Q}, <)$, ya que $\pi \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}^*$. Claramente este conjunto no es internamente definible en $(\mathbb{Q}, <)$.*
- *La base de la topología usual en \mathbb{R}*

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

1 Preliminares y generalidades

es uniformemente definible en $(\mathbb{R}, | \cdot |, <)$ (de hecho²⁴, en \mathbb{R}) pues, para cada $(x_0, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$B_\varepsilon(x_0) = |\mathbb{R} - x_0| < \varepsilon = (|y - x_0| < \varepsilon)^\mathbb{R}$$

Observación 1.2.4.17.

definible \implies internamente definible \implies externamente definible

Definición 1.2.4.18. Para cada $m \leq n$ y $x \in \mathbb{S}(n)$, denotaremos $x_m^* := x^{\mathbb{S}(m)^*}$ (recordar que todos sus elementos aparecen como símbolos de constante en el tipo de semejanza). Si m es clara del contexto, la omitiremos en la notación anterior.

Comentario 1.2.4.19. En principio, la notación anterior es innecesaria, ya que todos los símbolos de constante preservan su interpretación en extensiones de estructuras; es decir, en realidad, por definición, se tiene que $x_m^* = x$ para cualesquiera $m \leq n$, $x \in \mathbb{S}(n)$. Lo interesante aquí es que, si $m > 1$, cada elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{S}(m-1))$ ya aparecía como símbolo relacional de aridad 1 en $\mathbb{S}(m-1)$ (o, técnicamente, un símbolo de la forma c_x y uno de la forma R_x para que los símbolos de x como constante y de x como relación no puedan ser el mismo) para cada $m \leq n$ y, su interpretación como relación no tiene por qué ser la misma. Esto es más claro si notamos que la relación de pertenencia en cada universo $\mathcal{P}(V^{\mathbb{S}(m-1)})$ de $\mathcal{P}(\mathbb{S}(m-1))$ también debe aparecer como símbolo relacional de aridad 2 en $\mathbb{S}(m)$, por lo que se cumple, para todo $x \subseteq V^{\mathbb{S}(m-1)}$:

$$\mathbb{S}(m) \models \forall y (R_x(y) \leftrightarrow \in_V (y, c_x))$$

y esto es un enunciado, entonces debe cumplirse en el monstruo

$$\mathbb{S}(m)^* \models \forall y (R_x(y) \leftrightarrow \in_V (y, c_x))$$

donde $\in_V^{\mathbb{S}(m)^*}$ debe coincidir con la relación conjuntista de pertenencia habitual en elementos de $\mathbb{S}(m)$, pero esto no tiene por qué ser así si $y \in \mathbb{S}(m)^* \setminus \mathbb{S}(m)$. De hecho, específicamente se tiene, para todo $y \in \mathbb{S}(m)^*$:

$$y \in R_x^{\mathbb{S}(m)^*} \iff y \in_V^{\mathbb{S}(m)^*} c_x^{\mathbb{S}(m)^*}$$

Ahora bien, por comodidad, nosotros escribiremos x para denotar tanto al símbolo relacional como al símbolo de constante (lo cual equivale, en cierto sentido, a completar x con nuevos elementos en una relación de pertenencia localmente extendida, haciendo $\bar{x}_m := R_x^{\mathbb{S}(m)^*}$, ya que $\in_V^{\mathbb{S}(m)^*} \upharpoonright_{\mathbb{S}(m)} = \in_V^{\mathbb{S}(m)}$); sólo tendremos mucho cuidado con que, no está permitido escribir

$$\mathbb{S}(m)^* \models \forall x \forall y (x(y) \leftrightarrow \in_V (y, x))$$

pues lo anterior no es un enunciado de primer orden; de hecho ni siquiera es verdad: en principio, sólo ocurre si $x \in \mathbb{S}(m)$ (es precisamente aquí donde hay una distinción clara con lógicas de orden

²⁴El conjunto de los reales positivos es definible como $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists y (y^2 = x)\}$, el orden es definible como $<_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z \in \mathbb{R}^+ (x + z = y)\}$ y la gráfica del valor absoluto es definible como $\mathcal{G}_{|\cdot|} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \in \mathbb{R}^+ \ \& \ x = y) \ \text{ó} \ (x = 0 \ \& \ y = 0) \ \text{ó} \ (-x \in \mathbb{R}^+ \ \& \ y = -x)\}$, por lo que cualquier expresión en el lenguaje de $(\mathbb{R}, | \cdot |, <)$ puede ser reemplazada por una expresión equivalente en el lenguaje de \mathbb{R} .

superior, que sí permiten cuantificar sobre relaciones).

Todo lo anterior lo hemos aclarado para justificar que, si bien, a nivel de teoría de conjuntos habitual –o bien, de símbolos de constante– se tiene $x = x_m^*$, cuando nos refiramos a x_m^* , en realidad nos estaremos refiriendo a $R_x^{\mathbb{S}(m)^*}$.

Proposición 1.2.4.20. Para cada $m \leq n$ y $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}(m)}$ los subconjuntos de $\mathbb{S}(m)^*$ definibles sobre C son exactamente los conjuntos x_m^* con $x \subseteq V^{\mathbb{S}(m)}$ para algún universo $V^{\mathbb{S}(m)}$ de $\mathbb{S}(m)$.

Demostración. Si $x \subseteq V^{\mathbb{S}(m)}$, entonces $x_m^* = \{y \in \mathbb{S}(m)^* : \mathbb{S}(m)^* \models x(y)\}$ es definible; en particular lo es sobre C .

Por otro lado, si $D \subseteq \mathbb{S}(m)^*$ es definible sobre $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}(m)}$, entonces

$$D = \{y \in \mathbb{S}(m)^* : \mathbb{S}(m)^* \models \alpha(y, \mathbf{a})\} \subseteq \mathbf{v}(y)^{\mathbb{S}(m)^*}$$

para alguna fórmula $\alpha(y, Y) \in \Phi_{\mathfrak{t}(\mathbb{S}(m))}$ y alguna $\mathbf{a} \in C$. Sea $x := \{y \in \mathbb{S}(m) : \mathbb{S}(m) \models \alpha(y, \mathbf{a})\}$, entonces $x \subseteq \mathbf{v}(y)^{\mathbb{S}(m)}$ y, claramente

$$\mathbb{S}(m) \models \forall y(\alpha(y, \mathbf{a}) \leftrightarrow x(y))$$

por lo que

$$\mathbb{S}(m)^* \models \forall y(\alpha(y, \mathbf{a}) \leftrightarrow x(y))$$

es decir, para todo $w \in \mathbf{v}(y)^{\mathbb{S}^*}$, se cumple:

$$\mathbb{S}(m)^* \models \alpha(w, \mathbf{a}) \iff \mathbb{S}(m)^* \models x(w)$$

que se traduce en

$$w \in D \iff w \in x_m^*$$

□

Corolario 1.2.4.21. En $\mathbb{S}(m)^*$, un subconjunto es definible si y sólo si es $\mathbb{S}(m)$ -definible.

Comentario 1.2.4.22. Las construcciones anteriores se pueden generalizar si notamos que basta con tener lo siguiente:

- $\mathbb{S}_d(1)$ es una estructura que tiene como relaciones distinguidas a todos sus conjuntos internamente definibles y como constantes distinguidas a todos sus elementos. En particular, todo conjunto internamente definible de $\mathbb{S}_d(1)$ será definible mediante una fórmula atómica.
- Consideramos un operador \mathcal{P}_d al que le llamamos “potencia definible” que le asigne a cada estructura la estructura cuyos universos son sus colecciones de conjuntos definibles. Por el inciso anterior esto es:

$$\mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(1)) := (\{\mathcal{P}_d(V^{\mathbb{S}_d(1)})\}_{V \in \mathbf{V}_{\mathbb{S}_d(1)}}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$$

donde

$$\mathcal{P}_d(V^{\mathbb{S}_d(1)}) := \{R^{\mathbb{S}_d(1)} : R \in \mathbf{R}_{\mathbb{S}_d(1)}\} \subseteq \mathcal{P}(V^{\mathbb{S}_d(1)})$$

1 Preliminares y generalidades

- Para cada $0 \leq i \leq n - 1$ y $\mathbb{S}_d(i + 1)$ debe ser “alguna” expansión de $\mathbb{S}_d(i) \cup \mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(i))$, $\mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(i)) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{S}_d(i))$ y debe cumplirse lo siguiente:
 1. $\mathbb{S}_d(i + 1)$ tiene símbolos de constante para todos los elementos de $\mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(i))$.
 2. $\mathbb{S}_d(i)$ tiene como símbolos relacionales de aridad 1 exactamente a los elementos de $\mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(i))$ y $\mathbb{S}_d(i + 1)$ tiene símbolos relacionales para todas las relaciones de pertenencia $\in_{\mathcal{P}_d(V^{\mathbb{S}_d(i)})}$ de valencia $(V^{\mathbb{S}_d(i)}, \mathcal{P}_d(V^{\mathbb{S}_d(i)}))$.

Bajo estas condiciones, la proposición anterior nos diría que los subconjuntos de $\mathbb{S}_d(m)^*$ definibles sobre $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}_d(m)}$ son exactamente los conjuntos x_m^* donde x es un elemento de $\mathcal{P}_d(\mathbb{S}_d(m))$.

Por otro lado, todo lo relacionado a añadir constantes podríamos omitirlo y obtener el mismo resultado, a fin de cuentas podemos definir x_m^* para símbolos relacionales. He decidido dejarlo así pues me parece más elegante la presentación de “extender localmente a la pertenencia”, que queda mejor expresada de esta manera.

Comentario 1.2.4.23. Como aplicación particular del último comentario, se puede tomar $\mathbb{S}_d(1)$ como la expansión de \mathbb{S} mediante sus elementos como constantes y sus conjuntos internamente definibles como relaciones distinguidas. En este caso, por ejemplo, en $\mathbb{S}_d(2)$ podríamos cuantificar sobre conjuntos internamente definibles en \mathbb{S} y los conjuntos \mathbb{S} -definibles de $\mathbb{S}_d(1)^*$ serían exactamente los conjuntos x^* , con $x \subseteq \mathbb{S}$ internamente definible.

Terminamos esta sección mencionando el siguiente teorema, que nos dice que los conjuntos externamente definibles que son invariantes bajo los automorfismos del monstruo que fijan un modelo pequeño son definibles sobre dicho modelo pequeño.

Teorema 1.2.4.24. Si \mathbb{M} es un monstruo con una subestructura elemental pequeña $\mathbb{K} \preceq \mathbb{M}$ y $D \subseteq \mathbb{M}^X$ es un conjunto \mathbb{M} -definible tal que para todo automorfismo $h \in \text{Aut}(\mathbb{M}/\mathbb{K})$ se tiene $h[D] \subseteq D$, entonces D es \mathbb{K} -definible.

Demostración. Sean $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{M}$ las constantes –si las hay– de $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}$ que aparecen la fórmula $D(X)$ que define a D ; de manera que podemos escribir $D = D(\mathbb{M}^X, d_1, \dots, d_k)$. Estas constantes pueden ser cambiadas por variables nuevas, digamos y_1, \dots, y_k , obteniendo una nueva fórmula $D(X, \{y_1, \dots, y_k\})$ y podemos cuantificar universalmente sobre las variables y_i para obtener una fórmula $D_{\forall}(X)$ que tiene las mismas variables libres que $D(X)$ pero que tiene parámetros únicamente sobre \mathbb{K} . Afirmamos que $D_{\forall} = D$, para lo cual comenzamos por notar que $D_{\forall} \subseteq D$, pues si $(x_1, \dots, x_n) \in D_{\forall}$ entonces para cualesquiera $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{M}$ se tiene $(x_1, \dots, x_n) \in D(\mathbb{M}^X, a_1, \dots, a_k)$; y en particular esto se tiene cuando $a_i = d_i$ para cada i . Por otro lado, veamos que $D \subseteq D_{\forall}$; para lo cual, si $(x_1, \dots, x_n) \in D$ y $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{K}$, por el teorema 1.2.3.50 existe un automorfismo $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ que deja fijo a \mathbb{K} y tal que, para cada i , $h : a_i \mapsto d_i$; entonces se cumple que

$$(x_1, \dots, x_n) \in D(\mathbb{M}^X, a_1, \dots, a_k) \iff (h(x_1), \dots, h(x_n)) \in D(\mathbb{M}^X, d_1, \dots, d_k)$$

El lado derecho de la equivalencia anterior es verdadero, pues

$$(h(x_1), \dots, h(x_k)) \in h[D] \subseteq D = D(\mathbb{M}^X, d_1, \dots, d_k)$$

de manera que $(x_1, \dots, x_n) \in D(\mathbb{M}, a_1, \dots, a_k)$ y esto se cumple para cualquier elección de a_1, \dots, a_k . Se sigue que $(x_1, \dots, x_n) \in D_{\forall}$, por lo que $D_{\forall} = D$ es \mathbb{K} -definible. \square

1.2.5. Secuencias indiscernibles

Definición 1.2.5.1. Una \mathbb{S} -secuencia de asignaciones de X es un orden lineal $(I, <)$ definido sobre un conjunto de asignaciones $I \subseteq \mathbb{S}^X$.

Definición 1.2.5.2. Dada una τ -estructura \mathbb{E} , un conjunto de fórmulas $\Delta \subseteq \Phi_\tau$ y un conjunto de parámetros $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}^*}$. Diremos que una \mathbb{S} -secuencia $(I, <)$ de asignaciones de X es \mathbb{E} -indiscernible desde Δ , sobre C si y sólo si para toda $\alpha(X_1, \dots, X_m) \in \Delta|_C$, con $\mathbf{a}(X_i) = \mathbf{a}(X)$ para toda i ; y cualesquiera $\mathbf{a}_1 < \dots < \mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_1 < \dots < \mathbf{b}_m$ elementos de I :

$$\mathbb{E} \models \alpha(\mathbf{a}_1^{X_1}, \dots, \mathbf{a}_m^{X_m}) \leftrightarrow \alpha(\mathbf{b}_1^{X_1}, \dots, \mathbf{b}_m^{X_m})$$

Si $C = \emptyset$, diremos que $(I, <)$ es \mathbb{E} -indiscernible desde Δ . Si $\Delta = \Phi_\tau$ diremos que $(I, <)$ es \mathbb{E} -indiscernible sobre C . Si $\mathbb{E} = \mathbb{S}^*$ diremos que $(I, <)$ es indiscernible desde Δ , sobre C . En particular, diremos que $(I, <)$ es indiscernible si $C = \emptyset$, $\Delta = \Phi_\tau$ y $\mathbb{E} = \mathbb{S}^*$.

Diremos que $(I, <)$ es discernible (respecto a todos los escenarios anteriores, según corresponda) si no es indiscernible.

Comentario 1.2.5.3. En pocas palabras, lo anterior quiere decir que cualquier propiedad en \mathbb{E} , descrita por una fórmula de Δ mediante parámetros en C , acerca de las tuplas representadas en I por alguna asignación, está determinada por cómo están ordenadas –las representaciones de dichas tuplas en $(I, <)$. Dicho de manera más heurística: cualquier segmento de recta en $(I, <)$ es igual ante los ojos de $\Delta|_C$ cuando sólo podemos ver dentro de \mathbb{E} .

Definición 1.2.5.4. Sea \mathbf{I} una familia de \mathbb{S} -secuencias y sean \mathbb{E} , C , Δ como en la definición anterior. Diremos que \mathbf{I} es \mathbb{E} -independiente desde Δ , sobre C si y sólo si todos sus elementos son \mathbb{E} -indiscernibles desde Δ , sobre C y para cualesquiera secuencias $(I, <_I), (J, <_J) \in \mathbf{I}$ distintas se tiene que $(I, <_I)$ es \mathbb{E} -indiscernible desde Δ , sobre $C \cup J$. Haremos las mismas simplificaciones que en la definición anterior para los casos particulares que corresponden. Diremos que \mathbf{I} es dependiente si no es independiente.

Definición 1.2.5.5. Dado un tipo parcial $\Gamma(X) \subseteq \Phi_\tau|_C$ con $C \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}^*}$, definimos el rango de dependencia (o dp-rango) de Γ , al que denotaremos $\text{Dp}(\Gamma)$, como el supremo de los cardinales κ tales que se cumple la propiedad:

(*₁) existen \mathbf{I} , un conjunto de \mathbb{S}^* -secuencias infinitas, independiente sobre C , con $|\mathbf{I}| = \kappa$; y una asignación $\mathbf{a} \in \Gamma(X)^{\mathbb{S}^*}$; tales que no existe $(I, <) \in \mathbf{I}$ indiscernible sobre $C \cup \{\mathbf{a}\}$.

Definimos el rango de dependencia de una teoría completa T de la cual \mathbb{S}^* es un modelo monstruo, así como de cualquiera de sus modelos; como el supremo de los cardinales que cumplen la siguiente versión de la propiedad anterior:

(*₂) existen \mathbf{I} , un conjunto de \mathbb{S}^* -secuencias infinitas, independiente sobre C , con $|\mathbf{I}| = \kappa$; y $a \in \mathbb{S}^*$ tales que no existe $(I, <) \in \mathbf{I}$ indiscernible sobre $C \cup \{a\}$.

Más adelante, cuando nos refiramos a “la propiedad (*)” nos estaremos a alguna de las dos propiedades de la definición anterior, según sea el caso.

Comentario 1.2.5.6. *En particular, si en \mathbb{S}^* podemos expresar un símbolo de igualdad global \approx (es decir, uno de los universos de \mathbb{S} contiene a todos los demas), la condición $(*_2)$ se puede expresar en términos de la condición $(*_1)$ aplicada al tipo parcial $\{x \approx x\}$.*

Comentario 1.2.5.7. *Puede probarse que lo anterior no depende de C (siempre y cuando C sea un conjunto pequeño de parámetros tal que $\Gamma \subseteq \Phi_\tau|_C$) ni tampoco depende de la elección de un modelo monstruo \mathbb{S}^* en particular (ver 4.1 en [26]).*

Definición 1.2.5.8. *Sea Γ un tipo parcial o $\Gamma = T$ una teoría completa.*

- *Diremos que Γ es dp -minimal si $\text{Dp}(\Gamma) = 1$*
- *Diremos que Γ es dp -finito si $\text{Dp}(\Gamma) < \aleph_0$*
- *Diremos que Γ es fuertemente dependiente si $\text{Dp}(\Gamma) \leq \aleph_0$ y no se cumple la propiedad $(*)$ para $\kappa = \aleph_0$.*
- *Diremos que Γ es dependiente, no independiente, que tiene la propiedad de no-independencia o, bien, que es NIP si para cualesquiera $\alpha(X, Y) \in \Gamma$, $A \subseteq (\mathbb{S}^*)^X$ infinito y $B = \{\mathbf{b}_I\}_{I \subseteq A} \subseteq (\mathbb{S}^*)^Y$ existen $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{b}_I \in B$ tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones*
 - $\mathbb{S}^* \models \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_I)$ con $\mathbf{a} \notin I$
 - $\mathbf{a} \in I$ pero $\mathbb{S}^* \not\models \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_I)$
- *Diremos que Γ es independiente, que tiene la propiedad de independencia o bien que es IP si no es dependiente. Equivalentemente, si existen $\alpha(X, Y) \in \Gamma$, $A \subseteq (\mathbb{S}^*)^X$ infinito y $B = \{\mathbf{b}_I\}_{I \subseteq A} \subseteq (\mathbb{S}^*)^Y$ tales que, para cualesquiera $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b}_I \in B$, son equivalentes:*
 - $\mathbb{S}^* \models \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_I)$
 - $\mathbf{a} \in I$
- *Diremos que una τ -estructura \mathbb{A} tiene alguna de las propiedades anteriores si su teoría $\text{Th}(\mathbb{A}) := \{\alpha \in \Phi_\tau : \mathbb{A} \models \alpha\}$ la tiene.*

Observación 1.2.5.9. *Las 4 primeras definiciones anteriores están ordenadas por cómo se implican, es decir:*

$$dp\text{-minimal} \implies dp\text{-finito} \implies \text{fuertemente dependiente} \implies \text{dependiente}$$

Los siguientes ejemplos son tomados de 2.22, 2.27 en [30].

Ejemplo 1.2.5.10.

- $(\mathbb{Q}, <)$ es dp -minimal.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ es independiente.
- (\mathbb{Q}, v_p) es dp -minimal, donde v_p es la valuación p -ádica.

Notación 1.2.5.11. Si $\mathbf{a} \in (\mathbb{S}^*)^X$ y C es un conjunto de parámetros, denotaremos

$$T_C(\mathbf{a}) := \{\varphi(X) \in \Phi|C : \mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a})\}$$

y le llamaremos a este conjunto de fórmulas “tipo de \mathbf{a} sobre C ”. Definimos el *dp-rango* de \mathbf{a} como el *dp-rango* de este conjunto.

Observación 1.2.5.12. Para cada \mathbf{a} y C como en la definición anterior, $T_C(\mathbf{a}) \in \mathbf{S}_C(\mathbb{S}^*)$ es un tipo completo de \mathbb{S}^* sobre C .

Definición 1.2.5.13. Diremos que \mathbf{a} es algebraico sobre C si existe una fórmula $\psi(X) \in \Phi|C$ con $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{S}^*$, tal que $\psi(X)^{\mathbb{S}^*}$ es finito y $\mathbb{S}^* \models \psi(\mathbf{a})$. Al conjunto de elementos algebraicos sobre C le llamaremos *cerradura algebraica* de C y lo denotaremos $\text{acl}(C)$.

Las siguientes proposiciones nos brindan algunas propiedades algebraicas del rango de dependencia que utilizaremos más adelante. Su prueba puede consultarse en las páginas 15 y 16 de [3]²⁵ y en el apéndice B de [24].

Proposición 1.2.5.14. Si $x, y \in \mathbb{K}^*$ entonces

$$\text{Dp}(T_C((x, y))) \leq \text{Dp}(T_{C \cup \{y\}}(x)) + \text{Dp}(T_C(y))$$

Proposición 1.2.5.15. Sean U y V conjuntos (C, \wedge) -definibles, entonces:

1. $\text{Dp}(U) = \sup_{\mathbf{a} \in U} (\text{Dp}(T_C(\mathbf{a})))$; en particular $\text{Dp}(U) \leq \text{Dp}(V)$ si $U \subseteq V$.
2. Para cada \mathbf{a} , $\text{Dp}(T_C(\mathbf{a})) = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} \in \text{acl}(C)$.
3. $\text{Dp}(U) = 0$ si y sólo si U es finito.
4. $\text{Dp}(U \cup V) = \max\{\text{Dp}(U), \text{Dp}(V)\}$.
5. $\text{Dp}(U \times V) = \text{Dp}(U) + \text{Dp}(V)$.

Proposición 1.2.5.16. Si x y y son interalgebraicos sobre C ; es decir, si $x \in \text{acl}(C \cup \{y\})$ y $y \in \text{acl}(C \cup \{x\})$, entonces $\text{Dp}(T_C(x)) = \text{Dp}(T_C(y))$.

Proposición 1.2.5.17. Sean $U(X), V(Y) \subseteq \mathbf{A}_{\mathbb{S}^*}$ tipo definibles sobre C , con X y Y finitos, y sea $\pi : U \rightarrow V$ una función definible (su gráfica es un subconjunto definible de $U \times V$), entonces:

1. Si π es suprayectiva, entonces $\text{Dp}(V) \leq \text{Dp}(U)$.
2. Si π tiene fibras finitas, entonces $\text{Dp}(U) \leq \text{Dp}(V)$.

²⁵Enunciamos la aditividad del *dp-rango* de manera un poco más fuerte, pero la prueba es la misma; como menciona Sinclair en la página 12 de [24].

2 Clasificación de campos dp-finitos

2.1. Ingredientes de la prueba del teorema de Johnson

El objetivo de esta sección será dejar todo listo para enunciar correctamente el teorema de Johnson y realizar su prueba; la cual pasa de la lógica a la topología, de la topología al álgebra y del álgebra a la teoría del orden.

Fijamos un campo dp-finito \mathbb{K} que no sea algebraicamente cerrado ni finito¹, donde recordamos que \mathbb{K} puede tener estructura adicional. Hacemos énfasis en que muchas de las cosas que haremos dependen fuertemente de esta hipótesis²; si bien no entraremos en detalles del por qué, para mantener la accesibilidad en cuanto a la lectura de este trabajo.

2.1.1. El filtro canónico

Definición 2.1.1.1. Sea $P \subseteq (\mathbb{K}^*)^X$. Diremos que P es amplio si contiene un cubo de dimensión $|X|$ con lados infinitos; es decir:

$$\mathcal{B}^X = \prod_{x \in X} l_x \subseteq P$$

donde cada $l_x \subseteq \mathbb{K}^*$ es infinito. Diremos que P es angosto si no es amplio.

La definición anterior es equivalente a la definición 3.1 en [39]. He decidido presentarla de esta manera pues me parece más didáctico.

Definición 2.1.1.2. Un conjunto \mathbb{K}^* -definible $D \subseteq \mathbb{K}^*$ es casi-minimal si tiene rango de dependencia finito $n := \text{Dp}(D) > 0$ y todos sus subconjuntos \mathbb{K}^* -definibles tienen rango de dependencia 0 o igual a n . Equivalentemente, si D es un conjunto \mathbb{K}^* -definible con rango de dependencia finito y positivo, diremos que casi-minimal si todo subconjunto $D' \subseteq D$ infinito y \mathbb{K}^* -definible tiene el mismo rango de dependencia que D .

Notación 2.1.1.3. Si $A \subseteq \prod_{i \in I} D_i$ es un conjunto y $J \subseteq I$, entonces

$$A|_J := \left\{ x \in \prod_{i \in J} D_i : \exists y \in A(y|_J = x) \right\}$$

¹En este contexto, también podríamos haber dado la definición de estructura “inestable” o del rango de Morley, que es una generalización de la noción de dimensión en geometría algebraica; y decir que estamos descartando de antemano el caso estable y/o el de rango de Morley finito, por la proposición 7.3 en [10] y el teorema 2.4 en [33]. De hecho, por dicho teorema, los campos estables no tienen anillos de valuación no triviales, por lo que no nos estamos perdiendo de nada interesante –para nuestros fines– haciendo esto.

²Por ejemplo, ver sección 5 en [39]; teoremas 6.3 y 6.6 en [37]; y corolario 4.16 en [38].

2 Clasificación de campos dp-finitos

En particular, si $P \subseteq (\mathbb{K}^*)^{\{x_1, \dots, x_n\}} = (\mathbb{K}^*)^n$ es C -definible y $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces la notación anterior se refiere al conjunto C -definible dado por

$$P|_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}} = \{(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in (\mathbb{K}^*)^{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}} : \mathbb{K}^* \models \underbrace{\exists x_{i_{k+1}} \dots \exists x_{i_n}}_{i_j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}))\}$$

Como muestra de por qué elegimos presentar la definición 2.1.1.1 de esa manera, probamos la siguiente proposición (que es el teorema 3.25 en [39]) usando únicamente las propiedades básicas del dp-rango que enlistamos en 1.2.5.15.

Proposición 2.1.1.4. *Si $P \subseteq D_1 \times \dots \times D_n \subseteq (\mathbb{K}^*)^{\{x_1, \dots, x_n\}}$ es C -definible, donde cada D_i es casi-minimal y C -definible, entonces son equivalentes:*

1. P es amplio.
2. $\text{Dp}(P) = \text{Dp}(D_1) + \dots + \text{Dp}(D_n)$.

Demostración. Sea $D = D_1 \times \dots \times D_n$, entonces $P \subseteq D$ y se tiene $\text{Dp}(P) \leq \text{Dp}(D)$. Además, $\text{Dp}(D) = \text{Dp}(D_1) + \dots + \text{Dp}(D_n)$ y entonces lo que queremos probar es equivalente a probar que: P es amplio si y sólo si $\text{Dp}(D) \leq \text{Dp}(P)$. Procedemos a probar ambas implicaciones.

\Rightarrow

Si P es amplio, entonces contiene un cubo de lados infinitos

$$\mathcal{B}^n := \prod_{i=1}^n l_i \subseteq P \subseteq D$$

Afirmamos que existen conjuntos C -definibles infinitos P_i tales que para cada i se cumple $l_i \subseteq P_i$ y $P_1 \times \dots \times P_n \subseteq P$. Procedemos por inducción:

- Si $n = 1$ tomamos $P_1 = P$.
- Si la hipótesis inductiva se cumple hasta $n - 1$ para cualquier conjunto amplio definible y cualesquiera $n - 1$ conjuntos casi-minimales (sobre cualquier elección para el conjunto de parámetros C), en particular se tiene que para cada $a \in l_n$ existen conjuntos $P_1(\mathbb{K}^*, a), \dots, P_{n-1}(\mathbb{K}^*, a)$ que son $C \cup \{a\}$ -definibles, infinitos y tales que se tienen las contenciones $l_i \subseteq P_i$ para cada i y $P_1 \times \dots \times P_{n-1} \subseteq P_a := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : (x_1, \dots, x_{n-1}, a) \in P\}$ –pues P_a es amplio, $C \cup \{a\}$ -definible y contiene a $l_1 \times \dots \times l_{n-1}$ para cada $a \in l_n$ –. Sea $P|_{\{x_n\}}$ la proyección de P en su n -ésima coordenada; entonces $P|_{\{x_n\}}$ es C -definible y eso hace C -definible al conjunto dado por

$$P_n := \{a \in P|_{\{x_n\}} : \mathbb{K}^* \models \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} (\bigwedge_{i=1}^{n-1} P_i(x_i, a) \rightarrow P(x_1, \dots, a))\} \quad (2.1)$$

Como $P_1 \times \dots \times P_{n-1} \subseteq P_a$ para cada $a \in l_n$, se tiene que $l_n \subseteq P_n$; y, por definición, $P_1 \times \dots \times P_n \subseteq P$. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Se sigue que $l_i \subseteq P_i \subseteq D_i$ para cada i y por casi-minimalidad de los D_i esto implica que $\text{Dp}(P_i) = \text{Dp}(D_i)$ para cada i ; entonces:

$$\text{Dp}(D) = \text{Dp}(P_1) + \dots + \text{Dp}(P_n) = \text{Dp}(P_1 \times \dots \times P_n) \leq \text{Dp}(P)$$

⇐

Supóngase que $\text{Dp}(D) \leq \text{Dp}(P)$. Comenzamos por hacer la observación de que

$$A|_{\{x_1, \dots, x_n\}} \subseteq A|_{\{x_1, \dots, x_k\}} \times A|_{\{x_{k+1}, \dots, x_n\}}$$

para todo conjunto A y para todo k , y entonces todas las proyecciones de P en sus coordenadas son infinitas; o de lo contrario algún $P|_{\{x_i\}} \subseteq D_i$ tiene rango de dependencia 0 y

$$\text{Dp}(P) \leq \text{Dp}(P|_{\{x_1\}} \times \dots \times P|_{\{x_n\}}) = \sum_{i=1}^n \text{Dp}(P|_{\{x_i\}}) < \sum_{i=1}^n \text{Dp}(D_i) = \text{Dp}(D)$$

Ahora, por estar trabajando en dp-rango finito: usando el inciso 1 de 1.2.5.15, podemos tomar un elemento de $(a_1, \dots, a_n) \in P$ tal que $\text{Dp}(T_C((a_1, \dots, a_n))) = \text{Dp}(D)$; y también debe cumplirse por el argumento anterior que $T_{C \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1})\}}(a_n)^{\mathbb{K}^*}$ es infinito, ya que

$$T_C((a_1, \dots, a_n))^{\mathbb{K}^*} \subseteq T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))^{\mathbb{K}^*} \times T_{C \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1})\}}(a_n)^{\mathbb{K}^*}$$

Para relacionar lo anterior con P , observemos que

$$T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))^{\mathbb{K}^*} \times T_{C \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1})\}}(a_n)^{\mathbb{K}^*} \subseteq P$$

para lo cual: claramente de la definición de tipo de (a_1, \dots, a_{n-1}) se tiene que

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \in T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))$$

entonces todos los elementos $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))^{\mathbb{K}^*}$ cumplen $\mathbb{K}^* \models P(b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$. Similarmente $\mathbb{K}^* \models P(a_1, \dots, a_{n-1}, b_n)$ para toda $b_n \in T_{C \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1})\}}(a_n)^{\mathbb{K}^*}$ y usando la homogeneidad del monstruo³ podemos tomar un automorfismo σ que fije a b_n con regla de correspondencia $\sigma : a_i \mapsto b_i$ para cada $i < n$. Dicho automorfismo nos muestra que $\mathbb{K}^* \models P(b_1, \dots, b_n)$; y esto nos permite concluir que: si $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))^{\mathbb{K}^*}$ y $b_n \in T_{C \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1})\}}(a_n)^{\mathbb{K}^*}$, entonces, $(b_1, \dots, b_n) \in P$.

De todo lo anterior, se sigue que P es amplio si $T_{C \cup \{a_n\}}((a_1, \dots, a_{n-1}))^{\mathbb{K}^*}$ lo es; y como $T_{C \cup \{a_2, \dots, a_n\}}(a_1)$ debe ser infinito también; tenemos la base de la inducción anterior. \square

Corolario 2.1.1.5. Si $P \subseteq D_1 \times \dots \times D_n \subseteq (\mathbb{K}^*)^n$ es (\mathbb{K}^*, \wedge) -definible y $\text{Dp}(D_1 \times \dots \times D_n) = \text{Dp}(P)$, donde cada D_i tiene rango de dependencia finito y positivo, entonces P es amplio.

³Cf. teorema 1.2.3.50.

2 Clasificación de campos dp-finitos

Demostración. Para la prueba de esta implicación en la proposición anterior no usamos la casi-minimalidad de los D_i y sólo necesitamos que P fuera tipo-definible sobre algún conjunto de parámetros⁴. \square

La siguiente proposición es la 3.11 en [39] y más adelante nos permitirá establecer un puente entre el rango de dependencia, que hasta ahora es un concepto puramente lógico, y una noción de coordenadas que usaremos para definir una topología en campos, que es el caso particular que nos interesa. La prueba no es complicada, pero he decidido omitirla porque requiere desviarse un poco de lo que realmente nos interesa.

Proposición 2.1.1.6. *Si $\{\varphi((\mathbb{K}^*)^X, \mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y}$ es uniformemente C -definible entonces el conjunto $\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \varphi((\mathbb{K}^*)^X, \mathbf{b}) \text{ es amplio}\}$ es C -definible.*

En lo que sigue a continuación comenzamos oficialmente la construcción de la topología canónica, a la que nos referiremos como filtro canónico por motivos que quedarán claros más adelante. En particular, me gustaría enfatizar que hasta ahora no hemos utilizado ninguna propiedad de \mathbb{K} , salvo que es una estructura infinita.

Definición 2.1.1.7. *Una configuración de coordenadas viene dada por una expansión $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$; donde $D := D_1 \times \dots \times D_n \subseteq (\mathbb{K}^*)^{\{x_1, \dots, x_n\}}$ es C -definible y casi-minimal en cada coordenada; $P \subseteq D$ es amplio y C -definible; y $\Sigma : P \rightarrow \mathbb{K}^*$ dada por*

$$\Sigma(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$$

tiene fibras finitas. Diremos que esta configuración está definida sobre C o C -definida.

Nos referiremos a $\text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$ como el rango de esta configuración.

Observación 2.1.1.8. *Dado que, en la definición anterior, Σ es C -definible, suprayectiva y tiene fibras finitas, como P es amplio y D es casi-minimal en cada variable, se cumple:*

$$\text{Dp}(D) = \sum_{i=1}^n \text{Dp}(D_i) = \text{Dp}(P) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$$

Demostración. Inmediato de las proposiciones 2.1.1.4 y 1.2.5.17. \square

Definición 2.1.1.9. *Diremos que una configuración de coordenadas $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ es crítica si no existe una configuración de coordenadas (de \mathbb{K}^*) de rango mayor; en dicho caso, diremos que $\text{Im}(\Sigma)$ es un conjunto crítico de \mathbb{K}^* y que el rango de esta configuración es el rango crítico de \mathbb{K}^* .*

Definición 2.1.1.10. *Sea V un conjunto crítico de \mathbb{K}^* y $U \subseteq \mathbb{K}^*$ un subconjunto \mathbb{K}^* -definible. Diremos que U es δ -pesado en V si $\text{Dp}(V \cap (U + \delta)) = \text{Dp}(V)$. Diremos que U es δ -ligero en V si no es δ -pesado en V .*

⁴La última contención verificada en la prueba de 2.1.1.4 se tendría, en lugar de para P , para cada conjunto que aparece en la intersección de conjuntos definibles a la que P es igual.

Proposición 2.1.1.11. *Sea $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ una configuración de coordenadas C -definida y sea $\{\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y}$ una familia uniformemente C -definible de subconjuntos de $\text{Im}(\Sigma)$; entonces el conjunto*

$$\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \text{Dp}(\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))\}$$

es C -definible.

Demostración. Sea $r := \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) = \text{Dp}(D)$. Σ es C -definible, suprayectiva y tiene fibras finitas, entonces 1.2.5.17 implica que: para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^Y$, $\text{Dp}(\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})) = r$ si y sólo si $\text{Dp}(\Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})]) = r$. Obsérvese que, para cada \mathbf{b} , $\text{Dp}(\Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})]) = r$ si y sólo si $\Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})] \subseteq D$ es amplio, por 2.1.1.4. El resultado se sigue de la definibilidad de “ser amplio” en familias definibles; que es la proposición 2.1.1.6. \square

Corolario 2.1.1.12. *Sea $\{\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{K}^*)$ uniformemente C -definible y $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ una configuración crítica C -definida de \mathbb{K}^* , entonces*

$$\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \text{ es } \delta\text{-pesado en } \text{im}(\Sigma)\}$$

es $C \cup \{\delta\}$ -definible.

Demostración. Sea $\text{Im}(\Sigma) = V$ y comencemos por observar que la familia

$$\{V \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta)\}_{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y, \delta \in \mathbb{K}^*}$$

es uniformemente C -definible; entonces, por la proposición anterior, el conjunto de los (\mathbf{b}, δ) tales que $\text{Dp}(V \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta)) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$ es C -definible, digamos por una fórmula $\alpha(Y, \{x\})$; de manera que

$$\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \text{ es } \delta\text{-pesado en } \text{Im}(\Sigma)\} = \{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \mathbb{K}^* \models \alpha(\mathbf{b}, \delta)\}$$

\square

Observación 2.1.1.13. *De las pruebas de la proposición y el corolario anterior, es inmediato que un conjunto C -definible $\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})$ es δ -pesado respecto una configuración crítica $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ si y sólo si $\Sigma^{-1}[\text{Im}(\Sigma) \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta)]$ es amplio. Dado que se tiene la igualdad*

$$\Sigma^{-1}[\text{Im}(\Sigma) \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta)] = \Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta]$$

entonces se cumple que: $\varphi(\mathbb{K}^, \mathbf{b})$ es δ -pesado respecto a $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ si y sólo si $\Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta]$ es amplio.*

Por otro lado, por definición, el rango de cualesquiera dos configuraciones críticas debe coincidir. En particular, debe cumplirse:

$$\text{Dp}(D) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma')) = \text{Dp}(D')$$

2 Clasificación de campos dp-finitos

para cualquier configuración crítica $(\mathbb{K}^*, D', P', \Sigma')$. Junto con la proposición 2.1.1.4, esto implica que para toda $\delta \in \mathbb{K}^*$ se cumple

$$\Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta] \text{ es amplio} \iff \Sigma'^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta] \text{ es amplio}$$

de manera que ser δ -pesado respecto a alguna configuración crítica es lo mismo que ser δ -pesado respecto a todas ellas. Ahora, si aplicamos esto a $(\mathbb{K}^*, D', P', \Sigma')$ y definimos $(\mathbb{K}^*, D'', P'', \Sigma'')$ como la traslación por δ de $(\mathbb{K}^*, D', P', \Sigma')$ ^{5,6}, entonces lo anterior nos dice que

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta] \text{ es amplio} &\iff \Sigma'^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta] \text{ es amplio} \\ &\iff \Sigma''^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta] \text{ es amplio} \iff \Sigma'^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})] \text{ es amplio} \end{aligned}$$

donde la última equivalencia se tiene ya que $(l_1 + \delta) \times \dots \times l_n \subseteq \Sigma''^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta]$ es un cubo con lados infinitos si y sólo si $l_1 \times \dots \times l_n \subseteq \Sigma'^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})]$ también lo es.

Con base en la observación anterior, la siguiente definición es equivalente a la definición 4.19 en [39].

Definición 2.1.1.14. Diremos que un conjunto \mathbb{K}^* -definible $U \subseteq \mathbb{K}^*$ es pesado si se cumple alguna de las condiciones equivalentes siguientes:

- Respecto a cualquier y/o alguna configuración crítica $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$, U es δ -pesado para cualquier y/o alguna $\delta \in \mathbb{K}^*$; es decir: $\text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap (U + \delta)) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$.
- Respecto a cualquier y/o alguna configuración crítica $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ y para cualquier y/o alguna $\delta \in \mathbb{K}^*$ se cumple que $\Sigma^{-1}[U + \delta]$ es amplio.

En virtud de la definición anterior, fijamos una configuración crítica $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ arbitraria – que siempre existe en dp-rango finito ya que $\text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) \leq \text{Dp}(\mathbb{K}^*)$ para cualquier configuración $(\mathbb{K}^*, D, P, \Sigma)$ –.

A continuación probamos una dirección de la caracterización de conjuntos pesados dada por el teorema 5.9 en [33]. Esta corresponde al lema 7.1 en [39].

Proposición 2.1.1.15. Si $\text{Dp}(U) = \text{Dp}(\mathbb{K})$, entonces U es pesado.

Demostración. Tomemos $a \in U$ y $(b_1, \dots, b_n) \in P$ tal que (a, b_1, \dots, b_n) tiene rango de dependencia máximo en cada conjunto involucrado; es decir, se cumplen:

$$\text{Dp}(T_C((a, b_1, \dots, b_n))) = \text{Dp}(U \times P)$$

$$\text{Dp}(T_{C \cup \{b_1, \dots, b_n\}}(a)) = \text{Dp}(U)$$

$$\text{Dp}(T_{C \cup \{a\} \cup \{b_j\}_{j \neq i}}(b_i)) = \text{Dp}(P|_{\{x_i\}})$$

⁵Es decir, $D'' := (D'_1 + \delta) \times D'_2 \times \dots \times D'_n$ y $P'' := \{(a_1 + \delta, a_2, \dots, a_n) : (a_1, \dots, a_n) \in P'\}$

⁶Esta es una configuración crítica, como en la observación 4.9 en [39].

Sea $\delta = a - b_1 - \dots - b_n$ entonces (a, b_1, \dots, b_n) y $(\delta, b_1, \dots, b_n)$ son interalgebraicos sobre C , lo que implica

$$\begin{aligned} \text{Dp}(U) + \text{Dp}(P) &= \text{Dp}(T_C((\delta, b_1, \dots, b_n))) \leq \text{Dp}(T_{C \cup \{\delta\}}((b_1, \dots, b_n))) + \text{Dp}(T_C(\delta)) \\ &\leq \text{Dp}(T_{C \cup \{\delta\}}((b_1, \dots, b_n))) + \text{Dp}(\mathbb{K}^*) = \text{Dp}(T_{C \cup \{\delta\}}((b_1, \dots, b_n))) + \text{Dp}(U) \\ &\implies \text{Dp}(P) \leq \text{Dp}(T_{C \cup \{\delta\}}((b_1, \dots, b_n))) \leq \text{Dp}(T_C((b_1, \dots, b_n))) \leq \text{Dp}(P) \end{aligned}$$

en particular, lo anterior implica que $T_{C \cup \{\delta\}}((b_1, \dots, b_n))^{\mathbb{K}^*} \subseteq \Sigma^{-1}[U + \delta]$ es amplio por 2.1.1.4. \square

Definición 2.1.1.16. Si $U, V \subseteq \mathbb{K}^*$ son \mathbb{K}^* -definibles, denotaremos

$$U -_{\infty} V := \{\delta \in \mathbb{K}^* : U \cap (V + \delta) \text{ es pesado}\}$$

La siguiente proposición, que es la 4.20 en [39], es inmediata de lo anterior; salvo quizá por el último punto.

Proposición 2.1.1.17. Si $U, V \subseteq \mathbb{K}^*$ son \mathbb{K}^* -definibles, entonces

1. Si U es finito, entonces U es ligero.
2. Si U y V son ligeros si y sólo si $U \cup V$ es ligero.
3. Si U es ligero si y sólo si está contenido en algún conjunto ligero.
4. Para cualquier familia uniformemente \mathbb{K}^* -definible $\{\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y}$, los conjuntos

$$\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \text{ es pesado}\} = \{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})] \text{ es amplio}\}$$

$$\{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \text{ es ligero}\} = \{\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y : \Sigma^{-1}[\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})] \text{ es angosto}\}$$

son \mathbb{K}^* -definibles.

5. \mathbb{K}^* y \mathbb{K} son pesados.
6. Si U es pesado si y sólo si cU es pesado para todo y/o algún $c \in (\mathbb{K}^*)^{\times}$.
7. Si U es pesado si y sólo si $x + U$ es pesado para toda y/o alguna $x \in \mathbb{K}^*$.
8. Son equivalentes:
 - a) U y V son pesados.
 - b) $U -_{\infty} V$ es pesado.
 - c) $U -_{\infty} V \neq \emptyset$.

Demostración.

1. Si U es finito, entonces $\Sigma^{-1}[U]$ no es amplio, ya que Σ tiene fibras finitas.

2.

$$\text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap U) < \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) \& \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap V) < \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned} \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap (U \cup V)) &= \text{Dp}((\text{Im}(\Sigma) \cap U) \cup (\text{Im}(\Sigma) \cap V)) \\ &= \text{máx}\{\text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap U), \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma) \cap V)\} < \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) \end{aligned}$$

3. Si $U \subseteq V$ donde V es ligero, entonces $\text{Dp}(U) \leq \text{Dp}(V) < \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma))$.

4. Las igualdades entre dichos conjuntos son por definición. La definibilidad es inmediata del corolario 2.1.1.12.

5. Caso particular de la proposición anterior

6. $(c\Sigma)^{-1}[cU]$ es amplio si $\Sigma^{-1}[U]$ es amplio, donde $c\Sigma$ es la configuración crítica dada mediante el automorfismo dado como la multiplicación por c .

7. Por definición.

8.

$a \Rightarrow b$

Si U y V son pesados entonces $\Sigma^{-1}[U]$ y $\Sigma^{-1}[V]$ son amplios en $D_1 \times \dots \times D_n$ y tienen el rango de dependencia de $\text{Dp}(D)$; entonces podemos tomar elementos $(a_1, \dots, a_n) \in \Sigma^{-1}[U]$ y $(b_1, \dots, b_n) \in \Sigma^{-1}[V]$ donde cada coordenada de estos elementos tiene rango de dependencia máximo en cada D_i y estos vectores tienen rango de dependencia n –o, mejor dicho, sus tipos completos asociados–. Sea $(\delta_1, \dots, \delta_n) = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ y sea $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$. Por invariancia bajo traslaciones, $T_C((\delta_1, \dots, \delta_n))$ también tiene el rango de dependencia de D que es equivalente a que sea amplio; además $(a_1, \dots, a_n) = (b_1 + \delta_1, \dots, b_n + \delta_n)$ y entonces:

$$T_C((b_1 + \delta_1, \dots, b_n + \delta_n)) \subseteq \Sigma^{-1}[U] \cap \Sigma^{-1}[V + \delta] = \Sigma^{-1}[U \cap (V + \delta)]$$

de donde se sigue que $\Sigma^{-1}[U \cap (V + \delta)]$ es amplio; es decir $\delta \in U -_{\infty} V$. Ahora es claro que $T_C(\delta_1, \dots, \delta_n) \subseteq \Sigma^{-1}[U -_{\infty} V]$ es amplio.

$b \Rightarrow c$

Evidente.

$c \Rightarrow a$

Si $\delta \in U -_{\infty} V$ entonces $U \cap (V + \delta) \subseteq U, V + \delta$ son pesados por contener a un conjunto pesado; y por el inciso anterior se sigue que U y V son pesados.

□

Comentario 2.1.1.18. *Con nuestra definición, es bastante fácil probar que también podríamos haber definido, de manera más simétrica*

$$U -_{\infty} V = \left\{ \delta \in \mathbb{K}^* : \left(-\frac{\delta}{2} + U \right) \cap \left(V + \frac{\delta}{2} \right) \text{ es pesado} \right\}$$

lo cual es obvio si U o V son ligeros, por la proposición anterior; y para el caso de que U y V sean pesados, tenemos:

$$\begin{aligned} U -_{\infty} V &:= \left\{ \delta \in \mathbb{K}^* : U \cap (V + \delta) \text{ es pesado} \right\} = \left\{ \delta \in \mathbb{K}^* : U \cap (V + \delta) \text{ es } \frac{-\delta}{2}\text{-pesado} \right\} \\ &= \left\{ \delta \in \mathbb{K}^* : \text{Dp} \left(\text{Im}(\Sigma) \cap \left(U \cap (V + \delta) - \frac{\delta}{2} \right) \right) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) \right\} \\ &= \left\{ \delta \in \mathbb{K}^* : \text{Dp} \left(\text{Im}(\Sigma) \cap \left(\left(-\frac{\delta}{2} + U \right) \cap \left(V + \frac{\delta}{2} \right) \right) \right) = \text{Dp}(\text{Im}(\Sigma)) \right\} \end{aligned}$$

Dado que a partir de estos conjuntos es que se define una topología “canónica” en la prueba de Johnson, esta definición me parece bastante más intuitiva, ya que $U -_{\infty} V$ inmediatamente parece ser un intervalo abierto centrado en $U \cap V$. Por facilidad de escritura, sin embargo trabajaremos con la definición original dada por Johnson; he mencionado esto sólo como aportación didáctica.

Corolario 2.1.1.19. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior:*

1. $U -_{\infty} V$ es \mathbb{K}^* -definible.

2. $U -_{\infty} V \subseteq U - V$

3. Para cualesquiera δ_1 y δ_2 :

$$(U + \delta_1) -_{\infty} (V + \delta_2) = (U -_{\infty} V) + (\delta_1 - \delta_2)$$

4. Para todo $c \neq 0$:

$$(cU) -_{\infty} (cV) = c(U -_{\infty} V)$$

5. Si $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$, entonces

$$U' -_{\infty} V' \subseteq U -_{\infty} V$$

Definición 2.1.1.20. *Las vecindades canónicas en \mathbb{K} serán los elementos de*

$$\mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}} := \{U -_{\infty} U : U \subseteq \mathbb{K} \text{ es pesado y } \mathbb{K}\text{-definible}\}$$

Llamaeremos “filtro canónico” a $\mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}$.

A continuación mencionamos lo que hay que saber sobre estas vecindades canónicas.

- El conjunto de \mathbb{K} -infinitesimales de \mathbb{K}^* se define como el conjunto (\mathbb{K}, \wedge) -definible dado como la intersección dirigida

$$I_{\mathbb{K}} := \bigcap \mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}$$

(definición 6.5 y observación 6.6 en [39]).

- Si $I_{\mathbb{K}} \subseteq D$ donde D es \mathbb{K}^* -definible, entonces D es pesado (observación 6.8 en [39]).
- Como la intersección que define a $I_{\mathbb{K}}$ es dirigida, este conjunto es pesado; ya que $\Sigma^{-1}[I_{\mathbb{K}}]$ es amplio; o de lo contrario por compacidad existe un subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}$ tal que $\Sigma^{-1}[\bigcap F]$ no es amplio⁷; lo cual diría que $\bigcap F \in \mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}$ no es pesado; en contradicción con el punto 8 de la proposición 2.1.1.17.
- $I_{\mathbb{K}}$ tiene estructura de \mathbb{K} -álgebra no trivial con las operaciones de \mathbb{K}^* restringidas apropiadamente. Además las vecindades básicas $U -_{\infty} U$ son una base para el filtro de vecindades de cero de una topología de campo en \mathbb{K} , que es hausdorff y no discreta (teorema 6.16 en [39]; corolario 11.5 en [40]; corolario 5.15 en [33]).
- Como consecuencia de los puntos anteriores, $0 \in I_{\mathbb{K}} -_{\infty} I_{\mathbb{K}} \subseteq I_{\mathbb{K}} - I_{\mathbb{K}} \subseteq I_{\mathbb{K}}$, por lo que $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}$ es una vecindad de cero para dicha topología. Más aún, $I_{\mathbb{K}}$ es una vecindad “acotada” de 0 en el sentido de que toda vecindad de 0 debe contener a $I_{\mathbb{K}}$ ⁸.
- $I_{\mathbb{K}}$ es el mínimo en el conjunto de subgrupos aditivos (\mathbb{K}, \wedge) -definibles $(\mathbb{G}, +) \leq \mathbb{K}^*$ que tienen la propiedad: “todo conjunto \mathbb{K} -definible D tal que $\mathbb{G} \subseteq D$ es pesado” (proposición 6.18 en [39]).

Corolario 2.1.1.21. *Existe una familia de fórmulas $\{\psi_i(\{x\}, X)\}_{i \in I}$ tal que, para todo campo \mathbb{K} , se tiene*

$$\mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}} = \{\psi_i(\mathbb{K}, \mathbf{a}) : i \in I, \mathbf{a} \in \mathbb{K}^X\}$$

Demostración. Para cada $U := \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b})$, con $\varphi(\{x\}, Y) \in \mathfrak{F}|^C$, consideremos la familia uniformemente C -definible $\{\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta)\}_{\delta \in \mathbb{K}^*, \mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^Y}$; de manera que el conjunto

$$\{(\mathbf{b}, \delta) \in (\mathbb{K}^*)^{Y \cup \{x\}} : \varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) \cap (\varphi(\mathbb{K}^*, \mathbf{b}) + \delta) \text{ es pesado}\}$$

es C -definible, digamos por una fórmula $\psi_{\varphi}(\{x\}, Y)$. Como $U -_{\infty} U$ es pesado si y sólo si U es pesado, se sigue que la familia buscada es

$$\mathcal{B} = \{\psi_{\varphi}(\mathbb{K}, \mathbf{a}) : \varphi(\{x\}, Y) \in \mathfrak{F}|^C \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{K}^Y\}$$

□

⁷“ $\Sigma^{-1}[I_{\mathbb{K}}]$ es amplio” se puede expresar como la satisfacibilidad de un tipo, de manera análoga a como hace Johnson en la parte 2 de la prueba de la observación 3.4 en [39]; entonces $\Sigma^{-1}[I_{\mathbb{K}}] = \bigcap_{U \in \mathcal{B}_{\infty}^{\mathbb{K}}} \Sigma^{-1}[U]$ no es amplio si y sólo si el tipo que

define a dicha intersección tiene un subconjunto finito que no es satisfacible.

⁸Cf. definición 2.1.3.5.

2.1.2. Subespacios vectoriales tipo-definibles de un campo

Definición 2.1.2.1. Para cualquier subgrupo $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{K}^*$ tipo-definible sobre C , denotaremos \mathbb{G}_C^{00} al subgrupo (que siempre será normal⁹) (C, \wedge) -definible más pequeño de \mathbb{G} con índice pequeño –es decir, menor que el cardinal del monstruo– en \mathbb{G} .

Notación 2.1.2.2. Puede probarse (8.1.3 en [26], [17, 27]) que en teorías NIP el conjunto C es irrelevante en la definición anterior y que, para todo C :

$$\mathbb{G}_C^{00} = \mathbb{G}_\emptyset^{00} = \bigcap \{ \mathbb{H} : \mathbb{H} \text{ es subgrupo } \wedge\text{-definible de } \mathbb{G} \text{ y } |\mathbb{G} : \mathbb{H}| < |\mathbb{G}^*| \}$$

Dado que toda teoría dp-finita es NIP, denotaremos $\mathbb{G}^{00} := \mathbb{G}_\emptyset^{00}$.

Definición 2.1.2.3. Un subcampo elemental $\mathbb{L} \preceq \mathbb{K}^*$ pequeño es mágico si para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo \mathbb{L} -subespacio vectorial (\mathbb{K}^*, \wedge) -definible, digmos $\mathbb{V} \leq \mathbb{K}^n$, se cumple:

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^{00}$$

Comentario 2.1.2.4. Esencialmente, la idea detrás de la definición anterior (8.3 en [33]) es encontrar un subcampo del monstruo suficientemente grande para que todo lo que esté por encima de el tenga índice pequeño en el monstruo, pero suficientemente pequeño para que cualquier cosa que se pueda construir a partir de el “de manera pequeña” (mediante conjuntos pequeños de fórmulas) siga siendo pequeño. Esto nos interesa porque intentamos preservar la saturación y la homogeneidad – que funcionan para cardinales menores al del monstruo– sobre cualquier tipo de cualquier estructura en la que trabajemos.

Por el corolario 10.7 en [40], podemos fijar un campo mágico \mathbb{K}_0 y; entonces si denotamos, para cada n $\Lambda(\mathbb{K}_0, (\mathbb{K}^*)^n)$ al retículo¹⁰ de \mathbb{K}_0 -subespacios vectoriales de tipo-definibles de $(\mathbb{K}^*)^n$, la proposición 11.1 en [40] dice que estos retículos cumplen lo siguiente¹¹:

Teorema 2.1.2.5.

1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda(\mathbb{K}_0, (\mathbb{K}^*)^n)$ es un retículo acotado.
2. $I_{\mathbb{K}} \in \Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)$ para cualquier extensión elemental pequeña $\mathbb{K}_0 \preceq \mathbb{K}$. En particular, el retículo $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)$ contiene un elemento no trivial.
3. Si $\mathbb{J} \in \Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$ y $\mathbb{J} \subseteq D$ es un conjunto \mathbb{S}^* -definible que contiene a \mathbb{J} , entonces D es pesado.
4. Si $\mathbb{J} \in \Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$ es (\mathbb{K}, \wedge) -definible sobre una extensión elemental pequeña $\mathbb{K}_0 \preceq \mathbb{K}$, entonces $I_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{J}$.
5. Si $\mathbb{J} \in \Lambda(\mathbb{K}_0, (\mathbb{K}^*)^n)$, entonces $\mathbb{J} = \mathbb{J}^{00}$.

⁹Ver 8.1.3 en [26]

¹⁰Con las operaciones dadas como $\vee = +$ la suma de espacios vectoriales y $\wedge = \cap$ la intersección.

¹¹De hecho, de acuerdo a la demostración de esta proposición, casi todas estas propiedades se cumplen aún si \mathbb{K}_0 no es un campo mágico.

2 Clasificación de campos dp-finitos

6. $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$ es un subretículo acotado superiormente de $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)$; es decir, es cerrado bajo intersecciones.
7. $0 < \text{Cb}(\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)) = \text{Cb}(\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+) < \text{Dp}(\mathbb{K})$
8. $\text{Cb}(\Lambda(\mathbb{K}_0, (\mathbb{K}^*)^n)) = n\text{Cb}(\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*))$

2.1.3. Campos filtrados

A continuación introducimos las ideas del trabajo de Prestel y Ziegler, en [2]; que Johnson utiliza, en [37]; para definir la noción de W-topología; que es una generalización de la de “V-topología” y tiene un teorema similar¹² al que dice que la V-topologías y las valuaciones en un campo se inducen mutuamente.

Definición 2.1.3.1. Dado $B \subseteq \mathbb{K}$ y una familia \mathcal{T} de subconjuntos de \mathbb{K} , diremos que B es acotado por \mathcal{T} si

$$\mathbb{K}(2) \models \forall U(\mathcal{T}(U) \rightarrow \exists c(\neg(c \approx 0) \wedge \subseteq (cB, U)))$$

Si \mathcal{T} está claro del contexto, simplemente diremos que B es acotado. Al conjunto de subconjuntos de \mathbb{K} acotados por \mathcal{T} lo denotaremos \mathcal{T}^\perp .

Comentario 2.1.3.2. La definición anterior nos dice, en palabras sencillas, que B es acotado por \mathcal{T} si podemos encajar B en cada elemento $U \in \mathcal{T}$ mediante algún isomorfismo lineal $c_U \cdot - : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}$.

Ejemplo 2.1.3.3. El conjunto de infinitesimales es acotado por $\mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}}$ pues $I_{\mathbb{K}}$ está contenido en todas las vecindades canónicas.

Definición 2.1.3.4. Diremos que una familia \mathcal{T} de subconjuntos de \mathbb{K} es localmente acotada si alguno de sus elementos es acotado por ella misma; es decir, si $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset$.

Definición 2.1.3.5. Diremos que $(\mathbb{K}, \mathcal{T}) := \mathbb{K} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{K}), \{\mathcal{T}, \in\}, \emptyset, \emptyset)$ es un campo filtrado si la relación distinguida $\in \subseteq \mathbb{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{K})$ es la relación de pertenencia que existe entre elementos de \mathbb{K} y subconjuntos de \mathbb{K} y la relación distinguida $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{K})$ es el filtro localmente acotado de vecindades de cero de \mathbb{K} para alguna topología, a la que denotaremos $\langle \mathcal{T} \rangle$, tal que $(\mathbb{K}, \langle \mathcal{T} \rangle)$ es un anillo topológico hausdorff y no discreto. Diremos que $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n) := \mathbb{K} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{K}), \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n, \in\}, \emptyset, \emptyset)$ es un campo multifiltrado si, para toda i , $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_i)$ es un campo filtrado.

Ejemplo 2.1.3.6. $(\mathbb{K}, \mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}})$ es un campo filtrado.

Observación 2.1.3.7. En un campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$, las vecindades acotadas de cero ordenadas por contención forman un ideal. Además, si U es una vecindad acotada de cero, el conjunto $\{cU : c \in \mathbb{K}^\times\}$ es una base del filtro \mathcal{T} y también es una base del ideal \mathcal{T}^\perp (Ver p. 322 en [2]).

Todas las topologías con las que trabajaremos serán topologías hausdorff, de anillo y no discretas; como en la definición anterior. Entonces, en virtud del trabajo de Prestel y Ziegler en [2], y de la misma manera que hace Johnson en [38], adoptaremos la siguiente definición de “topología definible” para este contexto¹³.

¹²Cf. corolario 2.1.5.13 en el presente trabajo y teorema 3.1 en [2]

¹³Cf. introducción de la sección 4.1 en [37].

Definición 2.1.3.8. Una topología *-hausdorff* y de anillo- en \mathbb{K} es *C-definible* si y sólo si alguna vecindad acotada $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ es *C-definible*.

Observación 2.1.3.9. Claramente todo campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un reducto de $\mathbb{K}(2)$. En particular, el lenguaje de $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un sublenguaje del lenguaje de $\mathbb{K}(2)$.

Definición 2.1.3.10. Sea φ una fórmula en la que no aparecen los símbolos \rightarrow y \leftrightarrow . Diremos que φ está en forma negada normal si todas las apariciones del símbolo \neg en φ ocurren en subfórmulas de la forma $\neg(\psi)$, con ψ una fórmula atómica.

Proposición 2.1.3.11. Toda fórmula es equivalente a una en forma negada normal.

Demostración. Tenemos las equivalencias:

- $(\alpha) \rightarrow (\beta) \equiv (\neg(\alpha)) \vee (\beta)$
- $(\alpha) \leftrightarrow (\beta) \equiv ((\alpha) \rightarrow (\beta)) \wedge ((\beta) \rightarrow (\alpha)) \equiv ((\neg(\alpha)) \vee (\beta)) \wedge ((\neg(\beta)) \vee (\alpha))$
- $\neg(\forall x(\alpha)) \equiv \exists x(\neg(\alpha))$
- $\neg(\exists x(\alpha)) \equiv \forall x(\neg(\alpha))$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg(\alpha)) \vee (\neg(\beta))$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg(\alpha)) \wedge (\neg(\beta))$

Por lo que podemos prescindir de los símbolos \rightarrow y \leftrightarrow en cualquier fórmula e “introducir” las negaciones hasta las fórmulas atómicas, que son los bloques de construcción de todas las fórmulas. \square

Definición 2.1.3.12. Sean $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo filtrado, $\varphi \in \Phi_{\mathfrak{t}((\mathbb{K}, \mathcal{T}))}$ y $X \in \text{Var}(\mathcal{T})$ una variable de valencia \mathcal{T} que aparece libre en φ . Diremos que φ es positiva en X si es equivalente a una fórmula en forma negada normal que no tiene subfórmulas de la forma $\neg(\in(t, X))$. Asimismo, diremos que φ es negativa en X si es equivalente a la negación de una fórmula positiva; es decir, a una fórmula en forma negada normal en la que cada vez que aparece el símbolo $\varphi(n) = \in$ en la posición n de φ (vista como sucesión de símbolos), se cumple que $\varphi(n-2) = \neg$ (las subfórmulas $\in(t, X)$ de φ únicamente aparecen negadas, es decir, en la forma $\neg(\in(t, X))$).

Observación 2.1.3.13. Si $\varphi(X)$ es positiva (negativa) en X y $X \subseteq U$ ($U \subseteq X$) entonces $(\mathbb{K}, \mathcal{T}) \models \varphi(X) \rightarrow \varphi(U)$ ($(\mathbb{K}, \mathcal{T}) \models \varphi(U) \rightarrow \varphi(X)$); es decir, las propiedades positivas (negativas) son cohereditarias (hereditarias) (introducción en [2]).

Definición 2.1.3.14. Dado un campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$, construimos recursivamente el conjunto de fórmulas locales de tipo $\mathfrak{t}((\mathbb{K}, \mathcal{T}))$:

1. Las fórmulas en las que no aparecen cuantificadores sobre variables de valencia $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ son fórmulas locales.

2 Clasificación de campos dp-finitos

2. Si ψ es una fórmula local positiva en $X \in \text{Var}(\mathcal{T})$, entonces $\forall X(\mathcal{T}(X) \rightarrow \psi)$ es una fórmula local.
3. Si ψ es una fórmula local negativa en $X \in \text{Var}(\mathcal{T})$, entonces $\exists X(\mathcal{T}(X) \wedge \psi)$ es una fórmula local.
4. Si α y β son fórmulas locales y x es una variable de valencia \mathbb{K} , entonces también lo son: $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \leftrightarrow (\beta)$, $\neg(\alpha)$, $\exists x(\alpha)$ y $\forall x(\alpha)$.
5. No hay más fórmulas locales.

Un enunciado local será una fórmula local en la que no aparecen variables libres.

La noción de enunciado local se puede generalizar a campos multifiltrados agregando los índices correspondientes para \mathcal{T}_i en la definición anterior¹⁴ de manera que podamos expresar propiedades locales de cómo interactúan entre sí las vecindades de distintos filtros, por lo que, en adelante, utilizaremos dicha noción generalizada.

Definición 2.1.3.15. Diremos que dos campos multifiltrados $(\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n)$, $(\mathbb{F}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ son localmente equivalentes si para todo enunciado local $\varphi \in \Phi_{\mathfrak{t}((\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n))}$, se tiene

$$(\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n) \models \varphi \iff (\mathbb{F}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) \models \varphi$$

Denotaremos esto como $(\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n) \sim (\mathbb{L}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$.

Observación 2.1.3.16. Por la observación (2.1.3.13), la pregunta de si dos campos filtrados son localmente equivalentes puede plantearse mediante una definición de enunciados locales apropiada en cualquier base de sus filtros –en dicha definición, habríamos de suponer que \mathcal{T} es alguna/cualquiera de dichas bases–.

La siguiente proposición es la versión generalizada del lema 2.3 y el corolario 2.4 en [2], que Johnson utiliza en [38] para la última parte de la prueba de la proposición 2.2 (proposición 2.1.5.5 en el presente trabajo).

Proposición 2.1.3.17. Son nociones equivalentes, para dos campos multifiltrados $(\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n)$, $(\mathbb{L}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$ y vecindades acotadas $(U_i, V_i) \in (\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_i^\perp) \times (\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_i^\perp)$:

1. la equivalencia local $(\mathbb{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n) \sim (\mathbb{L}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$
2. la equivalencia elemental

$$(\mathbb{K}, U_1, \dots, U_n) := \mathbb{K} \cup (\emptyset, \{U_1, \dots, U_n\}, \emptyset, \emptyset) \equiv \mathbb{L} \cup (\emptyset, \{V_1, \dots, V_n\}, \emptyset, \emptyset) =: (\mathbb{K}, V_1, \dots, V_n)$$

Finalizamos esta sección con la siguiente definición que en el fondo habla de la realización de un tipo –por lo que, en particular, la cumplirán los modelos saturados– y el teorema posterior a esta, que nos da una caracterización para campos filtrados.

¹⁴Ver observación 1.5 en [2].

Definición 2.1.3.18. Diremos que el campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es ω -completo si \mathcal{T} es cerrado bajo intersecciones numerables.

Teorema 2.1.3.19.

1. Todo campo filtrado es localmente equivalente a uno que es ω -completo (Teorema 1.1(b) en [2]).
2. Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo filtrado ω -completo entonces, para cualquier $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$, $\mathbb{K} = \text{Frac}(\langle U \rangle)$ coincide con el campo de fracciones del subanillo de \mathbb{K} generado por U . Además, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\langle U \rangle}$ coincide con el filtro generado por los ideales no cero de $\langle U \rangle$ (Proposición 1.8 en [37]).

2.1.4. W-filtros

Definición 2.1.4.1. Sea \mathbb{A} un anillo y M un \mathbb{A} -módulo. Un conjunto $S \subseteq M$ es \mathbb{A} -independiente si, para todo $x \in S$, $x \notin \langle S \setminus \{x\} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$. Diremos que S es \mathbb{A} -dependiente si no es \mathbb{A} -independiente.

Definición 2.1.4.2. Sea $M \in \mathbb{A}\text{-Mod}$. El rango cúbico de M (en $\mathbb{A}\text{-Mod}$), al que denotaremos $\text{Cb}_{\mathbb{A}}(M)$, será el rango cúbico del retículo de \mathbb{A} -submódulos de M . Habitualmente sólo escribiremos $\text{Cb}(M)$ cuando \mathbb{A} sea claro del contexto.

Proposición 2.1.4.3. El rango cúbico de $M \in \mathbb{A}\text{-Mod}$ cumple lo siguiente:

- $\text{Cb}(M) > 0 \iff M \neq \{0\}$
- $\text{Cb}(M_1 \oplus M_2) = \text{Cb}(M_1) + \text{Cb}(M_2)$
- Si M_1 es submódulo de un cociente de M_2 (en particular, si es un submódulo o un cociente), entonces $\text{Cb}(M_1) \leq \text{Cb}(M_2)$.
- Para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

se cumple que

$$\text{Cb}(M_3) \leq \text{Cb}(M_1 \oplus M_2) = \text{Cb}(M_1) + \text{Cb}(M_2)$$

- Son equivalentes:
 1. $\text{Cb}(M) \geq n$
 2. Existen submódulos $N_2 \subseteq N_1 \subseteq M$ tales que el cociente $\frac{N_1}{N_2}$ es isomorfo a una suma directa de n \mathbb{A} -módulos no triviales.
 3. Existe un subconjunto $S \subseteq M$ de tamaño n que es \mathbb{A} -independiente.

Demostración. Los primeros cuatro puntos son un caso particular de la proposición 6.9 en [34]. Para el último punto $1 \iff 2$ es la observación 6.7 en [34], mientras que $1 \iff 3$ es la contrapositiva de la proposición 7.3 en [36]. \square

Definición 2.1.4.4. Diremos que un dominio entero \mathbb{A} es un W_n -anillo si su rango cúbico como \mathbb{A} -módulo es a lo más igual a n ; es decir: $\text{Cb}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) \leq n$. Diremos que \mathbb{A} es un W -anillo si es un W_n -anillo para alguna n .

Proposición 2.1.4.5. Son equivalentes para un dominio entero \mathbb{A} :

1. \mathbb{A} es un W_n -anillo.
2. Todo subconjunto $S \subseteq \mathbb{A}$ de tamaño $n + 1$ es \mathbb{A} -dependiente.

Demostración. Usando el último punto de (2.1.4.3), tenemos que

$$1. \iff \text{Cb}(\mathbb{A}) \leq n \iff \text{Cb}(\mathbb{A}) < n + 1 \iff n + 1 \not\leq \text{Cb}(\mathbb{A}) \iff 2.$$

□

Como corolario inmediato, los W -anillos generalizan a los anillos de valuación.

Corolario 2.1.4.6. Son equivalentes para un dominio entero \mathbb{A} :

1. \mathbb{A} es un anillo de valuación.
2. \mathbb{A} es un W_1 -anillo.

Demostración. Por definición, \mathbb{A} es un anillo de valuación si y sólo si, para todo $\frac{x}{y} \in \text{Frac}(\mathbb{A})$, se tiene

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{A} \text{ o bien } \frac{y}{x} \in \mathbb{A}$$

$$\iff$$

$$x \in Ay \text{ o bien } y \in Ax$$

$$\iff$$

$$\{x, y\} \text{ es } \mathbb{A}\text{-dependiente}$$

□

Definición 2.1.4.7. Sea \mathbb{K} un campo. Un W_n -conjunto (de \mathbb{K}) es un subconjunto $I \subseteq K$ tal que para cualesquiera $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ existe $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ tal que $x_i \in \sum_{j \neq i} x_j I$. Al conjunto de los W_n -conjuntos de \mathbb{K} lo denotaremos $W_n(\mathbb{K})$ o, simplemente, W_n cuando \mathbb{K} esté claro del contexto.

Observación 2.1.4.8. $I \subseteq K$ es un W_n -conjunto si y sólo si contiene un W_n -conjunto.

Observación 2.1.4.9. Dado que siempre podemos regresar conjuntos finitos $S \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$ al anillo \mathbb{A} mediante el producto por un múltiplo común de los denominadores de los elementos de S ; por la observación anterior y la proposición (2.1.4.5), son equivalentes para un anillo \mathbb{A} :

1. \mathbb{A} es un W_n -anillo.
2. \mathbb{A} contiene un W_n -conjunto de $\text{Frac}(\mathbb{A})$.

3. \mathbb{A} es un W_n -conjunto de $\text{Frac}(\mathbb{A})$.

La observación anterior tiene como consecuencias inmediatas los siguientes dos corolarios.

Corolario 2.1.4.10. *Si \mathbb{A} es un W_n -anillo, entonces todos los subanillos de $\text{Frac}(\mathbb{A})$ que contienen a \mathbb{A} son W_n -anillos. En particular, las localizaciones y la cerradura entera de un W_n anillo vuelven a ser W_n anillos.*

Corolario 2.1.4.11. $\text{Cb}(\mathbb{A}) = \text{Cb}_{\mathbb{A}}(\text{Frac}(\mathbb{A}))$

Demostración. Veamos que, para todo n , se tiene la equivalencia

$$\text{Cb}_{\mathbb{A}}(\text{Frac}(\mathbb{A})) < n + 1 \iff \text{Cb}(\mathbb{A}) < n + 1$$

para lo cual:

(\Rightarrow) Si $\text{Cb}_{\mathbb{A}}(\text{Frac}(\mathbb{A})) < n + 1$, por (2.1.4.3), todo subconjunto $S \subseteq \mathbb{A} \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$ de tamaño $n + 1$ es \mathbb{A} -dependiente, lo cual implica que $\text{Cb}(\mathbb{A}) < n + 1$.

(\Leftarrow) Si $\text{Cb}(\mathbb{A}) < n + 1$, entonces \mathbb{A} es un W_n -anillo, por lo que es un W_n -conjunto de $\text{Frac}(\mathbb{A})$; lo cual, por definición, significa que todo subconjunto $S \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$ de tamaño $n + 1$ es \mathbb{A} -dependiente. Nuevamente, esto es equivalente a que $\text{Cb}_{\mathbb{A}}(\text{Frac}(\mathbb{A})) < n + 1$.

□

Comentario 2.1.4.12. *Usando las propiedades del rango cúbico, puede probarse¹⁵ de manera inmediata algo más general que el primer corolario: si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{K}$ es un W_n -anillo, \mathbb{L}/\mathbb{K} es una extensión finita de grado d , y $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{L}$ es una contención de anillos, entonces \mathbb{A}_2 es un W_{dn} -anillo.*

Definición 2.1.4.13. *En virtud del corolario anterior, cuando escribamos $\text{Cb}(\mathbb{L})$ para algún campo \mathbb{L} , estaremos refiriéndonos a que $\mathbb{L} = \text{Frac}(\mathbb{A})$ para algún dominio \mathbb{A} y $\text{Cb}(\mathbb{L}) := \text{Cb}(\mathbb{A})$.*

Más adelante¹⁶ buscaremos cómo relacionar el rango cúbico de –el retículo de submódulos de– un campo de fracciones con la existencia de W_n -conjuntos en campos filtrados; pues resultará que esto nos permitirá codificar el retículo de engrosamientos de un campo filtrado en términos del retículo de submódulos de un monstruo para su teoría. Con esto en mente, procedemos con las siguientes definiciones.

Definición 2.1.4.14. *Diremos que un campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es W_n -filtrado y que \mathcal{T} es un W_n -filtro si para toda vecindad de cero $U \in \mathcal{T}$, existe $c \in \mathbb{K}^\times$, tal que $cU \in W_n$ es un W_n -conjunto. Si existe n tal que \mathcal{T} es un W_n -filtro diremos que \mathcal{T} es un W -filtro y que $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo W -filtrado. Similarmente, diremos que la topología y el espacio topológico inducidos son, respectivamente, una W -topología y un W -espacio topológico.*

¹⁵Ver lema 2.7 en [37].

¹⁶Cf. proposición 2.1.5.9.

Proposición 2.1.4.15. *Un campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es W_n -filtrado si y sólo si alguna vecindad acotada de cero es un W_n -conjunto; es decir, $W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset$.*

Demostración.

\Rightarrow

Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es W_n -filtrado, usando que \mathcal{T} es localmente acotado, existe $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y, por hipótesis, $c \in \mathbb{K}^\times$ tal que $cU \in W_n$. Claramente, $cU \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y, en particular, $cU \in W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset$.

\Leftarrow

Supóngase que existe $V \in W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset$ y sea $U \in \mathcal{T}$. Considerando el prefiltro $\{cV\}_{c \in \mathbb{K}^\times}$, podemos tomar $c \in \mathbb{K}^\times$ tal que $\frac{1}{c}V \subseteq U$; es decir: $V \subseteq cU$; de manera que cU es un W_n conjunto por contener al W_n -conjunto V . \square

Definición 2.1.4.16. *Definimos el peso de un campo filtrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$:*

$$\text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) := \begin{cases} \min\{n \in \omega : W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset\} & \text{si } \{n \in \omega : W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset\} \neq \emptyset \\ \omega & \text{si } \{n \in \omega : W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp \neq \emptyset\} = \emptyset \end{cases}$$

Es decir: el peso de $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es el mínimo n , si existe, tal que $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo W_n -filtrado.

Observación 2.1.4.17. *\mathcal{T} es un W_n -filtro si y sólo si $\text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) \leq n$*

Comentario 2.1.4.18. *Podemos pensar en el peso y el rango cúbico como nociones parecidas a la dimensión de espacios vectoriales; donde los W_n -conjuntos jugarían el papel de conjuntos generadores de espacios de dimensión n ; sólo que, en este caso, tendríamos “vecindades acotadas de dimensión n ” y “ \mathbb{A} -módulos de dimensión n ”.*

Definición 2.1.4.19. *Dados $A, B \subseteq \mathbb{K}$, diremos que A es encajable en B si existe $c \in \mathbb{K}^\times$ tal que $cA \subseteq B$. Diremos que A y B son co-encajables si A es encajable en B y B es encajable en A .*

Observación 2.1.4.20. *Claramente la co-encajabilidad define una relación de equivalencia en los subconjuntos de \mathbb{K} .*

Lema 2.1.4.21. *Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo filtrado, entonces $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ es una clase de co-encajabilidad.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$. Por definición de \mathcal{T}^\perp es inmediato que U y V son co-encajables. Por otro lado, si tomamos cualquier conjunto $B \in [U]$, entonces existe $c \in \mathbb{K}^\times$ tal que $cB \subseteq U \in \mathcal{T}^\perp$. Como T es un ideal, entonces $cB \in \mathcal{T}^\perp$, de donde se sigue que $B \in \mathcal{T}^\perp$. Usando ahora que \mathcal{T} es un filtro y que $U \subseteq c'B$ para alguna $c' \neq 0$ se tiene de manera análoga que $B \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$. Se sigue que

$$[U] = \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$$

para todo $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$. \square

Lema 2.1.4.22. *Si un conjunto (C, \wedge) -definible y un conjunto (C, \vee) -definible son co-encajables, entonces hay un conjunto C -definible co-encajable con ambos.*

Demostración. Sean $X := \bigcap_{i \in I} D_i(\mathbb{K})$ y $Y := \bigcup_{j \in J} D'_j(\mathbb{K})$ co-encajables; donde D_i y D'_j son fórmulas con parámetros en C , para cada i y j . Sin pérdida de generalidad –re-escalando, si fuese necesario– suponemos $X \subseteq Y$ y definimos

$$\Gamma(\{x\}) := \{D_i(\{x\}) \wedge \neg(D'_{j_1}(\{x\}) \vee \dots \vee D'_{j_n}(\{x\}))\}_{i \in I, j_1, \dots, j_n \in J}$$

Obsérvese que Γ no es satisfacible, ya que de ser así existiría un elemento que pertenece a X pero no pertenece a Y ; entonces, por compacidad, existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ que no es satisfacible. Digamos que I_0 es el conjunto –finito– de los índices de I tales que aparece alguna fórmula $D_i(\{x\}) \wedge \neg(D'_{i,j_1}(\{x\}) \vee \dots \vee D'_{i,j_{n_i}}(\{x\}))$ en Γ_0 y sea $D(\{x\}) := \bigwedge_{i \in I_0} D_i(\{x\})$. Claramente

$$X \subseteq D := D(\mathbb{K}) = \bigcap_{i \in I_0} D_i(\mathbb{K})$$

por lo que si vemos que $D \subseteq Y$ (y por lo tanto existe un múltiplo no cero de D contenido en Y y a su vez en X) habremos terminado. Para esto, si existiese $x_0 \in D \setminus Y$, en particular $x_0 \in D_i(\mathbb{K})$ para toda $i \in I_0$; es decir

$$\mathbb{K} \models D_i(x_0) \tag{2.2}$$

para toda $i \in I_0$. Además, $x_0 \notin \bigcup_{j \in J} D'_j(\mathbb{K})$ y, en particular se tiene que, para cada $i \in I_0$

$$x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n_i} D'_{j_k}(\mathbb{K})$$

o lo que es equivalente:

$$\mathbb{K} \models \neg(D'_{j_1}(x_0) \vee \dots \vee D'_{j_{n_i}}(x_0)) \tag{2.3}$$

Por definición de I_0 , las condiciones 2.2 y 2.3 nos dicen que x_0 satisface Γ_0 en \mathbb{K} ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X \subseteq D \subseteq Y$ y hemos terminado. \square

Proposición 2.1.4.23. *Sean $\widehat{\mathcal{T}}$ un W_n -filtro en \mathbb{K}^* y $U \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$ una vecindad acotada de cero (\mathbb{K}^*, \vee) -definible o (\mathbb{K}^*, \wedge) -definible que tiene estructura de subgrupo aditivo de \mathbb{K}^* ; entonces existe $D \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$, \mathbb{K}^* -definible y co-encajable con U .*

Demostración. Tras reescalar U , podemos suponer que $U \in W_n$ y entonces existe $m := \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : U \in W_k\}$; de manera que existe un conjunto $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq \mathbb{K}^*$ tal que, para toda i , $b_i \notin \sum_{j \neq i} b_j U$. Notemos que cada $\sum_{j \neq i} b_j U$ es abierto y cerrado de la topología inducida por \mathcal{T} , ya que para $m = 0$ este conjunto es vacío y, para $m \neq 0$, es un subgrupo abierto (y por lo tanto también cerrado).

Por otro lado, sea

$$B := \left\{ x \in \mathbb{K}^* : \mathbb{K}^* \models \bigvee_{i=1}^m \left(xU + \sum_{j \neq i} b_j U \right) (b_i) \right\}$$

Afirmamos que $\mathbb{K}^* \setminus B$ es una vecindad acotada de cero; para lo cual:

2 Clasificación de campos dp-finitos

- Es un conjunto acotado, ya que se tiene la contención $\mathbb{K}^* \setminus B \subseteq \sum_{j=1}^m b_j U$ (de otro modo, el conjunto $\{b_1, \dots, b_m, x\}$, con $x \in (\mathbb{K}^* \setminus B) \cap (\mathbb{K}^* \setminus \sum_{j=1}^m b_j U)$ contradiría que $U \in W_m$).
- Para ver que es una vecindad de cero: como $b_i \in \mathbb{K}^* \setminus \sum_{j \neq i} b_j U$ es abierto, $(\mathbb{K}^* \setminus \sum_{j \neq i} b_j U) - b_i$ es una vecindad abierta de 0 y, dado que¹⁷ $U^2 \in \widehat{\mathcal{T}}^\perp$, existe $x_i \in \mathbb{K}^* \setminus \{0\}$ tal que $0 \in x_i U^2 \subseteq (\mathbb{K}^* \setminus \sum_{j \neq i} b_j U) - b_i$.

Sea $V := \bigcap_{i=1}^m x_i U$; entonces $0 \in V$ es abierto y se sigue que, para toda i :

$$(b_i + VU) \cap \sum_{j \neq i} b_j U = \emptyset$$

Ahora, si $x \in V \cap B \neq \emptyset$ entonces, para alguna i :

$$b_i \in xU + \sum_{j \neq i} b_j U$$

$$(b_i + VU) \cap \sum_{j \neq i} b_j U \supseteq (b_i + xU) \cap \sum_{j \neq i} b_j U \neq \emptyset$$

lo cual es una contradicción y, entonces, $V \subseteq \mathbb{K}^* \setminus B$.

Por lo anterior, entonces $\mathbb{K}^* \setminus B$ es una vecindad acotada de cero y por lo tanto es co-encajable con U .

Para concluir, los elementos de $\{\mathbb{K}^* \setminus B, U\}$ son co-encajables y, por hipótesis, uno de ellos es \vee -definible y el otro tipo-definible –sobre algún conjunto de parámetros–, ya que U y B deben cumplir alguna –la misma– de estas condiciones y $\mathbb{K}^* \setminus B$ la condición contraria. Por el lema anterior, existe un conjunto \mathbb{K}^* -definible D , co-encajable con ellos; además, $D \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$ ya que las vecindades acotadas en un campo filtrado son una clase de co-encajabilidad. \square

Corolario 2.1.4.24. *Si \mathbb{A} un W_n -subanillo no trivial y (\mathbb{K}^*, \vee) -definible de \mathbb{K}^* ; entonces $\mathcal{T}_{\mathbb{A}}$ es un W_n -filtro \mathbb{K}^* -definible.*

Proposición 2.1.4.25. *Si \mathbb{A} es un W_n -anillo, entonces tiene a lo más n ideales maximales.*

Demostración. Usando la aditividad del rango cúbico y el teorema chino del residuo, si se tuvieran $n + 1$ ideales maximales $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{n+1}$

$$\frac{\mathbb{A}}{\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{n+1}} \cong \frac{\mathbb{A}}{\mathfrak{m}_1} \times \dots \times \frac{\mathbb{A}}{\mathfrak{m}_{n+1}}$$

por lo que $\text{Cb}(\mathbb{A}) > n$. \square

¹⁷El producto de conjuntos acotados vuelve a ser un conjunto acotado, de acuerdo al inciso b del lema 2.1 en [2].

El siguiente teorema es la proposición 2.12 en [37]; que nos dice que; así como los W_1 -anillos son anillos de valuación, también los W -anillos cerrados bajo enteros son anillos finitamente valuados.

Teorema 2.1.4.26. *Si \mathbb{A} es un anillo de rango cúbico $n := \text{Cb}(\mathbb{A})$, entonces existe $m \leq n$ tal que su cerradura entera $\overline{\mathbb{A}}$ es un anillo m -valuado.*

Demostración. Es bien sabido que $\overline{\mathbb{A}} = \bigcap \mathbb{P}$ puede expresarse como la intersección de

$$\mathbb{P} := \{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ es anillo de valuación, } \mathbb{A} \subseteq \mathcal{O}\}$$

Además, el conjunto de ideales maximales de \mathbb{A} viene dado precisamente como

$$\{\mathfrak{m} \cap \mathbb{A} : \mathcal{O} \in \mathbb{P} \ \& \ \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal de } \mathcal{O}\}$$

entonces por la proposición anterior \mathbb{P} no puede contener anticadenas de cardinal $n + 1$ o su rango cúbico sería mayor a n . Por lo tanto, la anchura de \mathbb{P} es menor o igual a n y por el teorema de Dilworth existe una descomposición en no más de n cadenas de \mathbb{P} ; es decir, una partición $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$ de \mathbb{P} con $m \leq n$ tal que cada \mathcal{C}_i es una cadena con el orden de \mathbb{P} . Se tiene entonces

$$\overline{\mathbb{A}} = \bigcap \mathbb{P} = \bigcap_{i=1}^m \left(\bigcap \mathcal{C}_i \right)$$

donde cada $\bigcap \mathcal{C}_i$ es un anillo de valuación. □

El siguiente corolario es inmediato del teorema anterior y la proposición 1.1.2.8.

Corolario 2.1.4.27. *Si \mathbb{A} es un W -anillo y $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ son los ideales maximales de su cerradura entera, entonces cada localización $\overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}_i}$ es un anillo de valuación y, además:*

$$\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{i=1}^n \overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}_i}$$

Lema 2.1.4.28. *Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{K}^*$ un W_n -subanillo (C, \vee) -definible; entonces:*

1. *La cerradura entera de \mathbb{A} es (C, \vee) -definible.*
2. *Cada localización de \mathbb{A} en un ideal maximal \mathfrak{m}_i es $(C \cup F_i, \vee)$ -definibles para algún subconjunto finito $F_i \subseteq \mathfrak{m}_i$.*

Demostración. Comenzamos por expresar a \mathbb{A} de manera explícita como la siguiente unión de conjuntos C -definibles.

$$\mathbb{A} := \bigcup_{i \in I} D_i$$

entonces se tiene lo siguiente:

2 Clasificación de campos dp -finitos

1. La cerradura entera de \mathbb{A} es el conjunto de soluciones a polinomios mónicos con coeficientes en \mathbb{A} ; es decir, el siguiente conjunto

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{A}} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{K}^* : \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{A} (\sum_{i=0}^n a_i z^i + z^{n+1} = 0)\} \\ &= \bigcup_{i_0, \dots, i_n \in I} \{z \in \mathbb{K}^* : \mathbb{K}^* \models \exists x_0 \dots \exists x_n (\bigwedge_{j=0}^n D_{i_j}(x_j) \wedge (\sum_{j=1}^n x_j z^i + z^{n+1} \approx 0))\}\end{aligned}$$

donde claramente la expresión $\sum_{j=1}^n x_j z^i + z^{n+1}$ se puede escribir como un término del lenguaje.

2. Ya sabemos que \mathbb{A} tiene una cantidad finita, digamos m , de ideales maximales $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_m$. La prueba de que \mathfrak{m}_i es $(C \cup F_i, \vee)$ -definible es la misma para cada i , entonces veamos que \mathfrak{m}_1 es $(C \cup F_1, \vee)$ -definible para algún subconjunto finito $F_1 \subseteq \mathfrak{m}_1$. Usando el teorema chino del residuo, para cada función $f : \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$ podemos encontrar una solución $a_f \in \mathfrak{m}_1$ del sistema $\{x = f(i) \pmod{\mathfrak{m}_i}\}_{i=2}^m$. Afirmamos que se tiene la equivalencia¹⁸

$$x \notin \mathfrak{m}_1 \iff \mathbb{K}^* \models \bigvee_{f: \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}} \exists y (y(x - a_f) \approx 1) \quad (2.4)$$

para lo cual:

■ \Rightarrow

Sea $x \notin \mathfrak{m}_1$ y sea $f : \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathfrak{m}_i \\ 1 & x \in \mathfrak{m}_i \end{cases}$$

entonces $x \neq a_f \pmod{\mathfrak{m}_i}$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$; es decir, $x - a_f \notin \mathfrak{m}_i$ para toda i es una unidad, lo cual es precisamente $\mathbb{K}^* \models \exists y (y(x - a_f) \approx 1)$.

■ \Leftarrow

Por contrapositiva: si $x \in \mathfrak{m}_1$ entonces para toda $f : \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$ se tiene que $x + a_f \in \mathfrak{m}_1$ no es una unidad.

Por lo tanto, si definimos $F_1 := \{a_f : f : \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}\}$ y hacemos

$$\varphi(\{x\}) := \bigvee_{f: \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}} \exists y (y(x - a_f) \approx 1)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{\mathfrak{m}_1} &= \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{K}^* : a, b \in \mathbb{A} \ \& \ b \notin \mathfrak{m}_1 \right\} \\ &= \bigcup_{i, j \in I} \{z \in \mathbb{K}^* : \mathbb{K}^* \models \exists x_1 \exists x_2 (D_i(x_1) \wedge D_j(x_2) \wedge \varphi(x_2) \wedge z \cdot x_2 \approx x_1)\}\end{aligned}$$

¹⁸ $\bigvee_{f: \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}} \exists y (y(x + a_f) = 1)$ es una fórmula porque sólo hay una cantidad finita de funciones $f : \{2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$.

□

Notación 2.1.4.29. *Teniendo en cuenta el corolario 2.1.4.6, cuando nos refiramos a un “V-algo” nos estaremos refiriendo a lo que hemos definido para “ W_1 -algo”. Por ejemplo:*

- *Un V-filtro es lo mismo que un W_1 -filtro.*
- *Una V-topología es lo mismo que una W_1 -topología.*
- *Un V-anillo es lo mismo que un W_1 -anillo; es decir, un anillo de valuación.*

2.1.5. Diccionarios

Repasamos el diccionario dado en la sección 2 de [38], que nos permite traducir el problema de hallar valuaciones en \mathbb{K} al problema de hallar V-topologías en \mathbb{K} . En lo que sigue, siempre supondremos que \mathcal{T} tiene una vecindad acotada \mathbb{K} -definible; en particular \mathcal{T} siempre será \mathbb{K} -definible de acuerdo a la definición 2.1.3.8.

Comentario 2.1.5.1. *Lo anterior parece ser una suposición bastante fuerte, ya que estamos suponiendo que sólo estamos trabajando con topologías internamente definibles; sin embargo, dado que en nuestra forma de trabajar cualquier expansión de un campo es también un campo; en particular, para cualquier filtro \mathcal{T} en \mathbb{K} y $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$, U es definible en el campo expandido (\mathbb{K}, U) . Por lo tanto, mucho de lo que haremos a continuación en realidad se cumple para cualquier filtro en un campo.*

Proposición 2.1.5.2. *La unión $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} := \bigcup_{B \in \mathcal{T}^\perp} B^* \subseteq \mathbb{K}^*$ es dirigida, (\mathbb{K}, \vee) -definible y es una subálgebra propia de \mathbb{K}^* .*

Demostración. La unión es dirigida ya que \mathcal{T}^\perp es un ideal. $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ -definible ya que existe una vecindad acotada \mathbb{K} -definible; que induce una base \mathbb{K} -definible \mathcal{B} del ideal \mathcal{T}^\perp . Además

$$\mathbb{K}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} U^*$$

$\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ tiene estructura de subálgebra, ya que el producto, la diferencia y los múltiplos escalares de conjuntos acotados vuelven a ser conjuntos acotados; por el lema 2.1 en [2]. Finalmente, para ver que esta subálgebra es propia, notemos que \mathbb{K} no es acotado por el mismo lema y esto implica, en particular, que para todo $B \in \mathcal{T}^\perp$, $\mathbb{K} \not\subseteq B$. Dado que \mathcal{T}^\perp es un ideal, esto nos dice que $\{\neg B(x)\}_{B \in \mathcal{T}^\perp}$ es finitamente satisfacible; pues de lo contrario tendríamos que \mathbb{K} está contenido en una unión finita de conjuntos acotados, que sería un conjunto acotado. Usando la saturación de $\mathbb{K}(1)^*$, debe existir $x_0 \in \mathbb{K}^*$ tal que, para todo $B \in \mathcal{T}^\perp$, $\mathbb{K}(1)^* \models \neg B(x_0)$, es decir, $x_0 \notin B^*$ para todo $B \in \mathcal{T}^\perp$; por lo que $x_0 \notin \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. □

Definición 2.1.5.3. *A la estructura dada por la proposición anterior para \mathcal{T} le llamaremos \mathbb{K} -álgebra de elementos acotados por \mathcal{T} .*

Proposición 2.1.5.4. *Dados dos filtros en \mathbb{K} , digamos $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_1), (\mathbb{K}, \mathcal{T}_2)$; se cumple:*

$$\langle \mathcal{T}_1 \rangle \subseteq \langle \mathcal{T}_2 \rangle \iff \mathbb{K}_{\mathcal{T}_2} \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}_1} \iff \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$$

Demostración. Se tiene la sucesión de equivalencias

$$\underbrace{\langle \mathcal{T}_1 \rangle \subseteq \langle \mathcal{T}_2 \rangle}_{(1)} \iff \underbrace{\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2}_{(2)} \iff \underbrace{\mathcal{T}_2^\perp \subseteq \mathcal{T}_1^\perp}_{(3)} \iff \underbrace{\mathbb{K}_{\mathcal{T}_2} \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}_1}}_{(4)}$$

ya que:

- (1) \iff (2): porque las vecindades de una topología de grupo están determinadas por las vecindades de 0.
- (2) \iff (3): la dirección \Rightarrow es por definición y la otra dirección se tiene ya que existe una vecindad acotada $V \in \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_2^\perp$ y cualquier elemento de \mathcal{T}_1 contiene un múltiplo no cero de todos los elementos de $\mathcal{T}_2^\perp \subseteq \mathcal{T}_1^\perp$; en particular, si $U \in \mathcal{T}_1$ existe $c \neq 0$ tal que $cV \subseteq U \in \mathcal{T}_2$ ya que \mathcal{T}_2 es un filtro y cV es uno de sus elementos.
- (3) \iff (4): la dirección \Rightarrow es evidente; y para la otra dirección: si $\bigcup_{B \in \mathcal{T}_2^\perp} B^* \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{T}_1^\perp} B^*$ y tomamos $V \in \mathcal{T}_2^\perp$, entonces $V^* \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{T}_1^\perp} B^*$; lo que por compacidad¹⁹ significa que existe un subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{T}_1$ tal que $V \subseteq \bigcup_{B \in F} B^*$, donde $\bigcup_{B \in F} B^* \in \mathcal{T}_1^\perp$ porque \mathcal{T}_1^\perp es cerrado bajo uniones finitas. Por lo tanto, $V \in \mathcal{T}_1^\perp$ porque este conjunto es un ideal.

□

Proposición 2.1.5.5. *Existe un filtro $\widehat{\mathcal{T}}$ en \mathbb{K}^* tal que*

1. $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$
2. Si $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ entonces $U^* \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$.
3. Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ es un campo multifiltrado, entonces

$$(\mathbb{K}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n) \sim (\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{T}}_n)$$

son localmente equivalentes.

Demostración. Tomemos $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$; entonces, por definición, $U^* \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. Dado que \mathcal{T}^\perp es un ideal, $\{\neg(u \approx 0) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow U(ux))\}_{B \in \mathcal{T}^\perp}$ es finitamente satisficible y, por saturación, existe $u \in (\mathbb{K}^*)^\times$ tal que, para todo $B \in \mathcal{T}^\perp$, $uB^* \subseteq U^*$; por lo que $u\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \subseteq U^*$ y $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es co-encajable con U^* . U^* define un filtro $\widehat{\mathcal{T}}$ en \mathbb{K}^* (usando la prueba de Prestel-2.3) y es co-encajable con $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ para cualquier elección de $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$, por lo que el filtro $\widehat{\mathcal{T}}$ no depende de la elección de U y está

¹⁹ $V^* \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{T}_1^\perp} B^*$ se expresa por contrapositiva en el lenguaje de $\mathbb{K}(1)$ como $\{\neg B(\{x\})\}_{B \in \mathcal{T}^\perp} \models \neg V(\{x\})$.

definido por $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. Lo anterior prueba los puntos 1 y 2.

Por otro lado, si tomamos un campo multifiltrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ y tomamos, para cada i , $U_i \in \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_i^\perp$, se tiene una equivalencia elemental

$$(\mathbb{K}, U_1, \dots, U_n) \equiv (\mathbb{K}^*, U_1^*, \dots, U_n)$$

Lo anterior implica el último punto, por (2.1.3.17). \square

Proposición 2.1.5.6. $(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}})$ es un campo filtrado \mathbb{K} -definible y ω -completo.

Demostración. Que es \mathbb{K} -definible es inmediato del punto 2 de la proposición anterior. Para ver que es ω -completo, si tomamos un subconjunto numerable $N \subseteq \widehat{\mathcal{T}}$ y la base \mathbb{K} -definible $\{cU^* : c \in (\mathbb{K}^*)^\times\}$ dada por una vecindad acotada $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$, entonces para cada $V \in N$ existe $c_V \in (\mathbb{K}^*)^\times$ tal que $c_V U \subseteq V$, por lo que

$$\bigcap_{V \in N} c_V U^* \subseteq \bigcap_{V \in N} V$$

y por compacidad y saturación aplicados al $\{x\}$ -tipo

$$\{\neg(x \approx 0)\} \cup \{xU \subseteq c_{V_1}U \cap \dots \cap c_{V_n}U\}_{V_1, \dots, V_n \in N}$$

existe $c \in \mathbb{K}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$cU^* \subseteq \bigcap_{V \in N} c_V U^*$$

Como $\widehat{\mathcal{T}}$ es un filtro, se sigue que $\bigcap_{V \in N} V \in \widehat{\mathcal{T}}$, ya que

$$cU^* \in \widehat{\mathcal{T}} \implies \bigcap_{V \in N} c_V U^* \in \widehat{\mathcal{T}} \implies \bigcap_{V \in N} V \in \widehat{\mathcal{T}}$$

\square

Los siguientes corolarios son consecuencia directa del teorema 2.1.3.19.

Corolario 2.1.5.7. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ es un subanillo propio de \mathbb{K}^* , entonces $\mathbb{K}^* = \text{Frac}(\mathbb{A})$.

Corolario 2.1.5.8. $\mathbb{K}^* = \text{Frac}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$ para todo filtro \mathcal{T} en \mathbb{K} . Además, $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}}$ coincide con el filtro en $\text{Frac}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$ generado por los ideales no cero de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$.

Proposición 2.1.5.9. $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un W_n -anillo si y sólo si \mathcal{T} es W_n -filtro. Además

$$\text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) = \text{Cb}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}}) = \text{Cb}(\mathbb{K}^*)$$

2 Clasificación de campos dp -finitos

Demostración. Claramente, si $U \in W_n \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ entonces $U^* \in \widehat{W}_n \cap \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$ (donde \widehat{W}_n denota el conjunto de W_n -conjuntos de \mathbb{K}^*); de manera que $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un W_n -anillo, ya que contiene al W_n -conjunto U^* . El desarrollo anterior se traduce en la siguiente implicación:

$$\text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) \leq n \implies \text{Cb}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}}) \leq n$$

Por otro lado, si $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un W_n anillo entonces $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \in \widehat{W}_n \cap \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^\perp$. Por definición del peso, lo anterior nos da la implicación

$$\text{Cb}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}}) \leq n \implies \text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) \leq n$$

Se sigue que $\text{Wt}((\mathbb{K}, \mathcal{T})) = \text{Cb}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$. □

Lema 2.1.5.10. Sean $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ son dos \mathbb{K} -subálgebras de \mathbb{K}^* , (\mathbb{K}, \vee) -definibles. Si \mathbb{A}_1 es encajable en \mathbb{A}_2 , entonces $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$.

Demostración. Como \mathbb{A}_1 y \mathbb{A}_2 son (\mathbb{K}, \vee) -definibles, podemos expresarlos como uniones de conjuntos \mathbb{K} -definibles $\mathbb{A}_1 := \bigcup_{U \in I} U^*$, $\mathbb{A}_2 := \bigcup_{V \in J} V^*$ donde²⁰ $I, J \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y, dado que la unión finita de conjuntos definibles es definible, podemos suponer que los conjuntos I y J son cerrados bajo uniones finitas. Ahora, el que \mathbb{A}_1 sea encajable en \mathbb{A}_2 podemos expresarlo diciendo que existe $c \neq 0$ (en \mathbb{K}^*) tal que, para toda $U \in I$: $cU^* \subseteq c\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \bigcup_{V \in J^*} V$, donde la última contención se tiene ya que $\mathbb{K}(2)^* \models J(V)$ para todo $V \in J$ (y entonces $\{V^* : V \in J\} \subseteq J^*$). Podemos expresar la siguiente consecuencia de lo anterior (que para toda $U \in I$ existe alguna c , pero no necesariamente la misma) en el lenguaje de $\mathbb{K}(2)$:

$$\mathbb{K}(2)^* \models \{\exists c(\neg(c \approx 0) \wedge \forall x(U(x) \rightarrow \exists V(J(V) \wedge \in_K(cx, V))))\}_{U \in I}$$

Como estas últimas son fórmulas cerradas, se cumplen también en $\mathbb{K}(2) \preceq \mathbb{K}(2)^*$:

$$\mathbb{K}(2) \models \{\exists c(\neg(c \approx 0) \wedge \forall x(U(x) \rightarrow \exists V(J(V) \wedge \in_K(cx, V))))\}_{U \in I}$$

esto se traduce en que existe un familia $\{c_U\}_{U \in I} \subseteq \mathbb{K}^\times$ tal que, para cualquier $U \in I$ y cualquier $x \in U$, existe $V_x \in J$ tal que $c_U x \in V_x$. Dado que J es cerrado bajo uniones finitas, se sigue que el $\{V\}$ -tipo

$$\{U(x) \rightarrow (J(\{V\}) \wedge \in_K(c_U x, \{V\}))\}_{x \in U}$$

es finitamente satisficible para cada $U \in I$. Por saturación en $\mathbb{K}(2)^*$, esto nos dice que existe una familia $\{V_U\}_{U \in I} \subseteq J$ tal que:

$$\mathbb{K}(2)^* \models \{U(x) \rightarrow \in_K(c_U x, V_U)\}_{x \in U \in I}$$

Cada una de las fórmulas anteriores es una fórmula cerrada en el lenguaje de $\mathbb{K}(2) \preceq \mathbb{K}(2)^*$, entonces:

$$\mathbb{K}(2) \models \{U(x) \rightarrow \in_K(c_U x, V_U)\}_{x \in U \in I}$$

²⁰Cf. proposición 1.2.4.20

y, por definición, esto es:

$$\mathbb{K}(2) \models \{\forall x(U(x) \rightarrow_{\in_K} (c_U x, V_U))\}_{U \in I}$$

Recordando que $\mathbb{K}(2) \models_{\in_K} (c_U x, V_U) \leftrightarrow V_U(c_U x)$, podemos reescribir lo anterior como:

$$\mathbb{K}(2) \models \{\forall x(U(x) \rightarrow V_U(c_U x))\}_{U \in I}$$

que es una fórmula del reducto $\mathbb{K}(1)$, de manera que:

$$\mathbb{K}(1) \models \{\forall x(U(x) \rightarrow V_U(c_U x))\}_{U \in I}$$

lo anterior son fórmulas cerradas y $\mathbb{K}(1) \preceq \mathbb{K}(1)^*$, entonces:

$$\mathbb{K}(1)^* \models \{\forall x(U(x) \rightarrow V_U(c_U x))\}_{U \in I}$$

es decir, para todo $U \in I$ y $x \in U^*$, $c_U x \in V_U^* \subseteq \mathbb{A}_2$ lo cual es equivalente a $x \in c_U^{-1} \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{A}_2$ (\mathbb{A}_2 es una \mathbb{K} -álgebra y $c_U^{-1} \in \mathbb{K}$). Concluimos que $\mathbb{A}_1 = \bigcup_{U \in I} U^* \subseteq \mathbb{A}_2$ \square

Teorema 2.1.5.11. *Sea \mathbb{A} un anillo (\mathbb{K}, \vee) -definible tal que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A} \subsetneq \text{Frac}(\mathbb{A}) = \mathbb{K}^*$, entonces*

1. $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ para algún filtro \mathcal{T} si y sólo si \mathbb{A} es co-encajable con un conjunto \mathbb{K}^* -definible $D \subseteq \mathbb{K}^*$.
2. Para cada n , $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ para algún W_n -filtro \mathcal{T} si y sólo si \mathbb{A} es un W_n -anillo.

Demostración.

1. Si $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ entonces por (2.1.5.5) \mathbb{A} es co-encajable con U^* para todo $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp}$, ya que las vecindades acotadas son una clase de co-encajabilidad.

Para la otra implicación, supóngase que \mathbb{A} es co-encajable con $D := \alpha(\mathbb{K}^*, \mathbf{a})$, para algún $\mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^X$ y sea C el conjunto de parámetros $\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^X$ tales que $\text{Dom}(\mathbf{c}) = \text{Dom}(\mathbf{a})$ y $\alpha(\mathbb{K}^*, \mathbf{c})$ es co-encajable con D . Como la co-encajabilidad de $\alpha(\mathbb{K}^*, \mathbf{c})$ con D es expresable mediante una fórmula entonces C es \mathbb{K}^* -definible²¹. Por otro lado, D es co-encajable con \mathbb{A} y la co-encajabilidad es una relación de equivalencia; entonces C también está caracterizado como el conjunto de parámetros \mathbf{c} tales que $\alpha(\mathbb{K}^*, \mathbf{c})$ es co-encajable con \mathbb{A} ; lo cual implica que C es invariante bajo automorfismos de la extensión \mathbb{K}^*/\mathbb{K} , pues podemos cubrir \mathbb{A} con conjuntos \mathbb{K} -definibles. Como C es \mathbb{K}^* -definible e invariante bajo dichos automorfismos, C es \mathbb{K} -definible por el teorema 1.2.4.24; y como C es no vacío, también $C(X)^{\mathbb{K}}$ es no vacío. Se sigue que podemos tomar $\mathbf{k} \in C(X)^{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $U^* := \alpha(\mathbb{K}^*, \mathbf{k})$ es co-encajable con \mathbb{A} .

Sea $\mathcal{T}_{\mathbb{A}}$ el filtro generado por el prefiltro de ideales no cero de \mathbb{A} , entonces $(\text{Frac}(\mathbb{A}), \mathcal{T}_{\mathbb{A}})$ es un campo filtrado y $U^* \in \mathcal{T}_{\mathbb{A}} \cap \mathcal{T}_{\mathbb{A}}^{\perp}$; en particular, la familia $\{cU^* : c \in (\mathbb{K}^*)^{\times}\}$ genera un filtro en

²¹ $C = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^X : \mathbb{K}^* \models \exists c_1 \exists c_2 \forall x ((D(\{x\}) \rightarrow \alpha(c_1\{x\}, \mathbf{c})) \wedge (\alpha(\{x\}, \mathbf{c}) \rightarrow D(c_2\{x\})))\}$

2 Clasificación de campos dp -finitos

\mathbb{K}^* . Ahora, el hecho de que dicha familia genere un filtro en \mathbb{K}^* es expresable en el lenguaje de $\mathbb{K}(1)$ mediante un enunciado²² y entonces debe cumplirse lo respectivo en \mathbb{K} ; es decir, la familia $\{cU : c \in \mathbb{K}^\times\}$ genera algún filtro \mathcal{T} en \mathbb{K} en el que U es una vecindad acotada. Se sigue, usando (2.1.5.5), que el anillo \vee -definible $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es co-encajable con U^* y por lo tanto con \mathbb{A} . Por el lema anterior, concluimos que $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$.

2. Por la proposición (2.1.5.9), si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo W_n -filtrado tal que $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, entonces $\text{Cb}(\mathbb{A}) \leq n$ y \mathbb{A} es un W_n -anillo.

Ahora supóngase que \mathbb{A} es un W_n -anillo. Como es (\mathbb{K}, \vee) -definible (y, en particular, (\mathbb{K}^*, \vee) -definible), podemos usar (2.1.4.23) para encontrar un conjunto \mathbb{K}^* -definible D co-encajable con \mathbb{A} . Usando la equivalencia del primer inciso: $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, para algún filtro en \mathbb{K} y, usando nuevamente (2.1.5.9) obtenemos que \mathcal{T} es un W_n -filtro. □

Comentario 2.1.5.12. *De la prueba anterior se desprende que un anillo (\mathbb{K}, \vee) -definible $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{K}^*$ es co-encajable con un conjunto \mathbb{K}^* -definible si y sólo si es co-encajable con un conjunto \mathbb{K} -definible; y esto también es cierto si, en lugar de (\mathbb{K}, \vee) -definible, suponemos que \mathbb{A} es (\mathbb{K}, \wedge) -definible. El punto 1, sin embargo, fue enunciado de ese modo para poder aplicar (2.1.4.23) en la prueba del punto 2.*

Corolario 2.1.5.13. *La correspondencia $\mathcal{T} \mapsto \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es una biyección entre filtros de \mathbb{K} y sub-anillos propios de \mathbb{K}^* que contienen a \mathbb{K} , (\mathbb{K}, \vee) -definibles y co-encajables con un conjunto \mathbb{K}^* -definible. Además, restringida a W_n filtros y co-restringida (restringiendo el contradominio) a W_n -subanillos (\mathbb{K}, \vee) -definibles de \mathbb{K}^* vuelve ser una biyección. Más aún, esta correspondencia es un isomorfismo “contravariante” entre los retículos correspondientes (es decir, traduce la contención de anillos en el engrosamiento de filtros).*

Demostración. Consecuencia inmediata de (2.1.5.4). □

Comentario 2.1.5.14. *Revisando la prueba del teorema anterior, podemos darnos cuenta que la inversa de la biyección $\mathcal{T} \mapsto \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ la obtenemos en \mathbb{K} fijándonos en el filtro para \mathbb{K}^* generado por los ideales de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ —es decir $\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}}$ — y “bajándolo” a un filtro para \mathcal{T} que está determinado por las vecindades U tales que U^* es co-encajable con $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. Teniendo en cuenta lo anterior y para no complicar aún más la notación, denotaremos a esta inversa simplemente $\mathbb{A} \mapsto \mathcal{T}_{\mathbb{A}}$; como si se tratara exactamente del filtro generado por los ideales de $\mathbb{A} = \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, y no del filtro inducido en \mathbb{K} por este filtro de \mathbb{K}^* .*

Corolario 2.1.5.15. *Sean $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sub-anillos de valuación propios de \mathbb{K}^* , ambos (\mathbb{K}, \vee) -definibles. Si \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 son dependientes^{23,24}, entonces $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

²²Ver lema 2.1(6) en [2].

²³Como en la observación 1.1.3.7.

²⁴Cf. observación 2.5 en [30].

Demostración. Si son dependientes induce el mismo V-filtro, pues tienen un anillo de valuación de \mathbb{K}^* no trivial $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$ que los contiene a ambos y este induce dicha topología común mediante su prefiltro de ideales²⁵; entonces ambos son la imagen de dicho V-filtro bajo la correspondencia mencionada en el corolario anterior. \square

Lema 2.1.5.16. *Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo V-filtrado, entonces $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un anillo local cuyo ideal maximal está dado por $\mathfrak{m} = \bigcap_{U \in \mathcal{T}} U^*$.*

Demostración. Que es un anillo local es inmediato de la proposición anterior, pues un W_1 -anillo es un anillo de valuación. Para verificar que su ideal maximal está dado como propusimos, tomemos $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y sea $C := \{x \in \mathbb{K} : \frac{1}{x} \notin B\}$; de manera que $C^{-1} \cap B = \emptyset$ y $C \cup B^{-1} = K$ y $C \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp 26}$. Tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{K}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{U \in \mathcal{T}^\perp} U^* = \bigcup_{u \in \mathbb{K}^\times} uB^* \qquad \bigcap_{U \in \mathcal{T}} U^* = \bigcap_{u \in \mathbb{K}^\times} uC^* = \bigcap_{u \in \mathbb{K}^\times} u^{-1}C^*$$

por lo que:

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{m} &\underset{\text{local}}{\iff} \frac{1}{x} \notin \mathbb{K}_{\mathcal{T}} \iff \forall u \in \mathbb{K}^\times \left(\frac{1}{x} \notin uB^* \right) \iff \forall u \in \mathbb{K}^\times \left(\frac{1}{ux} \notin B^* \right) \\ &\iff \forall u \in \mathbb{K}^\times (ux \in C^*) \iff \forall u \in \mathbb{K}^\times (x \in u^{-1}C^*) \iff x \in \bigcap_{u \in \mathbb{K}^\times} u^{-1}C^* \\ &\iff x \in \bigcap_{U \in \mathcal{T}} U^* \end{aligned}$$

\square

Definición 2.1.5.17. *A los elementos del ideal \mathfrak{m} de la definición anterior les llamaremos infinitesimales de \mathcal{T} .*

Teorema 2.1.5.18. *Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo W-filtrado, entonces:*

- *Existe un único W-filtro $\overline{\mathcal{T}}$ tal que el anillo $\mathbb{K}_{\overline{\mathcal{T}}}$ es $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}}$; la cerradura entera de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$.*
- *Existen únicos W-filtros $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ tales que $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_1}, \dots, \mathbb{K}_{\mathcal{T}_n}$ son precisamente las localizaciones de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ en sus ideales maximales.*

Demostración. Usando el lema 2.1.4.28, como $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es (\mathbb{K}, \vee) -definible su cerradura entera es (\mathbb{K}, \vee) definible y sus localizaciones en ideales maximales son $(\mathbb{K} \cup F_i, \vee)$ -definibles para cada ideal maximal \mathfrak{m}_i . De la prueba de dicho lema, la propiedad que define a los F_i es invariante bajo automorfismos que fijan a \mathbb{K} y como consecuencia cada conjunto $C \cup F_i$ -definible que aparece en la unión que define a cada localización es invariante bajo automorfismos de \mathbb{K}^*/\mathbb{K} ; por lo que estos conjuntos son

²⁵El ideal maximal de \mathcal{O} está contenido en el ideal maximal de \mathcal{O}_1 y en el ideal maximal de \mathcal{O}_2 , entonces la topología inducida por \mathcal{O} refina a las inducidas por \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 . Por el teorema 3.2 en [2], estas topologías son minimales y se tiene la igualdad.

²⁶Cf. definición de V-topología en la sección 3 de [2].

\mathbb{K} -definibles de acuerdo al teorema 1.2.4.24. Tenemos entonces que tanto la cerradura entera como las localizaciones en ideales maximales de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ son (\mathbb{K}, \vee) -definibles. Ahora, como estos anillos contienen al W -conjunto $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, también son W -anillos. Además, estos anillos contienen a \mathbb{K} por contener a $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, entonces el corolario (2.1.5.13) nos dice que provienen de W -filtros únicamente determinados por la biyección $\mathcal{T} \mapsto \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. \square

Definición 2.1.5.19. A $\overline{\mathcal{T}}$ se le conoce como la cerradura entera de \mathcal{T} y a $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ se les conoce como las componentes locales de \mathcal{T} .

Teorema 2.1.5.20. Dado $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo W -filtrado, los V -engrosamientos de \mathcal{T} son precisamente las componentes locales de la cerradura entera de \mathcal{T} .

Demostración. Por (2.1.5.13), los V -engrosamientos de \mathcal{T} corresponden a sub-anillos propios de valuación de \mathbb{K}^* , (\mathbb{K}, \vee) -definibles, que contienen a \mathbb{K} . Consideremos la estructura de valuación de su cerradura entera, dada por (2.1.4.26); es decir:

$$\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$$

donde cada \mathcal{O}_i es la localización de $\overline{\mathbb{A}}$ en un ideal maximal; y notamos que, de la misma manera que en la prueba de (2.1.5.18), los anillos \mathcal{O}_i tienen estas propiedades. Por otro lado, si \mathcal{O} es otro anillo de valuación con estas propiedades: como \mathcal{O} es cerrado bajo enteros –del anillo de fracciones– por ser anillo de valuación, tenemos $\mathcal{O}_1 \cap \dots \cap \mathcal{O}_m \subseteq \mathcal{O}$ y entonces $\mathcal{O}_j \subseteq \mathcal{O}$ para alguna j por la unicidad de la descomposición²⁷; de manera que $\mathcal{O} \vee \mathcal{O}_j = \mathcal{O}$; es decir, estos anillos de valuación son dependientes y por lo tanto iguales por (2.1.5.15). \square

Corolario 2.1.5.21.

1. Un campo W_n -filtrado tiene al menos uno y a lo más n V -engrosamientos.
2. Si $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es un campo W_n -filtrado \mathbb{K} -definible, entonces todos sus V -engrosamientos son \mathbb{K} -definibles.

Demostración. El primer punto se sigue de la proposición (2.1.4.25) y el segundo de la proposición (2.1.4.23), aplicando el comentario (2.1.5.12). \square

Definición 2.1.5.22. Un W -filtro \mathcal{T} en \mathbb{K} es local si para todo $U \in \mathcal{T}^\perp$ existe $V \in \mathcal{T}^\perp$ tal que si $x \in U$ entonces $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\} \cap V \neq \emptyset$.

Lema 2.1.5.23. Son equivalentes:

1. Para todo $B \in \mathcal{T}^\perp$, existe $C \in \mathcal{T}^\perp$ tal que $\mathbb{K}(1) \models \forall x (B(x) \rightarrow (C(\frac{1}{x}) \vee C(\frac{1}{1-x})))$.
2. Para todo $x \in \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$: $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$.

²⁷Cf. proposición 1.1.2.8 o el corolario 6.8 en [33].

Demostración. $1 \implies 2$

Si $x \in \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, por definición existe $B \in \mathcal{T}^{\perp}$ tal que $x \in B^*$ y por hipótesis existe C tal que $\mathbb{K}(1)$ satisface el enunciado $\forall x (B(x) \rightarrow (C(\frac{1}{x}) \vee C(\frac{1}{1-x})))$; entonces también lo satisface $\mathbb{K}(1)^*$ y se tiene

$$\mathbb{K}(1)^* \models \forall x \left(B(x) \rightarrow \left(C\left(\frac{1}{x}\right) \vee C\left(\frac{1}{1-x}\right) \right) \right)$$

lo cual, traducido al español, significa que todos los elementos $x \in B^*$ cumplen que $\frac{1}{x} \in C^*$ o $\frac{1}{1-x} \in C^*$; es decir:

$$\emptyset \neq \left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x} \right\} \cap C^* \subseteq \left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x} \right\} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$$

$2 \implies 1$

Como $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^{\perp}$, entonces, por la proposición 2.1.5.5, podemos tomar cualquier $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp}$ y U^* es co-encajable con $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$. En particular; como las vecindades acotadas son una clase de co-encajabilidad, existe U tal que $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \subseteq U^* \in \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}^{\perp}$; y como U^* es acotado por $\widehat{\mathcal{T}}$, para todo $V \in \widehat{\mathcal{T}}$ existe $c \neq 0$ tal que $U^* \subseteq cV$. Podemos escribir lo anterior mediante el enunciado local^{28,29}:

$$(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}}) \models \exists U (\widehat{\mathcal{T}}(U) \wedge \forall x (\in (x, U) \rightarrow \forall V (\widehat{\mathcal{T}}(V) \rightarrow \exists c (\neg(c \approx 0) \wedge (\in (\frac{1}{cx}, V) \vee \in (\frac{1}{c(1-x)}, V))))))^{30}$$

Por equivalencia local, lo anterior se cumple en $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$; es decir:

$$(\mathbb{K}, \mathcal{T}) \models \exists U (\mathcal{T}(U) \wedge \forall x (\in (x, U) \rightarrow \forall V (\mathcal{T}(V) \rightarrow \exists c (\neg(c \approx 0) \wedge (\in (\frac{1}{cx}, V) \vee \in (\frac{1}{c(1-x)}, V))))))$$

y podemos tomar un testigo existencial de la fórmula anterior $U_0 \in \mathcal{T}$.

Ahora, si $B \in \mathcal{T}^{\perp}$ y $x \in B$, existe $c_1 \in \mathbb{K}^{\times}$ tal que $c_1x \in cB \subseteq U_0$ y como $U \in \mathcal{T}$, por la fórmula anterior existe $c_2 \in \mathbb{K}^{\times}$ tal que $\frac{1}{c_2c_1x} \in U$ o bien $\frac{1}{c_2c_1(1-x)} \in U$; de donde $\frac{1}{x} \in c_2c_1U$ o $\frac{1}{1-x} \in c_2c_1U$. Se sigue que, si definimos $C := c_2c_1U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp} \subseteq \mathcal{T}^{\perp}$, se cumple

$$\mathbb{K}(1) \models \forall x (B(x) \rightarrow (C(\frac{1}{x}) \vee C(\frac{1}{1-x})))$$

□

Teorema 2.1.5.24. *Si \mathcal{T} es un W -filtro en \mathbb{K} , entonces: $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es local si y sólo si $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un anillo local.*

Demostración. Usando el lema anterior, se tiene la siguiente sucesión de equivalencias:

²⁸Recordar que $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$.

²⁹Cf. lema 2.1.5.25.

³⁰Obsérvese que esto es un enunciado en el lenguaje de $\mathbb{K}^*(2)$ y no de $\mathbb{K}(2)^*$, por lo que el símbolo \in tiene como significado la pertenencia conjuntista habitual y no la que se encuentra localmente extendida para extensiones elementales de $\mathbb{K}(2)$.

2 Clasificación de campos dp-finitos

$\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es local

\iff

para todo $x \in \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$: $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$

\iff

para todo $B \in \mathcal{T}^{\perp}$, existe $C \in \mathcal{T}^{\perp}$ tal que:

$$\mathbb{K}(1) \models \forall x \left(B(x) \rightarrow \left(C\left(\frac{1}{x}\right) \vee C\left(\frac{1}{1-x}\right) \right) \right)$$

\iff

para todo $B \in \mathcal{T}^{\perp}$, existe $C \in \mathcal{T}^{\perp}$ tal que si $x \in B$ entonces $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\} \cap C \neq \emptyset$; es decir $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es local. \square

Usando la misma idea que en la prueba del lema 2.1.5.23, Johnson prueba en el lema 2.14 de [38] que:

Lema 2.1.5.25. *Sea $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo filtrado y sea $\varphi(\{X\})$ una fórmula positiva en la variable $X \in \text{Var}(\mathcal{P}(K))$; entonces:*

$$\mathbb{K}(2) \models \exists V(\mathcal{T}^{\perp}(V) \wedge \varphi(V)) \leftrightarrow \forall V(\mathcal{T}(V) \rightarrow \exists c(\neg(c \approx 0) \wedge \varphi(cV)))$$

dualmente, si $\varphi(\{X\})$ es negativa en X :

$$\mathbb{K}(2) \models \forall U(\mathcal{T}^{\perp}(U) \rightarrow \varphi(U)) \leftrightarrow \exists U(\mathcal{T}(U) \wedge \forall c(\neg(c \approx 0) \rightarrow \varphi(cU)))$$

Observación 2.1.5.26. *Las fórmulas del lado derecho de la equivalencia en ambos puntos del lema anterior son fórmulas locales.*

Corolario 2.1.5.27. *La clase de campos W_n -filtrados locales es definible mediante enunciados locales.*

Demostración. La clase de campos W_n -filtrados está definida por enunciados locales (observación 3.4 en [37]) y la condición de ser un filtro local puede expresarse mediante el enunciado que dice que para cualquier conjunto acotado U podemos encontrar un conjunto acotado V que tiene, para cualquier elemento $x \in U$ a su inverso $1/x$ o al inverso de $1-x$; es decir:

$$\forall U(\mathcal{T}^{\perp}(U) \rightarrow \exists V(\mathcal{T}^{\perp}(V) \wedge \underbrace{\forall x(\in(x, U) \rightarrow (\in(-^{-1}(x), V) \vee \in(-^{-1}(+(1, -x)), V)))}_{(*)})) \quad (2.5)$$

Dado que la subfórmula $(*)$ es equivalente a la fórmula local

$$\forall x((\neg(\in(x, U))) \vee (\in(-^{-1}(x), V) \vee \in(-^{-1}(+(1, -x)), V)))$$

que es negativa en U y positiva en V , mediante dos aplicaciones del lema anterior, podemos cambiar el enunciado (2.5) por un enunciado local. \square

Comentario 2.1.5.28. *Por el lema anterior, podemos extender la noción de enunciado local para fórmulas en las que se permite cuantificación sobre cualquier base del ideal de conjuntos acotados pero con las restricciones contrarias a si cuantificamos sobre vecindades de cero (observación 2.16 en [38]).*

2.1.6. Revolturas

A lo largo de esta sección, que se corresponde con la sección 3.1 en [38], todos los campos son extensiones de un campo infinito \mathbb{K}_0 , todos los anillos son \mathbb{K}_0 -álgebras y todas las valuaciones son triviales en \mathbb{K}_0

Lema 2.1.6.1. *Sea $(\mathbb{K}, v_1, \dots, v_m)$ un campo multivaluado y $z, w \in \mathbb{K}$, entonces existe $c \in \mathbb{K}_0$ tal que, para toda i :*

$$v_i(z - cw) = \min\{v_i(z), v_i(w)\}$$

Demostración. Si $w = 0$ no hay nada que hacer, por lo que suponemos que $w \neq 0$. Para cada i , sea $\text{res}_i : \mathbb{K} \rightarrow k_i \cup \{\infty\}$ el residuo del anillo de valuación asociado a v_i , extendido mediante la regla $\text{res}_i(x) = \infty$ cuando $v_i(x) < 0$. Como \mathbb{K}_0 es infinito, podemos proponer $c \in \mathbb{K}_0 \setminus \{\text{res}_i(\frac{z}{w})\}_{i=1}^m$. Si esta elección de c fallara, por la desigualdad fuerte del triángulo y porque v es trivial en \mathbb{K}_0 :

$$v_i(z - cw) > v_i(z) = v_i(w)$$

entonces $v_i(\frac{z}{w} - c) = v_i(z - cw) - v_i(w) > 0$ y $\text{res}_i(\frac{z}{w} - c) = \text{res}_i(c) = c$, en contradicción con cómo elegimos c . \square

Definición 2.1.6.2. *Sea $(\mathbb{K}, v_1, \dots, v_m)$ un campo multivaluado y $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$*

- *diremos que x está “revuelto” (respecto a las valuaciones v_1, \dots, v_m) si, para toda i :*

$$v_i(x_1) = \dots = v_i(x_n)$$

- *Diremos que una matriz $\mu \in \text{GL}_n(\mathbb{K}^*)$ “revuelve” a x si $\mu x \in \mathbb{K}^n$ es un vector revuelto.*
- *Diremos que un conjunto de matrices $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K}^*)$ revuelve a un conjunto $A \subseteq \mathbb{K}^n$ si para todo $x \in A$ existe $\mu \in G$ que revuelve a x .*

Lema 2.1.6.3. *Sea $(\mathbb{K}, v_1, \dots, v_m)$ un campo multivaluado, entonces $\text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$ revuelve a \mathbb{K}^n , para toda n .*

Demostración. Probaremos que $\text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$ revuelve a cada clase lateral $\text{GL}_n(\mathbb{K}_0)y$; para lo cual basta con hallar un vector en cada una de ellas que se encuentre revuelto. Para cada $y \in \mathbb{K}^n$, sea $\kappa_y := |\{(i, j) : \exists k(v_i(x_j) > v_i(x_k))\}|$; y sea $x \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)y = \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)x$ tal que κ_x es mínimo en el conjunto $\{\kappa_y : y \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)x\}$ de los κ_y con y en la misma clase lateral. Obsérvese que κ_x mide qué tan lejos se encuentra x de estar revuelto; de modo que si $\kappa_x = 0$ entonces x está revuelto. Si, por otro lado $\kappa_x \neq 0$, reordenando índices si es necesario, obtenemos que

$$v_1(x_1) > v_1(x_2)$$

Usando el lema anterior, tomemos $c \in \mathbb{K}_0$ tal que, para toda i

$$v_i(x_1 - cx_2) = \min\{v_i(x_1), v_i(x_2)\}$$

y sea $y = (x_1 - cx_2, x_2, \dots, x_n)$; entonces $y \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)x$; pero $\kappa_y < \kappa_x$, contradiciendo la minimalidad de κ_x . \square

El lema siguiente es el 3.4 en [38]. La prueba que exponemos es la misma que en dicho artículo.

Lema 2.1.6.4. *Sea \mathbb{A} una \mathbb{K}_0 -álgebra con estructura de dominio entero local, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$ un conjunto \mathbb{A} -independiente, $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $y \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)x$; entonces $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$, es \mathbb{A} -independiente.*

Demostración. Sea \mathfrak{m} el ideal maximal de \mathbb{A} , k su campo residual y $M := \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$. Obsérvese que, por el lema de Nakayama³¹, $\{x_1 + \mathfrak{m}M, \dots, x_n + \mathfrak{m}M\}$ es una base del k -espacio vectorial $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$; por lo que este espacio vectorial tiene dimensión n . Tomemos $\mu \in \text{GL}(\mathbb{K}_0)$ tal que $y = \mu x$; de manera que $\{y_1, \dots, y_n\}$ también es un generador de M y podemos elegir un subconjunto minimal $\{z_1, \dots, z_m\} \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$ con la propiedad de ser generador. $\{z_1, \dots, z_m\}$ es \mathbb{A} -independiente y el argumento de la prueba del lema de Nakayama muestra que $m = \dim\left(\frac{M}{\mathfrak{m}M}\right) = n$, por lo que $\{z_1, \dots, z_m\} = \{y_1, \dots, y_n\}$ y este conjunto es \mathbb{A} -independiente. \square

Lema 2.1.6.5. *Sean \mathbb{A} un dominio entero de rango cúbico finito, tal que $\mathbb{K} := \text{Frac}(\mathbb{A}) \neq \mathbb{A}$; y , para cada i , v_i la valuación inducida por \mathcal{O}_i , donde $\bar{\mathbb{A}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ es la estructura de anillo multivaluado dada por (2.1.4.26). Supóngase que el campo filtrado inducido $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}})$ es local y de peso finito n ; entonces, para cada $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, existe $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:*

1. *y está revuelto respecto a v_1, \dots, v_m .*
2. *Para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, $ay_k \notin \sum_{j \neq k} \mathbb{A}y_j$.*

Demostración. $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es local y de peso n , por lo que $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$ es un anillo local de rango cúbico n . También tenemos que $\mathbb{A}^* \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$, pues³² $\mathbb{A} \in \mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}} \cap \mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}^\perp$ y $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$ se define como la unión de los conjuntos acotados por \mathcal{T} interpretados en el monstruo.

Sea φ el enunciado que codifica:

“Existe $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y existe una matriz $\mu \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$ tal que: 1.³³ si $\mu x = y$ entonces para toda k se tiene $y_k \notin \sum_{j \neq k} \mathbb{A}a^{-1}y_j$; 2.³⁴ μx está revuelto.”

Afirmamos que φ es verdadera en \mathbb{K}^* ; para lo cual: como $\text{Cb}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}) = n$, existe un conjunto $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$ -independiente de tamaño n (proposición 2.1.4.5), digamos $\{x_1, \dots, x_n\}$; entonces, por el lema 2.1.6.3, existe $\mu \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0^*)$ que revuelve a x . Por el lema anterior, si $y = \mu x$, entonces $\{y_1, \dots, y_n\}$ es $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$ -independiente. Además, $\mathbb{A}^* \cup \{a^{-1}\} \subseteq \mathbb{A}^* \cup \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}}$, entonces $\mathbb{A}^*a^{-1} \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$; de donde se sigue que, para todo k :

$$y_k \notin \sum_{j \neq k} \mathbb{K}_{\mathcal{T}}y_j \implies y_k \notin \sum_{j \neq k} \mathbb{A}^*a^{-1}y_j$$

³¹Ver proposiciones 2.6 a la 2.8 en Atiyah-Macdonald.

³² $\mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}$ está generado por los ideales no triviales de \mathbb{A} y dado I cualquiera de ellos podemos tomar un elemento $a \in I \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{K}^\times$; además, se cumple que $a\mathbb{A} \subseteq \mathbb{I}$ porque I es ideal; entonces $\mathbb{A} \in \mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}^\perp$. Que $\mathbb{A} \in \mathcal{T}_{\bar{\mathbb{A}}}$ es porque los filtros contienen a los supra-conjuntos de sus elementos.

³³Esto es una fórmula; pues la existencia de una matriz $\mu \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$ es lo mismo que cuantificación existencial de n^2 variables de valencia \mathbb{K}_0 .

³⁴ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^n v_i(y_1) \approx v_i(y_j) \right)$.

lo que prueba la afirmación.

Para concluir: como φ es un enunciado verdadero en \mathbb{K}^* y su único parámetro es $a \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{K}$, es verdadero en \mathbb{K} . \square

2.2. Prueba del teorema de Johnson

Ahora tenemos todos los ingredientes que necesitamos para llevar a cabo el argumento de la prueba de Johnson. Esencialmente, queremos ver que:

1. Los W -filtros locales tienen un único V -engrosamiento (teorema 2.2.1.4).
2. Todo W -filtro con n componentes locales está engrosado por un W -filtro inducido bajo el diccionario por un anillo n -valuado y los n anillos de valuación de los cuales este es intersección se corresponden con sus –también– n componentes locales (lema 2.2.1.11).
3. El filtro canónico es un W -filtro internamente definible (lema 2.2.2.4).
4. El filtro canónico cumple una condición que implica que es un W -filtro local (corolario 2.2.1.15).
5. Los V -filtros internamente definibles en \mathbb{K} son los V -engrosamientos del filtro canónico (2.1.5.21).
6. Concluir que hay un único V -filtro internamente definible de \mathbb{K} y esto implica el caso dp -finito de la conjetura de Shelah.

2.2.1. Localización de W -filtros

Lema 2.2.1.1. *Sea \mathbb{A} un dominio entero local de rango cúbico n , tal que $(\text{Frac}(\mathbb{A}), \mathcal{T}_{\mathbb{A}})$ es un campo W -filtrado local de peso n ; entonces:*

1. $\mathbb{A} \subseteq J(\overline{\mathbb{A}})$ es denso en el radical de Jacobson de su cerradura entera, con respecto a la topología inducida por $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{A}}}$.
2. Si $\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ es la estructura de valuación dada por (2.1.4.26) y \mathcal{O}_i son independientes dos a dos, entonces existe $a \in \text{Frac}(\mathbb{A})^\times$ tal que, para todo $b \in \text{Frac}(\mathbb{A})^\times$: $\mathbb{A} \cap b\mathcal{O}_2 \not\subseteq a\mathcal{O}_1$.

Demostración.

1. Escribimos $\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ como intersección de anillos de valuación incomparables entre sí; de manera que su radical de Jacobson viene dado por $J(\overline{\mathbb{A}}) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{m}_i$ con cada \mathfrak{m}_i el ideal maximal de \mathcal{O}_i . Sea $x \in J(\overline{\mathbb{A}})$ y sea $x + U \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{A}}}$ una vecindad básica de x . Para verificar que \mathbb{A} es denso en $J(\overline{\mathbb{A}})$, queremos ver que $(x + U) \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$. Si $x = 0$ entonces $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{A}}$ porque este

2 Clasificación de campos dp-finitos

filtro es más fino que su cerradura entera y en este caso $\mathbb{A} \cap U \neq \emptyset$ pues toda vecindad de cero contiene un múltiplo no cero de un ideal de \mathbb{A} . Supongamos entonces que $x \neq 0$. Como $\overline{\mathbb{A}}$ es una vecindad acotada de $\overline{\mathcal{T}_{\mathbb{A}}}$, existe $a' \neq 0$ tal que $a'\overline{\mathbb{A}} \subseteq U$ y como $\mathcal{T}_{\mathbb{A}}$ es un filtro más fino, la intersección $\mathbb{A} \cap \frac{1}{x}\mathbb{A} \cap J(\overline{\mathbb{A}}) \cap a'\overline{\mathbb{A}}$ es no trivial y podemos tomar $0 \neq a := a'r \in \mathbb{A} \cap \frac{1}{x}\mathbb{A} \cap J(\overline{\mathbb{A}})$ con $r \in \overline{\mathbb{A}}$. En particular, obsérvese que $a\overline{\mathbb{A}} = a'r\overline{\mathbb{A}} \subseteq a'\overline{\mathbb{A}} \subseteq U$. Ahora, por el lema anterior, existe un vector revuelto $y \in \mathbb{K}^n$ tal que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:

$$a^2y_k \notin \sum_{j \neq k} \mathbb{A}y_j$$

y, escalando, podemos asumir que $y_1 = 1$; por lo que $v_i(y_j) = 0$ para cualesquiera i, j ; o, equivalentemente $y_j \notin \mathfrak{m}_i$ para cualesquiera i, j ; de manera que: $y_j \in \overline{\mathbb{A}}^\times$ para toda j .

Por otra parte, dado que $\text{Cb}(\mathbb{A}) < n + 1$, el conjunto $\{1, x, ay_2, \dots, ay_n\}$ es \mathbb{A} -dependiente por la proposición 2.1.4.5; y esto se traduce en alguna de las siguientes tres posibilidades

- a) $1 \in \langle \{x, ay_2, \dots, ay_n\} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$
- b) $ay_k \in \langle \{1, x\} \cup \{ay_j\}_{1 < j \neq k} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$, para alguna $k \in \{2, \dots, n\}$
- c) $x \in \langle \{1, ay_2, \dots, ay_n\} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$

La opción (a) es imposible, ya que

$$\langle x, ay_2, \dots, ay_n \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}} \subseteq \langle \{x, a\} \rangle_{\overline{\mathbb{A}}\text{-Mod}} \subseteq J(\overline{\mathbb{A}})$$

y $1 \notin J(\overline{\mathbb{A}})$. La opción (b) también es imposible; ya que si

$$ay_k \in \langle \{1, x\} \cup \{ay_j\}_{1 < j \neq k} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$$

entonces, por cómo elegimos a y porque $y_1 = 1$:

$$a^2y_k \in \mathbb{A}ay_1 + \mathbb{A}xa + \sum_{1 < j \neq k}^n \mathbb{A}a^2y_j \subseteq \sum_{j \neq k} \mathbb{A}y_j$$

Por lo tanto ocurre la opción (c); es decir,

$$x \in \langle \{1, ay_2, \dots, ay_n\} \rangle_{\mathbb{A}\text{-Mod}}$$

y existen $b, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{A}$ tales que

$$x = b + \sum_{j=2}^n c_j ay_j$$

Dado que $\{c_j, y_j\}_{j=2}^n \subseteq \overline{\mathbb{A}}$, se tiene que $b - x \in a\overline{\mathbb{A}} \subseteq U$ y concluimos que $b \in (x + U) \cap \mathbb{A}$.

2. Tomemos $c \in J(\overline{\mathbb{A}}) \setminus \{0\}$. Por la prueba del teorema de aproximación para V-topologías (Ver 4.1 en [2], o bien, 2.4.1 en [1]), podemos tomar $a \in \mathbb{K}$ tal que $v_1(a) > v_1(c)$ y $v_i(a) = v_i(c)$ si $i \neq 1$ (en particular, $a \neq 0$ pues $v_i(a) = v_i(c) \neq \infty$ si $i \neq 1$).

Veamos que a cumple lo requerido: si $b \in \mathbb{K}^\times$, usando nuevamente el teorema de aproximación obtenemos $u \in \mathbb{K}^\times$ tal que $v_1(u) = v_1(c) > 0$ y $v_i(u) > \max(\{v_i(b), v_i(c)\}) > 0$ si $i \neq 1$. En particular, $u \in J(\overline{\mathbb{A}})$ y por el punto anterior podemos suponer $u \in \mathbb{A}$ (todas las V-topologías $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$, inducidas por estas valuaciones, son más gruesas que $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{A}}}$). Se sigue que $u \in (\mathbb{A} \cap b\mathcal{O}_2) \setminus a\mathcal{O}_1$, ya que $v_1(u) = v_1(c) < v_1(a)$ y $v_2(u) - v_2(b) > 0$.

□

Lema 2.2.1.2. *Sea $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo filtrado de peso n , entonces para cualesquiera dos V-engrosamientos $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ de \mathcal{T} distintos y para todo $U \in \mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{T}_1$ tal que para todo $W \in \mathcal{T}_2$ se cumple $U \cap W \not\subseteq V$.*

Demostración. Por el corolario 2.1.5.27, sabemos que “ \mathcal{T} es campo W-filtrado local” es expresable mediante un enunciado local en el lenguaje de $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$. Además, que \mathcal{T}_i engruesa a \mathcal{T} se expresa mediante el enunciado local

$$\forall U(\mathcal{T}_i(U) \rightarrow \exists V(\mathcal{T}(V) \wedge \forall x(\in(x, V) \rightarrow \in(x, U))))$$

en el lenguaje de $(\mathbb{K}, \mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$ (observación 1.5 en [2]). Dado que la última parte de este lema se puede expresar mediante el enunciado

$$\forall U(\mathcal{T}(U) \rightarrow \exists V(\mathcal{T}_1(V) \wedge \forall W(\mathcal{T}_2(W) \rightarrow \exists x(\in(x, U) \wedge \in(x, W) \wedge \neg(\in(x, V))))))$$

que también es local –en el lenguaje del campo multifiltrado $(\mathbb{K}, \mathcal{T}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ –; se sigue que lo que queremos probar es expresable mediante un enunciado local. Con lo anterior en mente, basta con probar que $(\mathbb{K}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{T}}_1, \widehat{\mathcal{T}}_2)$ cumple el lema. Para esto, por el lema anterior y usando el diccionario entre filtros y subanillos del monstruo, se cumple –reescalando c si fuera necesario– que: para todo $c \in \text{Frac}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})^\times = \mathbb{K}^\star \setminus \{0\}$, existe $a \in \text{Frac}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})^\times$ tal que, para todo $b \in \text{Frac}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})^\times$

$$\mathbb{K}_{\mathcal{T}} \cap b\mathbb{K}_{\mathcal{T}_2} \not\subseteq a\mathbb{K}_{\mathcal{T}_1}$$

pues $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_1}$ y $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_2}$ deben aparecer en la estructura de valuación de $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$, de acuerdo a (2.1.5.20). □

Lema 2.2.1.3. *Sean $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo W-filtrado de peso n , con \mathcal{T} local.; de manera que podemos escribir $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$. Para cada i , sea \mathfrak{m}_i el ideal maximal de \mathcal{O}_i ; entonces, para cualesquiera $i_1 \neq i_2$:*

$$\mathfrak{m}_{i_1} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}} \not\subseteq \mathfrak{m}_{i_2} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$$

2 Clasificación de campos dp-finitos

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y sean $i \neq j$, entonces por el lema anterior existe $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{O}_j}$ tal que, para todo $W \in \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$

$$U \cap W \not\subseteq V$$

Si dejamos a W como variable libre de valencia $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ y expresamos la propiedad anterior como un enunciado de $\mathbb{K}(2)$, por saturación tenemos que

$$\left(U^* \cap \left(\bigcap_{W \in \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}} W^* \right) \right) \setminus V^* \neq \emptyset$$

de manera que podemos tomar un infinitesimal ε de $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ en $U^* \setminus V^*$. En particular, $\varepsilon \in U^* \subseteq \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ y $\varepsilon \in \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_j$ por el lema 2.1.5.16. \square

Teorema 2.2.1.4. *Sea $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo W -filtrado por un filtro local, entonces:*

- \mathcal{T} tiene un único V -engrosamiento.
- $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}}$ es un anillo de valuación.

Demostración. Por (2.1.5.20) los puntos 1 y 2 son equivalentes, por lo que procedemos a probar el punto 2: Tomemos $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ y, para cada i , \mathfrak{m}_i el ideal maximal de \mathcal{O}_i . Entonces $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{m}_i \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}} \in \text{Spec}(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$ para cada i y, por el lema anterior, los ideales \mathfrak{p}_i son incomparables entre sí. Como $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ es local, $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es un anillo local y podemos denotar \mathfrak{p} a su ideal maximal. Por el teorema de Chevalley (3.1.1 en [1]), $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ es subanillo de un anillo de valuación \mathcal{O} cuyo ideal maximal \mathfrak{m} cumple $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}}$; y, dado que \mathcal{O} contiene a todos sus enteros –en el anillo de fracciones– por ser de valuación, de hecho se tiene $\overline{\mathbb{K}_{\mathcal{T}}} \subseteq \mathcal{O}$. Por el corolario 6.8 en [33], lo anterior implica que $\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}$ para alguna i , de manera que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_i$ y se tiene

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathfrak{m}_i \cap \mathbb{K}_{\mathcal{T}} = \mathfrak{p}_i$$

Como \mathfrak{p} es maximal, entonces la contención anterior es, de hecho, una igualdad y, para toda j , $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$ por ser el único ideal maximal. Lo anterior está en contradicción con la incomparabilidad de los \mathfrak{p}_i a menos que $n = 1$. \square

Definición 2.2.1.5. *Si \mathbb{A} es un dominio entero, denotaremos $\text{Max}(\mathbb{A})$ al conjunto de ideales maximales de \mathbb{A} y le llamaremos a este conjunto el espectro maximal de \mathbb{A} .*

Definición 2.2.1.6. *Sea \mathbb{A} un dominio entero. A las localizaciones de \mathbb{A} en sus ideales maximales les llamaremos “localizaciones fundamentales”.*

Teorema 2.2.1.7. *Sea \mathbb{A} un dominio entero, entonces:*

1. $\mathbb{A} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})} \mathbb{A}_{\mathfrak{m}}$

2. *Cualesquiera dos localizaciones fundamentales distintas de \mathbb{A} son incomparables.*

3. Si $\mathbb{B} \subseteq \text{Frac}(\mathbb{A})$ es un subanillo local que contiene a \mathbb{A} , entonces \mathbb{B} contiene a alguna localización fundamental de \mathbb{A} .

Demostración.

1. Claramente \mathbb{A} está contenido en la intersección de sus localizaciones fundamentales. Para la otra contención, si $x \notin \mathbb{A}$ podemos tomar un ideal maximal $\mathfrak{p} \in \text{Max}(\mathbb{A})$ que contenga al ideal $I := \{y \in \mathbb{A} : yx \in \mathbb{A}\}$, ya que $1 \notin I$. Si se tuviera $x \in \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, entonces $x = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{A}$ y $b \in \mathbb{A} \setminus \mathfrak{p}$, por lo que $bx \in \mathbb{A}$ y $b \in I \cap (\mathbb{A} \setminus \mathfrak{p})$, en contradicción con que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto $x \notin \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ y concluimos que $x \notin \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})} \mathbb{A}_{\mathfrak{m}}$.
2. Si se tienen dos ideales maximales $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$, estos son incomparables, por lo que podemos tomar $x \in \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_j$; de manera que $\frac{1}{x} \in \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_j}$. Además, para todo $a \in \mathbb{A}$, $ax \in \mathfrak{m}_i$, por lo que no puede ocurrir que $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A} \setminus \mathfrak{m}_i$; de modo que $\frac{1}{x} \in \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_j} \setminus \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Concluimos que $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i}$ y $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}_j}$ son incomparables.
3. Si \mathfrak{p} es el ideal maximal de \mathbb{B} , entonces el ideal $\mathfrak{p} \cap \mathbb{A}$ está contenido en algún ideal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})$ y $\mathbb{A} \setminus \mathfrak{m} \subseteq \mathbb{B} \setminus \mathfrak{p}$. Como \mathbb{B} es local, esto implica que \mathbb{B} contiene a todos los inversos de los elementos de $\mathbb{A} \setminus \mathfrak{m}$ y, en particular, $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathbb{B}$.

□

Comentario 2.2.1.8. *En pocas palabras, el teorema anterior nos dice que las localizaciones fundamentales son precisamente los subanillos de $\text{Frac}(\mathbb{A})$ minimales respecto a la propiedad de ser locales y contener a \mathbb{A} ; y están en biyección con los ideales maximales de \mathbb{A} .*

Lema 2.2.1.9. *Sea \mathbb{A} un dominio entero y sean $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}_1}, \dots, \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_n}$ localizaciones fundamentales de \mathbb{A} , entonces las localizaciones fundamentales de $\bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i}$ son precisamente los anillos $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}_1}, \dots, \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_n}$.*

Demostración. Verifiquemos la caracterización que hicimos presente en el comentario posterior al teorema anterior. Tomemos un subanillo local \mathbb{B} del campo de fracciones de $\bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i}$ y tal que

$\bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i} \subseteq \mathbb{B}$, y sea \mathfrak{p} su ideal maximal. Como $\mathbb{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i} \subseteq \mathbb{B}$, el conjunto $\mathfrak{p} \cap \mathbb{A}$ es un ideal primo de \mathbb{A} . De la misma manera que en la prueba del teorema anterior, veamos que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{A} \subseteq \mathfrak{m}_i$ para alguna i , lo que implicará que $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{B}$ es minimal en los anillos locales que contienen a $\bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Si,

por el contrario $\mathfrak{p} \cap \mathbb{A} \not\subseteq \mathfrak{m}_i$, por el lema de evitación de ideales primos³⁵ se tendría $\mathfrak{p} \cap \mathbb{A} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$;

de manera que $\emptyset \neq (\mathfrak{p} \cap \mathbb{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subseteq \mathbb{B}$ y, dado $x \in (\mathfrak{p} \cap \mathbb{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{p}$, se cumple $\frac{1}{x} \in \bigcap_{i=1}^n \mathbb{A}_{\mathfrak{m}_i} \subseteq \mathbb{B}$; con lo cual \mathfrak{p} tiene una unidad de \mathbb{B} , en contradicción con que \mathfrak{p} es su ideal maximal. □

³⁵Ver [7, 9].

Lema 2.2.1.10. *Sea \mathbb{A} un dominio local tal que $\overline{\mathbb{A}}$ también es un anillo local. Llamemos a sus ideales maximales \mathfrak{m} y \mathfrak{n} , respectivamente; entonces:*

$$\mathfrak{n} \cap \mathbb{A} = \mathfrak{m}$$

Demostración. $\mathfrak{n} \cap \mathbb{A} \subseteq \mathfrak{m}$ por ser ideal maximal, entonces sólo tenemos que verificar que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \cap \mathbb{A}$. Si la contención fuera propia, podríamos tomar $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{n}$ y, en particular, $x \in \overline{\mathbb{A}}^\times$; de manera que $\frac{1}{x}$ es solución a algún polinomio mónico con coeficientes en \mathbb{A}

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{x}\right)^i = 0$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} x^i = 1 + \sum_{i=1}^n a_{n-i} x^i = 0$$

donde $a_n = 1$. Esto es una contradicción, ya que el lado izquierdo de la igualdad anterior necesariamente es una unidad de $\overline{\mathbb{A}}$. \square

Lema 2.2.1.11. *Supóngase que $\text{Max}(\mathbb{A})$ es finito y que, para todo $\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})$, $\overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}}$ es un anillo de valuación; entonces:*

1. *Para cada $\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})$, $\overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}}$ es una localización fundamental de $\overline{\mathbb{A}}$.*
2. *$\mathbb{A}_{\mathfrak{m}} \mapsto \overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}}$ establece una biyección entre las localizaciones fundamentales de \mathbb{A} y las localizaciones fundamentales de $\overline{\mathbb{A}}$.*

Demostración. Podemos escribir la cerradura entera de \mathbb{A} como la intersección de todos los anillos de valuación de su campo de fracciones que contienen a \mathbb{A} . Además, por el comentario (2.2.1.8) y porque los anillos de valuación con cerrados bajo enteros del campo de fracciones, para cada anillo de valuación \mathcal{O} son equivalentes:

1. $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{O}$
2. $\mathbb{A}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathcal{O}$ contiene alguna localización fundamental de \mathbb{A}
3. $\overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathcal{O}$ contiene a la cerradura entera de alguna localización fundamental de \mathbb{A}

Por lo que las cerraduras enteras de las localizaciones fundamentales de \mathbb{A} son los anillos de valuación minimales que contienen a \mathbb{A} ; y se tiene:

$$\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(\mathbb{A})} \overline{\mathbb{A}}_{\mathfrak{m}} \tag{2.6}$$

Lo anterior es una intersección finita de anillos de valuación, por lo que si probamos que estos anillos son incomparables entre sí, por la proposición 1.1.2.8, estos deben de coincidir exactamente

con las localizaciones de $\overline{\mathbb{A}}$ en sus ideales maximales.

Si, por decir, $\overline{\mathbb{A}_{m_i}} \subseteq \overline{\mathbb{A}_{m_j}}$, y hacemos \mathfrak{n}_l el ideal maximal de $\overline{\mathbb{A}_{m_l}}$ para cada l , tendríamos por lema anterior aplicado a las localizaciones:

$$\mathfrak{n}_j \subseteq \mathfrak{n}_i \implies \mathfrak{m}_j \mathbb{A}_{m_j} = \mathfrak{n}_j \cap \mathbb{A}_{m_j} \subseteq \mathfrak{n}_i \cap \mathbb{A}_{m_i} = \mathfrak{m}_i \mathbb{A}_{m_i}$$

y dado que por maximalidad de \mathfrak{m}_j y \mathfrak{m}_i también tenemos $\mathfrak{m}_j \mathbb{A}_{m_j} \cap \mathbb{A} = \mathfrak{m}_j$ para cada j , lo anterior implicaría

$$\mathfrak{m}_j \subseteq \mathfrak{m}_i$$

nuevamente, por maximalidad, esto es

$$\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_i$$

Concluimos que la intersección (2.6) está escrita mediante anillos de valuación incomparables entre sí y, por la unicidad de esta descomposición, hemos terminado. \square

Observación 2.2.1.12. *Si $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ son filtros tales que las diagonales*

$$(\mathbb{K}, \langle \mathcal{S} \rangle) \xrightarrow{j_1} \prod_{i=1}^{n-1} (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_i \rangle) \quad (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T} \rangle) \xrightarrow{j_2} (\mathbb{K}, \langle \mathcal{S} \rangle) \times (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_n \rangle)$$

son encajes densos, entonces $(\mathbb{K}, \langle \mathcal{T} \rangle) \xrightarrow{(j_1 \times \text{Id}) \circ j_2} \prod_{i=1}^n (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_i \rangle)$ también es un encaje denso.

Las siguientes observaciones son, en su conjunto, la discusión alrededor de la definición 4.11 en [38] y el lema posterior inmediato³⁶.

Observación 2.2.1.13. *Con la misma notación de la observación anterior, la diagonal*

$$(\mathbb{K}, \langle \mathcal{T} \rangle) \hookrightarrow \prod_{i=1}^n (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_i \rangle)$$

es un encaje denso si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\{U_1 \cap \dots \cap U_n : \forall i (U_i \in \mathcal{T}_i)\}$ es un prefiltro de \mathcal{T} .
2. Para cualesquiera i, j distintos, si $U_i \in \mathcal{T}_i$ y $U_j \in \mathcal{T}_j$ entonces: $U_i + U_j = \mathbb{K}$.

Teorema 2.2.1.14. *Sea $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo W -filtrado y sean $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ las componentes locales de \mathcal{T} , entonces:*

1. *Cada componente local tiene un único V -engrosamiento. En particular, esto nos da una biyección entre el conjunto de componentes locales de \mathcal{T} y los V -engrosamientos de \mathcal{T} .*

³⁶Respecto a la definición 4.11 en [38], hemos adoptado la equivalencia dada en la definición 7.14 de [37] para la condición de independencia.

2 Clasificación de campos dp-finitos

2. La diagonal $\Delta : (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T} \rangle) \hookrightarrow (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_1 \rangle) \times \dots \times (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_n \rangle)$ es un encaje cuya imagen es densa en el contradominio.

Demostración. El primer punto es una consecuencia inmediata de aplicar los lemas (2.2.1.11, 2.1.5.20 y 2.2.1.4); al diccionario que traduce el retículo de subanillos al retículo de engrosamientos.

Para el segundo punto, hacemos $S_i := \bigcap_{j=1}^i \mathbb{K}_{\mathcal{T}_j}$ para cada $i \leq n$, entonces cada S_i es un W_n anillo por contener a $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$, ya que los anillos $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_j}$ son localizaciones fundamentales de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ por definición de las componentes locales.

Afirmamos que las diagonales $(\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_{S_i} \rangle) \hookrightarrow (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_{S_{i-1}} \rangle) \times (\mathbb{K}, \langle \mathcal{T}_i \rangle)$ son encajes densos, para cada i ; lo cual implica lo que queremos probar por la observación (2.2.1.12). Lo verificaremos de acuerdo a la observación anterior, para lo cual: por (2.2.1.9, 2.2.1.11), sabemos que el único V-engrosamiento de \mathcal{T}_i es su cerradura entera $\overline{\mathcal{T}_i}$, que los V-engrosamientos de $\mathcal{T}_{S_{i-1}}$ son $\{\overline{\mathcal{T}_1}, \dots, \overline{\mathcal{T}_{i-1}}\}$ y que $\{\overline{\mathcal{T}_1}, \dots, \overline{\mathcal{T}_{i-1}}\} \cap \{\overline{\mathcal{T}_i}\} = \emptyset$. Como $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{S_{i-1}} \subseteq \mathcal{T}$ no tienen V-engrosamientos en común, el diccionario nos dice que $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_i} + \mathbb{K}_{\mathcal{T}_{S_{i-1}}} = \mathbb{K}^*$ y como estos anillos son vecindades acotadas, esto implica que para cualesquiera $U_i \in \mathcal{T}_i$ y $V_i \in \mathcal{T}_{S_{i-1}}$ se tiene $U_i + V_i = \mathbb{K}$. Para probar el otro punto de la observación 2.2.1.13, notemos que para toda $a \in \mathbb{K}^* \setminus \{0\}$ existen $b, c \in \mathbb{K}^* \setminus \{0\}$ tales que $bS_{i-1} \cap c\mathbb{K}_{\mathcal{T}_i} \subseteq aS_i$ (por ejemplo, $a = b = c$), por lo que el campo multifiltrado $(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}_i}, \widehat{\mathcal{T}_{S_i}}, \widehat{\mathcal{T}_{S_{i-1}}})$ satisface

$$\forall U(\mathcal{T}_{S_i}(U) \rightarrow \exists V(\mathcal{T}_{S_{i-1}}(V) \wedge \exists W(\mathcal{T}_i(W) \wedge \forall x(\in(x, V) \wedge \in(x, W) \rightarrow \in(x, U))))))$$

que codifica mediante un enunciado local “cualquier vecindad de \mathcal{T}_{S_i} contiene a alguna intersección de vecindades de $\mathcal{T}_{S_{i-1}}$ y \mathcal{T}_i ”. Similarmente (tomando $U = V \cap W$), dicho campo satisface

$$\forall V(\mathcal{T}_{S_{i-1}}(V) \rightarrow \forall W(\mathcal{T}_i(W) \rightarrow \exists U(\mathcal{T}_{S_i}(U) \wedge \forall x(\in(x, U) \rightarrow \in(x, V) \wedge \in(x, W))))))$$

que codifica mediante un enunciado local “cualquier intersección de vecindades de $\mathcal{T}_{S_{i-1}}$ y \mathcal{T}_i contiene alguna vecindad de \mathcal{T}_{S_i} ”. Dado que se tiene la equivalencia local $(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}_i}, \widehat{\mathcal{T}_{S_i}}, \widehat{\mathcal{T}_{S_{i-1}}}) \sim (\mathbb{K}, \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{S_i}, \mathcal{T}_{S_{i-1}})$, hemos terminado. \square

Corolario 2.2.1.15.

1. Sea $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ un campo W -filtrado. Si $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ y la función que eleva al cuadrado $_2 : \mathbb{K}^\times \rightarrow \mathbb{K}^\times$ $x \mapsto x^2$ es abierta, entonces \mathcal{T} es local y, por lo tanto, tiene un único V-engrosamiento.
2. Si $\text{char}(\mathbb{K}) > 0$ y la función de Artin-Schreier $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ $x \mapsto x^p - x$ es abierta, entonces \mathcal{T} es local y, por lo tanto, tiene un único V-engrosamiento.

Demostración. Obsérvese primero que el hecho de que las funciones anteriores sean abiertas puede expresarse mediante enunciados locales

$$\forall U(\mathcal{T}(U) \rightarrow \exists V(\mathcal{T}(V) \wedge \forall x(\in(x, V) \rightarrow \in(x, U))))$$

por lo que basta con probar esto en $(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{T}})$. Para esto, sean $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ las componentes locales de \mathcal{T} ; de manera que hay exactamente n V-engrosamientos de \mathcal{T} y, por lo tanto, también hay exactamente n V-engrosamientos de $\widehat{\mathcal{T}}$. Por reducción al absurdo:

1. si $n > 1$ y suponemos $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ y que $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ son los ideales maximales de $\mathbb{K}_{\mathcal{T}_1}, \dots, \mathbb{K}_{\mathcal{T}_n}$, obsérvese que por el lema 2.1.5.16 y por definición de las componentes locales:

$$J(\mathbb{K}_{\mathcal{T}}) = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcap_{U \in \mathcal{T}_i} U^* \right)$$

Además, por el teorema anterior, los abiertos $U_1 \cap \dots \cap U_n$, con $U_j \in \mathcal{T}_j$ para cada j , forman un prefiltro para \mathcal{T} . En particular, todas imágenes bajo la función que eleva al cuadrado de vecindades de 1 deben contener a $(1 + J(\mathbb{K}_{\mathcal{T}}))^2$, por lo que si probamos que este conjunto no contiene ningún abierto habremos terminado. Para esto, por el teorema 4.1 en [2], podemos tomar

$$x \in \bigcap_{i=1}^n ((-1)^i + \mathfrak{m}_i)$$

entonces

$$x^2 \in \bigcap_{i=1}^n (1 + \mathfrak{m}_i) \subseteq 1 + J(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$$

pero no puede ocurrir $x^2 \in 1 + J(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})^2$, o de lo contrario $\pm x \in 1 + J(\mathbb{K}_{\mathcal{T}})$; lo cual, en particular, implicaría

$$x \in (1 + \mathfrak{m}_1) \cap (-1 + \mathfrak{m}_1) \neq \emptyset, \text{ o bien, } -x \in (1 + \mathfrak{m}_2) \cap (-1 + \mathfrak{m}_2) \neq \emptyset$$

en cualquier caso, por cómo están dados los ideales maximales, lo anterior nos diría que $\langle T_i \rangle$ no es hausdorff para alguna i ; que es una contradicción.

2. Análogamente, si $\text{char}(\mathbb{K}) > 0$ la función de Artin Schreier no podría ser abierta: cambiando el argumento del caso anterior de que no habría vecindades que separen $\{-1, 1\}$, por el argumento de que no habría vecindades que separen $\{0, 1\}$.

□

2.2.2. El filtro canónico es un W-filtro

La definición y el teorema siguiente son, respectivamente el inicio y el final de de la sección sección 5 de [37]. Omitimos la prueba del teorema 2.2.2.2 dado que dicha sección es corta y autocontenida. El teorema 2.2.2.2 constituye, junto con el teorema 2.1.2.5, el puente entre el filtro canónico y toda la teoría que hemos desarrollado para W-filtros.

Definición 2.2.2.1. Diremos que un retículo Λ es un retículo áureo de \mathbb{K} si Λ es un sub-retículo del retículo de subgrupos aditivos de \mathbb{K} y tiene las siguientes propiedades:

2 Clasificación de campos dp-finitos

- $\{0\}, \mathbb{K} \in \Lambda$
- Λ es cerrado bajo la acción multiplicativa de \mathbb{K}^\times ; es decir: si $\mathbb{A} \in \Lambda$ y $u \in \mathbb{K}^\times$, entonces $u\mathbb{A} \in \Lambda$.
- Λ tiene rango cúbico finito.
- Λ^+ es cerrado bajo intersecciones finitas.
- Λ contiene un elemento no trivial $b \notin \{\{0\}, \mathbb{K}\}$

Teorema 2.2.2.2. *Si Λ es un retículo áureo en \mathbb{K} , entonces Λ^+ es un prefiltro y el filtro que genera es un W -filtro de \mathbb{K} . Si el rango cúbico de Λ es n , entonces el filtro generado por Λ^+ es un W_n -filtro.*

Corolario 2.2.2.3. *El retículo $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$, tal y como fue definido para el teorema 2.1.2.5, genera un W_n -filtro; donde $n \leq \text{Dp}(\mathbb{K})$.*

Demostración. El teorema 2.1.2.5 nos dice que $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$ es un retículo áureo y que el rango cúbico de $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)$ está acotado por el rango de dependencia de \mathbb{K} . \square

Lema 2.2.2.4.

1. *Existe una subestructura elemental $\mathbb{L} \preceq \mathbb{K}^*$ tal que su grupo de infinitesimales $I_{\mathbb{L}}$ es co-encajable con un conjunto \mathbb{L} -definible.*
2. *El filtro canónico en \mathbb{K}^* es un W_n -filtro \mathbb{L} -definible.*

Demostración. Tomamos un campo mágico $\mathbb{K}_0 \preceq \mathbb{K}^*$ y definimos $n := \text{Cb}(\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*))$; entonces, por el corolario anterior, $\Lambda(\mathbb{K}_0, \mathbb{K}^*)^+$ es una base para un W_n -filtro \mathcal{T} en \mathbb{K}^* y podemos tomar una vecindad acotada $V \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$, entonces V es (\mathbb{K}^*, \wedge) -definible y, en particular, es (\mathbb{L}, \wedge) -definible para alguna alguna extensión elemental pequeña \mathbb{L}/\mathbb{K}_0 . Nuevamente por el teorema 2.1.2.5, los infinitesimales de \mathbb{L} respecto al filtro canónico son una vecindad acotada de \mathcal{T} ; es decir $I_{\mathbb{L}} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$. Ahora, usando la proposición (2.1.4.23), $I_{\mathbb{L}}$ es co-encajable con un conjunto \mathbb{K}^* -definible $D \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y, recordando el comentario (2.1.5.12), de hecho podemos suponer que D es \mathbb{L} -definible. Dado que $I_{\mathbb{L}}$ es una vecindad acotada del filtro canónico que es co-encajable con un conjunto \mathbb{L} -definible y las vecindades acotadas de un campo filtrado forman una clase de co-encajabilidad, se sigue que D es una vecindad acotada del filtro canónico y por lo tanto este es \mathbb{L} -definible. \square

Teorema 2.2.2.5.

1. *Existe una fórmula $\varphi(\{x\}, X)$ tal que, para todo modelo pequeño $\mathbb{L} \preceq \mathbb{K}^*$, la familia $\{\varphi(\mathbb{L}, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in \mathbb{L}^X\}$ es una base de vecindades de cero para la topología canónica de \mathbb{L} .*
2. *Cualesquiera dos modelos pequeños con sus respectivos topologías canónicas son localmente equivalentes.*

Demostración. Tomamos $\{\psi_i(\{x\}, X)\}_{i \in I}$ una familia de fórmulas como en la proposición (2.1.1.21) y usamos el lema anterior para obtener una base de vecindades \mathbb{K}^* -definible del filtro canónico en \mathbb{K}^* ; digamos

$$\mathcal{N} = \{\eta(\mathbb{K}^*, \mathbf{c})\}_{\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^Z} \subseteq \{\psi_i(\mathbb{K}^*, \mathbf{a}) : i \in I \wedge \mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^X\}$$

de modo que, para cada \mathbf{c} existen i y \mathbf{a} tales que

$$\mathbb{K}^* \models \forall x(\eta(\{x\}, \mathbf{c}) \leftrightarrow \psi_i(\{x\}, \mathbf{a}))$$

Denotemos $J_c := \{(i, \mathbf{a}) \in I \times (\mathbb{K}^*)^X : \eta(\mathbb{K}^*, \mathbf{c}) = \psi_i(\mathbb{K}^*, \mathbf{a})\}$, $J = \bigcup_{\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^Z} J_c$ y consideremos el conjunto de fórmulas $\Gamma(\{z\}) := \{\exists x(\neg(\eta(x, \{z\}) \leftrightarrow \psi_i(x, \mathbf{a})))\}_{(i, \mathbf{a}) \in J}$. Notemos que $J_c \neq \emptyset$ para cada $\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^Z$, por construcción; y ahora veamos que Γ no es satisfacible. Si así lo fuera, digamos por $\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^Z$, entonces para cualesquiera $(i, \mathbf{a}) \in J$ existiría $x_0 \in \mathbb{K}^*$ tal que $\mathbb{K}^* \not\models \eta(x_0, \mathbf{c}) \leftrightarrow \psi_i(x_0, \mathbf{a})$; es decir, $\eta(\mathbb{K}^*, \mathbf{c}) \neq \psi_i(\mathbb{K}^*, \mathbf{a})$ para todo $(i, \mathbf{a}) \in J$; y como $J_c \neq \emptyset$, existe un elemento (i, \mathbf{a}) de J_c tal que $\eta(\mathbb{K}^*, \mathbf{c}) \neq \psi_i(\mathbb{K}^*, \mathbf{a})$; en contradicción con su definición.

Ahora, como Γ no es satisfacible, tiene un subconjunto finito no satisfacible por compacidad, digamos $\Gamma_0 := \{\exists x(\neg(\eta(x, \{z\}) \leftrightarrow \psi_i(x, \mathbf{a})))\}_{(i, \mathbf{a}) \in J_0}$ con J_0 un subconjunto finito de J . Esto nos dice que para toda $\mathbf{c} \in (\mathbb{K}^*)^Z$ existe $(i, \mathbf{a}) \in J_0$ tal que $\mathbb{K}^* \not\models \exists x(\neg(\eta(x, \mathbf{c}) \leftrightarrow \psi_i(x, \mathbf{a})))$; o bien:

$$\mathbb{K}^* \models \forall x(\eta(x, \mathbf{c}) \leftrightarrow \psi_i(x, \mathbf{a}))$$

En resumen de lo anterior, podemos tomar un conjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que: para todo $U \in \mathcal{N}$; existen $i \in I_0$ y $\mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^X$ tales que $U = \psi_i(\mathbb{K}^*, \mathbf{a})$. Ahora, dado que \mathcal{N} es base: para todo $i \in I$ y para toda $\mathbf{b} \in (\mathbb{K}^*)^X$, existe $i_0 \in I_0$ y $\mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^X$ tales que

$$\mathbb{K}^* \models \forall x(\psi_{i_0}(x, \mathbf{a}) \rightarrow \psi_i(x, \mathbf{b}))$$

y, en particular podemos elegir i_0 para cada i tal que

$$\mathbb{K}^* \models \forall \mathbf{b} \exists \mathbf{a} \forall x(\psi_{i_0}(x, \mathbf{a}) \rightarrow \psi_i(x, \mathbf{b}))$$

los anteriores son enunciados, entonces se cumplen en la subestructura elemental $\mathbb{L} \preceq \mathbb{K}^*$

$$\mathbb{L} \models \forall \mathbf{b} \exists \mathbf{a} \forall x(\psi_{i_0}(x, \mathbf{a}) \rightarrow \psi_i(x, \mathbf{b}))$$

Recordando que $\{\psi_i(\mathbb{L}, \mathbf{a}) : i \in I \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{L}^X\}$ es exactamente el filtro canónico en \mathbb{L} , lo anterior codifica que $\{\psi_i(\mathbb{L}, \mathbf{a}) : i \in I_0 \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{L}^X\}$ es una base de dicho filtro. Como I_0 es finito, podemos expresar lo anterior mediante una fórmula φ , de tal manera que

$$\{\varphi(\mathbb{L}, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in \mathbb{L}^Y\} = \{\psi_i(\mathbb{L}, \mathbf{a}) : i \in I_0 \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{L}^X\}$$

Para el segundo punto basta con recordar que los enunciados locales pueden ser evaluados en bases de vecindades, pues la fórmula $\varphi(\{x\}, Y)$ que define a la base anterior es la misma para todos los campos. \square

Corolario 2.2.2.6. *El filtro canónico en un campo inestable con rango de dependencia n es un W_n -filtro internamente definible.*

Teorema 2.2.2.7. *Los V -filtros internamente definibles de \mathbb{K} son exactamente los V -engrosamientos del filtro canónico en \mathbb{K} .*

Demostración. Por (2.1.5.21) todos los V -engrosamientos del filtro canónico son \mathbb{K} -definibles. Ahora, si tomamos un V -filtro \mathbb{K} -definible \mathcal{T} y también tomamos

$$B := \alpha(\mathbb{K}) \in W_1 \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$$

una V -vecindad acotada \mathbb{K} -definible de \mathcal{T} ; entonces, para cualquier $\{x, y\} \subseteq \mathbb{K}$ se tiene $x \in yB$ o $y \in xB$; ya que B es un W_1 -conjunto. En particular, tomando $y = 1$, lo anterior nos dice que

$$\mathbb{K} \subseteq B \cup B^{-1}$$

Ahora, por la proposición 2.1.1.17; como \mathbb{K} es pesado, la unión $B \cup B^{-1}$ es pesada; y esto implica que tanto B como B^{-1} lo son; de manera que

$$B -_\infty B \in \mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}}$$

Para concluir, obsérvese que³⁷ $B - B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\perp$ y entonces el conjunto

$$\{a(B - B) : a \in \mathbb{K}^\times\} \subseteq \mathcal{T}$$

es un prefiltro de \mathcal{T} ; entonces, dado que por el corolario 2.1.1.19, se tiene

$$B -_\infty B \subseteq B - B$$

es inmediato que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}}$; es decir, \mathcal{T} engruesa al filtro canónico. □

2.2.3. Argumentos finales

La prueba del teorema de Johnson –casi– concluye con el corolario 4.16 de [38], que nos dice que los campos dp-finitos cumplen la conjetura de henselianidad V -topológica (conjetura 2.40 en [30]) y la conjetura de henselianidad (conjetura 1.1 en [37]). Para esto, comenzamos por mencionar el siguiente teorema; que puede ser encontrado junto con su prueba como el teorema 2.13 en [12].

Teorema 2.2.3.1. *Si \mathbb{L}/\mathbb{K} es una extensión normal y se tienen valuaciones w_1, w_2 de \mathbb{L} y una valuación v de \mathbb{K} tales que los anillos de valuación \mathcal{O}_{w_1} y \mathcal{O}_{w_2} contienen a \mathcal{O}_v , entonces los anillos de valuación \mathcal{O}_{w_1} y \mathcal{O}_{w_2} son conjugados bajo un automorfismo.*

Corolario 2.2.3.2.

1. $(\mathbb{K}, \mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}})$ es un campo W -filtrado local.

³⁷Esto es bastante claro si recordamos que $(\mathbb{K}, \mathcal{T})$ debe ser localmente equivalente a $(\mathbb{K}^*, \mathcal{T}_{\mathbb{K}^*})$; que tiene como prefiltro a los ideales no cero de $\mathbb{K}_\mathcal{T}$.

2. \mathbb{K} admite una única V -topología internamente definible.
3. Si (\mathbb{K}, v) es un campo valuado dp -finito, entonces v es una valuación henseliana.

Demostración. Sea \mathcal{T} el filtro canónico

1. Ya hemos visto que $\mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}}$ es un W -filtro y el filtro canónico cumple el lema 2.2.1.15 por los incisos 4 y 5 de la proposición 5.17 en [33], ya que dichos resultados nos dicen que estas funciones son abiertas en $(\mathbb{K}^*, \widehat{\mathcal{B}}_\infty^{\mathbb{K}})$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_\infty^{\mathbb{K}}$ es un W -filtro local.
2. Como el filtro canónico es local, tiene un único V -engrosamiento; y los V -filtros \mathbb{K} -definibles de \mathbb{K} son justamente los V -engrosamientos del filtro canónico por el corolario 2.2.2.7. Se sigue que \mathbb{K} tiene un único V -filtro definible; que se corresponde con la única V -topología definible de \mathbb{K} .
3. Supóngase que v no es henseliana; entonces existen \mathbb{L}/\mathbb{K} una extensión normal de \mathbb{K} y $\mathcal{O}_{w_1}, \mathcal{O}_{w_2}$ dos anillos valuados de \mathbb{L} distintos que extienden a \mathcal{O}_v . Por la observación 2.7 en [35, 39], estos anillos valuados son \mathbb{L} -definibles, lo que implica:
 - \mathbb{L} no es finito ni algebraicamente cerrado³⁸ o, de lo contrario, por el lema 2.1 en [33] tendríamos $\mathcal{O}_{w_1} = \mathcal{O}_{w_2} = \mathbb{L}$.
 - Si \mathbb{L} no es finito ni algebraicamente cerrado, entonces \mathcal{O}_{w_1} y \mathcal{O}_{w_2} inducen, ambos, el único V -engrosamiento del filtro canónico en \mathbb{L} , por lo que –son dependientes y– hay un anillo de valuación no trivial que los extiende; y, en particular, hay dos anillos de valuación comparables distintos que extienden a \mathcal{O}_v .

Lo anterior contradice que $\text{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ actúa transitivamente en el conjunto de anillos de valuación de \mathbb{L} que extienden a \mathcal{O}_v , pues este grupo es finito y por lo tanto no puede actuar transitivamente en el conjunto de anillos de valuación que extienden a \mathcal{O}_v si este tiene dos elementos distintos que son comparables.

□

Podríamos terminar aquí, usando el teorema 1.3 de [37]; que dice que el la conjetura de henselianidad en dependencia finita implica la conjetura de Shelah en dependencia finita. Aún así, por completud, incluyo la prueba otorgada por la proposición 6.4 de [36] una vez que sabemos lo anterior. Para esto, necesito dos resultados más; que son, respectivamente, la proposición 3.5 en [6] y –un caso particular de– la primera parte del teorema 5.2 en [13].

Proposición 2.2.3.3. *Toda V -topología internamente definible en un campo está inducida por un anillo de valuación externamente definible.*

Teorema 2.2.3.4. *Si un campo valuado (\mathbb{K}, v) es henseliano, entonces ocurre alguna de las siguientes:*

1. *Es separablemente cerrado.*

³⁸Cf. introducción de la sección 2.1.

2 Clasificación de campos dp-finitos

2. *Es elementalmente equivalente a \mathbb{R} .*

3. *Hay un anillo de valuación internamente definible que induce la V-topología asociada a la valuación.*

Con los dos resultados anteriores, estamos en posición de probar el teorema de Johnson.

Teorema 2.2.3.5. *Si \mathbb{K} es un campo dp-finito entonces tiene alguna de las siguientes propiedades:*

- *Es finito.*
- *Es algebraicamente cerrado.*
- *Es realmente cerrado; es decir, es elementalmente equivalente a \mathbb{R} .*
- *Existe una valuación para \mathbb{K} que es henseliana, internamente definible y no trivial.*

Demostración. Si \mathbb{K} no es finito ni algebraicamente cerrado, tiene un único V-filtro definible \mathcal{T} no trivial y $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$ induce una valuación henseliana en \mathbb{K} , por el corolario anterior. Por los dos teoremas anteriores, dicha valuación está inducida por un anillo de valuación, henseliano, internamente definible y no trivial; o bien, \mathbb{K} es separablemente cerrado o \mathbb{K} es realmente cerrado. Dado que los campos dp-finitos son perfectos (es decir, su cerradura separable es algebraicamente cerrada)³⁹, hemos terminado. \square

³⁹Yatir Halevi hace esta prueba en el minuto 44 de [41].

Bibliografía

- [1] ALEXANDER PRESTEL, ANTONIO J. ENGLER. (2005). *Valued fields*. Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/3-540-30035-X>.
- [2] ALEXANDER PRESTEL, MARTIN ZIEGLER. (1978). *Model theoretic methods in the theory of topological fields*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1978(299-300), 318-341. <https://doi.org/10.1515/crll.1978.299-300.318>.
- [3] ALEXANDER USVYATSOV, ALF ONSHUUS, ITAY KAPLAN. (2011). *Additivity of the dp-rank*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(11), 5783-5804. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05782-0>.
- [4] ANAND PILLAY. (1987). *First order topological structures and theories*. *The Journal of Symbolic Logic*, 52(3), 763-778. <https://doi.org/10.2307/2274362>.
- [5] ASSAF HASSON, FRANZISKA JAHNKE, YATIR HALEVI. (2019). *A conjectural classification of strongly dependent fields*. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 25(2), 182-195. <https://doi.org/10.1017/bsl.2019.13>.
- [6] ASSAF HASSON, FRANZISKA JAHNKE, YATIR HALEVI. (2020). *Definable V-topologies, henselianity and NIP*. *Journal of Mathematical Logic*, 20(02), 2050008. <https://doi.org/10.1142/S0219061320500087>.
- [7] COLABORADORES DE THE STACKS PROJECT. (2020, noviembre 15). *Lemma 10.15.2 (Prime avoidance)*. The Stacks Project. <https://stacks.math.columbia.edu/tag/00DS>.
- [8] COLABORADORES DE WIKIPEDIA. (2023, agosto 2). *Dilworth's theorem*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dilworth%27s_theorem&oldid=1168325869.
- [9] COLABORADORES DE WIKIPEDIA. (2023, diciembre 30). *Prime avoidance lemma*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Prime_avoidance_lemma&oldid=1192637453.
- [10] DANIEL PALACÍN, YATIR HALEVI. (2019). *The dp-rank of abelian groups*. *The Journal of Symbolic Logic*, 84(3), 957-986. <https://doi.org/10.1017/jsl.2018.89>.
- [11] DAVID MARKER. (2002). *Model theory: an introduction*. Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/b98860>.

- [12] FRANZISKA JAHNKE. *An introduction to valued fields* [Notas]. https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/fjahn_01/franzi-notes.pdf.
- [13] FRANZISKA JAHNKE, JOCHEN KOENIGSMANN. (2015). *Uniformly defining p -henselian valuations*. *Annals of Pure and Applied Logic*, 166(7-8), 741-754. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2015.03.003>.
- [14] FRED GALVIN. (1994). *A proof of Dilworth's chain decomposition theorem*. *The American Mathematical Monthly*, 101(4), 352-353. <https://doi.org/10.1080/00029890.1994.11996954>.
- [15] ISIDORE FLEISCHER. (1953). *Sur les corps localement bornés*. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences*, 237, 546-548. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3189t>.
- [16] ITAY KAPLAN, YATIR HALEVI. (2023). *Saturated models for the working model theorist*. *The bulletin of symbolic logic*, 29(2), 163-169. <https://doi.org/10.1017/bsl.2023.6>.
- [17] JAKUB GISMATULLIN. (2011). *Model theoretic connected components of groups*. *Israel Journal of mathematics*, 184(1), 251-274. <https://doi.org/10.1007/s11856-011-0067-8>.
- [18] JOHN T. BALDWIN. (2013). *How big should the monster model be?*. <https://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/monster4.pdf>.
- [19] JÖRG FLUM, MARTIN ZIEGLER. (1980). *Topological model theory*. Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0097006>.
- [20] JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO. (1997). *Inducción y recursión*. *Miscelanea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, 26(1), 1-16. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.9e074d9e9a89bf82.616d6f722e706466.pdf.
- [21] JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO. (2013). *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completud*. Las Prensas de Ciencias.
- [22] LOU VAN DEN DRIES. (2014). *Lectures on the model theory of valued fields*. En: *Model theory in algebra, analysis and arithmetic*. *Lecture notes in mathematics*, 2111. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54936-6_4.
- [23] MARÍA GRACIA MANZANO ARJONA, VICTOR ARANDA UTRERO. (2022). *Many-sorted logic*. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-many-sorted>.
- [24] PETER SINCLAIR. (2018). *Relationships between model theory and valuations of fields* [Tesis doctoral, McMaster University]. *Open Access Dissertations and Theses*. <http://hdl.handle.net/11375/23326>.
- [25] PHILIPP SCHLICHT. (2018). *Lecture notes: an introduction to model theory* [Notas]. <https://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2017WS/Model%20theory/Notes.pdf>.

- [26] PIERRE SIMON. (2015). *A guide to NIP theories*. Cambridge University Press.
- [27] SAHARON SHELAH. (2008). *Minimal bounded index subgroups for dependent theories*. Proceedings of the american mathematical society, 136(6), 1087-1091. <http://www.jstor.org/stable/20535272>.
- [28] SAHARON SHELAH. (2009). *Dependent first order theories, continued*. Israel Journal of Mathematics, 173(1-60). <https://doi.org/10.1007/s11856-009-0082-1>.
- [29] SAHARON SHELAH. (2014). *Strongly dependent theories*. Israel Journal of Mathematics, 204(1-83). <https://doi.org/10.1007/s11856-014-1111-2>.
- [30] SYLVY ANSCOMBE. (2021). *Shelah's conjecture and Johnson's theorem*. Séminaire Bourbaki, 1186. <https://www.bourbaki.fr/TEXTES/Exp1186-Anscombe.pdf>.
- [31] VICTORIA NOQUEZ. (2008). *Model theory of real closed fields*. <https://homepages.math.uic.edu/~noquez/pdfs/thesis.pdf>.
- [32] WILFRID HODGES. (1993). *Model theory*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511551574>.
- [33] WILL JOHNSON. (2019). *Dp-finite fields II: the canonical topology and its relation to henselianity*. <https://arxiv.org/abs/1910.05932v2>.
- [34] WILL JOHNSON. (2019). *Dp-finite fields III: inflators and directories*. <https://arxiv.org/abs/1911.04727v1>.
- [35] WILL JOHNSON. (2020). *Dp-finite fields I: infinitesimals and positive characteristic*. <https://arxiv.org/abs/1903.11322v2>.
- [36] WILL JOHNSON. (2020). *Dp-finite fields IV: the rank 2 picture*. <https://arxiv.org/abs/2003.09130v1>.
- [37] WILL JOHNSON. (2020). *Dp-finite fields V: topological fields of finite weight*. <https://arxiv.org/abs/2004.14732v1>.
- [38] WILL JOHNSON. (2020). *Dp-finite fields VI: the dp-finite Shelah conjecture*. <https://arxiv.org/abs/2005.13989v1>.
- [39] WILL JOHNSON. (2021). *Dp-finite fields I(A): the infinitesimals*. Annals of Pure and Applied Logic, 172(6), 102947. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102947>.
- [40] WILL JOHNSON. (2021). *Dp-finite fields I(B): positive characteristic*. Annals of Pure and Applied Logic, 172(6), 102949. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102949>.
- [41] YATIR HALEVI. (2021, febrero 12). *On dp-finite fields* [Video]. Géométrie et Théorie des Modèles. <https://videos.dma.ens.fr/GTM/GTM-Halevi-Feb21.mp4>.