



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DEFORMACIONES DE PRIMER ORDEN DE LA SUPERFICIE CUÁRTICA DE  
FERMAT

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:  
VIOLETA ABIGAIL LÓPEZ LÓPEZ

DIRECTOR  
DR. CÉSAR ADRIÁN LOZANO HUERTA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM-OAXACA

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2024.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	4
<b>1. Cuártica de Fermat</b>	<b>6</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	6
1.1.1. Cohomología de Dolbeault . . . . .	7
1.1.2. Superficies $K3$ . . . . .	10
1.2. Rectas de la cuártica de Fermat . . . . .	12
1.2.1. Conjuntos interpolantes . . . . .	20
1.2.2. Cónicas residuales . . . . .	25
1.3. Grupo de Picard de la superficie cuártica de Fermat . . . . .	27
1.3.1. Clases de Chern y Teorema de Lefschetz . . . . .	29
1.3.2. Producto de intersección de divisores . . . . .	31
<b>2. Teoría de deformación</b>	<b>36</b>
2.1. Esquemas . . . . .	36
2.2. Deformaciones de primer orden . . . . .	39
2.2.1. Deformaciones de un haz lineal . . . . .	41
2.3. Deformaciones encajadas . . . . .	45
<b>3. Deformación de superficies</b>	<b>48</b>
3.1. Morfismo de deformación para superficies . . . . .	49
3.2. Deformaciones de superficies a lo largo de un divisor . . . . .	50
3.2.1. Deformación de varias rectas y cónicas . . . . .	54
Índice	59

# Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi asesor, el Dr. César Lozano, por guiarme todo este tiempo. Ha sido una influencia fundamental en mi vida académica. También quiero expresar mi más sincera gratitud a todos los sinodales de esta tesis: a la Dra. Lara Bossinger, por su valioso apoyo no solo académico, sino personal; usted es una inspiración para mí. Al Dr. Sergio Holguín, por su paciencia en clases; sus cursos me han sido de gran utilidad. Al Dr. Cristhian Garay, por transmitirme su pasión por las matemáticas, de grande quiero ser como usted. Y al Dr. Quentin Gendron, por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo.

Mi estancia en Oaxaca fue muy enriquecedora y divertida gracias a toda la Unidad Oaxaca, incluyendo a profesores, personal administrativo y demás colaboradores. Quiero mencionar en especial a Raquel, Israel Morales, Maritza, Rolando, Bernardo y Sara; y por supuesto, a todos mis compañeros y amigos. Gracias, César, Fredy, Kenneth, Diana, Óscar, Myriam, Victor, Juan, Emmanuel, Juan Daniel, Jorge; atesoraré los momentos que compartimos.

Mil gracias Leal, Mon y Nestor, siempre tendrán mi cariño. Leal, hablar de matemáticas y mirar gatitos contigo son de mis cosas favoritas. Mon, eres de las personas más fuertes que conozco, gracias por ser mi nakama. Nestor, explorar Oaxaca juntos fue muy especial para mí.

Rebeca, Alvaro, Erick, Marco, Gerardo, Isasi, Omar, Luis y Sergio, espero contar con su amistad por muchos años más.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia. Ustedes son los mejores, pero, por supuesto, la mejor de todos es mi madre. Mamá, espero que sepas cuán orgullosa y agradecida estoy; eres el pilar más importante en mi vida, y gracias a ti puedo avanzar, aunque tenga miedo.

# Introducción

Esta tesis estudia deformaciones infinitesimales de variedades proyectivas, las cuales fueron introducidas por Kodaira y Spencer. La teoría de deformación es el estudio infinitesimal de una familia  $\mathcal{X}$  parametrizada por un conjunto  $D$  en la vecindad de una fibra especial  $X$  y busca responder qué propiedades de  $X$  comparte la familia  $\mathcal{X}$  en una vecindad de  $X$ . El objetivo de este trabajo es hacer explícita esta teoría de manera algebraica para superficies cuárticas contenidas en  $\mathbb{P}^3$ .

Las superficies cuárticas suaves son superficies  $K3$ , es decir, su haz canónico es trivial y  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . La teoría referente a superficies  $K3$  es amplia y se conocen muchas de sus propiedades. En particular, tienen rango de Picard a lo más 20 (Teoremas 1.1.16 y 1.3.9). Esta tesis se centra en la superficie cuártica de Fermat:

$$S = \text{Var}(x^4 + y^4 + z^4 + w^4),$$

la cual tiene rango de Picard maximal (Teorema 1.3.20). Además, esta superficie contiene 48 rectas (Teorema 1.2.3) y se probará que el grupo de Picard de  $S$ ,  $\text{Pic}(S)$ , puede generarse con rectas.

El conjunto de deformaciones de primer orden de  $S$  que preservan entera (Definición 2.2.7) a la clase de una recta  $l$  contenida en  $S$  se denota por  $K_l$ . El resultado principal de esta tesis es el siguiente y aparece como Teorema 3.2.7:

**Teorema A.** Denotemos por  $H \in \text{Pic}(S)$  a la clase del hiperplano y por  $\mathcal{B}^* \subset \text{Pic}(S)$  a un conjunto de 19 clases de rectas contenidas en  $S$ . Si  $\mathcal{B}^* \cup \{H\}$  es linealmente independiente en  $\text{Pic}(S)$ , entonces los espacios  $K_l \subset H^1(T_S)$ , con  $l \in \mathcal{B}^*$ , se intersectan transversalmente. En particular,

$$\dim \left( \bigcap_{l \in \mathcal{B}^*} K_l \right) = 0.$$

Es decir, estas 19 rectas determinan a  $S$  infinitesimalmente en su espacio moduli.

La cantidad mínima de rectas en  $\mathbb{P}^3$  que pueden determinar una superficie cuártica como elemento de  $\mathbb{P}^{34}$ , el espacio de superficies cuárticas contenidas en  $\mathbb{P}^3$ , es siete. Para  $S$  esto se cumple:

**Teorema B.** El número mínimo de rectas que determinan a la superficie cuártica de Fermat es 7. Además, estas rectas se pueden elegir de modo que sean disjuntas a pares.

Este es el Teorema 1.2.14 de la tesis. En otras palabras, existen 7 rectas en  $\mathbb{P}^3$  que determinan 41 rectas adicionales. Combinando esto con el Teorema 3.2.7, entre dichas 48 rectas, existen 19 que determinan completamente el tipo de isomorfismo de la cuártica que las contiene. No sabemos si este es un fenómeno aislado o si todas las cuárticas en  $\mathbb{P}^3$  con más de 19 rectas están determinadas, hasta por isomorfismo, por sólo 7 de ellas.

## Organización de la tesis

La organización de este trabajo es como sigue: en el Capítulo 1 se estudia la geometría de las rectas contenidas en la superficie cuártica de Fermat  $S$ . Se describen propiedades sobre superficies  $K3$  que se usarán en la tesis. También se introduce la cohomología de Dolbeault que permitirá definir qué es una clase entera primitiva en el grupo de cohomología  $H^{1,1}(X)$  (Definición 1.1.11). Esta definición es crucial en el Capítulo 3 para estudiar deformaciones de primer orden de  $S$ .

El Capítulo 2 contiene la teoría de deformaciones de primer orden de una variedad proyectiva suave. Esta teoría está escrita en el lenguaje de esquemas por lo que al inicio se introducen conceptos necesarios. Se define el morfismo de deformación (Definición 2.2.9), el cual es la herramienta principal del Capítulo 3. También se discute brevemente sobre deformaciones encajadas.

El Capítulo 3 es el principal de la tesis. Aquí se aplica de forma explícita la teoría descrita en los capítulos anteriores a la superficie cuártica de Fermat  $S$ . En este capítulo se estudian deformaciones de primer orden de  $S$  de manera algebraica. Los Ejemplos 3.2.4 y 3.2.6 exhiben, cada uno, un polinomio de grado 4 en cuatro variables que representa a una clase entera primitiva en  $H^{1,1}(S)$ . Este cálculo explícito no se encuentra en la literatura, hasta donde tengo entendido. El teorema más importante de este capítulo y de la tesis es el Teorema 3.2.7 antes enunciado. Se intenta que esta tesis sea autocontenida. Sin embargo, se asume que el lector está familiarizado con la teoría de gavillas, por ejemplo, la descrita en [Sha13, Cap. 5, Sec. 2].

# Capítulo 1

## Cuártica de Fermat

En este capítulo estudiaremos a la superficie cuártica de Fermat:

$$S := \text{Var}(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) \subset \mathbb{P}^3.$$

A lo largo de la tesis se dice simplemente cuártica de Fermat y siempre se escribe  $S$  para referirnos a ésta.

Las superficies cuárticas en  $\mathbb{P}^3$ , incluida la de Fermat, pertenecen a la familia de superficies  $K3$  (Teorema 1.1.16). Entre éstas, la cuártica de Fermat tiene grupo de Picard (Definición 1.3.3) maximal (Teorema 1.3.20).

En la Sección 1.1 definiremos lo que es una superficie  $K3$  y la cohomología de Dolbeault. En la Sección 1.2 veremos que  $S$  contiene 48 rectas y estudiaremos la geometría de éstas. Por ejemplo, probaremos que existen siete rectas que determinan a  $S$  (Teorema 1.2.14); es decir, ésta es la única superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$  que las contiene. En la Sección 1.3 exhibiremos una base de  $\text{Pic}(S)$  conformada por 20 rectas de  $S$  (Teorema 1.3.20); en otras palabras, la clase de equivalencia de cualquier divisor (Definición 1.3.1) de  $S$  es combinación  $\mathbb{Q}$ -lineal de clases de estas rectas.

**Nomenclatura:** El término “variedad” se refiere a variedades proyectivas definidas sobre los números complejos, a menos que se indique lo contrario.

### 1.1. Definiciones básicas

Dividimos esta primera sección en dos subsecciones. En la Subsección 1.1.1 introduciremos la cohomología de Dolbeault. Esto nos ayudará en el Capítulo 2 al abordar

la teoría de deformación de primer orden para variedades proyectivas. En la Subsección 1.1.2 definiremos una superficie  $K3$ . El objetivo de este primer capítulo es estudiar una superficie  $K3$  en particular: la cuártica de Fermat.

### 1.1.1. Cohomología de Dolbeault

En esta subsección introduciremos la cohomología de Dolbeault de una variedad proyectiva suave. Estos resultados serán utilizados principalmente en el Capítulo 2 al tratar la teoría de deformación de una variedad proyectiva y en la subsección siguiente para definir superficies  $K3$ . Cabe mencionar que los teoremas enunciados en esta subsección son válidos para variedades Kähler compactas.

Consideremos una variedad proyectiva compleja  $X$  de dimensión  $n$ . En particular,  $X$  es una variedad  $C^\infty$  de dimensión real  $2n$  y podemos definir el anillo  $\mathcal{F}(X)$  de funciones  $C^\infty$  sobre  $X$ . Un vector tangente a  $X$  en un punto es una función  $\mathbb{R}$ -lineal que satisface la regla de Leibniz. El espacio tangente  $T_X$  de  $X$  es el conjunto de vectores tangentes a  $X$ . Este espacio, junto con su proyección a  $X$ , es un haz vectorial  $C^\infty$  sobre  $X$  conocido como el haz tangente de  $X$ .

Al tensorizar  $T_X$  con  $\mathbb{C}$  obtenemos el haz tangente complexificado  $T_{\mathbb{C}}X$ ; este admite un endomorfismo (más precisamente, una estructura compleja)  $J : T_{\mathbb{C}}X \rightarrow T_{\mathbb{C}}X$  que tiene por valores propios a  $i, -i$ . Entonces el haz tangente complexificado  $T_{\mathbb{C}}X$  se descompone como una suma de Whitney [Lee24, Prop. 1.56]:

$$T_{\mathbb{C}}X = T_X \oplus \overline{T_X} \tag{1.1}$$

En donde  $T_X$  y  $\overline{T_X}$  son los subhaces de  $T_{\mathbb{C}}X$  cuyas fibras en cada punto son los espacios propios asociados a  $i$  y  $-i$ , respectivamente. A  $T_X$  le llamamos el haz tangente holomorfo de  $X$ . El haz cotangente de  $X$  es el haz dual a  $T_X$ , es decir,  $T_X^* =: \Omega_X$ . Por definición, existe el siguiente morfismo, conocido como el producto dual:

$$T_X \otimes \Omega_X \rightarrow \mathcal{O}_X. \tag{1.2}$$

**Definición 1.1.1.** El  $k$ -ésimo haz exterior de  $X$  es el haz  $\Omega_{\mathbb{C}}^k(X) := \wedge^k T_{\mathbb{C}}X^*$ . También se conoce como el haz de  $k$ -formas de  $X$ .

La descomposición (1.1) induce una descomposición en las  $k$ -formas:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbb{C}}^k(X) &= (T_X^* \oplus \overline{T_X^*}) \wedge \cdots \wedge (T_X^* \oplus \overline{T_X^*}) \\ &= \bigoplus_{p+q=k} \left( \bigwedge^p T_X^* \wedge \bigwedge^q \overline{T_X^*} \right) \\ &=: \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q}.\end{aligned}$$

Llamamos haz de  $(p, q)$ -formas a  $\Omega_X^{p,q}$ . En particular,  $\Omega_X^{p,0}$  es el haz de  $p$ -formas holomorfas. Observemos que el haz cotangente es  $\Omega_X = \Omega_X^{1,0}$ .

**Definición 1.1.2.** El haz  $\Omega_X^{n,0}$ , donde  $n$  es la dimensión de  $X$ , es un haz lineal holomorfo. Se conoce como el haz canónico de  $X$  y es denotado por  $\omega_X$ .

Para cada  $p, q$  definimos la proyección

$$\pi^{p,q} : \Omega_{\mathbb{C}}^{p+q}(X) \longrightarrow \Omega_X^{p,q}.$$

**Definición 1.1.3.** Consideremos la derivada exterior  $d$  de  $X$ :

$$d : \Omega_{\mathbb{C}}^{p+q}(X) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(X).$$

Definimos el operador de Dolbeault

$$d'' : \Omega_X^{p,q} \rightarrow \Omega_X^{p,q+1}$$

como  $d'' = \pi^{p,q+1} \circ d$ .

Este operador satisface [Lee24, Prop. 4.9] que

$$d'' \wedge d'' = 0.$$

Para cada  $0 \leq p \leq n$  definimos el  $p$ -ésimo complejo de Dolbeault:

$$0 \rightarrow \Omega_X^{p,0} \xrightarrow{d''} \Omega_X^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \Omega_X^{p,n} \rightarrow 0.$$

Los grupos de cohomología de Dolbeault  $H^{p,q}(X)$  son los grupos de cohomología de este complejo, es decir,

$$H^{p,q}(X) := \frac{\ker \left( d'' : \Omega_X^{p,q} \rightarrow \Omega_X^{p,q+1} \right)}{\operatorname{Im} \left( d'' : \Omega_X^{p,q-1} \rightarrow \Omega_X^{p,q} \right)}.$$

**Definición 1.1.4.** Los números de Hodge de  $X$  son  $h^{p,q}(X) := \dim H^{p,q}(X)$ , con  $0 \leq p, q \leq n$ .

Esta cohomología está relacionada con la cohomología de gavillas y de de Rham, que a su vez está relacionada con la cohomología singular. Esto es el contenido de los tres teoremas siguientes, los cuales se pueden consultar en [Lee24, Teorema 6.19, Corolario 6.25, Teorema 9.44].

**Teorema 1.1.5 (Dolbeault).** *Consideremos una variedad compleja  $X$  suave. Al  $q$ -ésimo grupo de cohomología de Čech de  $X$  con coeficientes en la gavilla  $\Omega_{\mathbb{C}}^p(X)$  lo denotamos por  $H^q(X, \Omega_{\mathbb{C}}^p(X))$ . Se cumple para cada  $q \geq 0$  que*

$$H^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega_{\mathbb{C}}^p(X)).$$

**Teorema 1.1.6 (Hodge).** *Denotemos por  $H_{dR}^k(X, \mathbb{C})$  al  $k$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham. Se cumple que*

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \cong H_{dR}^k(X, \mathbb{C}).$$

**Teorema 1.1.7 (de Rham).** *Consideremos una variedad compleja  $X$  suave. Entonces*

$$H_{dR}^k(X, \mathbb{C}) \cong H_{Sing}^k(X, \mathbb{C}).$$

A partir de ahora “cohomología” se referirá a cohomología de gavillas, a menos que se especifique lo contrario.

Por otro lado, la inclusión  $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induce un morfismo en cohomología:

$$\iota_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{C}) \cong H_{dR}^k(X, \mathbb{C}). \quad (1.3)$$

**Definición 1.1.8.** Una clase  $a \in H^k(X, \mathbb{C})$  se dice entera si  $a \in \text{Im}(\iota_*)$ .

El Teorema de Hodge induce una descomposición en la cohomología entera:

$$H^k(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{Z}),$$

en donde  $H^{p,q}(X, \mathbb{Z}) = H^k(X, \mathbb{Z}) \cap H^{p,q}(X)$ .

Veremos en la Sección 1.3 que el grupo de cohomología entera  $H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$  contiene las clases de los divisores de una variedad proyectiva suave  $X$ . El siguiente teorema relaciona la cohomología entera con la homología singular. Su prueba se puede consultar en [Hat02, Teorema 3.30].

**Teorema 1.1.9** (Dualidad de Poincaré). *Dada una variedad proyectiva suave  $X$  de dimensión compleja  $n$  se tiene un isomorfismo para todo  $0 \leq k \leq 2n$*

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \cong H_{2n-k}(X, \mathbb{Z}).$$

**Definición 1.1.10.** La imagen  $\tilde{\gamma} \in H_{2n-k}(X, \mathbb{Z})$  de una clase  $\gamma \in H^k(X, \mathbb{Z})$  bajo el isomorfismo anterior se conoce como el dual de Poincaré de  $\gamma$ .

Consideremos una superficie suave  $X \subset \mathbb{P}^3$ . La inclusión

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

induce un morfismo en grupos de homología

$$i_* : H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z}). \quad (1.4)$$

**Definición 1.1.11.** Una clase  $\gamma \in H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$  se dice primitiva si su dual de Poincaré  $\tilde{\gamma}$  pertenece al kernel del morfismo  $i_*$ , es decir,  $i_*(\tilde{\gamma}) = 0 \in H_2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ . En este caso se dice que la clase de  $\gamma$  en  $H_2(X, \mathbb{Z})$  es homóloga a cero en  $\mathbb{P}^3$ .

Usando el morfismo (1.3) extendemos esta definición a clases del grupo  $H^{1,1}(X)$ .

**Definición 1.1.12.** Denotamos por  $H_{pr}^{1,1}(X)$  al subconjunto de  $H^{1,1}(X)$  que consiste de las clases primitivas enteras.

El conjunto  $H_{pr}^{1,1}$  se usa en el Capítulo 3 para escribir el morfismo de deformación de superficies y veremos que es isomorfo a un anillo de polinomios.

## 1.1.2. Superficies K3

En esta subsección definimos una superficie K3. André Weil propuso este nombre en honor a Ernst Kummer, Erich Kähler y Kunihiko Kodaira por sus contribuciones al estudio de estas superficies [Wei09].

**Definición 1.1.13.** Una superficie K3 compleja es una variedad compleja  $X$  compacta y conexa de dimensión dos tal que  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  y  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ .

La condición  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  nos permitirá considerar al grupo de Picard (Definición 1.3.3) de  $X$  como subconjunto del segundo grupo de cohomología  $H^2(X, \mathbb{Z})$  (Observación 1.3.5).

**Proposición 1.1.14.** *Si  $X$  es una superficie K3 entonces  $T_X \cong \Omega_X$ .*

*Demostración.* La condición  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  implica que el producto cuña es el producto dual (1.2):

$$\Omega_X \otimes \Omega_X \rightarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X.$$

De esto se sigue el resultado. □

En general, una superficie tiene nueve números de Hodge asociados:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{0,0} & & \\
 & & & & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\
 & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\
 & & h^{2,2} & & 
 \end{array} \tag{1.5}$$

A esta figura se le conoce como diamante de Hodge.

**Teorema 1.1.15.** *Si  $X$  es una superficie K3, su diamante de Hodge (1.5) es el siguiente:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & & & \\
 & 0 & & 0 & \\
 1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & & 
 \end{array}$$

La prueba del teorema anterior se puede consultar en [Huy16, Cap. 1, 2.4].

El siguiente teorema nos da ejemplos de superficies K3 contenidas en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ . Recordemos que una superficie  $X \subset \mathbb{P}^3$  se dice cuártica si está definida por un polinomio homogéneo de grado cuatro.

**Teorema 1.1.16.** *Una superficie cuártica suave  $X \subset \mathbb{P}^3$  es una superficie K3.*

*Demostración.* Denotaremos por  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}_X$  a las gavillas estructurales de  $\mathbb{P}^3$  y  $X$  respectivamente. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de gavillas:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-4) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Ésta induce una sucesión exacta larga en cohomología:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-4)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \\
 \rightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-4)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-4)) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Como  $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}) = 0 = H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-4))$ , concluimos que  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Por otro lado, de la fórmula de adjunción se sigue que

$$\omega_X = \omega_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}(4)|_X \cong \mathcal{O}_X.$$

Con esto se completa la prueba. □

La siguiente sección estará dedicada al estudio de un ejemplo explícito de superficie  $K3$ : la superficie cuártica de Fermat.

## 1.2. Rectas de la cuártica de Fermat

En esta sección veremos que la superficie cuártica de Fermat  $S = \text{Var}(x^4 + y^4 + z^4 + w^4)$  contiene exactamente 48 rectas y que éstas determinan a  $S$  en el espacio de superficies cuárticas contenidas en  $\mathbb{P}^3$ . Observemos que dicho espacio se identifica con  $\mathbb{P}^{34}$  pues toda cuártica está dada por un polinomio en 35 monomios de la siguiente forma:

$$f = \sum_{i+j+k+l=4} a_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \quad a_{ijkl} \in \mathbb{C}.$$

Más aún, veremos que la cantidad mínima de rectas que pueden determinar a una cuártica en  $\mathbb{P}^{34}$  es siete y probaremos en el Teorema 1.2.14 que en efecto existen siete rectas que determinan a  $S$ ; es decir,  $S$  es la única superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$  que contiene a estas rectas. Para esto describiremos en la Proposición 1.2.5 las relaciones de incidencia de las rectas de  $S$ .

En general, las superficies suaves en  $\mathbb{P}^3$  de grado  $d = 1, 2, 3$  siempre contienen rectas: las de grado uno son planos y es bien conocido que las de grado dos son doblemente regladas [Har92, págs. 285-287]; cuando  $d = 3$  las superficies tienen 27 rectas [Sch58]. Esto cambia cuando  $d = 4$ . De hecho tenemos el Teorema 1.2.2 y la proposición siguiente.

**Proposición 1.2.1.** *Dada una recta  $l \subset \mathbb{P}^3$ , el espacio de cuárticas en  $\mathbb{P}^3$  que la contienen es isomorfo a  $\mathbb{P}^{29}$ .*

*Demostración.* Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $l = \{x = y = 0\}$ . Consideremos una cuártica  $X$  dada por el siguiente polinomio:

$$f = \sum_{i+j+k+l=4} a_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \quad a_{ijkl} \in \mathbb{C}$$

que contiene a  $l$ .

Notemos que

$$f \equiv \sum_{k=0}^4 a_{0,0,k,4-k} z^k w^{4-k} \pmod{\langle x, y \rangle}.$$

Como  $f \in \langle x, y \rangle$ , entonces el residuo anterior es igual a cero. Se sigue que

$$a_{0,0,k,4-k} = 0, \text{ para } k = 0, \dots, 4.$$

Por tanto,  $X$  se puede identificar con un punto de  $\mathbb{P}^{29}$ . □

Entenderemos por divisor a una combinación lineal de subvariedades de codimensión uno; definiremos formalmente el concepto en la Sección 1.3.

**Teorema 1.2.2.** *El conjunto de superficies cuárticas en  $\mathbb{P}^3$  que contienen una recta definen un divisor de grado 320 en  $\mathbb{P}^{34}$ , el espacio de cuárticas en  $\mathbb{P}^3$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $\mathbb{G}$  a la Grassmanniana de líneas en  $\mathbb{P}^3$  y consideremos la siguiente variedad de incidencia:

$$Z := \{(l, X) \in \mathbb{G} \times \mathbb{P}^{34} \mid l \subset X\},$$

así como las proyecciones

$$\Pi_1 : Z \rightarrow \mathbb{G} \text{ y } \Pi_2 : Z \rightarrow \mathbb{P}^{34}.$$

Por la Proposición 1.2.1 la dimensión de las fibras de  $\Pi_1 : Z \rightarrow \mathbb{G}$  es 29. Entonces la dimensión de  $Z$  es  $29 + \dim \mathbb{G} = 33$ .

Basta probar que la dimensión de la imagen  $\Pi_2(Z)$  es 33. Si suponemos lo contrario entonces la fibra  $\Pi_2^{-1}(X)$  de cualquier cuártica  $X$  es vacía o tiene dimensión positiva. En el Teorema 1.2.3 veremos que la cuártica de Fermat en  $\mathbb{P}^3$  tiene una cantidad finita de rectas, por lo que la fibra genérica es cero dimensional. Así, la codimensión en  $\mathbb{P}^{34}$  de  $\Pi_2(Z)$  es uno.

El grado de este divisor se calcula en [LHV23, Teorema 2]. □

Ahora escribiremos las ecuaciones de las rectas que contiene la cuártica de Fermat  $S$ , las cuales dividimos en tres tipos de acuerdo a las ecuaciones que las definen.

**Teorema 1.2.3.** *La cuártica de Fermat contiene exactamente 48 rectas y sus ecuaciones son las siguientes:*

$$\begin{aligned} \text{Tipo } L: & L_{jl} = \{x - \xi^{2j+1}y = z - \xi^{2l+1}w = 0\}, \\ \text{Tipo } T: & T_{jl} = \{x - \xi^{2j+1}z = y - \xi^{2l+1}w = 0\}, \quad j, l \in \{0, \dots, 3\}, \\ \text{Tipo } R: & R_{jl} = \{x - \xi^{2j+1}w = y - \xi^{2l+1}z = 0\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

en donde  $\xi$  satisface  $\xi^4 = -1$ .

*Demostración.* Un cálculo directo verifica que las rectas (1.6) están contenidas en  $S$ .

Para el recíproco analizaremos el pincel de planos  $\{H_t\}_t$  que contienen a la recta  $L_{00}$  y probaremos que existen exactamente 10 planos que contienen cúbicas singulares. Cada plano del pincel está definido como sigue:

$$H_t = \{x = \xi y - tz + t\xi w\}.$$

La intersección  $H_t \cap S$  contiene a la cuártica

$$\text{Var}((\xi y - tz + t\xi w)^4 + y^4 + z^4 + w^4),$$

la cual es unión de una cúbica plana  $C_t$  con la recta  $L_{00}$ . Consideremos la siguiente proyección:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ ([b : c : d], t) &\mapsto t \end{aligned}$$

La imagen bajo esta proyección de la subvariedad

$$\text{Var}\left(C_t, \frac{\partial}{\partial y}C_t, \frac{\partial}{\partial z}C_t, \frac{\partial}{\partial w}C_t\right)$$

determina los valores de  $t$  para los cuales la cúbica  $C_t$  es singular. Haremos el cálculo en la carta afín  $\{y = 1\}$  con la ayuda del software *Macaulay2* como sigue:

```
K = QQ[a]/ideal(a^4+1);
R = K[y, w, t];
C = sub( ( (a*y - t + a*t*w)^4 + 1 + y^4 + w^4 )/(1-a*w), R);
V = ideal(C) + ideal for m in {y, w} list diff(m, C);
S = K[T];
f = map(R, S, {t});
preimage_f V
```

Obtenemos que la imagen está dada por  $t(t^8 - 1)$ .

Repitiendo este proceso en las cartas afines  $\{z = 1\}$  y  $\{w = 1\}$  obtenemos que estos nueve valores de  $t$  son todos en los cuales la cúbica  $C_t$  es singular. Incluyendo al plano  $H_\infty = \{z - \xi w = 0\}$  obtenemos los 10 planos que contienen cúbicas singulares. Se termina la prueba con los siguientes hechos que se probarán después en esta sección:

- i) Dada una recta  $l \subset S$  de (1.6) existen 10 planos que contienen a todas las rectas de (1.6) que la intersectan (Proposición 1.2.6).
- ii) El grupo de automorfismos de  $S$  actúa de manera transitiva en el conjunto de sus rectas (Proposición 1.2.4).

De esto se sigue que las rectas listadas en (1.6) son todas las que contiene la cuártica de Fermat. □

A continuación escribimos las ecuaciones de estas rectas usando el software *Macaulay2*.

```
k=QQ[t,Degrees => {0}]/ideal(t^4+1);
P3=k[x,y,z,w];
L = new IndexedVariableTable; -- Rectas tipo L
for i in 0..3 do L_i = new IndexedVariableTable;
for i in 0..3 do
for j in 0..3 do L_i_j = ideal(x-t^(2*i+1)*y, z-t^(2*j+1)*w);

T = new IndexedVariableTable; -- Rectas tipo T
for i in 0..3 do T_i = new IndexedVariableTable;
for i in 0..3 do
for j in 0..3 do T_i_j = ideal(x-t^(2*i+1)*z, y-t^(2*j+1)*w);

R = new IndexedVariableTable; -- Rectas tipo R
for i in 0..3 do R_i = new IndexedVariableTable;
for i in 0..3 do
for j in 0..3 do R_i_j = ideal(x-t^(2*i+1)*w, y-t^(2*j+1)*z);
```

La cuártica de Fermat es una superficie con mucha simetría. Más aún, es válida la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.4.** *El grupo de automorfismos de la cuártica de Fermat actúa transitivamente en el conjunto de sus rectas.*

*Demostración.* Consideremos el grupo simétrico  $S_4$  en las cuatro variables  $x, y, z, w$ . Este grupo actúa en  $\mathbb{P}^3$  por permutaciones de las coordenadas y deja fija a  $S$ . Además, la permutación

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ x & z & y & w \end{pmatrix}$$

manda a la recta  $L_{jl}$  en la recta  $T_{jl}$ ; y la permutación

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ x & w & y & z \end{pmatrix}$$

manda a la recta  $L_{jl}$  en la recta  $R_{jl}$ .

Por otro lado, para cualesquiera  $j, l \in \{0, 1, 2, 3\}$  consideramos el siguiente morfismo en  $\mathbb{P}^3$ , en donde  $\xi^4 + 1 = 0$ :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x \\ y &\rightarrow (\xi^2)^{4-j}y \\ z &\rightarrow z \\ w &\rightarrow (\xi^2)^{4-l}w \end{aligned},$$

Notemos que dicho morfismo deja fija a la cuártica de Fermat. Además, manda a la recta  $L_{jl}$  a la recta  $L_{00}$ . Esto prueba la transitividad en las rectas de tipo L, con lo que se concluye la prueba.  $\square$

En la siguiente proposición analizamos las relaciones de incidencia de las rectas de  $S$ .

**Proposición 1.2.5.** *Con la notación de (1.6) se cumple que:*

1.  $L_{jl} \cap T_{km} \neq \emptyset$  si y sólo si  $4|j + m - k - l$ .
2.  $L_{jl} \cap R_{km} \neq \emptyset$  si y sólo si  $4|j + m + l - k + 1$ .
3.  $T_{jl} \cap R_{km} \neq \emptyset$  si y sólo si  $4|j + l - k - m$ .
4. Si  $l_{jl}$  y  $l_{km}$  son dos rectas de  $S$  del mismo tipo ( $L, T$  o  $R$ ), entonces  $l_{jl} \cap l_{km} \neq \emptyset$  si y sólo si  $j = k$  o  $l = m$ .

*Demostración.* Sólo demostraremos los incisos (1) y (4) pues los demás casos se prueban de manera similar.

(1): Consideremos  $[a : b : c : d] \in L_{jl} \cap T_{km}$ . Entonces este punto satisface las ecuaciones de cada recta, es decir

$$\begin{aligned} a &= \xi^{2j+1}b, & c &= \xi^{2l+1}d. \\ a &= \xi^{2k+1}c, & b &= \xi^{2m+1}d. \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos que

$$\xi^{2j+2m+2}d = \xi^{2k+2l+2}d.$$

Notemos que si  $d = 0$  entonces  $b = c = a = 0$ . Por tanto

$$\xi^{2(j+m-k-l)} = 1.$$

Equivalentemente,

$$4|(j + m - k - l).$$

Recíprocamente, si se satisface que  $4|(j + m - k - l)$  entonces se cumple que

$$[\xi^{2(m+j+1)} : \xi^{2m+1} : \xi^{2l+1} : 1] \in L_{jl} \cap T_{km}.$$

(4): Demostraremos el caso para las rectas de tipo L. Para las rectas de otro tipo se procede de manera análoga.

Sea  $[a : b : c : d] \in L_{jl} \cap L_{km}$ . Entonces se cumplen las siguiente igualdades:

$$a = \xi^{2j+1}b = \xi^{2k+1}b,$$

$$c = \xi^{2l+1}d = \xi^{2m+1}d.$$

Tenemos las siguientes posibilidades:

$$b = 0 \text{ y } 8|2(l - m),$$

o bien

$$d = 0 \text{ y } 8|2(j - k).$$

Como los índices  $j, k, l, m$  toman valores en el conjunto  $\{0, \dots, 3\}$ , concluimos que  $l = m$ , o bien,  $j = k$ . Recíprocamente, si  $j = k$  entonces el punto  $[\xi^{2j+1} : 1 : 0 : 0]$  está en la intersección  $L_{jl} \cap L_{jm}$ .

□

Con esto determinamos cuántas líneas contenidas en  $S$  intersectan a una línea fija, como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.6.** *Dada una recta  $L_{jl} \subset S$ , existen 14 rectas de  $S$  que la intersectan y son las que se muestran en la Tabla 1.1. Además, estas 14 rectas yacen en diez planos distintos; las rectas (\*) de la Tabla 1.1 junto con  $L_{jl}$  yacen en un plano y las cuatro se intersectan en un solo punto. Sucede lo mismo con las rectas (\*\*).*



La siguiente proposición afirma que esta es la única configuración posible para cuatro rectas coplanares. Esta es una de las razones del etiquetado de las rectas en tipo L, T y R.

**Proposición 1.2.8.** *Si cuatro rectas de  $S$  son coplanares, entonces las cuatro son rectas del mismo tipo ( $L$ ,  $R$  o  $T$ ).*

*Demostración.* Consideremos un plano que contiene cuatro rectas de  $S$ . Entonces al menos dos de estas rectas son del mismo tipo. Por la Observación 1.2.7 concluimos que las cuatro rectas son del mismo tipo.  $\square$

En la Figura 1.1 observamos que existen conjuntos de diez rectas contenidas en  $S$  que son alabeadas, es decir, disjuntas a pares. Surge la pregunta: ¿cuál es la cantidad máxima de rectas alabeadas de  $S$ ? La Proposición 1.2.10 contesta esto. Para probarla ocupamos el siguiente lema.

**Lema 1.2.9.** *Dadas cinco rectas en  $S$  del mismo tipo, existen dos que se intersectan.*

*Demostración.* Asumamos que las cinco rectas son:

$$L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_5, j_5},$$

con  $i_k, j_k \in \{0, \dots, 3\}$ , para  $k \in \{1, \dots, 5\}$ . Por lo tanto, existen dos índices  $i_{k_1}$  y  $i_{k_2}$  que son iguales. Del inciso 4 de la Proposición 1.2.5 se sigue que las rectas  $L_{i_{k_1}, j_{k_1}}$  y  $L_{i_{k_2}, j_{k_2}}$  se intersectan.  $\square$

**Proposición 1.2.10.** *La cuártica de Fermat admite a lo más doce rectas alabeadas. Además las siguientes doce rectas son alabeadas:*

$$L_{02}, L_{13}, L_{20}, L_{31}, T_{01}, T_{10}, T_{23}, T_{32}, R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}. \quad (1.7)$$

*Demostración.* La última afirmación se prueba con un cálculo directo. Sea  $\mathcal{U}$  un conjunto con cardinalidad máxima de rectas alabeadas; escribimos

$$\mathcal{U} = \mathcal{L} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{R},$$

en donde  $\mathcal{L}$  (respectivamente  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{R}$ ) es el conjunto de rectas tipo L (respectivamente T, R) contenidas en  $\mathcal{U}$ .

Por el lema anterior se sigue que a lo más hay cuatro rectas del mismo tipo que son alabeadas, por tanto,

$$|\mathcal{U}| = |\mathcal{L}| + |\mathcal{T}| + |\mathcal{R}| \leq 4 + 4 + 4 = 12.$$

Como ya se exhibió un conjunto de doce rectas alabeadas, concluimos que esta es la cantidad máxima.  $\square$

**Definición 1.2.11.** A los conjuntos de doce rectas alabeadas en  $S$  los llamaremos conjuntos maximales.

### 1.2.1. Conjuntos interpolantes

Las 48 rectas de la cuártica de Fermat  $S$  la determinan en el sentido de que ésta es la única superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$  que las contiene. Sin embargo, 48 no es el número óptimo; en esta subsección probaremos que existen siete rectas de la cuártica que la determinan (Teorema 1.2.14), siendo siete el mínimo posible. También analizaremos ejemplos de conjuntos de rectas que determinan a  $S$ , a los que llamaremos interpolantes.

**Definición 1.2.12.** Consideremos una variedad  $X \subset \mathbb{P}^n$ . Dos subvariedades  $Y_1, Y_2$  de  $X$  intersectan transversalmente si en cada punto de intersección los espacios tangentes a  $Y_1$  y  $Y_2$  generan a  $\mathbb{P}^n$ .

**Observación 1.2.13.** Fijemos seis rectas  $l_1, \dots, l_6$  contenidas en  $\mathbb{P}^3$  y denotemos por  $Q_{l_i} \subset \mathbb{P}^{34}$  al conjunto de superficies cuárticas en  $\mathbb{P}^3$  que contienen a la recta  $l_i$ . Si la intersección  $Q := Q_{l_1} \cap \dots \cap Q_{l_6}$  es transversal, por la Proposición 1.2.1 concluimos que  $Q$  tiene codimensión 30 en  $\mathbb{P}^{34}$ . Este cálculo nos dice que el mínimo número de rectas que pueden determinar a una cuártica es siete.

**Teorema 1.2.14.** *El número mínimo de rectas que determinan a la cuártica de Fermat es 7. Además, estas rectas se pueden elegir de modo que sean alabeadas.*

*Demostración.* Por la Observación 1.2.13 basta exhibir un conjunto de siete rectas alabeadas tales que la cuártica de Fermat sea la única superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$  que las contiene.

Consideremos la siguiente lista de rectas:

$$L_{02}, L_{13}, T_{01}, T_{10}, T_{23}, R_{11}, R_{22}. \tag{1.8}$$

La siguiente función booleana de *Macaulay2* determina si la cuártica de Fermat es la única superficie de grado cuatro en  $\mathbb{P}^3$  que contiene a estas rectas. La función tiene por entrada una lista de rectas.

```
deter=(Lista) ->
{
  p:={};
  n:=#Lista-1;
  IQ:=new IndexedVariableTable;
  for l in Lista do
  p=join(p,{flatten entries gens image basis (4,l)});
  for i in 0..n do IQ_i= ideal(p_i) + ideal gens image basis(5, ideal
vars P3);
  LL := ideal(1_P3);
  for i in 0..n do LL = intersect(LL, IQ_i);
  if ((degree LL_1)_0==5) then return true;
  return 0;
}
```

Al ingresar el conjunto (1.8) el resultado es true. □

**Definición 1.2.15.** A los conjuntos de rectas que determinan a  $S$  los llamaremos interpolantes.

A los conjuntos de siete (respectivamente ocho) rectas los llamaremos septetos (respectivamente octetos).

El conjunto (1.8) no es el único septeto interpolante. Otro ejemplo son las siguientes siete rectas:

$$L_{00}, L_{11}, L_{22}, T_{01}, T_{23}, R_{00}, R_{33}. \quad (1.9)$$

Una característica que tiene el septeto (1.8) es que se puede completar a un único conjunto maximal; a saber, el conjunto (1.7). Sin embargo, no todo septeto contenido en un conjunto maximal es interpolante, por ejemplo, las siguientes siete rectas también están contenidas en (1.7) pero no son interpolantes:

$$T_{01}, T_{10}, T_{23}, R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}.$$

Este último septeto también pertenece al siguiente conjunto maximal:

$$\mathcal{U} = \{L_{03}, L_{10}, L_{21}, L_{32}, T_{01}, T_{10}, T_{23}, T_{32}, R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}\}.$$

Surge la pregunta: ¿será que todo septeto que puede completarse a un único conjunto maximal es interpolante? La respuesta es negativa y las siguientes rectas son un contraejemplo:

$$L_{00}, L_{11}, L_{22}, T_{01}, T_{10}, R_{00}, R_{11}. \quad (1.10)$$

Las únicas rectas que completan este septeto en un conjunto maximal son las siguientes:

$$L_{33}, T_{23}, T_{32}, R_{22}, R_{33}.$$

La condición de completarse a un único conjunto maximal tampoco es necesaria. El septeto interpolante (1.9) puede completarse a dos conjuntos maximales escogiendo cualesquiera de las siguientes opciones:

$$L_{33} \quad \begin{matrix} T_{12} & T_{30} \\ T_{10} & T_{32} \end{matrix} \quad R_{11} \quad R_{22} .$$

Incluso existen septetos interpolantes que no pueden completarse a ningún conjunto maximal, un ejemplo es:

$$L_{00}, L_{11}, L_{22}, T_{01}, T_{13}, T_{20}, T_{32}. \quad (1.11)$$

Otra pregunta natural es ¿cualquier conjunto interpolante minimal, en el sentido de que ningún subconjunto propio es interpolante, tiene cardinalidad siete? Una vez más, la respuesta es negativa: esto es el contenido de la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.16.** *La cuártica de Fermat admite conjuntos interpolantes minimales de ocho rectas.*

*Demostración.* Utilizado la función *deter* definida en el Teorema 1.2.14, concluimos que el siguiente septeto no interpolante

$$L_{00}, L_{11}, L_{22}, L_{33}, T_{01}, T_{12}, T_{23}, \quad (1.12)$$

se puede completar a tres octetos interpolantes escogiendo cualquiera de las siguientes tres rectas:

$$T_{03}, T_{13}, T_{02}. \quad (1.13)$$

Con un cálculo directo se prueba que ningún subconjunto de siete rectas es interpolante. □

En lo siguiente explicaremos la geometría que tienen los octetos interpolantes exhibidos en la Proposición 1.2.16.

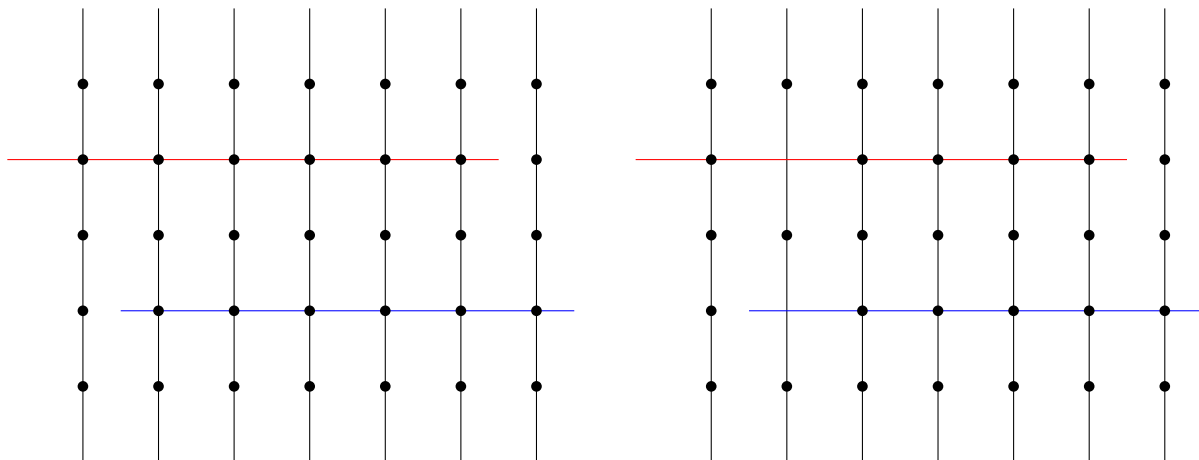
**Definición 1.2.17.** Dado un conjunto de rectas  $L = \{l_1, \dots, l_r\}$  de  $S$ , una recta  $l$  en  $\mathbb{P}^3$  que intersecta a  $k$  rectas de  $L$  se dice  $k$ -secante. Si  $k \geq 5$  se dice multisecante.

Notemos que si  $k \geq 4$  entonces una  $k$ -secante está contenida en  $S$ .

**Proposición 1.2.18.** *Un conjunto de siete rectas que tenga al menos dos 6-secantes no puede determinar a una superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{Q}$  a la configuración de las siete rectas y por  $l_1$  y  $l_2$  a las dos 6-secantes.

Marquemos cinco puntos en cada una de las siete rectas de forma tal que se consideren los puntos de intersección de las rectas  $l_1$  y  $l_2$  con  $\mathcal{Q}$  (Figura 1.2a). Sea  $r$  el número de puntos marcados. Se cumple que  $r \leq 35$ .



(a) El espacio de cuárticas determinado por las siete rectas está determinado por estos 35 puntos marcados.

(b) Estos puntos determinan el mismo espacio de cuárticas que los marcados en 1.2a.

Figura 1.2: Siete rectas alabeadas con dos 6-secantes distintas.

Notemos que una cuártica contiene a una de las rectas de  $\mathcal{Q}$  si y sólo si contiene a los cinco puntos marcados en esta. Además, contener un punto impone una condición lineal en  $\mathbb{P}^{34}$ .

También, una cuártica contiene a cinco de los seis puntos en los que  $l_1$  intersecta a  $\mathcal{Q}$  si y sólo si contiene a los seis puntos de intersección. Consideremos a los  $r - 2$  puntos obtenidos de remover uno de los seis puntos de intersección de las dos 6-secantes con  $\mathcal{Q}$  (Figura 1.2b). Notemos que el espacio de cuárticas que contiene a los  $r$  puntos es el mismo conjunto de cuárticas que contiene a los  $r - 2$  puntos, es

decir, es un espacio de codimensión al menos  $35 - r + 2 \geq 2$ .

Concluimos que la configuración  $\mathcal{Q}$  está contenida en más de una cuártica y por lo tanto no puede determinar a una única cuártica.  $\square$

Los septetos interpolantes (1.8) y (1.9) tienen una única 6-secante: la recta  $L_{12}$ . En cambio, el septeto interpolante (1.11) no tiene ninguna 6-secante, pero si cuatro 5-secantes, a saber:  $T_{00}, T_{11}, T_{22}$  y  $T_{33}$ .

La Proposición 1.2.18 explica por qué el septeto (1.10) no es interpolante, pues tiene exactamente dos 6-secantes, las cuales son  $L_{12}$  y  $L_{30}$ .

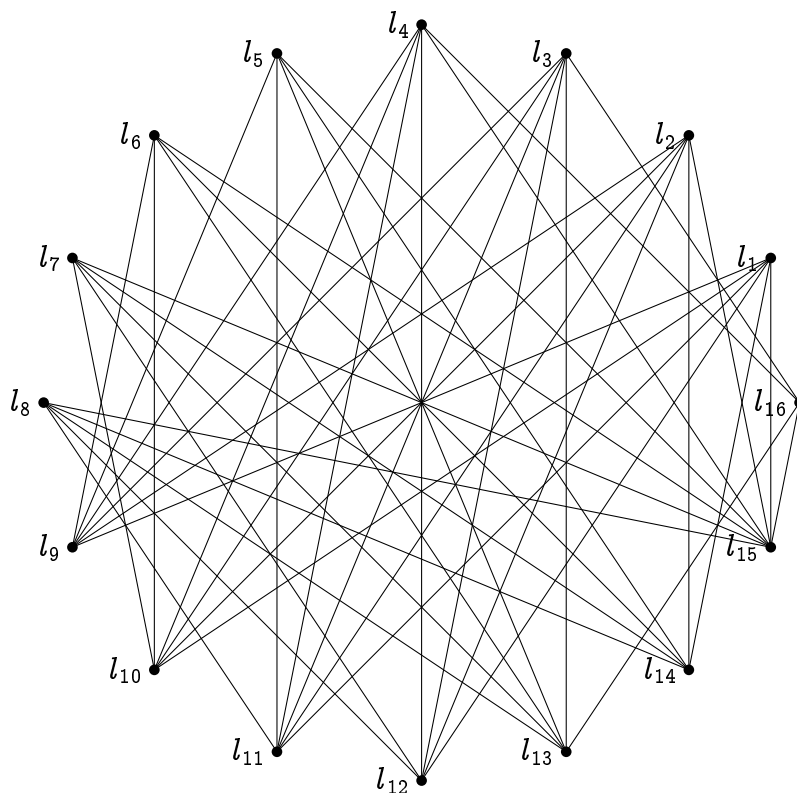


Figura 1.3: Gráfica de intersección de un octeto interpolante junto con sus ocho multiseccantes.

Por otro lado, los tres octetos interpolantes que se obtienen de completar el septeto (1.12) con alguna de las rectas (1.13) tienen las mismas multiseccantes, las cuales son:

$$L_{01}, L_{12}, L_{23}, L_{30}, T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}.$$

Estas ocho rectas son alabeadas, pueden completarse a cuatro conjuntos maximales distintos y no determinan a la cuártica. Además, cada recta de (1.13) es una 2-secante del septeto (1.12).

Al considerar cualquiera de estos tres octetos interpolantes y sus ocho multiseccantes obtenemos una curva de grado 16 en  $\mathbb{P}^3$  y género aritmético igual a 31. La gráfica de intersección de esta curva se muestra en la Figura 1.3.

Para calcular el género de las curvas anteriores usamos *Macaulay2* y la siguiente función que tiene como entrada una lista de rectas:

```
Genus=(lista) ->
{
  r:=1;
  for i in 1..#lista do
  {
    for j in i+1..#lista do
      if (codim (lista_(i-1)+lista_(j-1))==3) then r=r+1;
      r=r-1;
    }; return r;
  }
}
```

### 1.2.2. Cónicas residuales

En esta subsección estudiaremos algunas cónicas contenidas en la cuártica de Fermat  $S$ . Este estudio será útil en el Capítulo 3 para entender el espacio de deformaciones de primer orden de  $S$ . Las cónicas en las que nos enfocaremos serán cónicas determinadas por dos rectas incidentes de  $S$ ; estas dos rectas determinan un plano  $P$ . La intersección de  $P$  con  $S$  son las dos rectas y una cónica  $C$ . Si las rectas son del mismo tipo,  $C$  es reducible (Observación 1.2.10). En el Teorema 1.2.20 probaremos que  $S$  contiene exactamente 192 de estas cónicas que son irreducibles.

**Definición 1.2.19.** Si la cónica  $C$  determinada por dos rectas de  $S$  es irreducible la llamaremos cónica residual de  $S$ .

**Teorema 1.2.20.** *La cuártica de Fermat contiene 192 cónicas residuales.*

*Demostración.* Por las Proposiciones 1.2.6 y 1.2.8 sabemos que al fijar una recta  $l$  de  $S$  existen otras 14 rectas que la interseccionan; de éstas solo ocho la interseccionan de forma que el plano que generan no contiene más rectas de  $S$ , y por tanto determinan ocho cónicas residuales. Además estas intersecciones son entre rectas de distinto tipo.

Se sigue de lo anterior que las ocho cónicas residuales que se obtienen a partir de la recta  $l$  son todas distintas a las ocho cónicas residuales que se obtienen a partir de otra recta  $l'$  del mismo tipo que  $l$ .

Contamos las cónicas residuales de  $S$  como sigue: hay 16 rectas de tipo L y cada una de ellas genera ocho cónicas residuales, con esto contamos 128. Restan las cónicas generadas por la intersección de una recta de tipo T con otra de tipo R. Al fijar una recta de tipo T notamos que de las ocho cónicas residuales que determina cuatro están dadas por la intersección con una recta de tipo L, es decir, descartamos cuatro cónicas por cada recta tipo T. Con esto obtenemos que hay  $128+16\times 4=192$  cónicas residuales.  $\square$

Utilizaremos los ideales que definen las 192 cónicas residuales en la Sección 3.2.1 para estudiar ciertas deformaciones de primer orden de la cuártica de Fermat. Estos los obtenemos con el siguiente código. La primera función enlista las rectas que determinan cónicas residuales dada la recta  $L_{jl}$ . La segunda función enlista las cuatro rectas que determinan cónicas residuales dada la recta  $T_{jl}$ . Para ambas funciones la entrada son dos índices  $j, l \in \mathbb{N}$ . La tercer y cuarta función calculan los ideales que definen a estas cónicas residuales. Los últimos renglones del código generan una lista con los ideales de las 192 cónicas.

```
interL=(j,l)->
{
  L:={};
  for k in 0..3 do {
    for m in 0..3 do if ((j+m+1-k+1)%4)==0 then L=join(L,{R_k_m});
    for m in 0..3 do if ((j+m-k-1)%4)==0 then L=join(L,{T_k_m});
  };
  return L;
}

interT=(j,l)->
{
  L:={};
  for k in 0..3 do
    for m in 0..3 do if ((j+1-k-m)%4)==0 then L=join(L,{R_k_m});
  return L;
}

ConicsL = (i,j) ->
```

```

{
  CON={};
  Li:=interL(i,j);
  m:=#Li;
  for k in 0..m-1 do {
    plano:=(radical (L_i_j*Li_k))_0;
    q:=ideal(plano,F);
    conica:=saturate(q,L_i_j*Li_k);
    CON=join(CON,{conica});
  };
  return CON;
}

ConicsT = (i,j) ->
{
  CON={};
  Li:=interT(i,j);
  m:=#Li;
  for k in 0..m-1 do {
    plano:=(radical (T_i_j*Li_k))_0;
    q:=ideal(plano,F);
    conica:=saturate(q,T_i_j*Li_k);
    CON=join(CON,{conica});
  };
  return CON;
}

con={};
for i in 0..3 do
for j in 0..3 do con=join(con,Con(i,j));

```

### 1.3. Grupo de Picard de la superficie cuártica de Fermat

Al principio de este capítulo mencionamos que un divisor de Weil en una variedad proyectiva suave  $X$  es una combinación formal de subvariedades de codimensión uno. En esta subsección daremos otra definición: la de divisor de Cartier (Definición

1.3.1). Usaremos nociones básicas de gavillas, una referencia sobre los conceptos que manejaremos es [Sha13, Cap. 5, Sec. 2]. Este formalismo nos permitirá manipular haces lineales sobre  $X$  como divisores en  $X$  y estudiar deformaciones de primer orden de  $X$  a lo largo de un divisor.

En la subsección 1.3.1 definiremos la primer clase de Chern de un haz lineal y el grupo de Picard de  $X$ . En la subsección 1.3.2 definiremos el producto de intersección de dos divisores y lo usaremos para analizar si dos divisores son linealmente equivalentes. Probaremos en el Teorema 1.3.20 que existen veinte rectas contenidas en  $S$  cuyas clases forman una base para  $Pic(S)$ .

Denotaremos por  $A$  al anillo de coordenadas homogéneas de  $X$ , por  $\mathcal{O}_X$  a su gavilla estructural, por  $\mathcal{K}$  a la gavilla de campos de funciones de  $A$  y por  $\mathcal{K}^*$  y  $\mathcal{O}_X^*$  a las gavillas de elementos invertibles en  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{O}_X$ , respectivamente.

**Definición 1.3.1.** Un divisor de Cartier es una sección global  $D$  de la gavilla  $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*$ , es decir,  $D \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*)$ .

Un divisor de Cartier se dice principal si es un elemento de la imagen de la aplicación natural

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*).$$

Dos divisores de Cartier se dicen linealmente equivalentes si su diferencia es un divisor principal.

Por las propiedades de las gavillas cocientes, un divisor de Cartier puede ser descrito dando un cubriente abierto  $\{U_i\}$  de  $X$  y elementos  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$  para cada  $i$  tales que para cada  $i, j$ ,  $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ . En otras palabras, un divisor de Cartier está localmente definido por un polinomio. En particular, una subvariedad de  $X$  de codimensión uno está definida por un polinomio, por lo que es un divisor de Cartier.

A continuación definiremos lo que es una gavilla invertible para posteriormente relacionar este concepto con el de divisor de Cartier.

**Definición 1.3.2.** Una gavilla invertible  $\mathcal{L}$  sobre  $X$  es una gavilla de  $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libre de rango uno.

Las gavillas invertibles se pueden entender como haces lineales [Sha13, Teorema 6.2].

Si  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  son gavillas invertibles entonces  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  también es invertible. Además, existe otra gavilla invertible  $\mathcal{L}^{-1}$  sobre  $X$  tal que  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$  [Har97, II, Prop. 6.12]. En otras palabras, el conjunto de gavillas invertibles tiene estructura de grupo con la operación  $\otimes$ .

**Definición 1.3.3.** Dada una variedad suave  $X$  definimos su grupo de Picard,  $Pic(X)$ , como el grupo de clases de isomorfismo de gavillas invertibles sobre  $X$ .

Dado un divisor de Cartier  $D$  le asociamos una gavilla invertible de la siguiente manera: representemos a  $D$  por  $\{(U_i, f_i)\}$  y definimos  $\mathcal{L}(D)$  como el  $\mathcal{O}_X$ -submódulo generado por  $f_i^{-1}$  en  $U_i$ , para cada  $i$ .

**Proposición 1.3.4.** *Sea  $X$  una variedad proyectiva suave. Entonces*

(a) *Si  $D$  es un divisor de Cartier entonces  $\mathcal{L}(D)$  es una gavilla invertible sobre  $X$ . La función*

$$D \mapsto \mathcal{L}(D) \tag{1.14}$$

*es una correspondencia 1-1 entre divisores de Cartier y gavillas invertibles sobre  $X$ .*

(b) *Si  $D_1, D_2$  son divisores de Cartier, entonces  $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ .*

(c) *Los divisores  $D_1$  y  $D_2$  son linealmente equivalentes si y sólo si  $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$  como gavillas invertibles abstractas.*

La prueba de esta proposición se puede consultar en [Har97, II, Prop. 6.13]. Concluimos que el grupo de divisores de Cartier módulo equivalencia lineal es igual al grupo de Picard. Si los divisores  $D_1$  y  $D_2$  son linealmente equivalentes se escribe  $D_1 \sim D_2$ .

A partir de ahora diremos “divisores” en lugar de divisores de Cartier. Al conjunto de divisores de  $X$  lo denotaremos por  $Div(X)$ .

Si  $X$  es una superficie suave, entonces toda curva contenida en  $X$  es un divisor. En este caso el grupo de Picard coincide con el grupo de combinaciones lineales con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  de curvas contenidas en  $X$  módulo equivalencia lineal.

### 1.3.1. Clases de Chern y Teorema de Lefschetz

En esta subsección enunciaremos el Teorema de Lefschetz sobre (1,1)-clases (Teorema 1.3.8). Este teorema acota al grupo de Picard de una superficie cuártica suave. Resulta que el grupo de Picard de la cuártica de Fermat es el máximo grupo posible que una superficie cuártica puede tener; probaremos esto en la siguiente subsección.

Usaremos en esta subsección otra identificación para el grupo de Picard de una variedad proyectiva suave  $X$  [Lee24, Prop. 6.28]:

$$Pic(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

La sucesión exponencial de gavillas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{O}_X^* & \rightarrow & 0 \\ & & f & \mapsto & 2\pi i f & \mapsto & e^{2\pi i f} & & \end{array},$$

induce el morfismo de conexión:

$$\begin{array}{ccc} \delta : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ L & \mapsto & \delta(L) =: c_1(L) \end{array}.$$

**Observación 1.3.5.** Recordemos que si  $X$  es una superficie K3 entonces  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . De la sucesión exponencial se deduce que el morfismo  $\delta$  es inyectivo en este caso.

**Definición 1.3.6.** Dado un haz lineal  $L \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ , el elemento  $\delta(L) = c_1(L)$  es la primera clase de Chern de  $L$ .

El morfismo de conexión  $\delta$  es un homomorfismo entre grupos. Más aún, la imagen de  $\delta$  es un grupo abeliano finitamente generado.

**Definición 1.3.7.** Al rango  $\text{rk}(\text{Im } \delta)$  de la imagen del morfismo de conexión  $\delta$  le llamamos rango de Picard de  $X$  y lo denotamos por  $\rho(X)$ .

La inclusión  $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induce una función en los grupos de cohomología:

$$i_* : H^k(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X; \mathbb{C}).$$

Recordemos que (Teorema 1.1.6)

$$H^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

Resulta que la primer clase de Chern  $c_1(L)$  de un haz lineal  $L$  es un elemento del grupo de cohomología de Dolbeault  $H^{1,1}(X)$  [Kob87, II, ec. (2.22)].

El siguiente teorema afirma que el grupo de Picard es un subconjunto de  $H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ . La prueba de la primer parte se encuentra en [Lee24, Teorema 9.59] y de la segunda en [Huy16, Capítulo 1, 3.3].

**Teorema 1.3.8** (Lefschetz sobre (1,1)-clases). *Sea  $X$  una variedad proyectiva suave, entonces se cumple que*

$$\delta : \text{Pic}(X) \rightarrow H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$$

*es suprayectiva. Además, si  $X$  es una superficie K3, entonces*

$$\text{Pic}(X) \cong H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) =: H^{1,1}(X, \mathbb{Z}).$$

Con este teorema, el rango de Picard es  $\rho(X) = rk(H^{1,1}(X, \mathbb{Z}))$ .

**Teorema 1.3.9.** *Si  $X$  es una superficie K3 entonces su rango de Picard es a lo más 20.*

*Demostración.* Se sigue del Teorema 1.3.8 y del Teorema 1.1.15. □

### 1.3.2. Producto de intersección de divisores

En esta subsección supondremos que  $X$  es una superficie proyectiva suave. Definiremos en el Teorema 1.3.11 el producto de intersección entre divisores. Este producto es útil para determinar si dos divisores son linealmente dependientes o no en el grupo de Picard. Además, probamos en el Teorema 1.3.20 que el grupo de Picard de la cuártica de Fermat admite una base representada por rectas.

**Definición 1.3.10.** Consideremos una superficie proyectiva suave  $X$ , dos curvas  $C$  y  $D$  contenidas en  $X$  y un punto  $p \in C \cap D$ . Las curvas  $C$  y  $D$  intersectan transversalmente en  $p$  si las ecuaciones locales  $f, g$  de  $C$  y  $D$  en  $p$  generan al ideal maximal  $m_p$  de  $\mathcal{O}_{X,p}$ .

Se dice que  $C$  y  $D$  intersectan transversalmente si intersectan transversalmente en cada punto  $p \in C \cap D$ .

**Teorema 1.3.11.** *Sea  $X$  una superficie proyectiva suave. Entonces existe un único producto*

$$\begin{aligned} \iota : \text{Div}(X) \times \text{Div}(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (C, D) &\mapsto C.D \end{aligned} \tag{1.15}$$

*tal que:*

1. Si  $C$  y  $D$  son dos curvas no singulares que se intersectan transversalmente, entonces  $C.D$  coincide con  $\#(C \cap D)$ , el número de puntos de  $C \cap D$ .
2.  $C.D = D.C$ ,
3.  $(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$ ,
4. Si  $C_1 \sim C_2$ , entonces  $C_1.D = C_2.D$ .

La demostración de este teorema, así como el lema siguiente se pueden consultar en [Har97, V, Teorema 1.1, Lema 1.2].

**Lema 1.3.12.** *Consideremos dos curvas  $C, D$  en  $X$  no singulares que se intersectan transversalmente. Se cumple que*

$$\#(C \cap D) = \deg_C(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C),$$

en donde el factor de la derecha es el grado del haz lineal  $\mathcal{L}(D)$  restringido a  $C$ .

**Definición 1.3.13.** Al entero  $C.D$  se le conoce como el número de intersección de los divisores  $C$  y  $D$ . En particular, a  $C^2 := C.C$  se le conoce como número de autointersección de  $C$ , en donde  $C^2 = \deg_C(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C)$ .

**Definición 1.3.14.** Consideremos el haz canónico  $\omega_X = \Omega_X^2$  de  $X$ , el cual es un haz lineal sobre  $X$ . Cualquier divisor  $K$  tal que  $\mathcal{O}_X(K) \cong \omega_X$  se llama divisor canónico de  $X$ .

A continuación definimos un haz lineal sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ .

**Definición 1.3.15.** Consideremos el haz tautológico  $T$  de  $\mathbb{P}^n$  :

$$T = \{(p, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in p\}.$$

Este es un haz lineal holomorfo sobre  $\mathbb{P}^n$  [Lee24, Prop. 3.31]. Definimos el haz de hiperplano de  $\mathbb{P}^n$  como el haz dual de  $T$  y lo denotamos por  $H$ .

El producto de intersección (1.15) permite calcular el género geométrico de una curva no singular contenida en una superficie  $X$ . Esto es el contenido de la siguiente proposición. Su prueba se puede consultar en [Har97, V, Prop. 1.5].

**Proposición 1.3.16** (Formúla de adjunción). *Consideremos una curva  $C \subset X$  no singular de género  $g$  y denotemos por  $K$  al divisor canónico de  $X$ . Entonces*

$$C.(C + K) = 2g - 2.$$

**Ejemplo 1.3.17.** Supongamos que  $X \subset \mathbb{P}^3$  es una superficie de grado  $d$ . Entonces el divisor canónico  $K$  de  $X$  es [Lee24, Prop. 4.17]:

$$K = (d - 4)H,$$

en donde  $H$  denota al haz de hiperplano (Definición 1.3.15).

Consideremos una recta  $l \subset X$ . En este caso  $g = 0$  y aplicando la formula de

adjunción obtenemos:

$$\begin{aligned} -2 &= l.l + l.K \\ &= l^2 + (d-4)H.l \\ &= l^2 + d - 4. \end{aligned}$$

Por tanto,  $l^2 = 2 - d$ .

En caso de que  $X$  sea una superficie cuártica suave y  $l, l' \subset X$  sean rectas entonces:

$$l.l' = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ y } l' \text{ son disjuntas,} \\ 1, & \text{si se intersectan en un punto,} \\ -2, & \text{si son iguales.} \end{cases}$$

La siguiente proposición afirma que el grupo de Picard de una superficie  $K3$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^m$ , con  $m$  un entero positivo.

**Proposición 1.3.18.** *El grupo de Picard de una superficie  $K3$  es libre de torsión.*

*Demostración.* Sea  $X$  una superficie  $K3$ . Asumamos que un haz lineal  $L = \mathcal{O}_X(D)$ , con  $D$  un divisor de  $X$ , es un elemento de torsión en  $\text{Pic}(X)$ , entonces  $L^k = \mathcal{O}_X$ , para algún  $k > 0$ .

Usando el isomorfismo  $K_X \cong \omega_X$  y la igualdad  $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$  ( $X$  es regular) en la fórmula de Riemann-Roch obtenemos que

$$\begin{aligned} \chi(X, D) &= \sum_{i=0}^2 (-1)^i h^i(X, D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(D + K_X).D \\ &= 2 + \frac{1}{2}D^2. \end{aligned}$$

Como  $nD = 0$ , entonces

$$\frac{1}{n^2}(nD)^2 = D^2 = 0.$$

Por tanto,

$$\chi(X, D) = 2 \leq h^0(X, D) + h^2(X, D).$$

Por la dualidad de Serre, se cumple

$$2 \leq h^0(X, D) + h^0(X, -D).$$

Se sigue que alguno de  $h^0(X, D)$  o  $h^0(X, -D)$  es positivo. Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $D$  es efectivo.

Consideremos una sección no trivial  $s \in H^0(X, D)$ , entonces  $0 \neq s^n \in H^0(X, nD) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X)$ . Esto implica que  $s^n$  es nunca cero, y por tanto  $s$  es nunca cero, por lo que obtenemos un isomorfismo

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow[\cong]{s} \mathcal{O}_X(D) = L.$$

Concluimos que  $L$  es trivial. □

De la demostración de la proposición anterior sabemos que la característica de Euler de cualquier haz lineal  $L$  sobre una superficie cuártica, que es una superficie  $K3$ , es:

$$\chi(X, L) = 2 + \frac{1}{2}L^2.$$

En particular, si  $L$  está determinado por una recta  $l$ , del Ejemplo 1.3.17 obtenemos que

$$h^0(X, L) - h^1(X, L) + h^2(X, L) = 1.$$

Se cumple además que  $h^0(X, L) = 1$  y, por tanto,  $h^2(X, L) = h^0(X, -L) = 0$ . Esto implica que

$$h^1(X, L) = 0. \tag{1.16}$$

Este cálculo será importante en el Capítulo 3 para estudiar deformaciones de una superficie cuártica y una recta contenida en ella.

La siguiente proposición determina independencia lineal entre divisores usando álgebra lineal. Usaremos este resultado en la Proposición 1.3.20 para dar generadores de  $Pic(S)$ , con  $S$  la cuártica de Fermat.

**Proposición 1.3.19.** *Consideremos  $m$  divisores  $D_1, \dots, D_m$  en una superficie  $X$  suave. Si la matriz de intersección*

$$A = (D_i \cdot D_j)_{i,j=1}^m$$

*es invertible entonces las clases de  $D_i$  en  $Pic(X)$  son linealmente independientes.*

*Demostración.* Por el inciso 4 del Teorema 1.3.11 se sigue que el producto (1.15) induce un homomorfismo de grupos entre  $Pic(X)$  y  $\mathbb{Z}$ . La conclusión es inmediata. □

Finalmente, si  $X = S \subset \mathbb{P}^3$  es la cuártica de Fermat el siguiente teorema es válido.

**Teorema 1.3.20.** *El grupo de Picard,  $Pic(S)$ , de la cuártica de Fermat  $S \subset \mathbb{P}^3$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^{20}$ . En particular,  $S$  es una superficie K3 con rango de Picard maximal.*

*Además, las clases de las siguientes rectas contenidas en  $S$  generan a  $Pic(S)$ .*

$$B = \{L_{00}, L_{11}, L_{22}, L_{33}, T_{01}, T_{12}, T_{23}, T_{02}, T_{03}, T_{13}, L_{01}, L_{02}, L_{03}, L_{10}, \\ L_{20}, T_{10}, R_{00}, R_{01}, R_{02}, R_{10}\}.$$

*Demostración.* Como  $S$  es una superficie K3 sabemos que  $Pic(S) \subset H^{1,1}(S)$  (Teorema 1.3.8), en donde  $h^{1,1}(S) = 20$  (Teorema 1.1.15). Esto implica que  $\rho(S) \leq 20$ .

Ahora consideremos la matriz  $A = (D_i \cdot D_j)$ , en donde  $D_i$  y  $D_j$  son elementos de  $B$ . Con un cálculo directo obtenemos que  $A$  tiene rango 20. Por la Proposición 1.3.19 concluimos que las clases de estas rectas en  $Pic(S)$  son todas linealmente independientes. Por tanto,  $\rho(S) = 20$ .

De la Proposición 1.3.18 sabemos que  $Pic(S)$  es libre de torsión; concluimos que  $Pic(S) \cong \mathbb{Z}^{20}$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Teoría de deformación

En este capítulo introducimos la teoría de deformación para variedades proyectivas definidas sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  con  $\text{char}(k) = 0$ ; la cual es la principal herramienta técnica de esta tesis. Esta teoría estudia el cambio de las propiedades de variedades que están “infinitamente cerca” y se describe en este capítulo en el lenguaje de esquemas. Así que en la Sección 2.1 introducimos conceptos y propiedades básicas sobre estos. En la Sección 2.2 definimos lo que es una deformación de primer orden de una variedad y en la Sección 2.3 introducimos el concepto de deformación encajada, que es una deformación de primer orden dentro de un espacio proyectivo.

El siguiente capítulo está dedicado a ejemplos explícitos sobre cómo aplicar esta teoría al caso de la cuártica de Fermat definida sobre  $\mathbb{C}$ .

### 2.1. Esquemas

La teoría de deformación que estudiaremos en este capítulo utiliza esquemas y en esta sección introducimos conceptos necesarios sobre estos. Asumiremos conocimientos sobre gavillas, por ejemplo [Sha13, Cap. 5, Sec. 2] o [Liu02, Sec. 2.2.2].

Los anillos se consideran conmutativos con identidad.

**Definición 2.1.1.** Un espacio anillado consiste de un espacio topológico  $X$  y una gavilla de anillos  $\mathcal{O}_X$  en  $X$  en donde  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo local, para cada  $x \in X$ ; y es denotado por  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

A la gavilla  $\mathcal{O}_X$  se le conoce como gavilla estructural de  $X$ .

Dados dos abiertos  $\mathcal{U}, V$  con  $\mathcal{U} \subset V$ , a los morfismos de restricción de la gavilla  $\mathcal{O}$  las denotaremos por  $\rho_{\mathcal{U}}^V$ .

**Ejemplo y definición 2.1.2.** Consideremos un anillo  $A$ . Definimos el conjunto

$$\text{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}.$$

Dotamos a este conjunto con la topología de Zariski, definida como la topología cuyos conjuntos cerrados son los siguientes:

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid E \subset \mathfrak{p}\}, \quad E \subset A.$$

El conjunto topológico  $\text{Spec}(A)$  junto con su gavilla estructural [Sha13, Cap. 5, Sec. 2.2], a la que denotamos por  $\mathcal{O}_A$ , es un espacio anillado.

El objetivo de esta sección es definir esquema. Para eso ocupamos las siguientes definiciones.

**Definición 2.1.3.** Un morfismo de espacios anillados  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es una función continua  $\varphi : X \rightarrow Y$  y una colección de homomorfismos

$$\psi_U : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)),$$

para cada conjunto abierto  $U \subset Y$ ; tales que el siguiente diagrama es conmutativo, para cualesquiera abiertos  $U \subset V$  de  $Y$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\rho_{\varphi^{-1}(U)}^{\varphi^{-1}(V)}} & \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)) \\ \psi_V \downarrow & & \downarrow \psi_U \\ \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\rho_U^V} & \mathcal{O}_Y(U) \end{array}$$

Un morfismo de espacios anillados  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es un isomorfismo si existe su inversa. En dicho caso se dice que  $(X, \mathcal{O}_X)$  y  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  son isomorfos. Por simplicidad, escribimos  $\varphi : X \rightarrow Y$  en lugar de  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ .

**Ejemplo 2.1.4.** Una variedad diferenciable  $X$  es un espacio anillado si definimos su gavilla estructural  $\mathcal{O}_X$  como la gavilla de funciones diferenciables.

Además, cualquier función diferenciable  $\varphi : X \rightarrow Y$  define un morfismo de espacios anillados si establecemos

$$\psi_U(f) = \varphi^*(f), \quad \text{para } f \in \mathcal{O}_Y(U).$$

**Definición 2.1.5.** Consideremos dos anillos  $A$  y  $B$ . Un morfismo de espacios anillados  $\varphi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  es local si para cada abierto  $U \subset \text{Spec}(A)$ , cada punto  $x \in \text{Spec}(B)$  con  $\varphi(x) \in U$  y cada  $a \in \mathcal{O}_A(U)$  se cumple que

$$a(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow (\psi_U(a))(x) = 0.$$

Se enuncia a continuación la definición de esquema.

**Definición 2.1.6.** Un esquema es un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  en donde todo punto  $x \in X$  admite una vecindad  $U$  tal que el espacio anillado  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  es isomorfo a  $\text{Spec}(A)$ , en donde  $A$  es un anillo conmutativo con identidad.

Al esquema  $\text{Spec}(A)$  se le dice esquema afín.

**Definición 2.1.7.** Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo local entre los espacios anillados correspondientes.

Si existe un morfismo de esquemas  $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ , entonces  $X$  es llamado un esquema sobre  $A$  o un  $A$ -esquema.

Un morfismo  $\varphi : Y \rightarrow X$  entre  $A$ -esquemas debe satisfacer el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \searrow & & \swarrow \\ & \text{Spec}(A) & \end{array}$$

**Ejemplo y definición 2.1.8.** Consideremos un campo  $k$  algebraicamente cerrado con  $\text{char}(k) = 0$ , y el anillo de polinomios  $k[t]$  en una variable con coeficientes en  $k$ . El anillo  $k[t]/\langle t^2 \rangle$  se conoce como el álgebra de los números duales sobre  $k$ .

A  $D := \text{Spec}(k[t]/\langle t^2 \rangle)$  se le conoce como el esquema de los números duales y consiste de dos puntos: los ideales  $0$  y  $\langle t \rangle$ . El punto  $\langle t \rangle$  se conoce como punto cerrado de  $D$  por ser el único ideal maximal de  $k[t]/\langle t^2 \rangle$ .

Las deformaciones de primer orden de variedades proyectivas serán esquemas sobre los números duales.

**Definición 2.1.9.** Un morfismo de esquemas  $\varphi : Y \rightarrow X$  es un encaje cerrado si todo punto  $x \in X$  tiene una vecindad afín  $U$  tal que  $\varphi^{-1}(U) \subset Y$  es un subesquema afín y el homomorfismo

$$\psi_U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$$

es suprayectivo. En este caso decimos que  $Y$  es un subesquema cerrado de  $X$ .

**Definición 2.1.10.** Consideremos el espacio  $n$  proyectivo  $\mathbb{P}_A^n$  sobre un anillo  $A$  [Sha13, Cap. 5, Ejemplo de Sec. 3.2]. Un esquema que es isomorfo a un subesquema cerrado de  $\mathbb{P}_A^n$  es un esquema proyectivo sobre  $A$ .

A continuación definiremos planitud. De acuerdo a Hartshorne, esta propiedad es la condición técnica que corresponde a la idea intuitiva de una deformación [Har09, pág. 9]. Recordemos que un anillo local es un anillo con un único ideal máximo.

**Definición 2.1.11.** Un módulo  $M$  es plano sobre un anillo  $A$  si para cualquier sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0,$$

el complejo

$$N' \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow N'' \otimes_A M$$

es una sucesión exacta.

Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  es plano si para cada  $x \in X$  el anillo local  $\mathcal{O}_{x,X}$  es plano sobre el anillo local  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ .

## 2.2. Deformaciones de primer orden

En esta sección definiremos lo que es una deformación de primer orden de una variedad proyectiva  $X$ . La teoría de deformación es el estudio infinitesimal de una familia de esquemas  $\mathcal{X}$  parametrizada por un conjunto  $D$  en la vecindad de una fibra especial  $X$ , es decir, nos preguntamos qué propiedades de  $X$  comparte la familia  $\mathcal{X}$  en una vecindad de ésta.

En esta sección trabajamos con el esquema de los números duales  $D = \text{Spec}(k[t]/\langle t^2 \rangle)$  (Ejemplo y definición 2.1.8), en donde  $k$  es un campo algebraicamente cerrado de característica 0. También definimos el morfismo de deformación (Definición 2.2.9) que se usa en el Teorema 2.2.10.

**Definición 2.2.1.** Consideremos un esquema proyectivo  $X$  sobre  $k$ . Una deformación de primer orden de  $X$  parametrizada por  $D$ , a la que también llamaremos deformación de  $X$  sobre  $D$ , es un diagrama cartesiano  $\eta$  de morfismos de esquemas

$$\eta : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s} & D \end{array}$$

en donde el morfismo  $\pi$  es plano y suprayectivo, y  $s \in D$  es el punto cerrado. A  $\mathcal{X}$  le llamamos el esquema total de la deformación y a la deformación  $\eta$  la denotamos por  $(\mathcal{X}, D)$ .

Observemos que siempre existe una deformación trivial, a saber:

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \times D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s} & D \end{array}$$

Ésta es conocida como familia producto. Una deformación de  $X$  sobre  $D$

$$\zeta : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s} & D \end{array}$$

es isomorfa a  $\eta$  si existe un  $D$ -isomorfismo  $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{X} & & \xrightarrow{\phi} & & \mathcal{Y} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & D & & \end{array}$$

Una deformación de  $X$  sobre  $D$  se dice trivial si es isomorfa a la familia producto. Podemos pensar en las clases de isomorfismo de deformaciones de  $X$  sobre  $D$ .

**Definición 2.2.2.** Si  $X$  es un esquema proyectivo suave, definimos

$$\text{Def}(X) := \{\text{deformaciones de primer orden de } X\} / (\text{isomorfismo}).$$

Este conjunto es un grupo con la operación de composición y tiene una relación estrecha con el primer grupo de cohomología  $H^1(X, T_X)$ . Esto es el contenido de la siguiente proposición, cuya demostración se puede consultar en [Ser06, Prop. 1.2.9].

**Proposición 2.2.3.** *Consideremos una variedad proyectiva suave  $X$ . Entonces la siguiente correspondencia es biyectiva:*

$$\kappa : \text{Def}(X) \rightarrow H^1(X, T_X)$$

*y satisface que  $\kappa(\zeta) = 0$  si y sólo si  $\zeta$  es la clase de la deformación trivial.*

La correspondencia  $\kappa$  se conoce como la correspondencia de Kodaira-Spencer.

**Definición 2.2.4.** Dada una deformación de primer orden  $\eta$  de  $X$  sobre  $D$ , a su clase de cohomología  $\kappa(\eta) \in H^1(X, T_X)$  le llamamos la clase de Kodaira-Spencer de  $\eta$ .

### 2.2.1. Deformaciones de un haz lineal

Consideremos una gavilla invertible  $L$  sobre una variedad proyectiva suave  $X$ . En esta subsección definimos deformaciones de primer orden de  $X$  que preservan entera a  $L$ .

**Definición 2.2.5.** Dada una variedad proyectiva suave  $X$  y una gavilla invertible  $L$  sobre  $X$ , una deformación de primer orden del par  $(X, L)$  es un par  $(\eta, \mathcal{L})$ , en donde  $\eta$  es una deformación de primer orden de  $X$  y  $\mathcal{L}$  es una gavilla invertible sobre  $\mathcal{X}$  tal que  $L = \mathcal{L}|_X$ . En este caso diremos que  $L$  extiende a la deformación  $\mathcal{X}$  o que  $\mathcal{X}$  preserva entera a  $L$ .

Surge la pregunta ¿extiende  $L$  a cualquier deformación de  $X$ ? La siguiente proposición muestra que esto es falso y es solución del ejercicio [Har09, Ejercicio 6.7.c)]. Además, muestra un método para determinar si una deformación de primer orden de una superficie proyectiva suave preserva un divisor determinado por una curva.

**Proposición 2.2.6.** *Consideremos la superficie cuártica  $X$  en  $\mathbb{P}_k^3$  dada por  $f = x^4 + y^4 + xz^3 + yw^3$ , la cual contiene a la línea  $Y = \{x = y = 0\}$ . Y consideremos la deformación  $X'$  de  $X$  sobre los números duales  $D$  dada por  $f' = f + tz^2w^2$ . Entonces  $Y$  no se extiende a  $X'$ .*

*Demostración.* Con un cálculo directo mostraremos que el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{ccc} k[x, y, z, w]/(f) & \xrightarrow{\varphi} & k[z, w] \\ x & \mapsto & 0 \\ y & \mapsto & 0 \\ z & \mapsto & z \\ w & \mapsto & w \end{array}$$

correspondiente a la inclusión  $Y \hookrightarrow X$ , no se puede levantar a un homomorfismo

$$k[x, y, z, w, t]/(f', t^2) \xrightarrow{\phi} k[z, w, t]/(t^2)$$

tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
k[x, y, z, w, t]/(f', t^2) & \xrightarrow{\phi} & k[z, w, t]/(t^2) \\
\downarrow t=0 & & \downarrow t=0 \\
k[x, y, z, w]/(f) & \xrightarrow{\varphi} & k[z, w]
\end{array} \tag{2.1}$$

Denotemos por  $R$  a la restricción  $t = 0$ .

Procederemos por contradicción: Suponemos que el diagrama (2.1) conmuta.

Notemos que existen polinomios  $p_i(z, w), r_i(z, w) \in k[z, w, t]/(t^2)$ , con  $i = 1, \dots, 4$ , tales que las imágenes de  $x, y, z, w \in k[x, y, z, w, t]/(f', t^2)$  bajo  $\phi$  se escriben, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= p_1(z, w) + t \cdot r_1(z, w) \\
\phi(y) &= p_2(z, w) + t \cdot r_2(z, w) \\
\phi(z) &= p_3(z, w) + t \cdot r_3(z, w) \\
\phi(w) &= p_4(z, w) + t \cdot r_4(z, w)
\end{aligned}$$

Como el diagrama (2.1) es conmutativo se cumple que

$$0 = R \circ \phi(x) = p_1(z, w).$$

Por tanto,  $\phi(x) = t \cdot r_1(z, w)$  y, análogamente,  $\phi(y) = t \cdot r_2(z, w)$ .

También tenemos que

$$z = R \circ \phi(z) = p_3(z, w),$$

luego,  $\phi(z) = z + t \cdot r_3(z, w)$  y  $\phi(w) = w + t \cdot r_4(z, w)$ .

Ahora consideremos la imagen bajo  $\phi$  de la clase  $\tilde{f} \in k[x, y, z, w, t]/(f', t^2)$  de  $f$ .

Lo anterior implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi(\tilde{f}) &= \phi(x^4 + y^4 + xz^3 + yw^3) \\
&= \phi(x^4) + \phi(y^4) + \phi(xz^3) + \phi(yw^3) \\
&= t \cdot r_1(z, w)z^3 + t \cdot r_2(z, w)w^3 \\
&= t(r_1(z, w)z^3 + r_2(z, w)w^3)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Por otro lado, de la igualdad  $\tilde{f} = -tz^2w^2$  se sigue que:

$$\begin{aligned}
\phi(\tilde{f}) &= -t\phi(z^2)\phi(w^2) \\
&= -t((z + t \cdot r_3(z, w))^2(w + t \cdot r_4(z, w))^2) \\
&= -t(z^2 + 2t \cdot r_3(z, w))(w^2 + 2t \cdot r_4(z, w)) \\
&= -t(z^2w^2 + 2t[z^2r_4(z, w) + w^2r_3(z, w)]) \\
&= -tz^2w^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ya que  $z, w, r_1, r_2 \in k[z, w, t]/(t^2)$  no son múltiplos de  $t$ , se sigue de (2.3) y (2.2) que

$$z^2 w^2 = r_1(z, w)z^3 + r_2(z, w)w^3 \in k[z, w, t]/(t^2),$$

es decir,  $r_1(z, w)$  y  $r_2(z, w)$  son divisibles por  $w^2$  y  $z^2$ , respectivamente. Escribimos  $r'_1(z, w) = \frac{r_1(z, w)}{w^2}$  y  $r'_2(z, w) = \frac{r_2(z, w)}{z^2}$ . Se sigue que

$$1 = r'_1(z, w)z + r'_2(z, w)w.$$

Lo cual no es posible. Concluimos que el homomorfismo  $\phi$  no existe.  $\square$

Si  $X \subset \mathbb{P}^3$  es una superficie suave entonces las curvas que contiene definen divisores. Introducimos la siguiente notación para deformaciones que preservan enteros a estos divisores, la cual será usada en el siguiente capítulo, en donde estudiamos las deformaciones de primer orden de la superficie cuártica de Fermat definida sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definición 2.2.7.** Consideremos una superficie suave  $X \subset \mathbb{P}^3$  y una curva  $C$  contenida en  $X$ , con  $L$  la gavilla invertible determinada por  $C$ , con  $h^1(X, L) = 0$ . Si  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  es cualquier deformación de primer orden de  $(X, L)$ , entonces diremos que  $\mathcal{X}$  es una deformación que preserve entera a la clase de  $C$ .

En general, si  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  es una deformación de  $(X, L)$  entonces el haz lineal  $\mathcal{L}$  restringido a la otra fibra de  $\mathcal{X}$  puede no ser efectivo [LHV23, Obs. 2.4]. En particular, las deformaciones que preservan entera a la clase de un curva  $C$  no necesariamente preservan a la curva  $C$ .

Se tienen las siguientes contenciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Deformaciones de} \\ (X, L) \text{ que mantienen} \\ \text{una sección de } L \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{Deformaciones de} \\ (X, L) \end{array} \right\} \subset \left\{ \text{Deformaciones de } X \right\}$$

La hipótesis en la definición anterior sobre el haz lineal  $L$  de que  $h^1(X, L) = 0$  garantiza que todas las secciones de  $L$  también se extiendan a una deformación  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  de  $(X, L)$  [Ser06, Cor. 3.3.15]. Un ejemplo importante de esto es considerar un haz lineal  $L$  determinado por una recta  $l$  contenida en una superficie cuártica  $X \subset \mathbb{P}^3$ . Del cálculo (1.16) hecho en la Sección 1.3 sabemos que  $h^1(X, L) = 0$ . Por tanto, las secciones de  $L$  se extienden a una deformación  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  de  $(X, L)$ .

**Definición 2.2.8.** Dos deformaciones  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  y  $(\mathcal{X}', \mathcal{L}')$  de  $(X, L)$  son isomorfas si existe un isomorfismo de deformaciones  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  y un isomorfismo de gavillas  $\mathcal{L} \rightarrow f^* \mathcal{L}'$ .

Introducimos ahora el morfismo de deformación, el cual es la principal herramienta del Capítulo 3.

**Definición 2.2.9.** Consideremos una variedad proyectiva suave  $X$ . El morfismo de deformación de  $X$

$$H^1(X, T_X) \times H^1(X, \Omega_X) \rightarrow H^{0,2}(X). \quad (2.4)$$

está definido como la composición del producto cup

$$H^1(X, T_X) \times H^1(X, \Omega_X) \xrightarrow{\cup} H^2(X, T_X \otimes \Omega_X)$$

con el siguiente morfismo inducido por el producto dual  $T_X \otimes \Omega_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  en cohomología:

$$H^2(X, T_X \otimes \Omega_X) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{0,2}(X).$$

Recordemos que a una gavilla invertible  $L$  sobre  $X$  se le asocia su primera clase de Chern  $\delta(L) \in H^{1,1}(X) \cong H^1(X, \Omega_X)$  y a una deformación  $\eta$  de primer orden de  $X$  se le asocia su clase de Kodaira-Spencer  $\kappa(\eta) \in H^1(X, T_X)$ . El siguiente teorema da un criterio para determinar si una deformación preserva entera a una gavilla invertible. Se puede consultar la demostración en [Ser06, Teorema 3.3.11]

**Teorema 2.2.10.** *Consideremos una variedad proyectiva suave  $X$  y una gavilla invertible  $L$  sobre  $X$ . Entonces  $L$  se extiende a una deformación de primer orden  $\eta$  de  $X$  si y sólo si*

$$\kappa(\eta) \cdot \delta(L) = 0,$$

en donde  $\cdot$  es del morfismo de deformación (2.4).

La siguiente es una observación importante ya que determina la dimensión del conjunto de deformaciones que preservan entero a un haz lineal sobre una superficie  $K3$  (Definición 1.1.13).

**Observación 2.2.11.** Sea  $X$  una superficie  $K3$ . Usando los isomorfismos (Teorema 1.1.5)

$$H^2(X, T_X) \cong H^2(X, \Omega_X^0) \cong H^{0,2}(X)$$

y el hecho de que  $h^{0,2} = 1$  (Teorema 1.1.15) obtenemos que el morfismo de deformación (2.4) es:

$$H^1(X, T_X) \times H^1(X, \Omega_X) \rightarrow H^{0,2}(X) \cong \mathbb{C}.$$

Entonces el morfismo

$$H^1(X, T_X) \xrightarrow{\cdot \delta(L)} H^2(X, \mathcal{O}_X) \quad (2.5)$$

es suprayectivo para cualquier haz lineal no trivial  $L$  sobre  $X$ .

También se cumple que  $T_X \cong \Omega_X$  (Proposición 1.1.14), por tanto  $h^1(X, T_X) = h^1(X, \Omega_X) = h^{1,1} = 20$ . Como las deformaciones que preservan entera a  $L$  están determinadas por el kernel del morfismo (2.5), concluimos que las deformaciones de primer orden de  $X$  que preservan entera a  $L$  forman un subespacio de  $H^1(X, T_X)$  de dimensión 19.

Recordemos que la cuártica de Fermat es una superficie  $K3$ . El siguiente capítulo contiene cálculos explícitos de este subespacio de dimensión 19 cuando  $X$  es la cuártica de Fermat y consideramos varias curvas contenidas en ella.

## 2.3. Deformaciones encajadas

En las deformaciones estudiadas en la sección anterior no se puso ninguna restricción sobre el esquema total  $\mathcal{X}$ . En esta sección estudiamos las deformaciones cuyo esquema total  $\mathcal{X}$  yace en un ambiente fijo. En particular, describimos las deformaciones de una superficie suave  $X \subset \mathbb{P}^3$  que están encajadas en  $\mathbb{P}^3$ .

**Definición 2.3.1.** Dado un encaje cerrado  $X \subset Y$  de esquemas suaves, una familia de deformación de primer orden de  $X$  en  $Y$  es un diagrama cartesiano  $\eta$  de morfismos de esquemas

$$\eta : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{X} \subset Y \times D \\ & \downarrow & \pi \swarrow \\ \text{Spec}(k) & \rightarrow & D \end{array}$$

en donde  $\pi$  es plano y es inducido por la proyección de  $Y \times D$ .

A estas deformaciones también les llamaremos deformaciones de  $X$  en  $Y$ . En particular, cuando  $X$  es una subvariedad suave de  $\mathbb{P}^n$  a las deformaciones de  $X$  en  $\mathbb{P}^n$  les llamaremos deformaciones encajadas.

Al conjunto de deformaciones de  $X$  en  $Y$  las denotaremos por  $Def(X, Y)$ .

El encaje cerrado  $X \subset Y$  induce la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_Y|_X \rightarrow \mathcal{N}_{X|Y} \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

en donde  $\mathcal{N}_{X|Y}$  es la gavilla normal de  $X$  en  $Y$  y es por definición el cokernel de la sucesión (2.6). Esta sucesión, a su vez, induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, T_Y|_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{N}_{X|Y}) \rightarrow H^1(X, T_X) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, T_Y|_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{N}_{X|Y}) \rightarrow H^2(X, T_X) \rightarrow H^2(X, T_Y|_X) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Similar al caso de las deformaciones de primer orden, el conjunto de deformaciones de  $X$  en  $Y$  también se puede identificar con un grupo de cohomología, como se enuncia en la proposición siguiente, cuya demostración se encuentra en [Ser06, Prop. 3.2.1].

**Proposición 2.3.2.** *Dado un encaje cerrado  $X \subset Y$  de esquemas suaves, existe una identificación natural*

$$Def(X, Y) = H^0(X, \mathcal{N}_{X|Y}).$$

Notemos que una deformación de  $X$  en  $Y$  es, en particular, una deformación de primer orden de  $X$ . Definimos el morfismo olvidadizo

$$\Phi : Def(X, Y) \rightarrow Def(X).$$

Surge la pregunta ¿es  $\Phi$  suprayectivo? Veremos que esto depende de la variedad  $X$ , y es el contenido de la siguiente proposición, que puede consultarse en [Ser06, Prop. 3.2.9].

**Proposición 2.3.3.** *Consideremos un encaje cerrado  $X \subset Y$  con  $X$  y  $Y$  variedades proyectivas suaves. Entonces el diferencial de  $\Phi$  coincide con el morfismo de conexión inducido por la sucesión (2.6); es decir:*

$$d\Phi : H^0(X, \mathcal{N}_{X|Y}) \rightarrow H^1(X, T_X).$$

Debido a la Proposición 2.3.3 y a la sucesión exacta larga (2.7) interpretamos al grupo  $H^1(X, T_{Y|X})$  como las obstrucciones de levantar una deformación de primer orden de  $X$  a una deformación de  $X$  en  $Y$ .

grado	$h^0(T_X)$	$h^0(T_{\mathbb{P}^3 X})$	$h^0(\mathcal{N}_X)$	$h^1(T_X)$	$h^1(T_{\mathbb{P}^3 X})$
2	6	15	9	0	0
3	0	15	19	4	0
4	0	15	34	20	1
$\geq 5$	0	15	grande	grande	0

Tabla 2.1: Dimensiones de grupos de cohomología para superficies en  $\mathbb{P}^3$ .

**Ejemplo 2.3.4.** La Tabla 2.1 muestra las dimensiones de ciertos grupos de cohomología para superficies complejas suaves de grado  $d \geq 2$  contenidas en  $\mathbb{P}^3$ . Esta

tabla es una reproducción de la tabla que aparece en [Har09, Ejemplo 20.2.2]. Podemos concluir que el morfismo olvidadizo  $\Phi$  es suprayectivo cuando el grado  $d$  de  $X$  es  $d \neq 4$ .

Notemos que hay deformaciones de primer orden de una superficie cuártica suave que no pueden ser realizadas como deformaciones encajadas en  $\mathbb{P}^3$ ; esto se debe a que existen superficies  $K3$  que no son algebraicas.

En el siguiente capítulo analizaremos con más detalle las deformaciones encajadas de una superficie cuártica.

# Capítulo 3

## Deformación de superficies

En este capítulo aplicaremos la teoría de deformación del capítulo anterior al estudio de superficies. En la Sección 3.1 escribimos el morfismo de deformación (2.4) de una superficie en términos de anillos de polinomios y en la Sección 3.2 calculamos explícitamente la clase en  $H^1(X, \Omega_X)$  de una intersección completa contenida en una cuártica suave  $X \subset \mathbb{P}^3$ . Los ejemplos estarán enfocados en la cuártica de Fermat, la cual es denotada por  $S$ . El resultado más importante del capítulo y de la tesis es el siguiente, el cual está enunciado como Teorema 3.2.7:

**Teorema A.** Denotemos por  $H \in Pic(S)$  a la clase del hiperplano y por  $\mathcal{B}^* \subset Pic(S)$  a un conjunto de 19 clases de rectas contenidas en  $S$ . Si  $\mathcal{B}^* \cup \{H\}$  es linealmente independiente en  $Pic(S)$ , entonces los espacios  $K_l \subset H^1(T_S)$ , con  $l \in \mathcal{B}^*$ , se intersectan transversalmente. En particular,

$$\dim \left( \bigcap_{l \in \mathcal{B}^*} K_l \right) = 0.$$

Es decir, estas 19 rectas determinan a  $S$  infinitesimalmente en su espacio moduli.

El espacio  $K_l$  denota al conjunto de deformaciones de primer orden de la cuártica de Fermat que preserva entera a la clase de la recta  $l$  (Definición 2.2.7).

### 3.1. Morfismo de deformación para superficies

En esta sección se escribirá el morfismo de deformación visto en la Sección 2.2 para una superficie contenida en  $\mathbb{P}^3$  en términos de su ideal jacobiano (Teorema 3.1.1). Al anillo de coordenadas homogéneas del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  lo denotamos por  $A := \mathbb{C}[x, y, z, w]$  y al espacio vectorial que consiste de los polinomios homogéneos de grado  $m$  lo denotamos por  $A_m$ . Estos espacios inducen una graduación en  $A$ :

$$A = \bigoplus_{m \geq 1} A_m.$$

Y al conjunto  $A_m$  le llamamos parte graduada de  $A$  de grado  $m$ . Esta graduación se hereda; dado un ideal homogéneo  $I \subset A$  denotamos por  $I_m$  a la parte graduada de grado  $m$ .

Definimos los anillos cocientes

$$R_m := \frac{A_m}{J_m}.$$

Por otro lado, recordemos que el segundo grupo de cohomología  $H^2(X, \mathbb{C})$  se puede escribir como la suma directa  $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ . Además denotamos por  $H_{pr}^{1,1}(X) \subset H^{1,1}(X)$  al espacio de  $(1,1)$ -clases primitivas enteras de  $X$  (Definición 1.1.11). El teorema siguiente se puede consultar en [GMV94, pág. 75] y afirma que estas clases están representadas por un polinomio de grado  $2d - 4$ .

**Teorema 3.1.1.** *Consideremos superficie suave  $X$  de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$  determinada por un polinomio  $F \in A$  y su ideal jacobiano  $J = \langle \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F}{\partial w} \rangle$ . Al restringir el morfismo de deformación (2.4) a  $H_{pr}^{1,1}$  tenemos:*

$$H^1(X, T_X) \otimes H_{pr}^{1,1}(X) \xrightarrow{\phi} H^{2,0}(X).$$

Y éste es el siguiente morfismo de multiplicación:

$$R_d \otimes R_{2d-4} \xrightarrow{\phi} R_{3d-4}. \quad (3.1)$$

Al considerar un elemento  $\lambda \in H_{pr}^{1,1}(X)$ , el espacio de deformaciones de primer orden de  $X$  que preservan entera a la clase  $\lambda$  está dado por el kernel del siguiente morfismo (Teorema 2.2.10):

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, T_X) & \xrightarrow{\phi_\lambda} & H^{2,0}(X) \\ \eta & \longmapsto & \phi(\eta \otimes \lambda), \end{array}$$

O, equivalentemente,

$$\begin{array}{ccc} R_d & \xrightarrow{\phi_\lambda} & R_{3d-4} \\ \eta & \mapsto & \phi(\eta \otimes \lambda), \end{array} \quad (3.2)$$

Para calcular explícitamente este kernel usaremos el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [GMV94, pág. 46].

**Teorema 3.1.2** (Macaulay). *Consideremos una hipersuperficie  $X \subset \mathbb{P}^n$  de grado  $d$  y definamos  $e = (n + 1)(d - 2)$ . Entonces:*

1.  $R_k = 0$  para  $k > e$ ,
2.  $R_e \cong \mathbb{C}$ ,
3. Para  $k \leq e$  el siguiente morfismo multiplicación es no degenerado:

$$\langle, \rangle: R_k \otimes R_{e-k} \rightarrow R_e \cong \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Por el último inciso, la clase  $\lambda \in R_{2d-4}$  está determinada por un subespacio de codimensión uno en  $R_{e-2d+4}$ , a saber, el kernel de:

$$\begin{array}{ccc} \langle \lambda, \rangle: R_{e-2d+4} & \rightarrow & R_e \cong \mathbb{C} \\ p & \mapsto & \lambda \otimes p. \end{array} \quad (3.3')$$

## 3.2. Deformaciones de superficies a lo largo de un divisor

Una intersección completa  $Z = \{G_1 = G_2 = 0\}$  contenida en una superficie  $X \subset \mathbb{P}^3$  define un divisor en  $X$ . Usando los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 calcularemos en esta sección la clase que determina  $Z$  en el espacio  $H^1(X, \Omega_S)$  cuando  $X$  es la cuártica de Fermat y veremos que dicha clase está dada por un polinomio de grado cuatro. La siguiente proposición se puede consultar en [GMV94, pág. 50] y será de gran utilidad para los cálculos de la subsección subsecuente.

**Proposición 3.2.1.** *Consideremos una superficie suave  $X = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$  de grado  $d$  que contenga a la intersección completa  $Z = \{G_1 = G_2 = 0\}$ , con  $a_i = \deg(G_i)$  y sea  $H$  un hiperplano en  $\mathbb{P}^3$ . Definimos la sección de hiperplano  $Z_0 = H \cap X$  y el divisor  $Z_1 = dZ - a_1 a_2 Z_0$ . Se cumple que:*

1. La clase  $\lambda \in H^{1,1}(X)$  determinada por el divisor  $Z_1$  es entera primitiva.

2. Si denotamos por  $J$  al ideal jacobiano de  $F$  y definimos  $F_1, F_2 \in A$  tales que  $F = F_1G_1 + F_2G_2$ , entonces la parte graduada del ideal  $I := \langle G_1, G_2, F_1, F_2 \rangle$  de grado  $2d - 4$  tiene codimensión uno en  $A_{2d-4}$ . En particular,  $I_{2d-4}/J_{2d-4}$  es el kernel de (3.3).

**Notación:** La clase  $\lambda$  determinada por el divisor  $Z_1$  del teorema anterior depende de la intersección completa  $Z$ . Para simplificar notación, a  $\lambda$  le llamaremos la clase de  $Z$  en  $H_{pr}^{1,1}(X)$ . También, al subespacio de  $H^1(X, T_X)$  de clases de Kodaira-Spencer de deformaciones que mantienen entera a  $\lambda$  (Definición 2.2.7) le diremos simplemente el subespacio que mantiene entera a  $Z$  y lo denotaremos por  $K_Z$ .

En el espacio  $\mathbb{P}^3$  tenemos que la constante  $e$  del Teorema 3.1.2 es  $e = 4(d - 2)$ . Para calcular el morfismo (3.1) escogemos  $k = 2(d - 2)$  y usamos el morfismo multiplicación (3.3).

Por la proposición anterior, la clase  $\lambda \in R_{2d-4}$  que define el divisor  $Z$  es la clase de un polinomio homogéneo  $f \notin J_{2d-4}$  de grado  $2d - 4$  cuya clase  $\tilde{f}$  en  $R_{2d-4}$  satisface que  $\langle \tilde{f}; I_{2d-4}/J_{2d-4} \rangle = 0$ , es decir:

$$f \cdot I_{2d-4} \subset J_e. \quad (3.4)$$

El siguiente concepto nos permite reformular esta condición.

**Definición 3.2.2.** Dados dos ideales  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  de  $A$  definimos su ideal cociente como sigue:

$$(\mathcal{J} : \mathcal{I}) := \{p \in A \mid p \cdot \mathcal{I} \subset \mathcal{J}\}.$$

Si denotamos por  $\mathcal{I}_{2d-4}$  y por  $\mathcal{J}_e$  a los ideales en  $A$  generados por  $I_{2d-4}$  y  $J_e$  respectivamente, entonces la condición (3.4) es equivalente a que  $f \in (\mathcal{J}_e : \mathcal{I}_{2d-4})$ . Más aún, como  $\mathbb{C}$ -módulos tenemos la igualdad

$$\mathbb{C} \cdot f = (\mathcal{J}_e : \mathcal{I}_{2d-4})_{2d-4}. \quad (3.5)$$

El kernel de (3.2) es el máximo subespacio  $K$  de  $R_d$  tal que

$$\phi(K \otimes \tilde{f}) = 0,$$

es decir,  $K = \{\tilde{g} \in R_d \mid g \cdot f \in J_{3d-4}\}$ . Con la notación anterior se cumple que

$$K = (J_{3d-4} : \langle f \rangle).$$

Ahora consideremos una superficie  $X \subset \mathbb{P}^3$  de grado  $d = 4$ . Entonces, el morfismo (3.1) es

$$R_4 \otimes R_4 \xrightarrow{\phi} R_8. \quad (3.6)$$

Por otro lado, como  $X$  es una superficie  $K3$  (Teorema 1.1.16) entonces  $H^{2,0}(X) \cong \mathbb{C}$  (Teorema 1.1.15), es decir,  $R_8 \cong \mathbb{C}$  y el morfismo (3.6) es simplemente el morfismo (3.3). Más precisamente, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.3.** *Consideremos una cuártica  $X \subset \mathbb{P}^3$  y una clase  $\lambda \in H_{pr}^{1,1}(X)$  dada por una intersección completa  $Z$ , con el ideal  $I$  definido como en la Proposición 3.2.1. Entonces el espacio vectorial  $I_4/J_4$  es el kernel del morfismo de deformación (3.2) y tiene codimensión uno en  $H^1(X, T_X)$ . Además, existe un polinomio homogéneo  $f \notin J_4$  de grado 4 que satisface la condición (3.5) para  $d = 4$  y cuya clase  $\tilde{f} \in R_4$  cumple que  $\lambda = \tilde{f}$ .*

A continuación mostramos código en *Macaulay2* usado para calcular las clases en  $R_4$  de intersecciones completas contenidas en superficies cuárticas. La primera función calcula el ideal  $I$  de la Proposición 3.2.1. Los datos de entrada son: un polinomio  $F$  de grado 4 y el *Ideal* de una intersección completa contenida en  $Var(F)$ . Denotamos  $P3=QQ[x,y,z,w]$ .

```
giveIdealCodim1= (F,Ideal) ->
{
  f:=map(P3^1,P3^2,matrix{{(gens Ideal)_0_0,(gens Ideal)_1_0}});
  M:=preimage_f(module ideal (F));
  return ideal(M_1_0,M_1_1,(gens Ideal)_0_0,(gens Ideal)_1_0);
}
```

La siguiente función nos da el polinomio  $f$  de la clase  $\lambda$ . Las entradas son el ideal  $I$  obtenido con la función anterior y un polinomio  $F$  de grado cuatro.

```
giveClass = (Ideal, F) ->
{
  J:=ideal singularLocus ideal (F);
  J8:=ideal gens image basis(8,J);
  J4:=ideal gens image basis(4,J);
  I4:=ideal gens image basis (4,Ideal);
  l:=gens quotient(J8,I4);
  m:=rank source l;
  ll:={};
  class:={};
  for i in 0..m-1 do if not isSubset(ideal (l_i_0),J4) and
    (degree l_i_0)_0==4 then ll=join(ll,{l_i_0});
  for i in 0..#ll-1 do if isSubset(ideal (ll_i)*I4,J8) then
    class=join(class,{ll_i});
}
```

```

    return class;
}

```

Tomemos por ejemplo a la cuártica de Fermat  $S$ , es decir:

$$F = x^4 + y^4 + z^4 + w^4.$$

Observemos que el ideal jacobiano de  $F$  es  $J = \langle x^3, y^3, z^3, w^3 \rangle$ . Luego,

$$J_4 = \mathbb{C} \cdot x^4 \oplus \mathbb{C} \cdot x^3y \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cdot x^3w \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cdot w^3x \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cdot w^4 \cong \mathbb{C}^{16}.$$

Como  $A_4 \cong \mathbb{C}^{35}$ , tenemos que  $R_4 = A_4/J_4 \cong \mathbb{C}^{19}$ . Esta dimensión coincide con la calculada en la Observación 2.2.11.

En los ejemplos siguientes exhibiremos las clases de dos intersecciones completas  $Z$  contenidas en  $S$ . Usaremos la notación introducida en (1.6) de la Sección 1.2.

**Ejemplo 3.2.4.** Consideremos a  $Z$  como la recta  $L_{00} = \{x - \xi y = z - \xi w = 0\} \subset S$  (recordemos que  $\xi$  satisface  $\xi^4 + 1 = 0$ ).

El ideal  $I$  que determina a las deformaciones de primer orden de  $S$  que preservan entera a  $L_{00}$  (Proposición 3.2.1)) es el siguiente:

$$I = \langle x - \xi y, z - \xi w, x^3 + \xi x^2y + \xi^2xy^2 + \xi^3y^3, z^3 + \xi z^2w + \xi^2zw^2 + \xi^3w^3 \rangle.$$

Con el código anterior obtenemos que el polinomio  $f$  que determina la clase de la recta  $L_{00} \subset S$  en  $R_4$  es:

$$x^2z^2 + \xi xyz^2 + \xi^2y^2z^2 + \xi x^2zw + \xi^2xyzw + \xi^3y^2zw + \xi^2x^2w^2 + \xi^3xyw^2 - y^2w^2.$$

**Ejemplo 3.2.5.** Sea  $Z$  la recta  $T_{01} = \{x - \xi z = y - \xi^3w = 0\}$ . En este caso el ideal  $I$  es el siguiente:

$$I = \langle x - \xi z, y - \xi^3w, x^3 + \xi x^2z + \xi^2xz^2 + \xi^3z^3, y^3 + \xi^3y^2w - \xi^2yw^2 + \xi w^3 \rangle.$$

La primera clase de Chern del divisor primitivo que determina  $T_{01}$  está dada por el siguiente polinomio:

$$x^2y^2 + \xi xy^2z + \xi^2y^2z^2 + \xi^3x^2yw - xyzw - \xi yz^2w - \xi^2x^2w^2 - \xi^3xzw^2 + z^2w^2.$$

**Ejemplo 3.2.6.** Ahora  $Z$  denotará a la cónica residual  $C$  (Definición 1.2.19) determinada por las rectas  $L_{11}$  y  $R_{01}$ . Tenemos que:

$$C = \text{Var}(x - \xi^3y - \xi^2z - \xi w, 2y^2 - \xi^3yz - \xi^2z^2 - 3\xi^2yw - \xi zw - 2w^2).$$

Con el algoritmo anterior obtenemos que el siguiente polinomio determina la clase de  $C$  en  $R_4$ :

$$x^2y^2 + \xi^3x^2yz - \xi xyz^2 + y^2z^2 + \xi xy^2w - \xi x^2zw + \xi^3y^2zw + \\ - \xi^3xz^2w + x^2w^2 + \xi^3xyw^2 - \xi yzw^2 + z^2w^2.$$

### 3.2.1. Deformación de varias rectas y cónicas

Sabemos que si  $X \subset \mathbb{P}^3$  es una superficie cuártica que contiene una recta  $l$ , el espacio de deformaciones algebraicas de primer orden  $K_l$  de  $X$  tales que preservan entera a la clase de  $l$  tiene codimensión uno en  $H^1(X, T_X) \cong \mathbb{C}^{20}$  (Teorema 3.2.3). En esta subsección consideraremos varias rectas contenidas en la cuártica de Fermat  $S$  y mostraremos en el Teorema 3.2.7 que existen 19 cuyos espacios  $K_l$  se intersectan transversalmente en  $H_{pr}^{1,1}(S)$ . En otras palabras, no existen deformaciones de primer orden de  $S$  que preserven enteras a estas rectas a excepción de las que son proyectivamente equivalentes a  $S$ , es decir, deformaciones dadas por automorfismos de  $\mathbb{P}^3$ .

Para un conjunto de intersecciones completas  $\{Z_1, \dots, Z_r\}$  contenidas en una superficie  $X \subset \mathbb{P}^3$  podemos calcular la codimensión de la intersección  $\bigcap_i K_{Z_i}$  con la función en *Macaulay2* que sigue. Los datos de entrada son: una *lista* con los ideales de las intersecciones completas, el grado  $d$  de  $X$  y el polinomio  $F$  que la determina. El resultado es una lista con cada una de las codimensiones en  $A_{2d-4}$  que se obtiene al intersectar los ideales  $I_{2d-4}$  correspondientes a cada  $Z_i$ .

```
giveCodim=(Lista, d,F) ->
{
  I:= new IndexedVariableTable;
  l:={};
  m:=2*d-4;
  N:=binomial(m+3,3);
  n:=#Lista;
  for i in 0..n-1 do I_i= ideal gens image basis (m,giveIdealCodim1(F,
  Lista_i));
  for i in 0..n-1 do I_i=I_i+ideal gens image basis(m+1,ideal vars P3);
  J := ideal(1_P3);
  for i in 0..n-1 do {
    J=intersect(I_i,J);
    l=join(l,{N- # flatten entries gens image basis(m,J)});
  };
}
```

```

    return l;
}

```

Usando este código para la cuártica de Fermat  $S$  y para cualesquiera dos rectas  $l, l' \subset S$  se puede ver que las deformaciones que preservan enteras a ambas rectas están dadas por la intersección de los espacios de codimensión uno  $K_l$  y  $K_{l'}$  correspondientes a cada recta. Obtenemos que la codimensión sube a dos, es decir, las condiciones lineales que imponen dos rectas siempre son independientes en  $H^1(X, T_S)$ .

La dimensión de  $H^1(X, T_S)$  es 20 y  $S$  contiene 48 rectas, por lo que el comportamiento anterior cambia al agregar más rectas. Para estudiar esto, consideremos el conjunto  $\mathcal{B}$  de las 20 rectas exhibidas en el Teorema (1.3.20) cuyas clases en el grupo de Picard,  $Pic(S)$ , son generadores. Recordemos que existen cuatro rectas  $l_1, l_2, l_3, l_4$  que son coplanares y por lo tanto la suma de sus clases es la clase del hiperplano  $H$ .

Definimos  $\mathcal{B}^* := \mathcal{B} \setminus \{l_1\}$ . Aquí usamos la misma notación para las rectas y a sus respectivas clases en  $Pic(S)$ .

El Teorema 1.3.8 establece que  $Pic(S) \cong H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ . Aplicando el código de *Macaulay2* anterior a la base  $\mathcal{B}$  veremos en el siguiente teorema que el grupo  $Pic(S)$  también guarda una relación con el espacio de deformaciones de primer orden  $H^1(T_S)$ . Este teorema es el más importante de la tesis.

**Teorema 3.2.7.** *Denotemos por  $H \in Pic(S)$  a la clase del hiperplano y por  $\mathcal{B}^* \subset Pic(S)$  a un conjunto de 19 clases de rectas contenidas en  $S$ . Si  $\mathcal{B}^* \cup \{H\}$  es linealmente independiente en  $Pic(S)$ , entonces los espacios  $K_l \subset H^1(T_S)$ , con  $l \in \mathcal{B}^*$ , se intersectan transversalmente. En particular,*

$$\dim \left( \bigcap_{l \in \mathcal{B}^*} K_l \right) = 0.$$

*Es decir, estas 19 rectas determinan a  $S$  infinitesimalmente en su espacio moduli.*

*Demostración.* El Teorema 1.3.20 exhibe una base  $\mathbb{Q}$ -lineal de  $Pic(S)$  conformada por veinte rectas, por lo que basta probar el resultado para esta base, la cual se muestra a continuación:

$$\mathcal{B} = \{L_{00}, L_{11}, L_{22}, L_{33}, T_{01}, T_{12}, T_{23}, T_{02}, T_{03}, T_{13}, L_{01}, L_{02}, L_{03}, \\ L_{10}, L_{20}, T_{10}, R_{00}, R_{01}, R_{02}, R_{10}\}.$$

Escogemos

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \setminus \{L_{00}\}.$$

Aplicando el código de *Macaulay2* de esta subsección obtenemos que las codimensiones aumentan de uno en uno hasta llegar a codimensión 19.

Finalmente, recordemos que el espacio de deformaciones encajadas en  $\mathbb{P}^3$  de una cuártica suave en  $\mathbb{P}^3$  tiene dimensión 19. Con esto se prueba el resultado.  $\square$

Del Teorema 3.2.7 se sigue de inmediato el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.8.** *Consideremos las rectas  $l_1, \dots, l_r \subset S$ . La igualdad*

$$\text{codim} \left( \left( \bigcap_{i=1}^{r-1} K_{l_i} \right) \cap K_{l_r} \right) = \text{codim} \left( \bigcap_{i=1}^{r-1} K_{l_i} \right) + 1$$

*se satisface si y sólo si la clase de la recta  $l_r$  en el grupo  $\text{Pic}(S)$  no es una combinación lineal de las clases de  $l_1, \dots, l_{r-1}$  y además  $l_r$  no yace en un plano que contiene a tres rectas  $l_i$ , con  $i < r$ .*

**Observación 3.2.9.** La intersección de los espacios  $K_{l_i}$  solo depende de la independencia o dependencia lineal de las rectas  $l_i$  y la clase del hiperplano.

En la Sección 3.2 vimos que el subespacio de  $H^1(T_S)$  que preserva entera a la clase dada por una cónica  $C$  contenida en  $S$ , al que denotaremos por  $K_C$ , es de codimensión uno, pues  $C$  es una intersección completa contenida en  $S$ . Podemos aplicar la función *giveCodim* anterior; el resultado análogo al Teorema 3.2.7 con cónicas residuales (Definición 1.2.19) es el contenido del siguiente teorema.

**Teorema 3.2.10.** *La codimensión del subespacio de  $H^1(T_S)$  que preserva enteras a las clases de todas las cónicas residuales de  $S$  es 18, es decir:*

$$\text{codim} \left( \bigcap_{C \text{ residual}} K_C \right) = 18.$$

*Demostración.* La prueba es un cálculo directo.  $\square$

**Observación 3.2.11.** El Teorema 3.2.7 indica que podemos determinar la clase de isomorfismo de la cuártica de Fermat con rectas: basta con considerar el espacio

$$\bigcap_{l \text{ recta de } S} K_l.$$

Por el Teorema 3.2.10 concluimos que, en cambio, las cónicas residuales no determinan la clase de isomorfismo de  $S$ .

# Bibliografía

- [GMV94] Mark L. Green, Jacob P. Murre y Claire Voisin. *Algebraic Cycles and Hodge Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. ISBN: 3-540-58692-X.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry: a first course*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag New York, Inc., 1992. ISBN: 9780387977164.
- [Har97] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1997. ISBN: 9780387902449.
- [Har09] Robin Hartshorne. *Deformation Theory*. Springer New York, 2009. ISBN: 978-1-4614-2520-5. DOI: 10.1007/978-1-4419-1596-2.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401.
- [Huy16] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 surfaces*. Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781107153042.
- [Kob87] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Publications of the Mathematical Society of Japan. Princeton University Press, 1987. ISBN: 9781400858682.
- [LHV23] Manuel Leal, César Lozano Huerta y Montserrat Vite. *The Noether-Lefschetz locus of surfaces in  $\mathbb{P}^3$  formed by determinantal surfaces*. 2023. arXiv: 2303.09028.
- [Lee24] John M. Lee. *Introduction to complex manifolds*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2024. ISBN: 9781470477820.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford graduate text in mathematics. Oxford University Press, 2002. ISBN: 0-19-850284-2.
- [Sch58] L. Schläfli. «An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface». En: *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858), págs. 110-120.

- [Ser06] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*. A series of comprehensive studies in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. ISBN: 978-3-540-30608-5.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 2*. Springer, 2013. ISBN: 978-3-642-38009-9.
- [Wei09] A. Weil. *Oeuvres Scientifiques / Collected Papers: Volume 2 (1951-1964)*. Oeuvres Scientifiques: Collected Papers. Springer, 2009. ISBN: 9783540877356.

# Índice

- (p,q)-formas, 8
- autointersección
  - número de, 32
- Chern
  - clase de, 30
- clase
  - primitiva, 10
- clase de un divisor en  $H_{pr}^{1,1}(X)$ , 51
- conjuntos maximales, 19, 20
- cuártica
  - de Fermat, 12
    - rectas de, 13
  - con una línea, 12, 13
  - superficie, 11
- cónica residual, 25, 56
- deformación, 39
  - de  $Y$  en  $X$ , 45
  - trivial, 40
- divisor, 13
  - de Cartier, 28
  - equivalencia lineal, 28
  - principal, 28
- Dolbeault
  - complejo de, 8
  - grupos de cohomología de, 8
  - operador de, 8
- duales
  - números, 38
- encaje cerrado, 38
- espacio anillado, 36
  - morfismo, 37
- espacio de cuárticas, 12
- esquema, 38
  - afín, 38
  - proyectivo, 39
  - sobre  $A$ , 38
  - total, 40
- familia producto, 40
- funciones  $C^\infty$ , 7
- gavilla estructural, 36
- gavilla invertible, 28
- gavilla normal, 45
- grupo
  - simétrico, 15
- grupo de Picard, 55
- gráfica de intersección, 18, 24
- género, 25
- haz
  - canónico, 8, 32
  - cotangente, 7
  - tangente, 7
- Hodge

diamante de, 11  
 números de, 9, 11

ideal cociente, 51  
 ideal jacobiano, 49  
 interpolantes, 21  
 intersección completa, 50

Kodaira-Spencer  
   clase de  $\eta$ , 41  
   correspondencia, 41

Lefschetz  
   Teorema sobre (1,1)-clases, 30

morfismo de deformación, 44, 49  
   kernel, 52  
 morfismo de multiplicación, 49  
 módulo plano, 39

octeto, 21

Picard  
   grupo de, 29

Poincaré  
   dual de una clase, 10  
   dualidad, 10

primitiva  
   clase, 10

rectas alabeadas, 19

Riemann-Roch  
   fórmula, 33

septeto, 21  
 septetos, 20  
 sucesión exponencial, 30