



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Centro de Ciencias Matemáticas - UNAM

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas - UMSNH

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas - UMSNH

**Monodromías del cociclo de Kontsevich-Zorich y grupos
modulares de superficies de tipo infinito**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ROGELIO NIÑO HERNANDEZ

TUTORES:

CARLOS MATHEUS, CMLS - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

y

FERRÁN VALDEZ, CCM - UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

NOÉ BÁRCENAS TORRES, CCM - UNAM

ADOLFO GUILLOT, IMATE - UNAM

DANIEL JUAN PINEDA, CCM - UNAM

Morelia, Michoacán, octubre 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Grupos modulares de superficies de tipo infinito	10
1.1. Superficies de tipo infinito	10
1.2. Representaciones topológicas de superficies de tipon infinito y árboles núcleo.	13
1.2.1. Árboles núcleo	13
1.2.2. Árbol núcleo preferido	17
1.3. Aplicaciones cuasiconformes y grupos modulares	19
1.3.1. Aplicaciones cuasiconformes	19
1.3.2. Aplicaciones cuasiconformes en superficies	23
1.3.3. Superficies de Riemann del primer tipo en una superficie de tipo infi- nito S	27
1.3.4. Grupos modulares en superficies	29
1.4. Demostración del Teorema 1	32
1.4.1. Construcción de la estructura de superficie de Riemann para S de tipo infinito y género finito.	32
1.4.2. Numerabilidad del grupo modular	34
2. Monodromías del cociclo de Kontsevich-Zorich	39
2.1. Superficies de traslación	39
2.2. Superficies de Veech y origamis	43
2.2.1. Origamis	49
2.3. Monodromía del cociclo de Kontsevich Zorich	52
2.3.1. Espacio móduli de superficies de traslación	53
2.3.2. Acción de $SL(2, \mathbb{R})$ y conexiones planas	59
2.3.3. Cociclo de Kontsevich-Zorich	61
2.4. Pregunta de P. Sarnak	64
2.5. Herramientas de Grupos Algebraicos.	68
2.6. Radical unipotente de $Sp(V)$	69
2.6.1. Transvecciones	69
2.7. Demostración del Teorema 2	71

Introducción

En este trabajo abordamos dos problemas relacionados con las áreas de superficies de Riemann, grupos modulares, espacios móduli y la teoría de grupos algebraicos.

Superfices topológicas y de Riemann. A lo largo de este trabajo, denotaremos por S a una superficie topológica, es decir, una superficie orientable, de clase C^0 y segundo numerable. Además, sólo consideraremos superficies topológicas sin frontera. Estas superficies se clasifican en dos tipos: de tipo finito y de tipo infinito. Las primeras son aquellas cuyo grupo fundamental es finitamente generado y las segundas poseen grupo fundamental no finitamente generado. En éstas últimas nos concentraremos más en la primera parte de este trabajo. Un ejemplo de una superficie de tipo infinito es la esfera S^2 menos un conjunto numerable con exactamente un punto de acumulación. La característica principal de estas superficies recae en sus diferentes modos de *irse al infinito* (vea la Sección 1.1 para más precisión) a los que llamamos fines.

Denotaremos como R a una estructura de superficie de Riemann en S . Recordemos que cualquier superficie S admite estructuras diferenciables lisas, i.e. de clase C^∞ (Teorema A de [Hat22]), por lo que S admite una estructura Riemanniana y por ende coordenadas isotermas, i.e. una estructura con cambios de coordenadas conformes (vea Apéndice 1 de [Spi99]). Así, S admite estructuras de superficie de Riemann.

Mapping class group de una superficie. Para una superficie S es natural estudiar propiedades del grupo topológico (con la topología compacto-abierta) de homeomorfismos que preservan orientación $\text{Homeo}^+(S)$. Sin embargo, al ser no numerable es difícil de estudiar, por lo que típicamente se considera el *mapping class group*,

$$\text{Map}(S) := \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S),$$

donde $\text{Homeo}_0(S)$ es la componente conexa del homeomorfismo identidad. Para una superficie S de tipo finito, $\text{Map}(S)$ es numerable, finitamente generado por un tipo especial de homeomorfismos llamados giros de Dehn (vea la Definición 1.3.14) y finitamente presentado (vea Sección 4.3 y 5.2 de [FM12]). Si la superficie S es de tipo infinito, entonces $\text{Map}(S)$ es no numerable (homeomorfo a los irracionales), no es compactamente generado¹ y no es localmente compacto (Teorema 4.2 de [AV20]). Por lo que, el estudio de $\text{Map}(S)$ de tipo infinito

¹Ello significa que $\text{Map}(S)$ es algebraicamente generado por un subgrupo compacto.

frente a $\text{Map}(S)$ de tipo finito es más difícil. En este trabajo nos interesan los subgrupos de homeomorfismos cuasiconformes (módulo homotopía) de $\text{Map}(S)$.

Grupo modular de una superficie S . Fijemos una superficie R en S . Un homeomorfismo cuasiconforme de una estructura de superficie de Riemann R es un homeomorfismo $g : R \rightarrow R$ (que preserva orientación) que deja *casi invariantes* los ángulos entre los vectores tangentes en (casi) todo punto p de R (vea la Sección 1.3 para definiciones más precisas). Al grupo de homeomorfismos cuasiconformes de la superficie R lo denotamos como $QC^+(R)$. Como es subgrupo de $\text{Homeo}^+(S)$, $QC^+(R)$ tiene la topología de subespacio. El grupo modular de una superficie R en S es

$$\text{Mod}(R) := QC^+(R)/QC_0(R),$$

donde $QC_0(R)$ es la componente conexa de la identidad de $QC^+(R)$. Podemos considerar a $\text{Mod}(R)$ como un subgrupo de $\text{Map}(S)$ mediante la homomorfismo inyectivo

$$\begin{aligned} i : \text{Mod}(R) &\rightarrow \text{Map}(S), \\ [h]_R &\rightarrow [h]_S. \end{aligned}$$

Si S es de tipo finito, entonces para cualquier superficie elegida R en S , $\text{Mod}(R)$ es isomorfo a $\text{Map}(S)$ (vea el Teorema 1.3.28). Lo anterior contrasta fuertemente cuando S es de tipo infinito:

- Para toda superficie R en S existen homeomorfismos que no pueden ser realizados de manera cuasiconforme (Proposición 1.3.30).
- Hay estructuras de superficie de Riemann R y R' en S , tal que $\text{Mod}(R)$ no es isomorfo a $\text{Mod}(R')$.
- Existe al menos una superficie R en S cuyo $\text{Mod}(R)$ es no numerable (Proposición 1.3.32).

En contraste con el último punto, K. Matsuzaki [Mat04] fue el primero en dar un ejemplo de una superficie R en $S = \mathbb{S}^2 \setminus C$, con C un conjunto de Cantor, con $\text{Mod}(R)$ numerable. En vista del trabajo de K. Matsuzaki es natural preguntarse:

Pregunta 1. *¿Existirá para toda superficie de tipo infinito alguna superficie de Riemann en ella, tal que el grupo modular sea numerable?*

La anterior cuestión también viene motivada por la pregunta de Y. Chandran, P. Pattel y N. Vlamis (pregunta 3.5 de [CPV21])

Pregunta 2. *¿Cómo $\text{Mod}(R)$ se encaja en $\text{Map}(S)$?*

El primer resultado del presente trabajo da respuesta parcial a las dos preguntas anteriores.

Teorema 1. *(Teorema 1 de [Niñ23]) Para toda superficie de tipo infinito (sin frontera) S de género finito existe al menos una superficie R en S , tal que $\text{Mod}(R)$ es numerable.*

La pregunta 2 se contesta parcialmente mediante la afirmación:

- El grupo $\text{Mod}(R) \cap \text{PMap}(S)$ es un conjunto denso en $\text{PMap}(S)$.

Donde, $\text{PMap}(S)$ es el subgrupo de $\text{Map}(S)$ que deja fijos los fines de S . Según el Teorema 4 de [PV18] la cerradura del grupo de giros de Dehn es densa en $\text{PMap}(S)$ para las superficies consideradas en el Teorema 1. Nuestra construcción de la superficie R en S en el Teorema 1 nos permite concluir que podemos aproximar todo giro de Dehn en S por elementos de $\text{Mod}(R)$.

Idea de la demostración del Teorema 1. La estrategia sigue de cerca la de K. Matsuzaki [Mat04]. Puede resumirse aproximadamente de la siguiente manera. Utilizando la noción de un árbol núcleo definido por J. Bavard y A. Walker [BW23], le otorgamos a S una descomposición conveniente en pantalones que se utilizará para construir una superficie de Riemann R en S . La superficie R viene con una sucesión de subsuperficies de Riemann de tipo finito $\{R_n\}$ que satura a S . La sucesión $\{R_n\}$ tiene la siguiente propiedad crucial: existe un N tal que para cada $K \geq N$ y todo $n \geq K$ todos los elementos K -cuasiconformes en $\text{Mod}(R)$ dejan a R_n invariante módulo homotopía libre. Lo anterior nos permite definir un mapeo de restricción

$$\begin{aligned} \Psi_n : \text{Mod}(R)_n &\rightarrow \text{Mod}(R_n), \\ [h]_R &\rightarrow [h|_{R_n}]. \end{aligned}$$

Donde $\text{Mod}(R)_n$ es el conjunto de clases de equivalencia de homeomorfismos con un representante n -cuasiconforme de R y $\text{Mod}(R_n)$, es el grupo numerable de homeomorfismos cuasiconformes de R_n módulo homotopía. Demostramos la numerabilidad de $\text{Mod}(R)$ mostrando la inyectividad de Ψ_n .

Una dificultad en el trabajo de K. Matsuzaki y en el de nosotros reside en que necesitamos que la superficie de Riemann R sea de primer tipo en el sentido de la geometría hiperbólica. Si R es de segundo tipo entonces $\text{Mod}(R)$ es no numerable. Gracias al trabajo de A. Basmajian y D. Šarić [BŠ19] una superficie S siempre admite una superficie R de primer tipo (vea la Sección 1.3.3), por lo que, esta dificultad se ve superada. Otra dificultad es construir una saturación adecuada $\{R_n\}$ que nos permita concluir. Para ello usamos una descomposición en pantalones conveniente de S , obtenida a partir de un árbol núcleo particular (vea el Lema 1.2.5).

Aún queda una cuestión importante,

¿Toda superficie S con género infinito admite una superficie R con grupo modular numerable?

La construcción que seguimos para el caso de género finito parece no ser suficiente para concluir en el caso de género infinito. Por lo que, otras técnicas serían necesarias. Sería sorprendente que ninguna superficie con género infinito admitiera una superficie R con $\text{Mod}(R)$ numerable. Otra cuestión es si existen otras formas, aparte de la que aquí presentamos, de construir grupos modulares numerables.

Superficies de traslación. El segundo problema a tratar está en el área de superficies de traslación con una relación con la teoría de grupos algebraicos. En esta segunda parte del trabajo consideraremos superficies topológicas compactas. Una superficie de traslación M en S es un cociente de un polígono cuyos lados opuestos son identificados por traslaciones. Equivalentemente, M es una superficie de Riemann con una 1-forma holomorfa no idénticamente cero (vea el Teorema 2.1.1 para definiciones precisas y equivalentes). Las superficies compactas orientables de género g son superficies de traslación; recordemos la representación poligonal de $4g$ lados de una tal superficie. La particularidad de una superficie de traslación M es que, hay un número finito de puntos $\Sigma \subset M$, donde $M \setminus \Sigma$ es localmente isométrica al plano (con la métrica euclidiana) y en los puntos de Σ , M es localmente un espacio cubriente ramificado de grado finito al disco. Los puntos de Σ se les llama singularidades cónicas, que son vértices del polígono cocientado o los ceros de la 1-forma holomorfa. Para una introducción más amplia de la teoría vea los textos introductorios [FM14] y [AM24].

Grupos aritméticos y delgados en el sentido de P. Sarnak. De acuerdo con P. Sarnak [Sar14] un subgrupo discreto (con elementos enteros) $\Gamma \subset \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ con cerradura de Zariski $\text{Zcl}(\Gamma)$ en $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ se llama *aritmético*, resp., *delgado* si el índice de Γ en $\text{Zcl}(\Gamma)(\mathbb{Z})$ es finito, resp. infinito. Ejemplos de grupos aritméticos son grupos de índice finito de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, por el Teorema de densidad de A. Borel. En general, las retículas de grupos algebraicos son grupos aritméticos en el sentido de P. Sarnak. Por otro lado, según E. Fuchs y I. Rivin [FR16] los grupos delgados son la norma más que la excepción, más precisamente demuestran que el subgrupo *genérico* (de acuerdo a su definición) generado por dos elementos en $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ es delgado. En la teoría de números hay un mayor interés por los grupos delgados, porque tienen *propiedades aritméticas*, no es fácil mostrar que un grupo es delgado y no han sido muy estudiados. Vea [Sar14; Kon+19] para más ejemplos de grupos delgados en otras áreas y sus semejanzas con los grupos aritméticos. Por lo anterior, varios autores se han interesado en encontrar grupos delgados y aritméticos en contextos geométricos. Por ejemplo, en los grupos de monodromía de ecuaciones diferenciales hipergeométricas en $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, 1, \infty\}$ se han encontrado familias que tienen monodromía aritmética o delgada [FF21; SV14; Sin15]. El contexto geométrico de nuestro interés son las superficies de traslación teseladas por cuadrados.

Superficies teseladas por cuadrados u origamis. En el presente trabajo nos interesan un tipo particular de superficies de traslación: las superficies teseladas por cuadrados,

también llamadas origamis o superficies de Veech aritméticas. Un origami M es un cociente de un polígono teselado por cuadrados unitarios cuyos lados se identifican por traslaciones. Equivalentemente, un origami es un espacio cubriente ramificado de M al toro, $f : M \rightarrow \mathbb{T}^2$ (a un solo punto), tal que el halado (o *pullback*) de la 1-forma holomorfa dz en $\mathbb{T}^2$ bajo f es la del origami. Un origami M , siempre tiene asociado un grupo no trivial, el grupo de homeomorfismos afines que preservan orientación $\text{Aff}(M)$. Un elemento de $g \in \text{Aff}(M)$ es un mapeo de M en M que en coordenadas de traslación se ve como un mapeo afín, i.e. es una transformación lineal más una traslación; además g preserva las singularidades cónicas.

Monodromía de Kontsevich-Zorich. La homología de un origami M con coeficientes en $\mathbb{R}$, $H_1(M, \mathbb{R})$, tiene asociado la forma de intersección algebraica (vea el Capítulo 6 de [FM12]), que es simpléctica. Consideramos el grupo de automorfismos simplécticos de $H_1(M, \mathbb{R})$, $\text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R}))$. El grupo $\text{Map}(S)$ actúa de manera simpléctica en $H_1(M, \mathbb{R})$. Por lo que, hay un homomorfismo $\tilde{\rho} : \text{Map}(S) \rightarrow \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R}))$. El grupo $\text{Aff}(M)$ es un subgrupo de $\text{Map}(S)$ cuando el género M es mayor a 1 (Proposición 2.3.1). Por lo tanto, tenemos un homomorfismo

$$\rho : \text{Aff}(M) \rightarrow \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R})).$$

El grupo $\rho(\text{Aff}(M))$ tiene dos subespacios simplécticos invariantes en la homología. Uno de ellos lo denotamos como $H_1^{(0)}$, que consiste en las clases de homología del kernel del mapeo lineal $f^* : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, inducido por el cubriente ramificado f . El ortogonal simpléctico a $H_1^{(0)}$ es el subespacio tautológico, H_1^{st} . El grupo $\text{Aff}(M)$ siempre actúa de manera aritmética (en el sentido de P. Sarnak) en H_1^{st} , por lo que el interés es en el subespacio simpléctico $H_1^{(0)}$. La monodromía de Kontsevich-Zorich (KZ) es

$$\rho(\text{Aff}(M))|_{H_1^{(0)}} \subset \text{Sp}(H_1^{(0)}) \approx \text{Sp}(2g - 2, \mathbb{R}).$$

Es un grupo discreto con elementos enteros por lo que es pertinente la definición de aritmetidad/delgadez de P. Sarnak para la monodromía del cociclo de KZ.

Monodromías, conexiones planas y exponentes de Lyapunov. El nombre de monodromía está justificado si recordamos que una representación $\phi : \pi_1(\mathcal{N}) \rightarrow \text{GL}(V)$ de un grupo fundamental de una variedad $\mathcal{N}$ es equivalente a un haz plano² en $\mathcal{N}$ con fibra V . El transporte paralelo, proveniente de la conexión plana, alrededor de un punto p en $\mathcal{N}$ da la monodromía ϕ . En el caso de origamis, la representación ρ está ligada al (a veces llamado) haz de Hodge real sobre el espacio móduli de superficies de traslación, $\Omega\mathcal{M}_g$, con fibra $H_1(M, \mathbb{R})$. El haz de Hodge real es plano y con su conexión plana se define el *cociclo de Kontsevich-Zorich*. El cociclo de Kontsevich-Zorich y la monodromía del haz de Hodge real tienen mucha relación; los exponentes de Lyapunov del cociclo de KZ están explicados por la monodromía de KZ [EM15]. Lo anterior es cierto al menos para el caso de origamis. Por ello el nombre de *monodromía del cociclo de Kontsevich-Zorich*. En el caso de origamis

²Esto significa que es un haz vectorial con una conexión plana.

la monodromía es un objeto muy concreto como ya hemos definido. Referimos al lector a la Sección 2.3 para más detalles sobre todo lo anterior.

En el Capítulo 2 de la presente tesis abordamos una pregunta de P. Sarnak:

Pregunta 3. *¿Qué tan frecuentes son las monodromías de Kontsevich-Zorich aritméticas o delgadas?*

Es poco plausible responder la pregunta de P. Sarnak en toda generalidad para cualquier género, por lo tanto, nos enfocamos en el caso de género 3. Para género 2, M. Möller dio un argumento de que los origamis tienen monodromía aritmética (M. Möller nos dio permiso de poner su prueba en el apéndice de [Bon+22]). En género 3, antes de nuestro trabajo solo se conocía un ejemplo aritmético debido a P. Hubert y M. Matheus [HM19]. Siguiendo esta tendencia, respondemos parcialmente la pregunta de P. Sarnak mediante el siguiente resultado:

Teorema 2. *Existen al menos 6 familias infinitas de origamis en género 3 con monodromía de Kontsevich-Zorich aritmética.*

M. Möller usa fuertemente el género 2 para mostrar que $\rho(\text{Aff}(\mathbf{M}))|_{H_1^{(0)}}$ es una retícula. Lamentablemente es difícil generalizar sus argumentos para géneros mayores. P. Hubert y C. Matheus utilizan otras técnicas debidas a Y. Benoist y S. Miquel [BM20]. Sin embargo, sus métodos son difíciles de aplicar a los casos de interés. Por ello, necesitamos adoptar otras técnicas.

Idea de la demostración del Teorema 2. Las familias del Teorema 2 las tomamos del trabajo de C. Matheus-M. Möller-J.C. Yoccoz [MMY14]. Una razón para ello es que las técnicas desarrolladas en [MMY14] nos permiten computar la cerradura de Zariski de la monodromía de KZ en el grupo simpléctico. Junto con sus técnicas y un criterio de Prasad-Rapinchuk (Teorema 2.5.4), logramos mostrar que para una infinidad de los elementos de las familias la cerradura de Zariski de la monodromía de KZ es todo el grupo simpléctico. Para probamos la finitud del índice de las monodromías de KZ utilizamos el Teorema 1.2 de Singh-Venkataramana [SV14] (vea el Teorema 2.5.1). Esencialmente tenemos que mostrar que tres transvecciones C_i , $i = 1, 2, 3$, de $\rho(\text{Aff}(\mathbf{M}))|_{H_1^{(0)}}$ generan un grupo con al menos un elemento no trivial del radical unipotente de $\text{Sp}(\mathbf{V})$, donde $\mathbf{V}$ es un espacio tres dimensional generado por los vectores $\mathbf{v}_i \in H_1^{(0)}$ subyacentes de las transvecciones C_i . Recordemos que una transvección es una transformación lineal que consta de la identidad más un funcional por un vector, i.e. $C(\mathbf{x}) = \text{Id} + \lambda(\mathbf{x})\mathbf{v}$. Como hay que mostrar que hay un elemento no trivial del radical unipotente de $\text{Sp}(\mathbf{V})$ en $\langle C_i \rangle$ tenemos un problema de pertenencia (*membership problem*) en $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$, el cuál no se sabe si es decidible o no, ni mucho menos la complejidad del mismo (vea [Don23]). Aquí reside la dificultad del problema (también de los métodos usados

por P. Hubert y C. Matheus), por lo tanto, mostrar la finitud del índice es un procedimiento totalmente heurístico.

El Teorema 2 es parte de una colaboración más amplia con Etienne Bonnafox, Manuel Kany, Pascal Kutler, Carlos Matheus, Manuel Sedano, Ferrán Valdez y Gabriela Weitze-Schmithüsen. En nuestro trabajo conjunto se encontraron ejemplos de origamis con monodromía aritmética para género 4, algunas familias (ajenas a las que aquí se mencionan) en género 3 y finalmente se detalló el argumento de M. Möller para género 2. Mi contribución a dicha colaboración es el Teorema 2 que corresponde al Teorema 5 en [Bon+22].

Las evidencias proporcionadas por el Teorema 2, además de los recientes resultados de Matheus y Kany [KM24], sugieren que *todos* los origamis tienen monodromía de Kontsevich-Zorich aritmética. Sin embargo, otros métodos deben ser usados, ya que conforme el género sube, es más difícil computar la cerradura de Zariski y además se tiene un problema de pertenencia para $SL(n, \mathbb{Z})$ que puede ser muy difícil de resolver. Para $n = 4$ el problema de pertenencia es indecidible (vea la Sección 3.3 de [Don23]).

Agradecimientos

A mis asesores Carlos Matheus y Ferrán Valdez les tengo un agradecimiento especial. A Matheus por su generosidad matemática y su disposición para la discusión de los problemas aquí mencionados. A Ferrán por su apoyo en todo el doctorado. El doctorado es un vaivén de emociones pero tener un buen asesor hace que esos vaivenes no sean tan abruptos. Difícilmente me imagino con alguna otra persona sin sentirme en el olvido o bajo severa ansiedad. Muchas gracias Ferrán.

A Jesús Muciño le agradezco los comentarios que sin duda han cambiado para bien mi forma de hacer matemáticas.

Agradezco al proyecto PAPIIT IN101422 Teoría Geométrica de grupos y dinámica, a CONAHCYT (beca de doctorado), al Laboratorio Internacional Solomon Lefschetz, al proyecto PAEP (estancias cortas de investigación), al CCM y PCCM por todos los apoyos recibidos para llevar a cabo mi investigación y darla a conocer en diferentes partes del mundo.

Muchas gracias a los sinodales, Jesús Hernández Hernández, Rita Jiménez Rolland, Jesús Muciño y Alberto Verjovsky por sus valiosos comentarios que incrementaron la calidad de la presente tesis.

A mis amigos que también han hecho de este pasaje un lugar agradable para estar. Es difícil hacer amistad pero qué bien se siente cuando se puede llamar a alguien amigo.

Por último y porque lo mejor se deja para el final. Le agradezco a mi familia, a mis papás, que incluye a mis tíos. A mis abuelitos, a mis hermanas, mi hermano y por supuesto mis sobrinos. No se los digo a menudo, pero los quiero tanto. Siempre los llevo en la mente y en el corazón y por eso nunca estoy solo. He sido muy afortunado de que sean mi familia.

Capítulo 1

Grupos modulares de superficies de tipo infinito

Esta es la primera parte de la presente tesis. Daremos los rudimentos necesarios para entender y probar el Teorema 1. En la Sección 1.1 definimos las superficies de tipo infinito, sus espacios de fines y ejemplos de ellas. Posteriormente en la Sección 1.2 presentamos una manera relativamente uniforme sobre cómo pensar topológicamente a las superficies de tipo infinito y su relación con los llamados árboles núcleo. Lo anterior nos permitirá construir las superficies de Riemann que requerimos en el Teorema 1. En la Sección 1.3 presentamos las aplicaciones cuasiconformes, damos diferentes definiciones y ejemplos de ellos en el plano y en superficies de Riemann; también presentamos la noción de grupo modular. Finalmente en la Sección 1.4 presentamos la demostración del Teorema 1.

1.1. Superficies de tipo infinito

Recordemos que una superficie topológica S es de tipo infinito si su grupo fundamental es infinitamente generado. Ejemplos de superficies de tipo infinito se encuentran en la Figura 1.1.

Como puede observarse en los ejemplos de la Figura 1.1, la característica de las superficies de tipo infinito es el modo de *irse al infinito*, representado por los puntos suspensivos en cada caso. Evidentemente no son compactas y las hay de género finito como el caso de las Figuras 1.1a y 1.1c como de género infinito como en las Figuras 1.1b y 1.1d. Estos ejemplos son típicos en la literatura y contrastan fuertemente con sus contrapartes finitas. Por ejemplo, por el Teorema de Uniformización todas las superficies de tipo infinito admiten métricas hiperbólicas, pero no planas ni esféricas. En el caso de las superficies de tipo infinito también hay un teorema de clasificación para ellas, que enunciaremos después de dar los fundamentos para el entendimiento del mismo y dar una idea precisa de lo que significa *irse al infinito*. En lo subsecuente nuestra referencia principal es [AV20], donde el lector podrá encontrar las referencias originales.

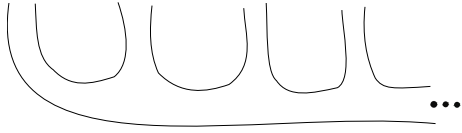


Figura 1.1(a): La Flauta.

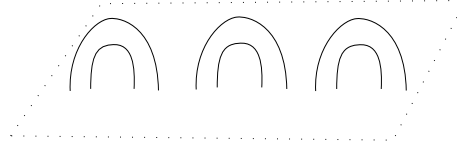


Figura 1.1(b): Monstruo del Lago Ness.

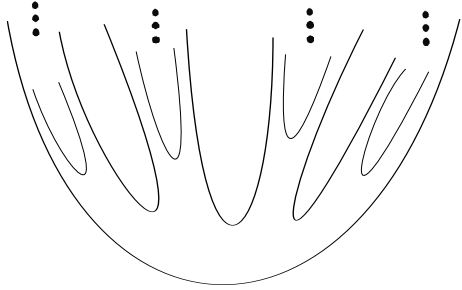


Figura 1.1(c): El árbol de Cantor.

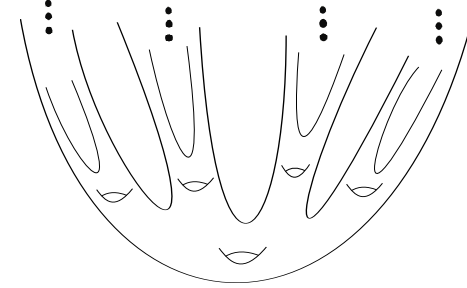


Figura 1.1(d): El árbol floreado de Cantor

Definición 1.1.1 (Sucesiones de salida, vea la Sección 2.1 de [AV20]). *Una sucesión de salida es una sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio topológico X que cumple las siguientes características:*

1. $U_n \subset U_m$ siempre que $n > m$,
2. la frontera de cada U_n es compacta,
3. ningún U_n es relativamente compacto,
4. cualquier compacto K de X intersecta de manera no vacía a lo más un número finito de U_n .

Decimos que $\{V_n\}$ es equivalente a $\{U_n\}$ si existen $M, j_m \in \mathbb{N}$ tal que, o bien $V_m \subset U_{j_m}$ para todo $m > M$, o bien $U_m \subset V_{j_m}$ para todo $m > M$. En otras palabras, dos sucesiones de salida son equivalentes si eventualmente una sucesión contiene a la otra. A la clase de equivalencia de sucesiones de salida la llamamos un fin, que denotamos como e . Al conjunto de fines lo denotamos como $\text{Ends}(X)$.

Notemos que la condición 4 es la que captura la idea de *irse al infinito*, sin ella podríamos estar hablando de sucesiones de abiertos cuyas fronteras se acumulan en alguna región compacta. Un ejemplo de sucesión de salida está en la Figura 1.2. El primer abierto consta de la componente conexa superior al remover la curva naranja, los demás abiertos se describen de manera similar. Las curvas coloreadas son sus fronteras.

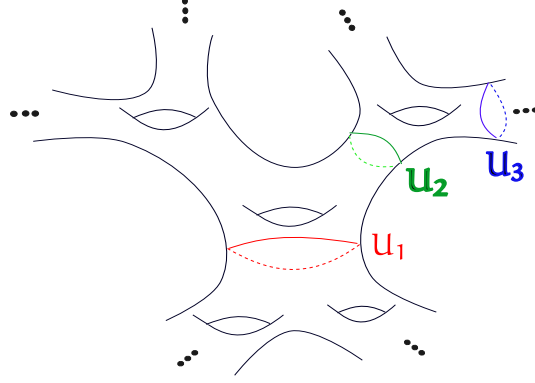


Figura (1.2) Sucesión de salida en el árbol floreado de Cantor.

Al conjunto de fines lo dotamos de la siguiente topología. Seguimos a [AV20]; si $\mathcal{U}$ es abierto con frontera compacta de X denotamos como $\mathcal{U}^*$ al conjunto de fines que eventualmente están contenidos en $\mathcal{U}$. Los conjuntos $\mathcal{U}^*$ forman una base para una topología en $\text{Ends}(X)$. Ahora nos especializamos cuando X es una superficie de tipo infinito que denotamos como S . Tenemos este importante resultado enunciado como el Teorema 2.1 de [AV20].

Teorema 1.1.2 ([Fre44]). *El espacio $\text{Ends}(S)$ es segundo numerable, compacto y totalmente desconexo. En otras palabras, es homeomorfo a un cerrado de Cantor.*

En los ejemplos de la Figura 1.1 también se ilustran los diferentes tipos de fines posibles. Un fin e es acumulado por género si toda sucesión de salida de e tiene género. Un fin planar es un fin no acumulado por género. De estos últimos distinguimos las ponchaduras y los fines que son acumulación de ponchaduras (vea la Flauta en La Figura 1.1). El subespacio de fines acumulados por género los denotamos como $\text{Ends}^g(S)$. Es posible que las superficies de tipo infinito solo tengan género finito o componentes de frontera. El siguiente teorema nos dice que la información de fines, componentes de frontera y género son suficientes para determinar topológicamente a una superficie de tipo infinito.

Teorema 1.1.3 ([Ric63]). *Dos superficies S_1 y S_2 son homeomorfas si y solo si tienen mismo género, misma cantidad de componentes de frontera, $\text{Ends}(S_1)$ es homeomorfo a $\text{Ends}(S_2)$, y $\text{Ends}^g(S)$ es homeomorfo a $\text{Ends}^g(S_2)$ bajo el homeomorfismo entre $\text{Ends}(S_1)$ y $\text{Ends}(S_2)$.*

Aunque el anterior teorema es suficientemente general para clasificar superficies de tipo infinito en adelante cualquier afirmación que se haga será concerniente a superficies orientables sin frontera.

1.2. Representaciones topológicas de superficies de tipo infinito y árboles núcleo.

De acuerdo al Teorema 1.1.3 ambas superficies de la Figura 1.3 y 1.1b son homeomorfas. No es difícil ver que en efecto tienen un solo fin y dado que es de tipo infinito este debe ser acumulado por género. El ejemplo muestra también la versatilidad de representar topológicamente a las superficies de tipo infinito, contrario a lo que pasa en el caso finito. Cuando pensamos en las superficies de tipo finito orientables casi de inmediato nos viene a la mente una suma conexa de toros. En este sentido la noción de árbol núcleo nos ayuda a tener una representación topológica *más uniforme* de las superficies de tipo infinito. Esto tiene como objetivo hacer las veces de una suma conexa de toros como en el caso finito pero también nos da una buena descomposición en pantalones.

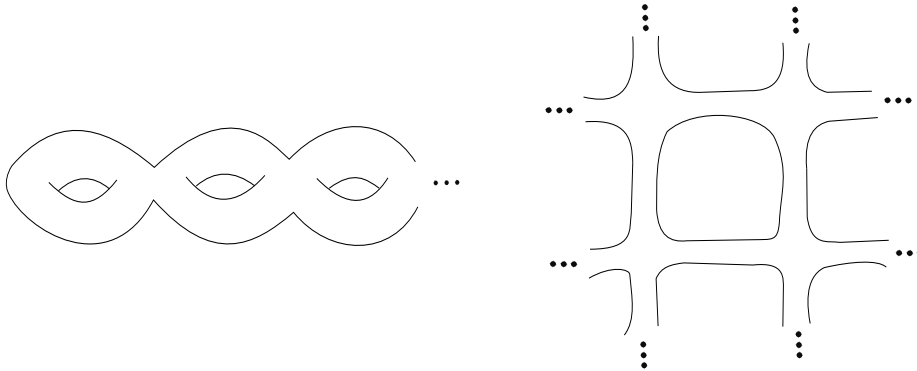


Figura (1.3) Dos representaciones topológicas del monstruo del Lago Ness.

1.2.1. Árboles núcleo

La noción y construcción de árbol núcleo se debe a J. Bavard y A. Walker [BW23], seguiremos de cerca su exposición.

Definición 1.2.1. *Un árbol núcleo, T , es un árbol infinito enraizado que cumple que los vértices solo pueden tener grados 1, 2 o 3, además son marcados o no marcados. Los no marcados solo pueden tener grados 1 o 3. Si la raíz no es marcada tiene grado 3.*

Vea las Figuras 1.6a y 1.14a para ejemplos de árboles núcleo. El marcaje se puede entender como una coloración de los vértices, quedará claro más adelante que los vértices marcados corresponden al género de la superficie. Denotamos como $V(T)$ al conjunto de vértices de T .

Definición 1.2.2 (Camino geodésico). *Considere un árbol T . Fijemos $m \in \{-\infty, 0\}$, si $m = -\infty$ elegimos $n \in \{0, \infty\}$, si $m = 0$ entonces elegimos $0 < n \leq \infty$. Definimos $A_{m,n} := \{j \in \mathbb{Z} : m \leq j \leq n\}$. Un camino geodésico es una biyección $p : A_{m,n} \rightarrow V' \subset V(T)$, tal que*

$\{p(j-1), p(j)\} \in E(T)$ o $\{p(j), p(j+1)\} \in E(T)$, según el dominio de definición de p . También nos referiremos como camino geodésico a la subgráfica de T inducida por p .

Espacio de fines de T . Una sucesión de salida de un árbol núcleo es un camino geodésico con dominio $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ o $\{0, \dots, n\}$ para cierto $n > 0$. En este último caso $p(n)$ es una hoja no marcada. Dos sucesiones de salida con el mismo tipo de dominio (infinito o finito) p y q son equivalentes si existen m, n enteros tal que $p(m+r) = q(n+r)$, para todo $r \geq 0$ donde tenga sentido la igualdad. El conjunto de clases de equivalencia son los fines de T , $\text{Ends}(T)$. Consideramos un subárbol T' de T obtenido a partir de la remoción de algún vértice que no sea una hoja (marcada o no marcada) de T . El abierto $\mathcal{U}(T')$ de $\text{Ends}(T)$ son los fines de T' . Los abiertos de este tipo generan una topología para $\text{Ends}(T)$ lo cual lo convierte en un espacio.

Superficie asociada a un árbol núcleo. Dado un árbol núcleo T podemos construir de él una superficie de tipo infinito usando al árbol como andamiaje para pegar pantalones. Esto tiene como beneficio que la superficie obtenida venga con una multicurva. A continuación, detallamos la construcción, que sigue esencialmente la Sección 2.3 de [BW23].

- **Reemplazo de vértices.** Considere $v \in V(T)$ no marcado. Si v tiene grado 3 entonces reemplazamos v con un par de pantalones. Si v tiene grado cero entonces lo reemplazamos por un disco con frontera ponchado.

Si v está marcado entonces lo reemplazamos con un toro con $\deg(v)$ componentes de frontera. Cada toro tiene su propia descomposición en pantalones como en la Figura 1.4.

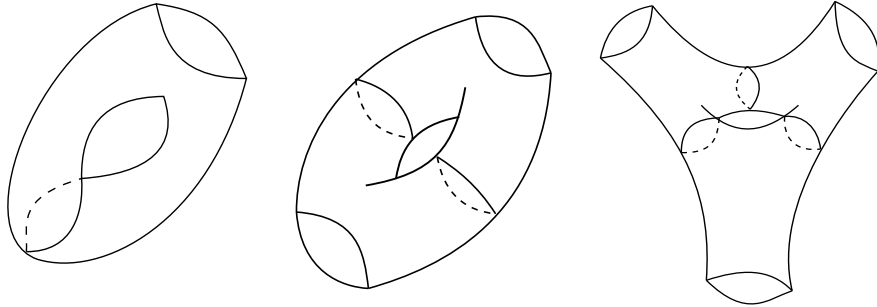


Figura (1.4) Toros con fronteras y descomposición en pantalones. De derecha a izquierda, tenemos un toro con una, dos y tres componentes de frontera.

- **Pegados.** Identificamos un par de componentes de frontera (que vienen de toros, pantalones o de discos ponchados) mediante algún homeomorfismo isotópico a la identidad del círculo si había una arista que conectaba a los vértices reemplazados.

- **Superficie asociada a T .** Una vez hechos los pegados obtenemos la superficie $S(T)$ asociada a T . La Figura 1.5 resume la construcción en una parte de un árbol núcleo.

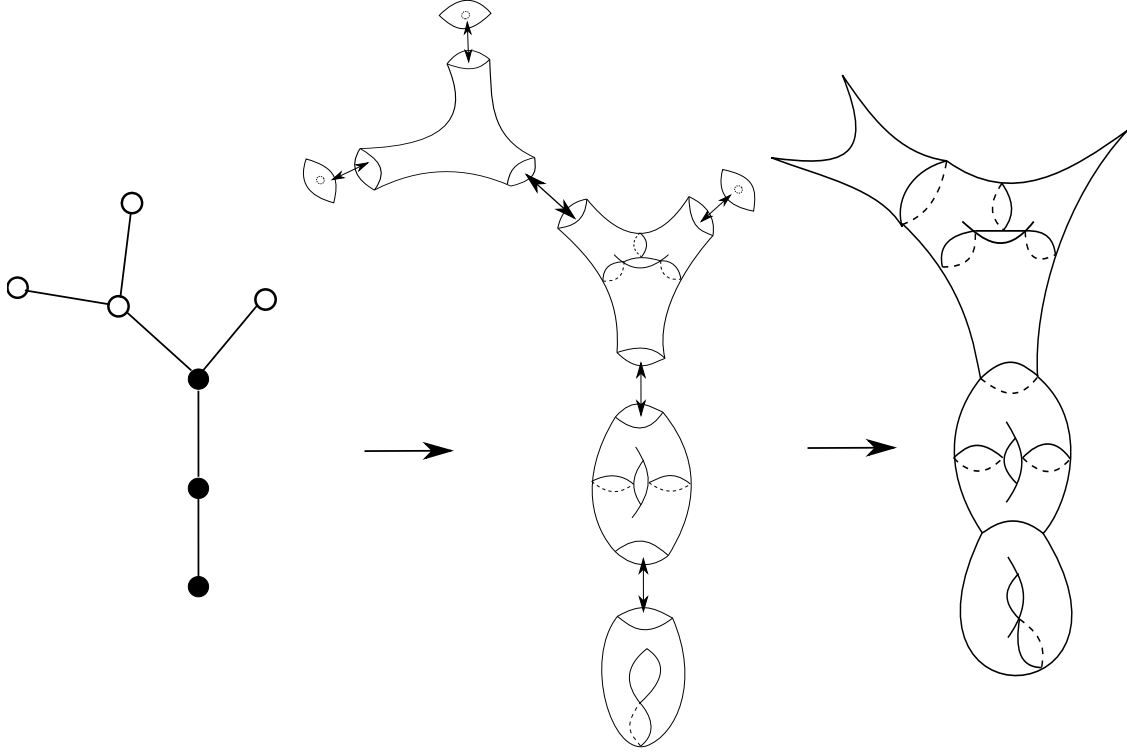


Figura (1.5) De un árbol a una superficie.

En la descomposición en pantalones de $S(T)$ que hemos dado, tenemos pantalones con 0, 1 o 2 ponchaduras. Nos referimos a ellas como pantalones de tipo 0, 1 o 2, respectivamente. Vea las Fig. 1.6a y 1.6b para un ejemplo en género 0 y las Figuras 1.7a y 1.7b para género positivo. En las Figuras mencionadas podemos pensar al círculo como un conjunto de Cantor y sobre de él se resaltan los fines de los árboles o superficies.

Proposición 1.2.3 (Lema 2.3.1 de [BW23]). *Toda superficie de tipo infinito S , tiene un árbol núcleo $T(S)$, de tal forma que $S(T(S))$ es homeomorfa a S .*

Demostración. Comencemos con el árbol infinito trivalente, T_3 . Consideremos tres casos.

- **Caso 1.** Si S tiene un solo fin, según el Teorema 1.1.3, S debe ser homeomorfa al monstruo del Lago Ness, es decir es un fin acumulado por género. Escojamos cualquier vértice de T_3 y cualquier camino geodésico que empiece en el vértice. Removemos el complemento del camino y nos quedamos con una subgráfica infinita con el vértice escogido como raíz. Marcamos todos los vértices del nuevo árbol, T . Es claro bajo el Teorema 1.1.3 que $S(T)$ es homeomorfa a S .

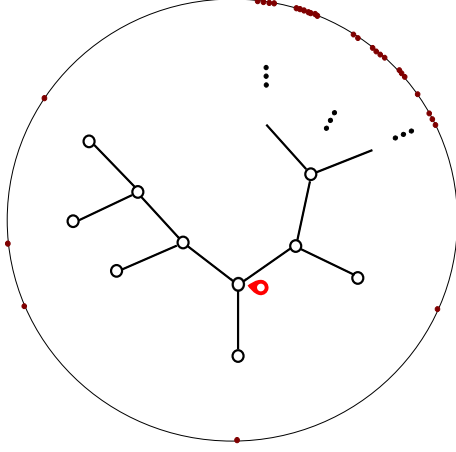


Figura 1.6(a): Árbol núcleo sin ningún vértice marcado. La raíz está señalada con un marcador rojo y los fines están representados en el círculo.

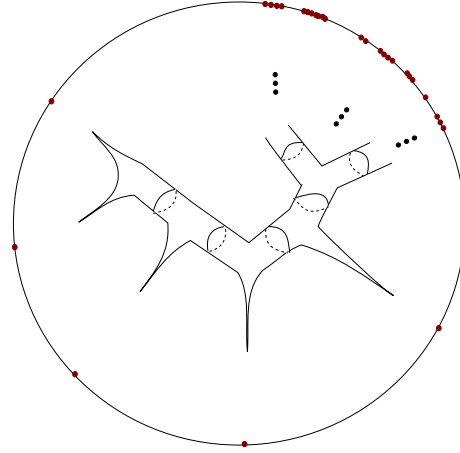


Figura 1.6(b): Superficie asociada al árbol núcleo de la izquierda con género cero.

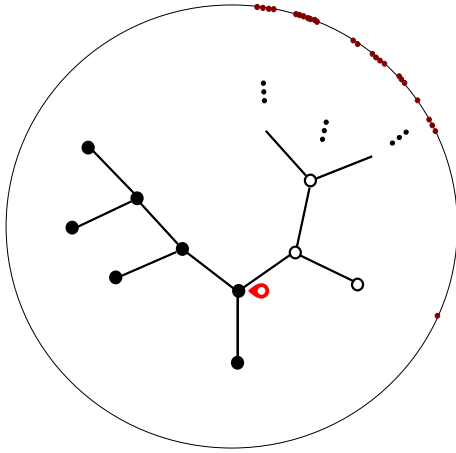


Figura 1.7(a): Árbol núcleo que representa género finito. La raíz está señalada en rojo.

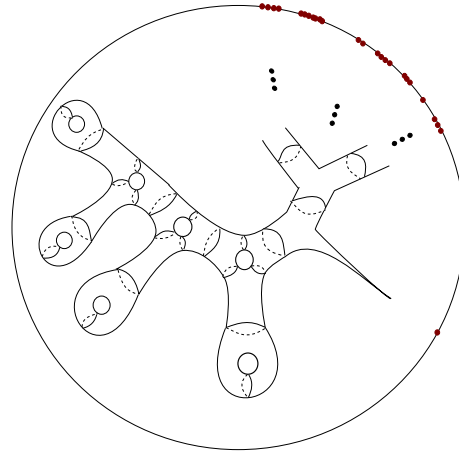


Figura 1.7(b): Superficie asociada al árbol núcleo de la izquierda con género positivo.

- **Caso 2.** Si S tiene dos fines escogamos de T_3 un camino geodésico p con dominio de definición en los enteros. Removamos $T_3 \setminus p$ de T_3 , por lo cual nos queda un árbol T . Tenemos dos subcasos para los tipos de fines que puede tener S . El primer subcaso es que ambos fines de S sean acumulados por género. De ser así, marquemos todos los vértices de T y escogamos cualquier vértice de T , éste será la raíz de T . En el segundo subcaso, S tiene un fin acumulado por género y una ponchadura. En este subcaso escogemos algún camino q de T con dominio de definición en los enteros no negativos y marquemos todos los vértices del camino q . El vértice $q(0)$ será la raíz. Al complemento

$T \setminus q$ lo reemplazamos por una hoja no marcada. Así, en cualquiera de los subcasos, el nuevo árbol, T cumple que $S(T)$ es homeomorfa a S en vista del Teorema 1.1.3.

- **Caso 3.** Si S tiene al menos tres fines, entonces escogemos cualesquiera tres fines de T_3 , llamémosles e_1, e_2, e_3 . Por ser T un árbol tenemos el camino geodésico $p_{1,2}$ que une a e_1 con e_2 y el camino geodésico $p_{1,3}$ que une a e_1 con e_3 . Los caminos $p_{1,2}$ y $p_{1,3}$ tienen un subcamino en común p_Δ con dominio de definición $\mathbb{Z}_{\leq n}$ para un $n \in \mathbb{Z}$. Es decir $p_{1,3} \cup p_{1,2}$ es un triángulo geodésico con vértice $p_\Delta(n)$. El vértice $p_\Delta(n)$ será la raíz del árbol núcleo. Como $\text{Ends}(T_3)$ es homeomorfo a K , el conjunto de Cantor, entonces $\text{Ends}(S)$ es homeomorfo a un cerrado de $\text{Ends}(T_3)$. Por lo que veremos a $\text{Ends}(S)$ como subespacio de $\text{Ends}(T_3)$. A partir de la raíz consideremos los demás caminos geodésicos que van de $p_\Delta(n)$ hacia los demás fines de $\text{Ends}(S)$. Quidemos de T_3 el complemento del subárbol generado por este proceso y denotemos el nuevo árbol como T' . Si $\text{Ends}^g(S)$ es vacío y sin embargo S tiene género entonces marcamos un número finito de vértices de T' que coincida con el género de S . Si $\text{Ends}^g(S)$ no es vacío entonces marcamos todos los vértices de los caminos geodésicos que emanan de la raíz a los fines de $\text{Ends}^g(S)$. Queda la posibilidad de que haya caminos geodésicos infinitos con ningún vértice marcado y cada vértice con grado dos. Los caminos así representan una ponchadura por lo cual los reemplazamos por una hoja no marcada. Al final de este proceso nos queda un árbol T . Por el Teorema 1.1.3 tenemos que $S(T)$ es homeomorfa a S .

□

Observación 1.2.4. *El árbol núcleo de la anterior proposición no es único. La razón es porque en la prueba elegimos los caminos geodésicos.*

1.2.2. Árbol núcleo preferido

Por razones técnicas que se discutirán más adelante, es conveniente trabajar con una clase particular de árboles núcleo. Estos son árboles núcleo que tienen a lo más un *árbol exterior*. Un **árbol exterior** es un subárbol que consta de exactamente tres vértices no marcados y dos de ellos son hojas (vea la Figura 1.8). Los árboles exteriores corresponden a pantalones del tipo 2. Como muestra el siguiente lema, para las superficies que nos interesan siempre podemos encontrar un árbol núcleo de este tipo.

Lema 1.2.5. *Sea S de tipo infinito con $g = 0$ y $\text{Ends}(S)$ teniendo infinitos puntos aislados. Entonces existe un árbol núcleo, $T(S)$, con a lo más un árbol exterior, tal que $S(T(S))$ es homeomorfa a S .*

Demostración. Sea $T(S)$ un árbol núcleo de S . Dado que $T(S)$ tiene un número contable de vértices, hay a lo más un número contable de árboles exteriores. Entonces, hay una enumeración de ellos, denotada por $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Los removeremos de manera que después de la

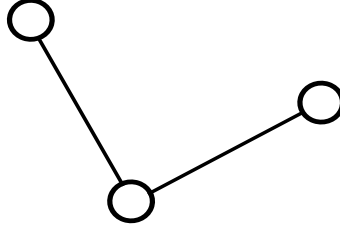


Figura (1.8) Árbol exterior

eliminación, el nuevo árbol núcleo $T'(S)$ tenga la propiedad de que $S(T')$ es homeomorfo a S con a lo más un árbol exterior. Consideremos p_i el camino geodésico desde el vértice de grado 2 de t_i hasta la raíz. Recordemos que, $p_i(j)$ denota los vértices a lo largo del camino con $p_i(0)$ como el vértice inicial y $p_i(m_i)$ como la raíz, donde $j \in \mathbb{N}$. Si $p_i(0)$ es la raíz, no hacemos nada. Denotemos por $T(p_i(j))$ la componente conexa de $T(S) \setminus p_i(j)$ que contiene el segmento geodésico $[p_i(0), p_i(j-1)]$, para $0 < j \leq m_i$. Dado que el camino geodésico p_i es finito, hay un único subárbol finito maximal $T(p_i(l))$ que tiene a t_i como el único árbol exterior numerado. Sustituimos $T(p_i(l))$ por una sola hoja. Observe que $p_i(l)$ no cambia su grado. Si $p_i(l) \neq p_i(m_i)$, entonces $p_i(l)$ no es el vértice de un nuevo árbol exterior; de lo contrario, $T(p_i(l))$ no habría sido maximal. La única posibilidad después de este procedimiento es que ocurra un nuevo árbol exterior en la raíz. Finalmente, dado que para cada t_i reemplazamos finitas hojas con una sola hoja y $\text{Ends}(S)$ tiene infinitos puntos aislados contables, tenemos que $\text{Ends}(T')$ es homeomorfo a $\text{Ends}(T)$. Por lo tanto, $S(T')$ es homeomorfo a $S(T)$. $\square$

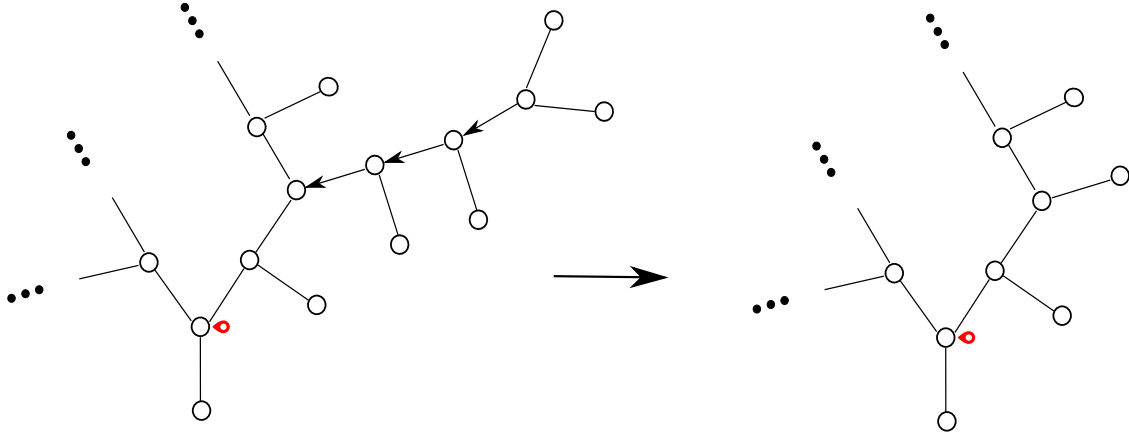


Figura (1.9) Remoción de un subárbol maximal. El camino hecho por las aristas dirigidas representa un subárbol maximal. La raíz está señalada en rojo.

1.3. Aplicaciones cuasiconformes y grupos modulares

En esta sección definiremos homeomorfismos cuasiconformes, daremos varias definiciones equivalentes (sin pruebas) para conveniencia del lector. Parte de la razón de ello es que diferentes definiciones nos permiten decidir si un mapeo es cuasiconforme de manera relativamente sencilla. Otras definiciones nos ayudan a tener una mejor idea conceptual de una aplicación cuasiconforme. Luego de ver ejemplos de homeomorfismos cuasiconformes en el plano, daremos ejemplos de homeomorfismos cuasiconformes en superficies y sobre todo en superficies de tipo infinito. Antes de poder hablar de $\text{Mod}(\mathbb{R})$ necesitamos discutir estructuras hiperbólicas completas de primer tipo en una superficie de tipo infinito. Lo anterior nos permitirá dar diferentes propiedades de $\text{Mod}(\mathbb{R})$ para superficies de tipo finito e infinito. Todo esto nos ayudará a motivar el Teorema 1. Las referencias principales para esta sección son [Ahl06; LV73; Leh87; FM06; Hub06].

1.3.1. Aplicaciones cuasiconformes

Vamos a motivar la definición analítica de un mapeo cuasiconforme. Primero lo haremos para difeomorfismos y luego daremos dos definiciones analíticas equivalentes (sin prueba).

Consideremos un difeomorfismo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ al menos C^1 , que preserva orientación, con $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos del plano. Podemos escribir su derivada en notación compleja en el punto $z = x + iy \in \mathcal{U}$ como $Df_z = \partial_z f + \bar{\partial}_z f$, donde

$$\partial_z f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \bar{\partial}_z f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

La acción de Df_z en un vector tangente v_z en z es $Df_z v_z = \partial_z f v_z + \bar{\partial}_z f \bar{v}_z$. La razón de expresar a Df_z de esta manera es la conveniencia de ver que si v_z tiene norma 1, entonces la imagen pertenece a una elipse; recordando cómo parametrizar una elipse podemos ver este hecho. En otras palabras la derivada de f transforma círculos en elipses. Más aún, la forma en la que hemos escrito Df_z nos permite ver que la longitud del eje mayor de la elipse imagen es $|\partial_z f| + |\bar{\partial}_z f|$ y la longitud del eje menor es $|\partial_z f| - |\bar{\partial}_z f|$. De modo que la excentricidad de la elipse imagen es

$$K_f(z) := \frac{|\partial_z f| + |\bar{\partial}_z f|}{|\partial_z f| - |\bar{\partial}_z f|}. \quad (1.1)$$

La anterior cantidad nos da un modo de cuantificar qué tanto un difeomorfismo se *aleja* de un mapeo conforme. A $K_f(z)$ la llamamos la excentricidad de la elipse tangente a $f(z)$ o simplemente como la distorsión por f en el punto z .

Definición 1.3.1 (Geometro-analítica). *Un difeomorfismo C^1 , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, con $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos del plano es K -cuasiconforme si*

$$K^* := \sup_{z \in \mathcal{U}} K_f(z) \leq K < \infty. \quad (1.2)$$

A K^* , la llamamos la distorsión de f^1 . Notemos que si f es K -cuasiconforme también es K' -cuasiconforme, para $K' > K$. Si f es conforme entonces f es 1-cuasiconforme, el converso es el llamado Lema de Weyl (vea Corolario 24.10 de [For81]). Introduciremos dos definiciones equivalentes y más generales que usan homeomorfismos. La primera definición es una generalización natural de la que dimos mediante difeomorfismos. La segunda definición, sin embargo, es más útil en la práctica y la que más usaremos a lo largo del texto.

Definición 1.3.2 (Definición analítica 1, Teorema 4.1 y 4.4 de [Leh87]). *Un homeomorfismo que preserva orientación $f : U \rightarrow V$ es K -cuasiconforme si es una solución con derivadas (en el sentido distribucional) localmente cuadrado integrables de la ecuación $\partial_z f \mu = \bar{\partial}_z f$. Donde $\mu \in L^\infty(U)$, con $\|\mu\|_\infty < 1$ satisfaciendo (1.2) casi en todas partes (en el sentido de Lebesgue).*

La motivación para la Definición 1.3.2 es por lo siguiente. La expresión de la excentricidad de las elipses infinitesimales (1.1) se puede expresar también como:

$$K_f(z) = \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|}, \quad (1.3)$$

donde

$$\mu_f(z) = \frac{\bar{\partial}_z f}{\partial_z f}. \quad (1.4)$$

A $\mu_f(z)$ se le llama la dilatación compleja y cumple que $|\mu_f| < 1$. Esto es posible porque el jacobiano, $J_f(z) = |\partial_z f|^2 - |\bar{\partial}_z f|^2$, es positivo. Al escribir de este modo la excentricidad podemos pensar al difeomorfismo f como una solución a la ecuación diferencial parcial

$$\partial_z f \mu = \bar{\partial}_z f, \quad (1.5)$$

donde $\mu = \mu_f \in L^\infty(U)$. Las derivadas parciales que cumplen la ecuación anterior son localmente cuadrado integrables. El hecho se sigue de la continuidad del jacobiano y de las condiciones (1.1) y (1.2). Esto nos invita a pensar a una $\mu \in L^\infty(U)$ como un campo de excentricidades dadas sobre U donde nos interesa hallar un homeomorfismo f con derivadas (en el sentido distribucional) localmente cuadrado integrables² que cumplan la ecuación 1.5.

La Definición 1.3.2 nos permite trabajar con funciones más generales que no son diferenciables en todos lados. Sin embargo, en la práctica no es fácil de aplicar, veamos otra definición analítica más asequible.

Función absolutamente continua. Recordamos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si la derivada de f , f' , existe casi en todas partes³, es Lebesgue integrable y cumple el Teorema fundamental del cálculo: $f(x) = f(a) + \int_a^x f' dt$ (dt es la medida de Lebesgue). La función f' también recibe el nombre de derivada débil.

¹Algunas definiciones consideran que $K^* = K$, pero no seguimos ese camino.

²Según L. Ahlfors [Ahl06], es suficiente con pedir que sean localmente integrables.

³Esto significa que es respecto a la medida de Lebesgue.

Consideremos un rectángulo euclidiano Q en $\mathbb{C}$, entonces el rectángulo tiene dos foliaciones lisas; la foliación dada por líneas verticales y la otra por líneas horizontales. Así, si tenemos un mapeo

$$\begin{aligned} f : Q &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)), \end{aligned}$$

podemos restringir a f en las líneas verticales y horizontales. Por ejemplo, tomemos la línea horizontal $\{(x, y_0) \in Q\}$, con y_0 fijo. Tenemos el derecho de preguntar si las funciones

$$(x, y_0) \rightarrow f_1(x, y_0) \text{ y } (x, y_0) \rightarrow f_2(x, y_0)$$

son absolutamente continuas. De manera análoga, obtenemos 2 aplicaciones para una línea vertical. Si las funciones descritas son absolutamente continuas, decimos que f es absolutamente continua en dichas líneas.

Definición 1.3.3 (Homeomorfismo ACL). *Un homeomorfismo g entre U y V abiertos de $\mathbb{C}$ es absolutamente continuo en líneas (ACL) si para todo rectángulo $Q \subset U$, $g|_Q$ es absolutamente continuo para casi todas las rectas verticales y horizontales.*

Si tenemos un homeomorfismo ACL podemos hablar de la derivada total casi en todo punto en su dominio de definición. Del Teorema 4.21 de [EF15] tenemos que si las derivadas parciales existen⁴ y son localmente integrables entonces, la función es absolutamente continua en líneas. El converso también es cierto. Así, en la práctica es más útil la siguiente definición de cuasiconformalidad.

Definición 1.3.4 (Definición analítica 2/ACL, vea [Ahl06; LV73]). *Un homeomorfismo $g : U \rightarrow V$, con U y V abiertos de $\mathbb{C}$, es K -cuasiconforme si g es absolutamente continuo en líneas y si satisface la condición (1.2) casi en todo punto de U , en el sentido de Lebesgue.*

Veamos ahora una definición más geométrica que será igual de útil que la Definición 1.3.1 para pensar de manera intuitiva en aplicaciones cuasiconformes en superficies.

Cuadriláteros y sus módulos. Un cuadrilátero $Q(z_1, z_2, z_3, z_4) \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo del plano cuya frontera es una curva de Jordan y cuatro puntos ordenados (z_1, z_2, z_3, z_4) en la curva, que por simplicidad lo denotaremos simplemente como Q . Según el Teorema de mapeo de Riemann (mediante una transformación de Schwarz-Christoffel, por ejemplo) hay un homeomorfismo f que manda a Q al interior de un rectángulo euclidiano $\hat{Q}$ de manera biholomorfa y que mapea los puntos (z_1, z_2, z_3, z_4) a los vértices de $\hat{Q}$ de manera ordenada. El rectángulo $\hat{Q}$, que a su vez es un cuadrilátero, tiene una base b y una altura a . Dependiendo de los autores, se conviene llamar a la base al arco $f((z_1, z_2))$ y a la altura al arco $f((z_2, z_3))$. De modo que el cociente $M(Q) := \frac{a}{b}$ es invariante bajo cualquier otro biholomorfismo que mapee $\hat{Q}$ con su base y su altura a otro cuadrilátero Q . A $M(Q)$ le llamamos el módulo de Q .

⁴Debe entenderse en el sentido distribucional, pero que gracias al Teorema mencionado las derivadas parciales son derivadas débiles.

Definición 1.3.5 (Definición geométrica). *Un homeomorfismo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ entre abiertos del plano es K -cuasiconforme si*

$$\sup_{\bar{Q} \subset \mathcal{U}} \frac{M(f(Q))}{M(Q)} \leq K < \infty. \quad (1.6)$$

Las definiciones 1.3.2, 1.3.4 y 1.3.5 son equivalentes, una prueba se puede consultar en [Ahl06] o [LV73]. Hay otra definición que al lector le conviene tener en cuenta y es la que involucra el módulo de un cilindro o un anillo, que en aplicaciones suele ser muy útil.

Definición 1.3.6 (Módulo de un anillo). *El módulo de un anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ es $M(A) := (2\pi)^{-1} \log(r_2/r_1)$. Donde $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Si $r_1 = 0$ y $r_2 < \infty$ o $r_2 = \infty$, entonces $M(A) = \infty$.*

Nota 1.3.7. *El módulo de un anillo es un invariante conforme. Así dos anillos son conformes entre sí y solo si tienen el mismo módulo. Vea la Sección 3.2 de [Hub06].*

Definición 1.3.8 (Dominio anillado). *Un dominio anillado es un abierto conexo del plano cuyos complementos o son dominios simplemente conexos o un dominio simplemente conexo y un punto o dos puntos.*

Un dominio anillado siempre se puede mapear de manera holomorfa a alguno de los anillos descritos en la Definición 1.3.6. Por lo tanto podemos hablar del módulo de un dominio anillado.

Definición 1.3.9 (Definición geométrica 2). *Un homeomorfismo $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, con $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos de $\mathbb{C}$ es K -cuasiconforme si para todo dominio anillado $A, \bar{A} \subset \mathcal{U}$, se tiene que:*

$$\frac{M(A)}{K} \leq M(g(A)) \leq KM(A). \quad (1.7)$$

Ejemplos 1.3.10 (Aplicaciones cuasiconformes en el plano).

1. *Cualquier difeomorfismo $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un compacto. La norma de la derivada de f es acotada pues estamos en un compacto, por lo que el módulo de ∂f y $\bar{\partial} f$ están acotados. Así, f es K -cuasiconforme para algún K .*
2. *La composición de un homeomorfismo cuasiconforme con un homeomorfismo conforme es un homeomorfismo cuasiconforme. Esto es porque si $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ y $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ son cuasiconformes, entonces la dilatación compleja de la composición $g \circ f$ cumple la siguiente igualdad (vea el Capítulo 1, Sección C de [Ahl06]):*

$$\mu_{g \circ f} = \left(\frac{f'}{|f'|^2} \right) \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_{g \circ f}}$$

Si g es conforme, entonces $\mu_g = 0$, así $\mu_{g \circ f} = \mu_f$. Por otro lado, si f es conforme, entonces $|\mu_g| = |\mu_{g \circ f}|$. Por lo que la constante K de cuasiconformalidad no cambia.

3. $f(x, y) = (x, |x| + y)$, es un homeomorfismo cuasiconforme diferenciable excepto en la línea $x = 0$. Para verlo, usamos la Definición 1.3.4 (ACL). Haremos el caso en que y_0 está fijo y $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$. Consideremos $f_2 : (x, y_0) \rightarrow |x| + y_0$. Entonces f'_2 es 1 si $x > 0$ y -1 cuando $x < 0$, en cero defina a $f'_2 = 1$. Es fácil comprobar que en efecto, $f_2(x_2) - f_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'_2$, para $x_1 < x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$. De manera similar lo análogo se obtiene para x_0 fijo. No es difícil ver que la distorsión de f es acotada.

No Ejemplos 1.3.11 (Homeomorfismos de abiertos del plano no cuasiconformes).

1. $f(z) = \bar{z}$. Simplemente porque hemos pedido que se preserve la orientación.
2. Cualquier homeomorfismo del plano al disco. Para ver esto considere un anillo en el disco cuyas fronteras son un círculo de radio menor que 1 alrededor del origen y la frontera del disco. Si hubiera un cuasiconforme al plano entonces por la Desigualdad (1.7) el módulo del anillo imagen tendría que ser finito, pero no lo es, contradicción. En particular, el plano y el disco tampoco pueden ser conformes entre sí. Esto es importante porque incluso relajando la noción de conformalidad, el plano y el disco siguen siendo distintos.
3. Considere una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en ningún lado. Entonces el homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (x, y + F(x))$ no es cuasiconforme. Esto es porque según la Definición 1.3.4 un homeomorfismo cuasiconforme es diferenciable en casi todos los puntos y f no lo es en ningún punto.
4. Ahora considere una función de Cantor $F : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Recordemos que una función de Cantor F es una extensión monótona creciente al intervalo $(0, 1)$ de la función $f : C \rightarrow (0, 1)$, dada por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$, donde C es el conjunto de Cantor, $x \in C$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n_i}$, para alguna sucesión $\{n_i\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ (vea el Ejemplo 3.1.1 de [FM06]). De manera similar al punto anterior el homeomorfismo $f : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, 1) \times \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow (x, y + F(x))$ no es cuasiconforme. La razón es que al no ser F absolutamente continua, entonces f no lo es en líneas. La distorsión de f es de hecho acotada. Este ejemplo muestra que incluso cuando un homeomorfismo es diferenciable casi en todas partes y con distorsión acotada no es suficiente para que sea cuasiconforme. Las derivadas distribucionales deben tener cierta regularidad, en particular localmente cuadrado integrables.

1.3.2. Aplicaciones cuasiconformes en superficies

Definición 1.3.12. Un homeomorfismo que preserva orientación $f : R \rightarrow R'$, entre superficies de Riemann, R y R' es K -cuasiconforme si en coordenadas locales lo es y la excentricidad de las elipses infinitesimales $K(p) \leq K$, para todo punto $p \in M$.

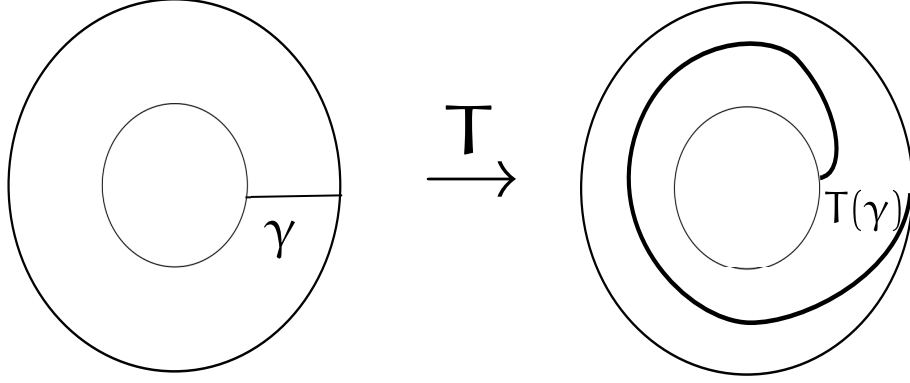


Figura (1.10) Giro de Dehn en un anillo y su acción en la curva γ .

En vista del Ejemplo 1.3.10-2, los cambios de coordenadas no cambian la constante de conformalidad. Por lo que un mapeo cuasiconforme está bien definido en una superficie de Riemann.

Para dar ejemplos de homeomorfismos cuasiconformes en superficies necesitamos las siguientes dos definiciones. Seguimos la exposición del Capítulo 3 de [FM12] .

Definición 1.3.13 (Giro de Dehn en un anillo). *Consideramos un anillo A , con $0 < r_1, r_2 < \infty$ (vea la Definición 1.3.6). El mapeo*

$$\begin{aligned} T : A &\rightarrow A, \\ (\theta, r) &\rightarrow (\theta + 2\pi r, r) \end{aligned} \tag{1.8}$$

es el giro de Dehn del anillo A .

Una imagen de T está en la Figura 1.10. No es difícil ver que T es un homeomorfismo del anillo A . Podemos usar a T para construir homeomorfismos de superficies como sigue.

Definición 1.3.14 (Giro de Dehn a lo largo de una curva en una superficie). *Considere una superficie S y una curva esencial simple⁵ γ en S . Considere una vecindad tubular N de γ en S y un homeomorfismo que preserva orientación $\phi : A \rightarrow N$, donde A es un anillo. Entonces el mapeo $T_\gamma : S \rightarrow S$ dado por:*

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & x \in N \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.9}$$

es el giro de Dehn a lo largo de la curva γ .

Un ejemplo de T_γ se encuentra en la Figura 1.11. Notemos que el giro de Dehn T_γ depende del homeomorfismo ϕ y de la vecindad tubular N . Esto no presenta problemas ya que cualesquiera giros de Dehn a lo largo de γ son homotópicos entre sí. En última instancia es lo que nos interesa, considerar homeomorfismos hasta isotopía.

⁵Ello significa que la curva no es homotópica a un punto, un borde o una ponchadura y no tiene autointersecciones.

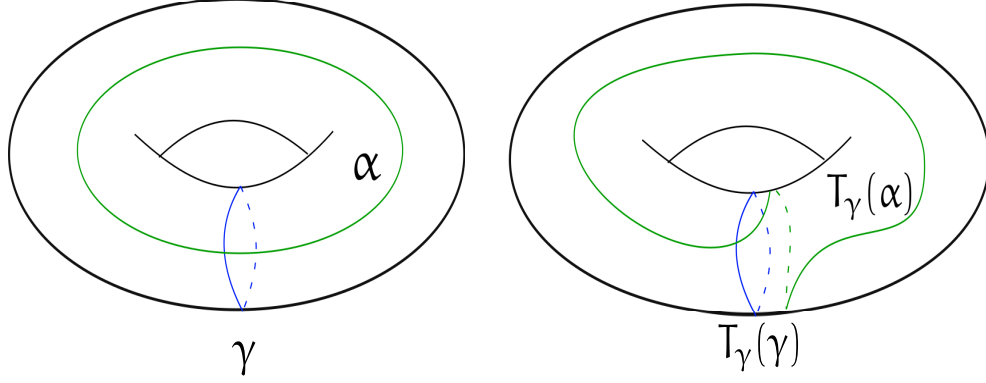


Figura (1.11) Giro de Dehn en un toro a lo largo de la curva γ y su acción en la curva α .

Ejemplos 1.3.15 (Homeomorfismos cuasiconformes en superficies de tipo finito).

1. El giro de Dehn T en un anillo A es cuasiconforme. En efecto su derivada es

$$DT = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según la Definición 1.3.1, T es cuasiconforme.

2. Una realización diferenciable de un giro de Dehn es un homeomorfismo cuasiconforme para una estructura hiperbólica de una superficie compacta de género mayor que 2. En efecto, por compacidad la distorsión del giro de Dehn es acotada. Para ejemplos de género 0 y 1 vea los Ejemplos 2.2.6.

Productos infinitos de giros de Dehn. Consideremos una superficie R en S de tipo infinito y una sucesión de curvas cerradas geodésicas simples no homólogas entre sí y ajenas dos a dos $\bar{\gamma} := \{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en R . Denotemos como $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ a un elemento de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Los productos $T_{\bar{\gamma}}^{\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} T_{\gamma_i}^{\alpha_i}$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, son homeomorfismos de S . Convenimos que $T_{\gamma_i}^0$ es la identidad.

Para producir ejemplos de mapeos cuasiconformes en superficies de tipo infinito necesitamos el siguiente criterio de estimación de la distorsión de un producto infinito de giros de Dehn.

Teorema 1.3.16 (Estimación de cuasiconformalidad de K. Matsuzaki, extensión del Teorema 1 de [Mat03]). *Consideremos una superficie R en S de tipo infinito y $T_{\bar{\gamma}}^{\alpha} : R \rightarrow R$ un producto infinito de giros de Dehn, como arriba, absolutamente continuo en líneas. Denotemos como l_i la longitud hiperbólica de $\gamma_i \in \bar{\gamma}$. Entonces, $T_{\bar{\gamma}}^{\alpha}$ es isotópico a un homeomorfismo $F_{\bar{\gamma}}^{\alpha}$ cuya distorsión K^* satisface:*

$$\sup \left\{ \left(\frac{\sigma_i l_i}{\pi} \right) + 1 \right\}^{1/2} \leq K^* \leq \sup \left[\left\{ \left(\frac{|\alpha_i| l_i}{2\theta_i} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} + \frac{|\alpha_i| l_i}{2\theta_i} \right]^2,$$

donde $\sigma_i = \max\{2|\alpha_i| - 1, 0\}$ y $\theta_i = \pi - 2 \arctan\{\sinh(l_i/2)\}$. Si K^* es finito entonces $F_{\bar{\gamma}}^\alpha$ es cuasiconforme y es extremal. Esto es, $F_{\bar{\gamma}}^\alpha$ es el homeomorfismo con la menor distorsión entre todos los homeomorfismos cuasiconformes isotópicos a $T_{\bar{\gamma}}^\alpha$.

Nota 1.3.17. Por el Teorema B de [Hat22] siempre es posible elegir de la clase de homotopía de homeomorfismos de $T_{\bar{\gamma}}^\alpha$ un homeomorfismo absolutamente continuo en líneas. El anterior teorema es una ligera modificación al teorema original de K. Matsuzaki. En la demostración K. Matsuzaki se analiza la distorsión de cada giro de Dehn de $T_{\bar{\gamma}}^\alpha$. Los giros de Dehn son cuasiconformes en las vecindades de las curvas donde se hacen los giros.

Ejemplos 1.3.18 (Homeomorfismos cuasiconformes en superficies de tipo infinito).

1. *Productos infinitos de giros de Dehn.* Consideramos $\bar{\gamma}$ como arriba pero con la longitud de cada γ_i acotada uniformemente. De la misma manera consideramos $\alpha \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$, con $|\alpha_i| < m$, para un $m \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Teorema 1.3.16 el homeomorfismo $F_{\bar{\gamma}}^\alpha$ es un mapeo cuasiconforme.
2. *Otros ejemplos que pueden ser homeomorfismos cuasiconformes son los llamados cambios de asa (handle shifts en inglés), para construirlos seguimos la exposición de [AV20]:*

Consideremos la banda $\mathbb{R} \times [-4, 4]$ en el plano, removamos de ella discos unitarios centrados en las coordenadas $(m, \pm 2)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Identifiquemos pares de fronteras de los discos removidos en las coordenadas $(m, 2)$ y $(m, -2)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$ mediante una reflexión. La superficie obtenida es una superficie de tipo infinito con frontera con dos fines acumulados por género que denotamos como Σ .

Elegimos un homeomorfismo $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que satisface:

- $\sigma(x, y) = (x + 1, y)$ para todo $(x, y) \in \Sigma$ con $|y| \leq 3$ y
- $\sigma(x, \pm 4) = (x, \pm 4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

En la franja $3 < y < 4$ escogemos al homeomorfismo para que los puntos (x, y) que estén en ella se cumpla que para $\sigma(x, y) =: (x', y')$ se tenga $|x' - x| < 1$ y $3 < y < 4$. En la Figura 1.12 podemos ver un ejemplo de un σ y su acción sobre una curva vertical. Para toda superficie de tipo infinito S , decimos que un homeomorfismo h es un cambio de asa si existe un encaje propio $e : \Sigma \rightarrow S$ con:

$$h(x) = \begin{cases} e \circ \sigma \circ e^{-1}(x) & x \in e(\Sigma) \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

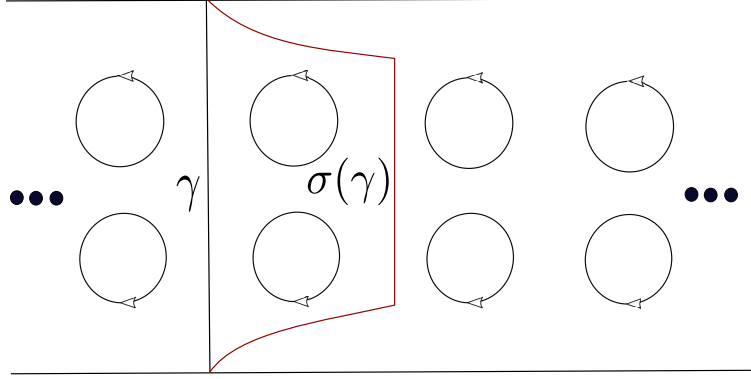


Figura (1.12) Cambio de asa. En rojo la acción de σ en una curva γ

Considerando a $S = \mathbb{R}^2 / \sim$, con $x \sim y$ como arriba si $x, y \in \mathbb{R} \times [-4, 4]$ y la identidad si $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times [-4, 4]$. La superficie S hereda una estructura de superficie de Riemann de $\mathbb{R}^2$. Escojamos a σ tal que en la franja $3 < y < 4$ actúe de manera lineal. Entonces h es cuasiconforme.

Referimos al lector a las proposiciones 1.3.30 y 1.3.31 y sus demostraciones para ver ejemplos de homeomorfismos no cuasiconformes en superficies de tipo infinito.

1.3.3. Superficies de Riemann del primer tipo en una superficie de tipo infinito S

Para cualquier superficie R en S se tiene que su cubriente universal es biholomorfo al disco unitario por el Teorema de uniformización (vea por ejemplo el Teorema 27.12 de [For81]). Como consecuencia R es también una estructura de superficie hiperbólica completa. Es decir $R = \mathbb{H} / \Gamma$, para $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ un grupo discreto libre de torsión [Hub06]. Recordemos que Γ también actúa en $\partial\mathbb{H}$, entonces podemos considerar $\overline{\Gamma} \cdot \zeta$ en $\overline{\mathbb{H}}$, para algún punto $\zeta \in \mathbb{H}$. El conjunto límite de Γ es $\Lambda(\Gamma) := \overline{\Gamma} \cdot \zeta \cap \partial\mathbb{H}$; que no depende de $\zeta \in \mathbb{H}$ (Proposición 3.4.1 de [Hub06]). Hay dos opciones para $\Lambda(\Gamma)$, o es $\partial\mathbb{H}$ o es un conjunto de Cantor (Corolario 3.4.6 de [Hub06]). Consideremos $\Omega = \partial\mathbb{H} \setminus \Lambda(\Gamma)$ y $\bar{R} := (\mathbb{H} \cup \Omega) / \Gamma$. La frontera ideal de R es $\partial R := \bar{R} \setminus R$ (Sección 4.13 de [McM]).

Definición 1.3.19 (Tipos de superficies de Riemann). *Una superficie de Riemann R en S es de primer tipo si $\partial R = \emptyset$, de segundo tipo si $\partial R \neq \emptyset$. En este último caso las componentes conexas de ∂R son círculos o rectas.*

Al prescribir longitudes para las curvas cerradas en una descomposición en pantalones (por ejemplo, mediante un árbol núcleo) en una superficie de tipo infinito S obtenemos una estructura hiperbólica R' en S . Esto es debido a que los pantalones de tipo 0, 1 y 2 se convierten en pantalones hiperbólicos con cúspides. Sin embargo, R' puede no ser una

estructura hiperbólica completa por la posibilidad de que una trayectoria geodésica converja a un fin en tiempo finito (vea [Mat04]). Cada par de pantalones hiperbólicos con 0, 1 o 2 cúspides los llamaremos pantalones hiperbólicos de tipo 0, 1 y 2, respectivamente. Siguiendo la nomenclatura de [BŠ19] llamamos a una componente conexa de la frontera de un pantalón como puño (o *cuff* en inglés).

De acuerdo a [BŠ19] una geodésica γ de una estructura hiperbólica R *sale a un fin e* si γ converge a e , i.e. para toda sucesión de salida $\{U_n\}$ en e , existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$, tal que, $\gamma \subset U_m$, para todo $m \geq N$. Un fin e es visible si existe un abierto V en el haz tangente unitario de R tal que para todo $v \in V$, la geodésica que empieza en v sale a e . Un fin no visible es un fin que no es visible. Una sucesión de pantalones $\{\mathcal{P}_j\}$ *sale a un fin e* si converge a él, i.e. si para toda sucesión de salida $\{U_n\}$ en e existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\mathcal{P}_j \subset U_l$, para $j \geq N$ y l algún natural. Un fin e es de tipo infinito si no es aislado. Con la terminología anterior tenemos las siguientes afirmaciones.

Proposición 1.3.20 (Consecuencia de la Proposición 3.7 (ii) y (iii) de [BŠ19]). *Considere una superficie de Riemann R en S y una descomposición en pantalones de R , entonces*

1. *un fin e de tipo infinito de R es no visible si y solo si para todo rayo geodésico γ que sale a e la sucesión de pantalones en la descomposición de R que γ intersecta sale a e ,*
2. *R es de primer tipo si y solo si cada fin e es no visible.*

Teorema 1.3.21 (Teorema 5.1 de [BŠ19]). *Considere R' una (no necesariamente completa) superficie hiperbólica con una descomposición en pantalones. Entonces, existe una elección de giros⁶ a lo largo de los puños, tal que la superficie hiperbólica inducida R (después de posiblemente añadir embudos) es geodésicamente completa.*

Proposición 1.3.22. *Toda superficie conexa, orientable de tipo infinito y sin frontera S admite una superficie R de primer tipo.*

Demostración. Considere una descomposición en pantalones de S dada por un árbol núcleo. Asigne cualquier longitud a cada curva cerrada de la descomposición en pantalones y obtenga una (no necesariamente completa) estructura hiperbólica R' en S . Por el Teorema 1.3.21 existe una elección de giros a lo largo de los puños en la descomposición en pantalones de R' , tal que induce una estructura hiperbólica completa R en S . Como la descomposición en pantalones fue dada por un árbol núcleo la Proposición 1.3.20 nos da que todo fin de tipo infinito de R es no visible. Una cúspide es un fin no visible (Lema 2.2 de [BŠ19]). Por lo tanto, R es de primer tipo. $\square$

Observación 1.3.23. *El resultado anterior está implícito en el trabajo de A. Basmajian y D. Šarić [BŠ19], pero no está escrito. No es necesario una descomposición en pantalones dada por un árbol núcleo para que la Proposición 1.3.22 sea cierta, pero de un árbol núcleo es fácil de ver si un fin es no visible.*

⁶Esto es en el sentido de las coordenadas Nielsen-Thurston.

Denotaremos como $\mathcal{P}(S)$ a la descomposición en pantalones en S inducida por el árbol núcleo escogido para S . También denotaremos como $\mathcal{P}(R)$ a la descomposición en pantalones hiperbólicos inducida por $\mathcal{P}(S)$ en R como en la Proposición 1.3.22.

1.3.4. Grupos modulares en superficies

Fijemos una superficie de Riemann de primer tipo R en S . Denotemos al grupo de homeomorfismos que preservan orientación como $\text{Homeo}^+(S)$. Dotamos a $\text{Homeo}^+(S)$ con la topología compacto abierta. El grupo de homeomorfismos cuasiconformes que preservan orientación lo denotamos como $\text{QC}^+(R)$ y al ser un subgrupo de $\text{Homeo}^+(S)$ adquiere la topología de subespacio. Ambos grupos tienen una componente conexa de la identidad, denotadas $\text{Homeo}_0^+(S)$ y $\text{QC}_0^+(R)$ respectivamente. Así, tenemos los cocientes:

Definición 1.3.24 (*Mapping class group*). $\text{Map}(S) := \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S)$.

Definición 1.3.25 (Grupo modular). $\text{Mod}(R) := \text{QC}^+(R)/\text{QC}_0^+(R)$.

Recordemos que $\text{Mod}(R)$ es un subgrupo topológico de $\text{Map}(S)$ mediante el homomorfismo inyectivo y encaje topológico

$$\begin{aligned} i : \text{Mod}(R) &\rightarrow \text{Map}(S), \\ [h]_R &\rightarrow [h]_S. \end{aligned}$$

Tenemos los siguientes hechos para toda superficie S de tipo finito:

Teorema 1.3.26 (Dehn- Lickorish, Teorema 4.1 de [FM12]). *$\text{Map}(S)$ es finitamente generado por giros de Dehn.*

Teorema 1.3.27 (Teorema 1.5 del cap. 5 de [Leh87]). *Considere una superficie R en S y $h : R \rightarrow R$ un homeomorfismo, entonces, h es isotópico a un homeomorfismo cuasiconforme de R en R .*

Teorema 1.3.28. *El grupo modular $\text{Mod}(R)$ y el mapping class group $\text{Map}(S)$ son isomorfos (como grupos) para cualquier superficie de Riemann R en S .*

Demostración. Al ser $\text{Mod}(R)$ un subgrupo de $\text{Map}(S)$ solo nos ocupamos de ver que exista un mapeo inyectivo de $\text{Map}(S)$ a $\text{Mod}(R)$. Considere $[f] \in \text{Map}(S)$, con un representante $f : S \rightarrow S$, entonces es homeomorfismo de R en R , así por el Teorema 1.3.27 f es isotópico a algún cuasiconforme de R en R . $\square$

La situación anterior contrasta fuertemente para superficies de tipo infinito. El *mapping class group* $\text{Map}(S)$ tiene una estructura más complicada.

Teorema 1.3.29 (Teorema 4.2 de [AV20]). *Para toda superficie S de tipo infinito $\text{Map}(S)$ es*

1. *polaco,*
2. *homeomorfo a los irracionales,*
3. *no es localmente compacto y*
4. *no es compactamente generado.*⁷

En otras palabras $\text{Map}(S)$ es un verdadero monstruo. Para una superficie S de tipo infinito, se cumplen las siguientes proposiciones.

Proposición 1.3.30. *Para toda superficie R en S existe una infinidad no numerable de clases de homotopía de homeomorfismos $h : S \rightarrow S$ con $[h] \notin \text{Mod}(R)$.*

Demostración. Considere una sucesión $\{\gamma_i\}$ de curvas esenciales simples no homólogas entre sí y ajenas de S . Denotemos a la sucesión como $\bar{\gamma}$. Considere $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente, con $\alpha_i > i/2l_i + 1/2$. Donde, l_i es la longitud de γ_i . Entonces por el Teorema 1.3.16 $T_{\bar{\gamma}}^{\alpha}$ no es isotópico a ningún homeomorfismo cuasiconforme. La no numerabilidad la tenemos de considerar diferentes sucesiones α . $\square$

Proposición 1.3.31. *Para toda superficie S , existen superficies de Riemann R y $\tilde{R}$ en S y un homeomorfismo $h : S \rightarrow S$ tal que, h tiene representante cuasiconforme en R pero no lo tiene en $\tilde{R}$.*

Demostración. Consideremos una descomposición en pantalones $\mathcal{P}(S)$ de S dada por un árbol núcleo. Asigne a cada curva una longitud hiperbólica acotada uniformemente. Por la demostración de la Proposición 1.3.22 hay una elección de giros de puños de $\mathcal{P}(S)$ de tal forma que la estructura hiperbólica R resultante es completa. Considerando a $\mathcal{P}(S)$, ahora enumeremos a cada curva de $\mathcal{P}(S)$ y asignémosles longitudes hiperbólicas de manera creciente. Nuevamente, por la demostración de la Proposición 1.3.22 obtenemos otra estructura de Riemann $\tilde{R}$ en S diferente a R . El producto infinito de giros de Dehn h a lo largo de los puños de $\mathcal{P}(S)$ tiene un representante cuasiconforme en R por el Teorema 1.3.16. Sin embargo, por el mismo Teorema 1.3.16 h no es isotópico a ningún cuasiconforme en la estructura $\tilde{R}$. $\square$

En vista de la Proposición 1.3.30 es natural hacer la pregunta: ¿Cómo son los grupos modulares $\text{Mod}(R)$ en el *mapping class group* $\text{Map}(S)$ para distintas superficies R en S de tipo infinito? Una primera respuesta es la siguiente:

Proposición 1.3.32. *Existe al menos una superficie de Riemann R en S con $\text{Mod}(R)$ no numerable.*

⁷Es decir, que no existe un compacto que genera de manera algebraica a $\text{Map}(S)$.

Demostración. Tomemos una descomposición en pantalones $\mathcal{P}(S)$ de S dada por un árbol núcleo y asignemos a cada curva de $\mathcal{P}(S)$ longitudes hiperbólicas acotadas uniformemente por arriba. Por la demostración de la Proposición 1.3.22 $\mathcal{P}(S)$ induce una estructura de Riemann R en S mediante la elección de giros para cada puño en $\mathcal{P}(S)$. Enumeremos a la familia de puños de $\mathcal{P}(R)$ y denotemos la sucesión $\{\gamma_i\}$ de puños como $\bar{\gamma}$. Las clases $[T_{\bar{\gamma}}^\alpha], [T_{\bar{\gamma}}^{\alpha'}] \in \text{Mod}(R)$ con $\alpha, \alpha' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =: B$ por el Teorema 1.3.16. Las clases son distintas si $\alpha \neq \alpha'$. Así, el conjunto $\{[T_{\bar{\gamma}}^\alpha]\}_{\alpha \in B} \subset \text{Mod}(R)$ es no numerable. $\square$

La anterior proposición motiva la pregunta ¿Existirá alguna superficie R en S de tipo infinito con grupo modular $\text{Mod}(R)$ numerable? K. Matsuzaki probó en [Mat04] lo siguiente:

Teorema 1.3.33. *Considere K un conjunto de Cantor, entonces $S^2 \setminus K$ admite una estructura de superficie de Riemann R con $\text{Mod}(R)$ numerable.*

Si R es de segundo tipo, entonces tenemos que considerar la acción de los homeomorfismos cuasiconformes en la frontera ideal de R . Todo homeomorfismo cuasiconforme $g : R \rightarrow R$ tiene un levantamiento cuasiconforme $\tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. A su vez $\tilde{g}$ tiene una extensión continua única a $\bar{\mathbb{H}}$ ([McM]), por lo g se puede extender de manera unívocamente continua a $\bar{R}$. Entonces para R de segundo tipo consideramos el grupo de homeomorfismo cuasiconformes hasta isotopía relativa a la frontera ideal de R , i.e.

$$\text{Mod}(R) := \text{QC}^+(R; \partial R) / \text{QC}_0^+(R; \partial R).$$

Una condición necesaria para que $\text{Mod}(R)$ sea numerable está dada por la siguiente proposición de Matsuzaki.

Proposición 1.3.34 (Proposición 1 de [Mat04]). *Si en una superficie R en S de tipo infinito el grupo modular $\text{Mod}(R)$ es numerable, entonces se satisface que:*

1. *El número de geodésicas cerradas simples en R con longitud acotada uniformemente es finito.*
2. *R no tiene frontera ideal, i.e. R es de primer tipo.*

Para conveniencia del lector sólo demostraremos el punto 2 de la anterior proposición. Para el punto 1 el lector puede consultar [Mat04], ya que es suficientemente clara.

Demostración del punto 2 de la Proposición 1.3.34. Si R es de segundo tipo, entonces ∂R consiste en círculos o rectas. Considere $g : R \rightarrow R$ un cuasiconforme, como R es de segundo tipo g tiene una extensión a $\bar{R}$. Denotemos como L_θ a una rotación o una traslación por θ dependiendo del tipo de componente de ∂R . Entonces $[L_\theta \circ g] \in \text{Mod}(R)$ son clases de equivalencia diferentes entre sí, para $\theta \in S^1$ o $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 1.3.35. *La argumentación anterior también es válida para superficies de tipo finito.*

Por la anterior proposición la estructura de superficie de Riemann mencionada en el Teorema 1 debe ser al menos del primer tipo si queremos que $\text{Mod}(\mathbf{R})$ sea numerable.

Como mencionamos en la introducción, basándonos en el trabajo de K. Matsuzaki expandimos las clases de superficies de tipo infinito que admiten una superficie $\mathbf{R}$ con $\text{Mod}(\mathbf{R})$ numerable, a saber las de género finito. En la siguiente sección probamos el Teorema 1.

1.4. Demostración del Teorema 1

La prueba comienza en esta sección, que está dividida en dos partes. La idea de la prueba es la siguiente: Construimos una estructura hiperbólica completa y del primer tipo, $\mathbf{R}$, en S con ayuda de una descomposición en pantalones de un árbol núcleo. La construcción la hacemos en la siguiente subsección. En la segunda parte mostramos la numerabilidad del grupo $\text{Mod}(\mathbf{R})$. Para ello mostramos la numerabilidad de $\text{Mod}(\mathbf{R})_n$, para todo natural n , que son las clases de homeomorfismos cuasiconformes con un representante n -cuasiconforme. Para mostrar la numerabilidad de $\text{Mod}(\mathbf{R})_n$ usamos tres lemas, el Lema de Wolpert (Lema 1.4.1), un lema de A. Basmajian y D. Šarić (Lema 1.4.2) y un lema de control de las aplicaciones cuasiconformes sobre las subsuperficies (Lema 1.4.3). Finalmente, como $\text{Mod}(\mathbf{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Mod}(\mathbf{R})_n$ y $\text{Mod}(\mathbf{R})_m \subset \text{Mod}(\mathbf{R})_n, n > m$, se concluye que $\text{Mod}(\mathbf{R})$ es numerable.

1.4.1. Construcción de la estructura de superficie de Riemann para S de tipo infinito y género finito.

Primero construimos las estructuras de superficies de Riemann mencionadas en el Teorema 1. Necesitamos que sean del primer tipo por la Proposición 1.3.34 y para ello usaremos las herramientas de la Sección 1.3.3.

Caso 1. $\text{End}(S)$ no tiene un número finito de puntos aislados, y el género de S es 0.

Por el Lema 1.2.5 elegimos $T(S)$ teniendo a lo más un árbol exterior. Solo etiquetaremos las aristas de $T(S)$ que no incidan en una hoja de la siguiente manera. Elegimos una arista E_1 del vértice raíz que no se encuentra con una hoja y la etiquetamos como $1!$. Asignamos el número $3!$ a las otras aristas incidentes en los extremos de E_1 (siempre y cuando no se encuentren con una hoja). Para las aristas que obtuvieron un número, repetimos el proceso como con E_1 . Sus aristas vecinas restantes y sin etiquetar tendrán el número $5!$. Procedemos por inducción para que las aristas se les asignen el factorial de los números impares. Consulte la Figura 1.13a para ver un ejemplo.

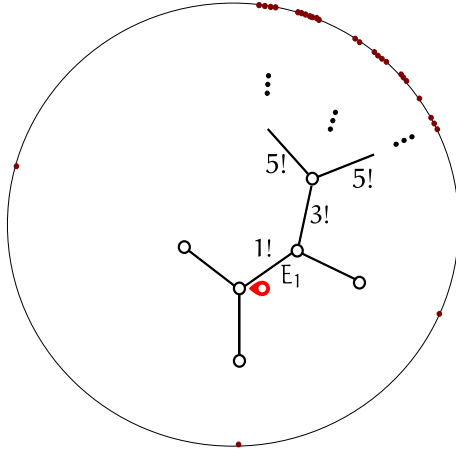


Figura 1.13(a): Árbol núcleo con a lo más un árbol exterior. La raíz está señalada en rojo.

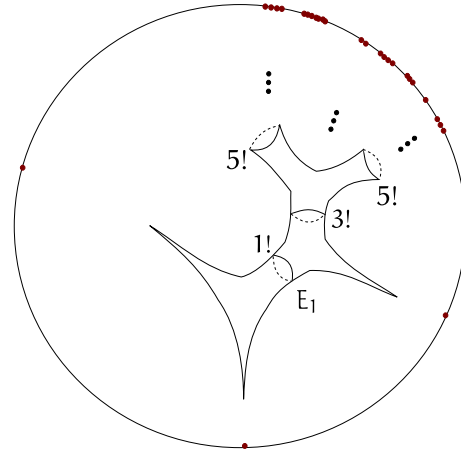


Figura 1.13(b): Superficie con a lo más un par de pantalones hiperbólico de tipo 2.

Obtenemos a partir de $T(S)$ una descomposición en pantalones en S . Los puños de la descomposición en pantalones tendrán una longitud hiperbólica igual al número asignado a la arista correspondiente en $T(S)$. Las aristas que no se encuentran con una hoja siempre corresponden a un puño. Por lo tanto, tenemos una estructura de superficie de Riemann R' (con una estructura hiperbólica no necesariamente completa) saturada por superficies de tipo topológico finito $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Describimos la saturación a continuación. La subsuperficie R_1 es la obtenida mediante el pegando de los dos pantalones a lo largo de E_1 ; cada una de sus componentes de frontera tiene longitud $3!$. La subsuperficie R_2 es la unión de R_1 con los pantalones pegados a lo largo de las componentes de frontera de R_1 . Procedemos por inducción, y por lo tanto tenemos subsuperficies R_n con frontera geodésica cuyas componentes tienen la misma longitud de $(2n + 1)!$. Consulte la Figura 1.13b para ver un ejemplo.

Por el Teorema 1.3.21 (o la demostración de la Proposición 1.3.22) hay una elección de torsión en cada puño de $\mathcal{P}(R')$, de modo que la superficie resultante R es completa y del primer tipo.

Caso 2. El género de S es positivo o tiene un número finito de fines aislados.

Observe que siempre podemos elegir un árbol núcleo $T(S)$ con un subárbol finito T^* con todos sus vértices marcados y también teniendo todas las hojas si éstas son un número finito. Podemos elegir el árbol $T(S)$ de manera que el vértice raíz sea parte de T^* y que al eliminarlo separe T^* del resto de $T(S)$. También podemos elegir $T(S)$ de manera que $T(S) \setminus T^*$ tenga a lo más un árbol exterior (en el caso de infinitos fines aislados). Entonces, elegimos $T(S)$ de esta manera.

Asignamos cualquier número positivo a las aristas de T^* . Luego elijamos una arista E_1 del vértice raíz que no sea parte de T^* y luego asignamos números a las aristas como en el caso anterior. Obtenemos de $T(S)$ la descomposición de pantalones y una estructura hiperbólica no necesariamente completa R' en S . Hacemos las torsiones en cada puño de $\mathcal{P}(R')$ de manera

que la superficie de Riemann resultante R sea completa y del primer tipo. Vea las Figuras 1.14a y 1.14b.

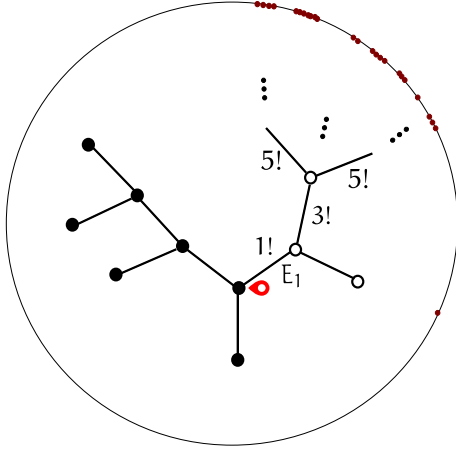


Figura 1.14(a): Árbol núcleo que representa género finito con un subárbol finito con todos los vértices marcados. La raíz está señalada en rojo.

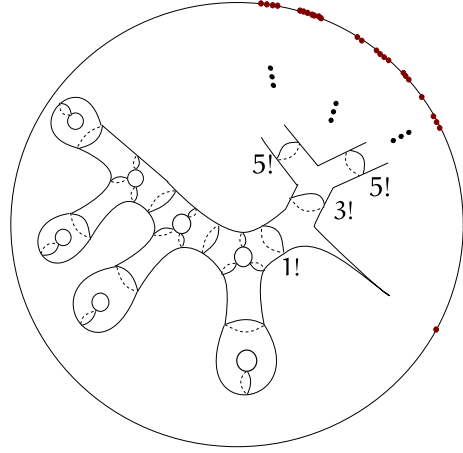


Figura 1.14(b): Superficie con género positivo con una subsuperficie de tipo finito con todo el género.

La exhaustividad de R se dará por: R_1 , que será la subsuperficie con todo el género de S y posiblemente los puntos aislados finitos de $\text{Ends}(S)$. La frontera geodésica de R_1 es el puño elegido correspondiente a E_1 . La subsuperficie R_2 es R_1 unida al par periférico o par de pantalones que limita E_1 . La subsuperficie R_3 es la unión de R_2 y el par periférico o par de pantalones que limita las fronteras geodésicas de R_2 . Procedemos por inducción.

1.4.2. Numerabilidad del grupo modular

Como se mencionó en la introducción y anteriormente, para mostrar la numerabilidad de $\text{Mod}(R)$ definiremos aplicaciones inyectivas $\Psi_n : \text{Mod}(R)_n \rightarrow \text{Mod}(R_n)$ para todo $n \geq N$, para algún N dado por el Lema 1.4.3. Esto implica que $\text{Mod}(R)_n$, $n \geq N$ es numerable. Para demostrar el Lema 1.4.3 necesitamos los siguientes dos lemas.

Lema 1.4.1 (Lema de Wolpert, [Wol79]). *Considere c una geodésica cerrada simple en una superficie de Riemann R con longitud $l(c)$ y $g : R \rightarrow R$ un homeomorfismo K -cuasiconforme. Entonces, la longitud geodésica $l(g(c))$ de la clase de homotopía libre de $g(c)$ en R satisface*

$$\frac{1}{K}l(c) \leq l(g(c)) \leq Kl(c).$$

El siguiente es el Lema 8.1 de [BŠ19].

Lema 1.4.2. *Considere Σ un pentágono rectangular ideal como en la Fig. 1.15. Sea $l(d)$ la longitud del segmento ortogonal geodésico d . Entonces, para $l(a) > 1$ lo suficientemente grande y $l(c) > l(a)$, se tiene que*

$$l(d) \geq l(c) - l(a).$$

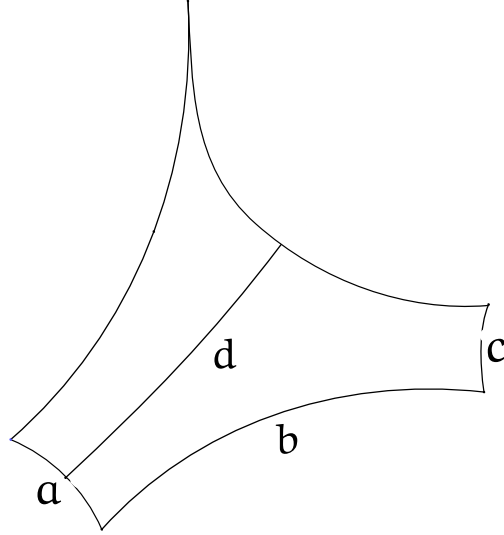


Figura (1.15) Pentágono Ideal

Lema 1.4.3. *Considere S de tipo infinito y género finito, y una superficie R en S construida como en la subsección anterior. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $g : R \rightarrow R$ homeomorfismo K -cuasiconforme, $K \geq N$, $g(R_n)$ es libremente homotópico a R_n para todo $n \geq K$. Las R_n son las subsuperficies de la saturación de la sección anterior.*

Demostración. El objetivo será contradecir el Lema 1.4.1. Las curvas que vamos a usar son las fronteras geodésicas de las subsuperficies R_n , que son curvas cerradas de la descomposición en pantalones hiperbólicos descrita en la sección anterior. El Lema 1.4.2 nos dará el N tal que si R_n , $n \geq N$, no es libremente homotópico a $g(R_n)$, entonces la imagen de algunas de las curvas de la frontera, digamos c bajo g será lo suficientemente grande como para que la desigualdad $l(g(c)) \leq Kl(c)$ del Lema 1.4.1 no pueda cumplirse.

Caso 1. S es de género 0 y $\text{Ends}(S)$ tiene infinitos puntos aislados.

Primero, notemos que para cada n si $g(R_n)$ no es libremente homotópico a R_n , pueden pasar dos cosas. La primera es que hay un $m > n$ tal que todos los componentes de frontera de R_n son mapeados a todos los componentes de frontera R_m . De ser el caso las longitudes de los componentes de frontera de R_m son demasiado grandes y se contradice el Lema de Wolpert. La segunda situación que puede pasar y en la que nos enfocaremos es que hay alguna curva c_n componente de frontera de R_n tal que $g(c_n) \cap \mathcal{P}(R \setminus \overline{R_n}) \neq \emptyset$. Esto se debe a que las componentes de la frontera de R_n son elementos de la descomposición en pantalones

descrita en la sección anterior y los R_n son subsuperficies con fronteras. Recordemos de la Sección 1.2.2 que eliminamos la posibilidad de tener infinitos pantalones de tipo 2, de hecho, a lo más uno puede ocurrir solo en la raíz. Por lo tanto, los únicos pantalones hiperbólicos que aparecen en R son a lo más uno de tipo 2 e infinitos pantalones de tipo 0 o 1. Supongamos que tenemos $g(c_n) \cap \mathcal{P}(R \setminus \overline{R_n}) \neq \emptyset$, para algún c_n . Dado que tenemos una saturación por subsuperficies de género 0, hay alguna geodésica σ_n homotópica a $g(c_n)$ tal que tiene un segmento s_n que corta un par de pantalones hiperbólicos de tipo 0 o 1. El segmento s_n corta los pantalones en un componente de la frontera y regresa en la dirección de la geodésica ortogonal en el par de pantalones correspondiente que también corta la misma componente de la frontera, consulte las Figuras 1.16a y 1.16b. Vamos a dar cotas inferiores a la longitud del segmento s_n .

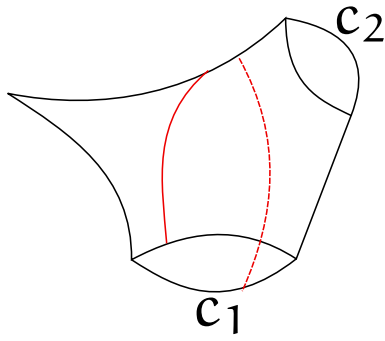


Figura 1.16(a): En rojo está cómo el segmento s_n podría ser en el caso de pantalones de tipo 1. Las longitudes de c_1 es $(2m+1)!$ y de c_2 es $(2m+3)!$, para algún m .

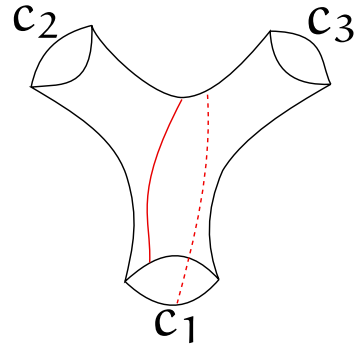


Figura 1.16(b): En rojo está cómo el segmento s_n podría ir en el caso de pantalones de tipo 0. Las longitudes de c_1 es $(2m+1)!$, de c_2 y c_3 son $(2m+3)!$, para algún m .

Supongamos primero que $\mathcal{P}(R)$ tiene infinitos pantalones de tipo 1. Entonces, el Lema 1.4.2 da una N , con $l(a) = (2N+1)!$, de modo que si s_n corta un par de pantalones de tipo 1 con una frontera geodésica de longitud $(2m+1)!$ y la otra de longitud $(2m+3)!$, con $m \geq N$, entonces la desigualdad dada por el Lema 1.4.2 implica $l(s_n) > (2m+1)!(2m+1)$. Si s_n cortara un par de pantalones de tipo 0 en la componente de la frontera de longitud $(2m+1)!$ (las otras dos componentes de la frontera tienen longitud $(2m+3)!$), con $m \geq N$, entonces los cálculos para la prueba de la Proposición 5 de [Mat04] también implican que $l(s_n) > (2m+1)!(2m+1)$. Entonces, si $g(R_n)$ no es libremente homotópico a R_n , habría un pantalón tal que s_n corta algún componente de la frontera del pantalón de longitud $(2m+1)!$ con $m \geq n \geq N$. La discusión anterior muestra, junto con el Lema 1.4.1, que $n(2n+1)! \geq l(g(c_n))$, pero $l(g(c_n)) \geq l(s_n) > (2m+1)!(2m+1)$, una contradicción. El haber asignado las longitudes de los puños de acuerdo a los factoriales de los número impares nos permitió contradecir relativamente fácil el Lema de Wolpert. Otras asignaciones pueden ser posibles. Aquí usamos fuertemente que tenemos una descomposición en pantalones con a lo más un par de pantalones hiperbólicos de tipo 2. De lo contrario, conforme la longitud

de los puños crece la longitud del segmento s_n tendería a cero por el Teorema 7.17.1 (i) de [Bea12]. Por lo tanto, no podríamos controlar la longitud de $g(c_n)$.

En el caso en que $\mathcal{P}(R)$ tenga $r \in \mathbb{N}$ pantalones del tipo 1, P_i^1 , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, entonces dejamos a $N = \min\{n : P_i \subset R_n \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}\} + 1$. El mismo argumento en el caso de pantalones de tipo 0 da el resultado.

Caso 2. S tiene género positivo y posiblemente finitos fines aislados.

Podemos elegir N como en el caso anterior. Sin embargo, tenga en cuenta que dada nuestra construcción para el caso 2 (vea la Sección 1.4.1), la subsuperficie con género o extremos aislados finitos es una superficie no desplazable⁸. Por lo tanto, todos los argumentos son similares al caso 1. □

Fin de la demostración del Teorema 1. Recordemos que $\text{Mod}(R)_n$ son las clases de homotopía de $\text{Map}(S)$ que tienen un representante n -cuasiconforme para la superficie R que construimos. El grupo $\text{Mod}(R_n)$ es el grupo de clases de homotopía de homeomorfismos cuasiconformes de R_n . Así, por el Lema 1.4.3, el mapeo de restricción

$$\begin{aligned} \Psi_n : \text{Mod}(R)_n &\rightarrow \text{Mod}(R_n), \\ [g]_R &\rightarrow [g|_{R_n}] \end{aligned}$$

está bien definido para $n \geq N$. Debido al Lema 1.4.3 y que $\mathcal{P}(R)$ viene de un árbol núcleo, cada homeomorfismo n -cuasiconforme g , con $n \geq N$ cumple que $g((R_{n+1} \setminus \overline{R_n}) = R_{n+1} \setminus \overline{R_n}$. El homeomorfismo g mapea las componentes de la frontera a componentes de la frontera de la misma longitud. Es decir, g mapea pantalones de $R_{n+1} \setminus \overline{R_n}$ en pantalones de $R_{n+1} \setminus \overline{R_n}$ de la misma longitud de componentes de frontera. Esto implica que si $\Psi_m(g) = \Psi_m(f)$, para $m \geq n$ la diferencia entre g y f , i.e. $g \circ f^{-1}$, en $R_{m+1} \setminus \overline{R_m}$ es un homeomorfismo conforme libremente homotópico a la identidad. Por lo tanto, la diferencia entre f y g en $R \setminus \overline{R_n}$ es posiblemente un giro de Dehn a lo largo de cada puño de la descomposición en pantalones de $R \setminus \overline{R_n}$ heredada de R . Pero esto es imposible por el Teorema 1.3.16. En efecto, la constante K de cuasiconformalidad de g está acotada por:

$$K \geq \sqrt{\left(\frac{1 + (2n+1)!}{\pi}\right)^2 + 1}.$$

Pero $K \leq n$, una contradicción. Entonces, Ψ_n es inyectiva para $n \geq N$, por lo que, $\text{Mod}(R)_n$ es numerable. □

Nota 1.4.4. *Utilizando la demostración del Teorema 1 se puede mejorar el resultado: existe una infinidad no numerable de superficies R en S con $\text{Mod}(R)$ numerable. Solo hay que cambiar de manera conveniente las longitudes de las curvas de la descomposición en pantalones dadas por un árbol núcleo. Para ver que las estructuras de Riemann resultantes son distintas entre sí hay que aplicar la estrategia de la demostración del Lema 1.4.3.*

⁸Una subsuperficie $S' \subset S$ es no desplazable si $\forall h \in \text{Homeo}^+(S)$, se tiene que $h(S') \cap S' \neq \emptyset$.

Nota 1.4.5. Cuando S tiene género infinito el método de arriba tiene una limitación importante. Uno debería considerar curvas no separantes que forman parte naturalmente de la descomposición en pantalones de la superficie S . La dificultad ahora es mostrar que un mapeo n -cuasiconforme g (como en la prueba del Teorema 1) tenga la propiedad de que $g(R_{n+1} \setminus \overline{R_n}) = R_{n+1} \setminus \overline{R_n}$. El mapeo g podría actuar como un giro de Dehn a lo largo de la curva que encierra al género. Por lo tanto, no mapearía las fronteras de R_n a ellas mismas. Si no consideramos curvas no separantes, ahora el problema es verificar que $g|_{(R_{n+1} \setminus \overline{R_n})}$ sea conforme.

Capítulo 2

Monodromías del cociclo de Kontsevich-Zorich

En esta segunda parte de la presente tesis probaremos el Teorema 2. En la Sección 2.1 definimos las superficies de traslación y probamos las equivalencias entre tres diferentes definiciones. En la Sección 2.2 establecemos las herramientas de superficies de traslación que necesitamos para probar el Teorema 2. En particular, definimos los homeomorfismos afines, descomposición en cilindros y las superficies de Veech, con especial énfasis en las aritméticas. En la Sección 2.3 definimos el principal objeto a estudiar, la monodromía del cociclo de Kontsevich-Zorich. La naturalidad de la pregunta de P. Sarnak cae en un contexto de monodromía de un haz plano en el espacio móduli de superficies de traslación. Las subsecciones 2.3.1-2.3.3 justifican el nombre de *monodromía de Kontsevich-Zorich*, también dan un contexto más amplio donde la pregunta de P. Sarnak también tiene sentido. El lector es libre de saltarse las mencionadas secciones ya que son muy abstractas pero dan la naturalidad del problema. Dicho esto, en la Subsección 2.3.1 introducimos el espacio móduli de superficies de traslación; sobre de él definimos el haz de Hodge real, un haz plano en el cual definiremos el cociclo de Kontsevich-Zorich. Para ello necesitamos definir la acción de $SL(2, \mathbb{R})$ y la noción de conexión plana, esto lo hacemos en la Subsección 2.3.2. En la Subsección 2.3.3 construimos el cociclo de Kontsevich-Zorich y justificamos finalmente el nombre de *monodromía*. Enunciamos la pregunta de P. Sarnak en la Sección 2.4 y mencionamos los antecedentes para el problema. Aquí también definimos la familia de origamis con los que trabajaremos. También formulamos otra forma del Teorema 2. En la Sección 2.5 están las herramientas de grupos algebraicos que usamos para demostrar el Teorema 2 al que finalmente probamos en la Sección 2.7.

2.1. Superficies de traslación

Cambiaremos un poco la notación para hacerla consistente con la literatura. A una superficie topológica la seguimos denotando como S . Para una superficie de Riemann R en S

y ω una 1-forma holomorfa compatible con R es natural denotar al par (R, ω) como una 1-forma holomorfa, haciendo énfasis en la compatibilidad de ω con R . En la literatura es más usual denotar al par (R, ω) como M para decir que hay una superficie R en S en donde ω es compatible con R . Si es necesario hacer énfasis en ω denotamos al par (R, ω) como (M, ω) . Si es claro quién es ω simplemente denotamos a (M, ω) como M . En adelante toda superficie S será compacta.

Hay tres diferentes definiciones de una superficie de traslación todas ellas equivalentes.

Teorema 2.1.1 (Superficie de traslación). *Una superficie de traslación M en S se define por cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. (Analítica) M es una superficie R en S con una 1-forma holomorfa no idénticamente cero, ω .
2. (Geométrica) M es una estructura de traslación en $S \setminus \Sigma$, i.e $S \setminus \Sigma$ tiene un atlas de traslación maximal, esto es, un atlas maximal donde los cambios de coordenadas son traslaciones. El conjunto $\Sigma \subset S$ es finito. En cada punto p de Σ existe una vecindad U_p y un cubriente holomorfo

$$f_p : U_p^* := U_p \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

con un grado de ramificación finito. Los puntos se llaman singularidades cónicas de ángulo $2\pi k$, para $k \in \mathbb{N}$, k es el grado de ramificación.

3. (Euclidiana) M es el cociente de una unión ajena de polígonos euclidianos compactos $\{P_i\}_{i \in I}$ (I es conjunto de índices finito). Los lados $\{l_{i,k}\}$ de P_i heredan campos vectoriales normales $\mathcal{N}_{l_{i,k}}^{\pm 1}$ inducidos por la orientación del plano. El lado l_i, k de P_i se identifica con el lado l_j, k' de P_j por una traslación τ si $\mathcal{N}_{l_i,k}^+$ es isomorfo a $\mathcal{N}_{l_j,k'}^-$, mediante τ . De manera informal, se pegan lados izquierdos con lados derechos.

Demostración. $1 \implies 2$: Definamos un atlas de traslación para $S \setminus \Sigma$. Tomemos un punto $p \in S \setminus \Sigma$ y una carta (U, ϕ) que contiene a p de la estructura de superficie de Riemann en S con U simplemente conexo. En $\phi(U)$ tenemos $\omega = f(z)dz$. La nueva carta alrededor de p se define como todos los elementos de la forma $\int_{\phi(p)}^{\phi(q)} \omega$, para todo $q \in U$. En estas nuevas coordenadas ω toma la forma dw con $w = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} \omega$, precisamente por la ausencia de un cero. Notemos que en términos de integración un cambio de coordenadas de la estructura compleja es un cambio de variable. Esto quiere decir por un lado, que las coordenadas de traslación que definimos son compatibles con la estructura compleja subyacente. Por otro lado, podemos simplemente denotar a la integración en alguna coordenada de la estructura compleja simplemente como $\int_p^q \omega$. Por lo tanto, los cambios de coordenadas para la estructura de traslación suceden si cambiamos de punto p' en U . Pero siempre podemos conectar en la

¹El signo $+$ ($-$) indica el campo vectorial exterior (interior) en el lado $l_{i,k}$.

vecindad a p con p' con una curva dentro de U . Así, $\int_p^q \omega = \int_{p'}^q \omega - \int_p^{p'} \omega$, vemos entonces que la constante de traslación para el cambio de coordenadas es $-\int_p^{p'} \omega$. Tomemos ahora un cero x de ω . En una carta coordenada de la estructura compleja tenemos $\omega = z^m dz$, para algún m entero. La función $p \rightarrow \int_x^p \omega$ definida en una vecindad de x es el cubriente ramificado buscado, con grado $m + 1$.

$2 \Rightarrow 1$: Como $S \setminus \Sigma$ es una superficie de traslación cuyo cambio de coordenadas son traslaciones, podemos definir la 1-forma localmente como dz , la heredada del plano. Es invariante bajo traslaciones por lo tanto es una forma bien definida en $S \setminus \Sigma$. Por otro lado, como f_p es un cubriente holomorfo al disco ponchado, el Teorema 5.10(ii) de [For81], nos dice que existe un mapeo biholomorfo $\phi_p : U_p^* \rightarrow \mathbb{D}^*$, y $g_k : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$, $g_k(z) = z^k$, con $g_k \circ \phi_p = f_p$. Como f_p es acotado podemos extender a f_p a un cubriente ramificado en U ; por la misma razón ϕ_p se extiende a un biholomorfismo en U_p . A las extensiones las seguimos denotando como f_p y ϕ_p . Definimos la carta alrededor de p como (U_p, ϕ_p) . La unión del atlas de traslación de $S \setminus \Sigma$ con las cartas (U_p, ϕ_p) convierte a M en una superficie de Riemann. Como localmente f_p es de la forma $z \rightarrow z^k$, definimos la 1-forma holomorfa local en p como $f_p'(z)dz = kz^{k-1}dz$. Las 1-formas que definimos son compatibles, en efecto, el halado (*pullback*) de dz bajo f_p es $d(f_p(z)) = kz^{k-1}dz$ y el halado de $kz^{k-1}dz$ bajo una rama de f_p^{-1} es

$$k(f_p^{-1}(z))^{k-1}d(f_p^{-1}(z)) = \frac{k}{k}z^{\frac{k-1}{k}}z^{\frac{1-k}{k}}dz = dz.$$

$1 \Rightarrow 3$: Una 1-forma holomorfa no idénticamente cero, ω en M induce una métrica singular que en coordenadas locales se expresa como $|f(z)||dz|$. Construiremos una triangulación topológica de la superficie M de tal forma que los vértices sean puntos singulares de ω . De la triangulación topológica obtendremos una triangulación geodésica donde las aristas serán segmentos geodésicos de la métrica singular y los vértices los puntos singulares de ω . De este modo podemos *cortar* a lo largo de cada segmento, y como las cartas coordenadas fuera de las singularidades son traslaciones entonces podemos identificar mediante las traslaciones a los segmentos cortados. Así recuperamos a nuestra superficie y obtenemos una descomposición poligonal de la misma.

Usaremos la representación en un $4g$ -polígono regular, P_g , de una superficie de género g para construir una triangulación topológica de M . De esta última construiremos la triangulación geodésica deseada. Para nosotros triangulación significa un encaje de una gráfica a la superficie de tal forma que cada componente conexa del complemento del encaje sea homeomorfa a un disco. Escogemos cualquier punto singular de M de tal forma que sea los vértices de P_g . Escogemos algún vértice de P_g y trazamos líneas rectas a los demás vértices que no están conectados con él. Esto nos dará una triangulación topológica de M , donde el complemento de la gráfica son triángulos topológicos, a la triangulación la denotamos como T_1 . Si no hay puntos singulares en interiores de triángulos entonces tomaremos a T_1 para construir la triangulación geodésica. Si hay puntos singulares en los interiores de los triángulos en T_1 entonces escogemos un punto singular de los interiores y trazamos líneas

rectas que conecten a los vértices del triángulo en el que el punto está. Esto nos dará una nueva triangulación T_2 , repetimos el mismo proceso; si en T_2 no hay punto singulares en el interior de los nuevos triángulos tomaremos a T_2 , si hay puntos interiores procedemos como se hizo para obtener a T_2 . Dado que existe un número finito de puntos singulares este proceso es finito, por lo que existe una triangulación topológica T_n como la deseamos. Los ceros de la 1-forma holomorfa que estén sobre una línea son vértices para las triangulaciones.

Una de las consecuencias del Teorema 18.2.2 de [Str84] nos dice que para cualesquiera dos puntos de una superficie de Riemann compacta y con métrica singular dada por una 1-forma holomorfa, existe una única curva en la clase de homotopía de las curvas que unen a los dos puntos que minimiza la distancia. Este hecho lo aplicaremos a cada arista de la triangulación T_n para obtener la triangulación geodésica como sigue. Si la curva minimizante no contiene puntos singulares entonces reemplazamos la arista por la curva minimizante. En otro caso quitamos la arista, con lo cual resulta una nueva cara pero homeomorfa al disco. Notemos que este proceso no genera nuevas intersecciones entre las curvas minimizantes, es decir, no genera nuevos vértices, ya que las curvas minimizantes para la métrica singular o bien son rectas euclidianas o bien son rectas *quebradas*. Lo último quiere decir que en las curvas minimizantes está al menos un cero de la 1-forma holomorfa, pero por construcción esto no sucede. Al final de este proceso nos quedará una triangulación geodésica como la deseamos.

$3 \implies 2$:

Como S viene de un polígono compacto el cociente será compacto. Construyamos ahora un atlas de superficie de Riemann para S . Primero, veamos que para cada punto $p \in M$ que proviene del interior de algún polígono podemos escoger una vecindad circular contenida en el interior del polígono. El cambio de coordenadas será la identidad o una traslación al interior de otro polígono. Similarmente tenemos que si p proviene de la arista de un polígono podemos formar una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{C}$ haciendo un cociente de una pequeña vecindad de cada lado de dos polígonos que se identifican en p . El cambio de coordenadas será una traslación. Así, hemos dotado a $S \setminus \Sigma$ de una estructura de superficie de Riemann, donde Σ es el conjunto finito de puntos que provienen de los vértices de los polígonos. Alrededor de $p \in \Sigma$ podemos construir un cubriente ramificado $k : 1$ holomorfo al disco ponchado. En efecto, como p proviene de un vértice, y cada vértice pertenece a un lado de un polígono identificado a con otro lado por una traslación quiere decir que cualquier vector tangente en un lado de un polígono se identifica con otro mediante la función identidad. Tenemos además que el número de lados es finito, como consecuencia, el transporte paralelo de cualquier vector tangente cerca de p es trivial. Es decir hemos hecho una vuelta alrededor de p con ángulo $2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$. Podemos entonces dividir en k sectores a una vecindad de p donde cada sector representa una vuelta alrededor del disco. El cubriente ramificado es $z \rightarrow z^k$.

□

Nota 2.1.2. En la definición geométrica se puede cambiar la condición de cubriente por la

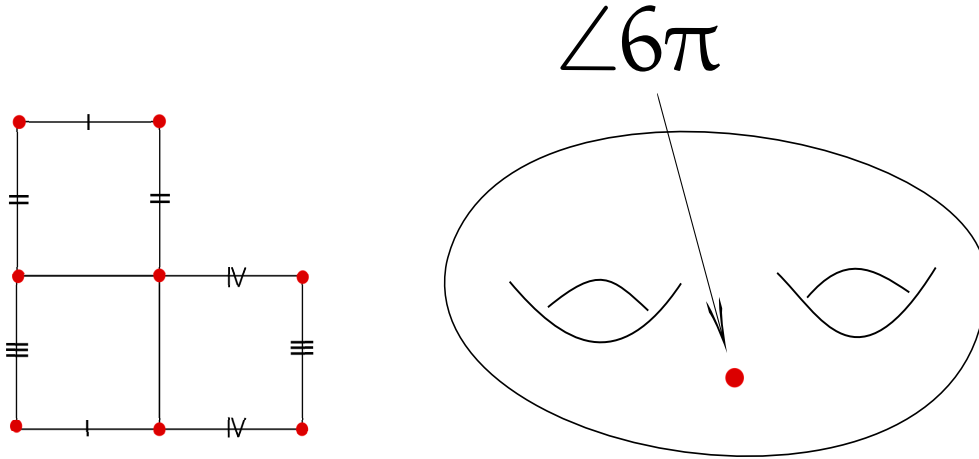


Figura (2.1) Superficie de traslación, donde se identifican lados opuestos. La singularidad cónica está marcada en rojo.

de: “una vecindad de la singularidad isométrica al disco, este último con métrica

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2,$$

con α un entero positivo”. De ahí el nombre de singularidad cónica. Otra condición equivalente es que cualquier carta de traslación en una vecindad de $p \in \Sigma$ se puede extender analíticamente de forma univaluada a toda la vecindad menos p y la continuación tiene índice entero.

Para una primera exposición a la teoría de superficies de traslación la mejor manera de pensar en superficies de traslación es en la definición euclidiana. Gracias a Yoccoz [Yoc07] podemos pensar simplemente en un polígono conexo identificando lados por traslaciones. Un ejemplo de una superficie de traslación es la que denominamos *figura L*, que está en la Figura 2.1. Es una superficie de género 2 con una singularidad cónica de ángulo 6π . El ejemplo pertenece a un grupo especial de superficies planas llamadas superficies de Veech aritméticas; son los objetos con los que trabajaremos.

2.2. Superficies de Veech y origamis

Si tenemos una curva cerrada esencial simple (sin puntos singulares) C^1 en una superficie M , entonces la curva cerrada tiene una vecindad tubular que es isométrica a un cilindro plano sin frontera. La vecindad tubular es maximal si sus componentes de frontera contienen una singularidad. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.1 (Cilindro). *Un cilindro en una superficie M es un encaje de un cilindro euclidiano sin frontera, tal que es una vecindad tubular maximal de una curva cerrada esencial simple sin puntos singulares de M .*

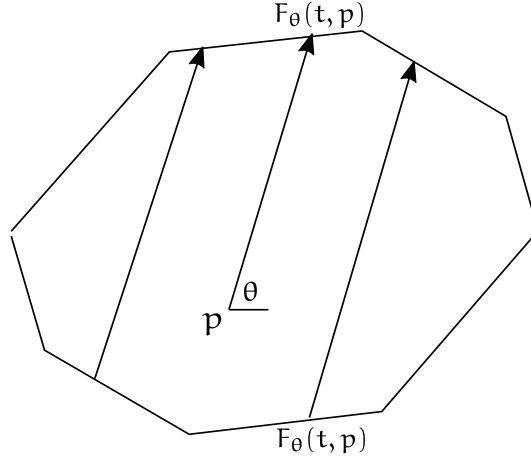


Figura (2.2) Flujo lineal en una dirección θ en una superficie de translación.

Definición 2.2.2 (Alma del cilindro). *Llamamos alma del cilindro a la clase de homología de la curva cerrada correspondiente.*

A veces también llamaremos alma del cilindro a un representante en la clase de homología. Como las construcciones que hacemos son hasta isotopía, el abuso de lenguaje no representa mayor problema.

Flujo lineal en una dirección. De la definición euclidiana (Teorema 2.1.1-3) de una superficie de translación M , vemos que está bien definido un flujo lineal medible en una dirección θ sobre M , F_θ . Las trayectorias del flujo son las rectas del plano con un ángulo θ proyectadas a la representación poligonal de M (ver Figura 2.2). En términos de la definición geométrica, el flujo es

$$F_\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \\ (t, p) \rightarrow F_\theta(t, p) := \varphi^{-1}(te^{i\theta} + \phi(p)).$$

Donde las funciones $\phi, \varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ son cartas de translación de M adecuadas para que la expresión tenga sentido. El flujo está bien definido, ya que no depende de las cartas ϕ, φ ; los cambios de coordenadas son traslaciones. El flujo F_θ también se puede interpretar como el flujo geodésico dado por la métrica singular de M (recordemos el paso $1 \implies 3$ en la demostración del Teorema 2.1.1) restringido a la dirección θ . Sin embargo, hay puntos de discontinuidad, en concreto si $q \in \Sigma$ y existe $t \in \mathbb{R}$ con $F_\theta(t, p) = q$ hay una ambigüedad para definir a $F(t', p)$ con $t' > t$, ya que de la singularidad parten más de una trayectoria. Afortunadamente solo hay un número finito de este tipo de trayectorias, así a $F_\theta(t', p)$ le podemos asignar algún valor arbitrario dentro de M , lo que convierte a F_θ en una transformación medible.

Definición 2.2.3 (Conexiones de silla). *Consideremos $t, t' \in \mathbb{R}$ con $t' < 0 < t$. Una conexión de silla es una trayectoria*

$$\begin{aligned}\gamma &: [t', t] \rightarrow M, \\ t &\rightarrow F(t, p)\end{aligned}$$

del flujo F_θ con $p \in M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = p$ y $F(t, p), F(t', p) \in \Sigma$. Es decir, una trayectoria del flujo lineal que une dos puntos singulares (no necesariamente distintos).

Obtención de cilindros mediante el flujo F_θ . Fijemos una dirección θ en una superficie M y supongamos que existe una trayectoria cerrada γ para F_θ , i.e. existen $p \in M \setminus \Sigma$ y $T \in \mathbb{R}$ con $F(t, p) = F(t + T, p) = \gamma(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces, al ser F_θ un flujo lineal en M podemos encontrar un anillo isométrico a un cilindro euclidiano como vecindad tubular de $\gamma([0, T])$ (esto se deduce de la equivalencia de flujos lineales en superficies de traslación y transformaciones de intercambio de intervalos, vea [Yoc07]). El anillo pudiera ser no maximal (respecto a la contención), así, agrandamos la vecindad tubular. Debe existir entonces un cilindro tal que su frontera sean conexiones de silla, de otro modo tendríamos un toro.

Definición 2.2.4 (Descomposición en cilindros). *Para una superficie de traslación M , una descomposición en cilindros en dirección θ es una colección finita de cilindros $\{C_i\}$, $C_i \subset M$ con las siguientes propiedades:*

1. *El alma de C_i es una trayectoria cerrada del flujo F_θ para todo i .*
2. *$M \setminus \{C_i\}$ es un 1-simplejo compuesto por conexiones de silla.*

Definición 2.2.5 (Homeomorfismo afín). *Un homeomorfismo afín es un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ que preserva orientación, que deja invariante al conjunto de singularidades de M y en coordenadas locales de la estructura de traslación es una transformación afín², i.e. $f(z) = A \cdot z + b$ con $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{C}$ para una coordenada local z . Denotamos como $\text{Aff}(M)$ al grupo de homeomorfismos afines de M .*

Ejemplos 2.2.6 (Homeomorfismo afines en superficies de género 0 y 1).

1. **Homeomorfismo afín en el toro.** *El ejemplo más sencillo de un homeomorfismo afín es un giro de Dehn a lo largo de una curva en el toro, vea la Figura 2.3. La curva verde es sobre la cual el giro de Dehn se hace, la llamamos γ , la curva azul es α . La curva $T_\gamma(\alpha)$ la debemos expresar en términos de la estructura plana del toro. Para ello, cortamos sobre la diagonal y pegamos por una traslación, de modo que en la estructura plana del toro $T_\gamma(\alpha)$ es una diagonal. Finalmente regresando a la estructura del toro, el giro de Dehn tiene una expresión $T_\gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + b$, $b \in \mathbb{C}$.*

²La expresión $A \cdot z$ es una multiplicación por una matriz y el vector (x, y) con $z = x + iy$.

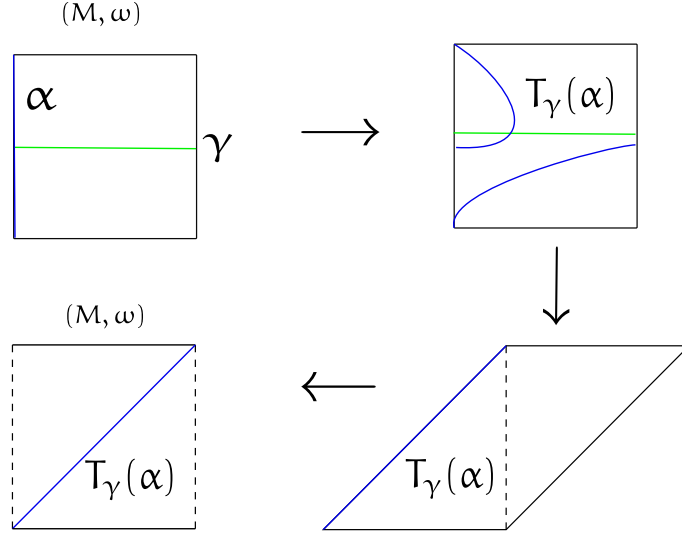


Figura (2.3) Homeomorfismo afín en el toro.

2. **Giros de Dehn en cilindros.** En general en cualquier cilindro de ancho w y altura h podemos formar un homeomorfismo afín en él. Vea la Figura 2.4; definiendo el módulo de un cilindro como $\mu = \frac{w}{h}$, entonces, al aplicar la matriz parabólica $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deformamos el cilindro pero con un corte y pegado volvemos a la estructura del cilindro. El corte y pegado es la traslación, en este caso por $-w$.

Proposición 2.2.7. Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo afín, entonces fuera de las singularidades cónicas de M la parte lineal de f es constante.

Demostración. Denotemos como $\phi, \varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ cartas de traslación de la estructura (M, ω) . Entonces $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = A \cdot z + b$, con $\varphi(f(p)) = w, \phi(p) = z$. En un cambio de coordenadas en el dominio de f , la nueva carta de traslación es $\tilde{\phi}(p) = \phi(p) + c, c \in \mathbb{C}$, i.e. $\tilde{z} = z + c$. Entonces,

$$\varphi \circ f \circ \phi^{-1}(\tilde{z} - c) = A \cdot (\tilde{z} - c) + b = \varphi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{z}) = A \cdot (\tilde{z}) - A \cdot c + b.$$

De manera análoga, un cambio de coordenadas en la imagen de f es solo una traslación, por lo que la parte lineal no cambia tampoco en este caso. $\square$

Observación 2.2.8. En general los homeomorfismos afines no son diferenciables en los ceros de ω .

Una aplicación de la Proposición 2.2.7 nos permite construir más ejemplos de homeomorfismos afines:

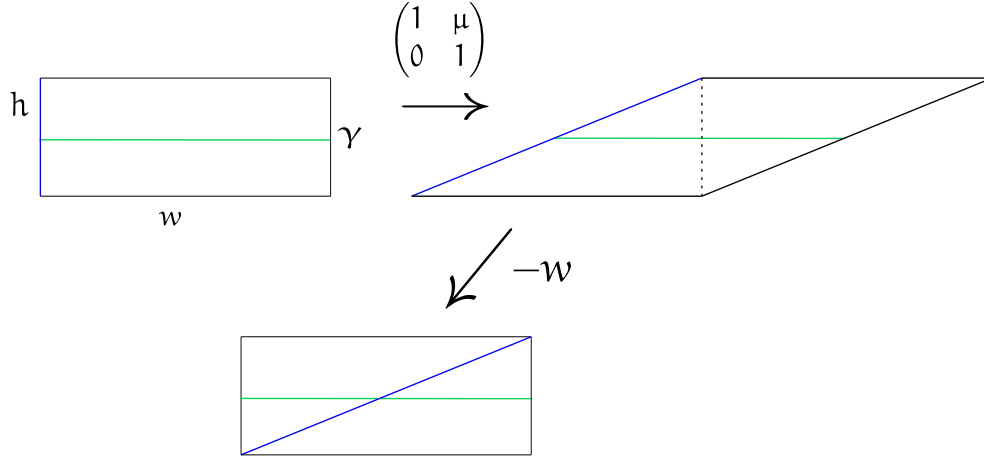


Figura (2.4) Homeomorfismo afín en un cilindro.

Proposición 2.2.9. *Si una superficie M admite una descomposición en cilindros $\{C_i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ en alguna dirección θ , con respectivas almas $\{\gamma_i\}$, y si los módulos (vea el Ejemplo 2.2.6-2) de los cilindros satisfacen $\mu_i/\mu_j \in \mathbb{Q}$. Entonces, existen números naturales m_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que, $f = \prod_{i=1}^n T_{\gamma_i}^{m_i}$ es un homeomorfismo afín de M . Donde T_{γ_i} es un giro de Dehn a lo largo de γ_i .*

Demostración. Tomemos el cilindro C_1 , y consideremos los racionales irreducibles de los cocientes de los módulos $r_j/s_j = \mu_1/\mu_j$, $j \geq 2$. Consideremos al mínimo común múltiplo de las s_j , i.e. $p = \text{mcm}(s_2, \dots, s_n)$. Por lo tanto, $\mu_1 p = \mu_j p(r_j/s_j)$, así definimos $m_1 := p$ y $m_j := p(r_j/s_j)$, para $j \geq 2$. Definamos

$$f := \prod_{i=1}^n T_{\gamma_i}^{m_i}.$$

Notemos que los cilindros C_i son dominios de alguna carta de traslación, y por el Ejemplo 2.2.6-2 f es un homeomorfismo afín en C_i . La Proposición 2.2.7 impone la condición necesaria de que la derivada sea constante excepto tal vez en los puntos singulares. Pero como tenemos que $\mu_i m_i = \mu_j m_j$, la derivada de f en cada cilindro C_i es la misma. No es difícil ver que la derivada de f sigue siendo la misma que en los cilindros en los puntos de la frontera que no son singularidades. Finalmente observemos que f deja las singularidades invariantes. $\square$

Definición 2.2.10 (Multigirot de Dehn afín). *A un homeomorfismo como el mencionado en la Proposición 2.2.9 lo llamamos un multigirot de Dehn afín.*

Ejemplo 2.2.11 (Multigirot de Dehn afín). *En la Figura 2.5 tenemos una descomposición en dos cilindros en la dirección horizontal de una superficie de traslación. Supongamos que los módulos de los cilindros satisfacen $\mu_1 r = s \mu_2$, con $r/s \in \mathbb{Q}$ irreducible. Por la Proposición 2.2.9, una potencia adecuada de los giros de Dehn a lo largo de cada alma del cilindro nos permite construir un homeomorfismo afín, a saber $f = T_{\gamma_1}^r \circ T_{\gamma_2}^s$.*

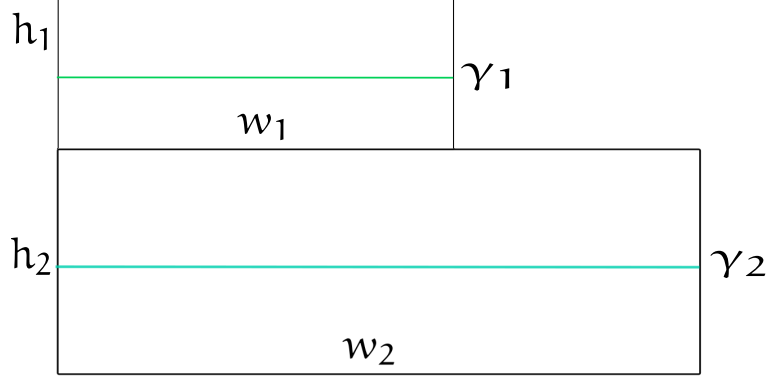


Figura (2.5) Descomposición de una superficie en cilindros.

De la Proposición 2.2.7 tenemos que la derivada de un homeomorfismo afín fuera de los ceros de ω está bien definida y es constante. Entonces podemos definir un homomorfismo

$$\begin{aligned} D : \text{Aff}(M) &\rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) \\ f &\rightarrow Df \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definición 2.2.12 (Grupo de Veech). *El grupo de Veech de una superficie M es*

$$\text{SL}(M) := D(\text{Aff}(M)).$$

Proposición 2.2.13 (Lema 5.9 de [MT02]). *El grupo $\text{SL}(M)$ es un subgrupo discreto de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.*

Recordemos que una retícula Γ de un grupo localmente compacto G , es un subgrupo discreto $\Gamma \subset G$, tal que el cociente G/Γ tiene volumen finito respecto a la medida G -invariante μ , inducida por la medida de Haar de G en el cociente G/Γ .

Definición 2.2.14 (Superficie de Veech). *Una superficie M es de Veech si $\text{SL}(M)$ es una retícula de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.*

Definición 2.2.15 (Superficies de Veech aritméticas/no aritméticas). *Una superficie de Veech es aritmética si $\text{SL}(M)$ es conmensurable a un subgrupo de índice finito de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, i.e. si $\text{BSL}(M)\text{B}^{-1} \cap \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ es un subgrupo de índice finito, para algún $\text{B} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. En caso contrario decimos que es no aritmética.*

Un ejemplo de superficie de Veech aritmética está en la Figura 2.1 (en la siguiente sección será claro por qué), y como ejemplo de no aritmética tenemos al polígono en la Figura 2.6, vea el Teorema 1.1 en [Vee89].

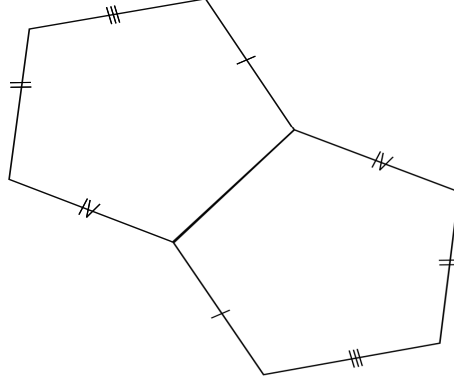


Figura (2.6) Superficie de Veech no aritmética obtenida del doble pentágono con sus respectivas identificaciones.

2.2.1. Origamis

Las superficies de Veech aritméticas son los objetos con los que trabajaremos. Otro nombre para una superficie de Veech es el de *origami*. A continuación, daremos dos definiciones equivalentes de origami o superficie de Veech pero sin demostración.

Definición 2.2.16 (Superficie teselada por cuadrados/origami). *Sea (M, ω) una superficie de traslación con ω su 1-forma holomorfa, y $(\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, dz)$ un toro plano. Llamamos a (M, ω) una superficie teselada por cuadrados, si existe un cubriente ramificado $f : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{T}^2, dz)$, tal que la imagen de los puntos de ramificación es un punto marcado $q \in \mathbb{T}^2$, y:*

1. f mapea los ceros de ω a q ,
2. El halado de dz bajo f es ω , i.e. $f^*(dz) = \omega$.

Un origami también se puede definir combinatoriamente con un par de permutaciones h y v , que denotan las identificaciones horizontales y verticales de cuadrados (i.e. preimágenes del toro bajo p) indexados por los elementos de las permutaciones. De tal forma que identificamos el lado derecho del cuadrado i con el lado izquierdo de $h(i)$, similarmente pegamos el lado superior de i con el lado inferior de $v(i)$. Como ejemplo consideremos el origami dado por los datos combinatorios $h = (1)(2, 3)(4, 5, 6, 7)$ y $v = (4, 2, 1)(5, 3)(6)(7)$ como se aprecia en la Figura 2.7.

La equivalencia entre la definición de una superficie de Veech aritmética y la Definición 2.2.16 se debe a Gutkin y Judge [GJ00]. Una demostración accesible está en [HL06], Apéndice C.

Ahora podemos resumir las diferentes definiciones de una superficie de Veech aritmética u origami.

Definición 2.2.17 (Superficie de Veech aritmética/origami). *Una superficie M es de Veech aritmética (o un origami) si cualesquiera de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:*

1			
2	3		
4	5	6	7

Figura (2.7) Origami obtenido a partir de dos permutaciones, los lados se identifican por traslaciones.

1. $SL(M)$ es retícula de $SL(2, \mathbb{R})$ y es conmensurable a $SL(2, \mathbb{Z})$,
2. M es una superficie teselada por cuadrados isométricos entre sí,
3. M se obtiene del cociente inducido por un par de permutaciones $\mathbf{h}, \mathbf{v}$. Donde $\mathbf{h}$ indica las traslaciones horizontales y $\mathbf{v}$ las traslaciones verticales (como en un párrafo anterior).

Es posible que tengamos varios origamis tales que pudieran ser *múltiplos* de algún otro origami (ver Figura 2.8). Entonces necesitamos trabajar con aquellos que no lo sean. A estos los llamamos origamis reducidos.

Definición 2.2.18 (Grupo de holonomía). *Dada $\gamma \in H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z})$ denominamos holonomía de γ al número complejo $\int_\gamma \omega$. El grupo $\text{Hol}(M) := \{\int_\gamma \omega : \gamma \in H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z})\}$ lo llamamos el grupo de holonomía relativa de M .*

Definición 2.2.19 (Origami reducido [MMY14]). *Un origami M es reducido si no existe un cubriente $\pi' : M \rightarrow \mathbb{T}^2$, ramificado en $\{0\}$ y un cubriente $\pi'' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de grado mayor que 1 tal que $f = \pi'' \circ \pi'$.*

Proposición 2.2.20. *Un origami M es reducido si y solo si el grupo de holonomía es $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$*

Demostración. Si el grupo de holonomía de un origami no es $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ tiene como grupo de holonomía una subretícula de $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$. Entonces, existe un segmento horizontal con holonomía $(\mathbf{n}, 0)$ y un segmento vertical con holonomía $(0, \mathbf{m})$, tal que $\langle (\mathbf{n}, 0), (0, \mathbf{m}) \rangle = \text{Hol}(M)$. Esto quiere decir que el origami es teselado por rectángulos isométricos de área $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$. Por lo que, es posible construir π' de tal forma que manda a cada rectángulo de área $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ al toro de área $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbb{T}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^2$. Construimos π'' de tal forma que manda cada cuadrado unitario de $\mathbb{T}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^2$ al toro unitario.

Notemos que mediante el mapeo inducido en la homología por f se tiene que $\text{Hol}(M) \subseteq \text{Hol}(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$. Ahora, si el origami M no es reducido entonces, al tener a π'' cubriente intermedio de grado mayor a 1, la holonomía no puede tener a los generadores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, más aún no puede tener a la vez a ningún generador de la retícula $\text{Hol}(\mathbb{T}^2)$. $\square$

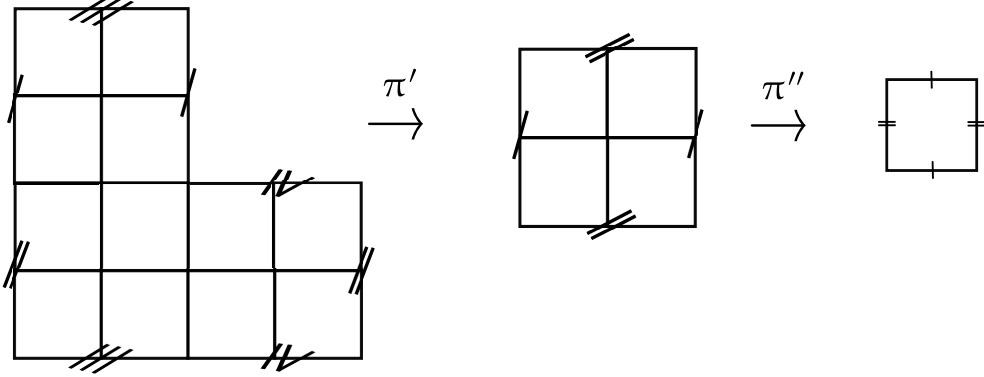


Figura (2.8) Origami no reducido. Se indican las identificaciones de los lados en cada caso.

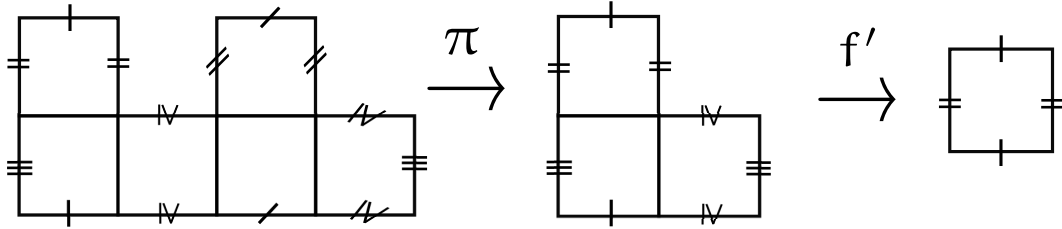


Figura (2.9) Origami reducido pero no primitivo. Se muestran las respectivas identificaciones en cada caso.

Además de origamis reducidos, también tenemos origamis que pueden ser cubrientes de otros origamis, a los origamis que no son cubrientes de algún otro origami los llamamos primitivos. Más precisamente:

Definición 2.2.21 (Origami primitivo). *Un origami M es primitivo si su cubriente asociado $f : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{T}^2, dz)$ no tiene cubrientes intermedios, excepto p e Id .*

Observación 2.2.22. *Un origami primitivo siempre es reducido. Al revés no necesariamente. Para un ejemplo vea la Figura 2.9, donde las identificaciones son por traslaciones y $f = f' \circ \pi$.*

Proposición 2.2.23 (Proposición 6.1 de [MMY14]). *Si M es un origami de género 3 con una sola singularidad, entonces M es reducido si y solo si es primitivo.*

Trabajaremos con superficies de género 3 con una sola singularidad. Así, podemos intercambiar libremente los adjetivos de reducido y primitivo haciendo el estudio de la monodromía de Kontsevich-Zorich más fácil.

2.3. Monodromía del cociclo de Kontsevich Zorich

Acción de $\text{Mod}(\mathcal{M})^3$ en la homología. Fijemos una superficie $\mathcal{M}$. El grupo $\text{Mod}(\mathcal{M})$ manda curvas en curvas respetando sus clases de isotopía, por lo tanto actúa en $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$. Como $\text{Mod}(\mathcal{M})$ actúa por homeomorfismos preserva el número de intersección algebraico (vea el Capítulo 6 de [FM12]). Este último dota a $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ de una estructura simpléctica. Así, tenemos una representación de $\text{Mod}(\mathcal{M})$ al grupo de transformaciones simplécticas de $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$, i.e. $\tilde{\rho} : \text{Mod}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Sp}(H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}))$. Podemos extender la acción por escalares a la homología con coeficientes en $\mathbb{R}$, a la representación resultante la denotamos como ρ .

Proposición 2.3.1 (Lema 5.7 de [MT02]). *Consideremos una superficie $\mathcal{M}$ de género mayor que 1. Entonces, el mapeo natural $\iota : \text{Aff}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{M}), f \rightarrow [f]$ es un encaje.*

Demostración. Es claro que ι es un homomorfismo, por lo que basta verificar que el kernel es solo la identidad. Primero, observemos que un homeomorfismo afín f es un homeomorfismo extremal, i.e. tiene la menor distorsión en su clase de isotopía. Lo anterior se deduce de los Teoremas 8.1 y 8.2 y sus demostraciones en [Leh87], donde se da la caracterización de homeomorfismos cuasiconformes extremales. Dichos homeomorfismos son aquellos que mapean diferenciales cuadráticas en diferenciales cuadráticas que en coordenadas locales son una transformación lineal diagonal. Como f es afín, se tiene que $f(z) = A \cdot z + b$, luego como $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, A se descompone en $K'A'\tilde{K}$, con A' matriz diagonal y K' y $\tilde{K}$ rotaciones. Así, f mapea la diferencial cuadrática $(K \cdot \omega)^2$ en la diferencial cuadrática $(K'^{-1}\omega)^2$ mediante el mapeo A' . Por lo que, si $\iota(f) = [\text{id}]$, la distorsión de f es idénticamente 1 por ser homeomorfismo cuasiconforme extremal, lo cual lo vuelve un automorfismo de la estructura subyacente de superficie de Riemann de $\mathcal{M}$. Pero un automorfismo de una superficie de Riemann compacta de género mayor que 1 no puede ser isotópico a la identidad a menos que sea él mismo la identidad ([Fra66]). Así, $f = \text{id}$. $\square$

Acción de $\text{Aff}(\mathcal{M})$ en $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Consideremos un origami $\mathcal{M}$. En vista de la proposición anterior el grupo de homeomorfismos afines actúa en la homología. Consideremos el mapeo $f_* : H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ inducido por el cubriente asociado $f : (\mathcal{M}, \omega) \rightarrow (\mathbb{T}^2, dz)$, entonces definimos

$$H_1^{(0)}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) := \text{Ker}(f_*).$$

De manera equivalente,

$$H_1^{(0)}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) := \{\gamma \in H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) : \int_{\gamma} \omega = 0\}. \quad (2.2)$$

La acción de $\text{Aff}(\mathcal{M})$ descompone al espacio $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ en dos subespacios simplécticamente ortogonales,

$$H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R})^{\text{st}} \oplus H_1^{(0)}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \quad (2.3)$$

³Nos referimos a $\text{Mod}(\mathbb{R})$ para la superficie $\mathbb{R}$ compatible con $\mathcal{M}$.

donde el primer espacio es el llamado espacio tautológico de dimensión 2. La acción de $\text{Aff}(M)$ en $H_1(M, \mathbb{R})^{\text{st}}$ es la acción de $\text{SL}(M)$. Pero si M es origami, $\text{SL}(M) \subset \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R})^{\text{st}})$ es una retícula aritmética. Por lo que, estudiamos la acción de los homeomorfismo afines en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$.

Nota 2.3.2. *La descomposición (2.3) también es válida para cualquier superficie M , con la definición de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$ como en (2.2).*

Definición 2.3.3 (Monodromía de Kontsevich-Zorich). *La imagen de la aplicación*

$$\rho_0 := (\rho \circ \iota)|_{H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})} : \text{Aff}(M) \rightarrow \text{Sp}(H_1^{(0)}(M, \mathbb{R}))$$

es la monodromía de Kontsevich-Zorich de un origami M .

2.3.1. Espacio móduli de superficies de traslación

En lo que resta de la sección daremos una motivación para el nombre de *monodromía de Kontsevich-Zorich*. Es una exposición técnica y se le invita al lector a continuar a la Sección 2.4 si no quiere pasar por el aparato abstracto que expondremos. Sin embargo, necesariamente habremos de mencionar objetos definidos en esta sección para exponer ciertos ejemplos de grupos aritméticos y delgados en el área de las superficies de traslación.

La motivación tiene por objeto mostrar que la pregunta de P. Sarnak es en realidad más profunda. Tiene un aspecto dinámico y es aplicable a más objetos aparte de los origamis. Para ello introduciremos el *espacio móduli de superficies de traslación*. Definiremos el a veces llamado *haz de Hodge real* sobre el móduli y finalmente sobre este haz definiremos el cociclo de Kontsevich-Zorich. El nombre de monodromía es en realidad una holonomía respecto a una conexión plana en al haz de Hodge real que tiene mucha relación con el cociclo de KZ. Parte de la exposición tiene mucha influencia e inspiración del primer capítulo de [Mat18].

Espacio de superficies de traslación. Consideremos una superficie topológica S con género fijo g y definamos el conjunto

$$\mathcal{L}_g := \{(M, \omega) : \omega \text{ la 1-forma holomorfa de } M, \text{ con } M \text{ superficie de traslación en } S\}.$$

Dotaremos a $\mathcal{L}_g$ de una topología como la define Yoccoz en [Yoc07]. Fijemos un punto p_0 en S y consideremos su cubriente universal basado en p_0 , $\pi : \tilde{S}_{p_0} \rightarrow \tilde{S}$. Mediante π levantamos la estructura de traslación (M, ω) en S a $\tilde{S}_{p_0}$. Esto nos permite ver a ω como una función continua de $\tilde{S}_{p_0}$ a $\mathbb{C}$ de la siguiente manera. Tomamos un punto cualquiera q de S , y alguna curva γ que una p_0 con q , así la clase de homotopía de γ , $[\gamma] \in \tilde{S}_{p_0}$. Entonces $\int_{[\gamma]} \omega$ está bien

definida ya que ω es una 1-forma cerrada. De modo que tenemos un mapeo de $\mathcal{L}_g$ al espacio de funciones continuas con valores en el plano complejo en $\tilde{S}_{p_0}$, i.e. $C(\tilde{S}_{p_0}, \mathbb{C})$. El mapeo es:

$$\begin{aligned} I_{p_0} : \mathcal{L}_g &\rightarrow C(\tilde{S}_{p_0}, \mathbb{C}), \\ (M, \omega) &\rightarrow ([\gamma] \rightarrow \int_{[\gamma]} \omega), \end{aligned} \quad (2.4)$$

con $[\gamma]$ clase de homotopía de curvas que empiezan en p_0 y terminan en algún punto $q \in S$.

Proposición 2.3.4. *La aplicación (2.4) es inyectiva.*

Demostración. Si $I_{p_0}((M_1, \omega_1)) = I_{p_0}((M_2, \omega_2))$, entonces las estructuras de superficie de traslación inducidas por ω_1 y ω_2 coinciden en S . En efecto, considere un punto $q \in S$ y un abierto simplemente conexo $U \subset S$ de q . Para cada $p \in U$ considere una curva $\gamma_{q,p}$ que una a q con p y cuya imagen esté contenida en U . Considere también curvas $\gamma_{p_0,p}$ y $\gamma_{p_0,q}$ que unan a p_0 con p y q respectivamente. Por un lado, tenemos que para la curva $\gamma := \gamma_{p_0,q} + \gamma_{q,p} - \gamma_{p_0,p}$ se cumple que $\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega_2$, por hipótesis. Por otro lado,

$$\int_{\gamma_{p_0,q}} \omega_1 = \int_{\gamma_{p_0,q}} \omega_2 \text{ y } \int_{\gamma_{p_0,p}} \omega_1 = \int_{\gamma_{p_0,p}} \omega_2,$$

por lo tanto, $\int_{\gamma_{q,p}} \omega_1 = \int_{\gamma_{q,p}} \omega_2$. De donde se deduce que las estructuras de Riemann compatibles con ω_1 y ω_2 , respectivamente, también son compatibles entre sí (recordemos cómo se obtienen las estructuras de traslación, vea la demostración del Teorema 2.1.1). Por lo tanto, $\omega_1 = \omega_2$. $\square$

Topología en $\mathcal{L}_g$. El espacio $C(\tilde{S}_{p_0}, \mathbb{C})$ tiene la topología compacto-abierta. Entonces, gracias a la proposición anterior dotamos a $\mathcal{L}_g$ con la topología de subespacio dado por I_{p_0} .

Observación 2.3.5. *Si cambiamos de punto p_0 la topología en $\mathcal{L}_g$ es la misma.*

Ejemplo 2.3.6 (Un abierto de $\mathcal{L}_g$). *Consideremos la superficie de traslación M obtenida a partir de la figura L (vea Figura 2.10). Tomemos el punto p_0 el punto singular de M . En la Figura 2.10 hay diferentes etiquetas para el punto p_0 para facilitar la visualización de las siguientes curvas. Las curvas que tomamos son $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ que unen respectivamente al punto p_0 con la etiqueta p_1, p_2, p_3, p_4 como se ve en la Figura 2.10. Las clases de homotopía $[\gamma_i], i \in \{1, 2, 3, 4\}$, pertenecen a $\tilde{S}_{p_0}$. Notemos que las clases $[\gamma_i]$ son base de la homología de L . Consideremos los compactos $K_i = \{[\gamma_i]\} \subset \tilde{S}_{p_0}$ y vecindades $U_i \subset \mathbb{C}$ de $\int_{[\gamma_i]} \omega$ de radio*

$\epsilon \ll 1$. Entonces tenemos abiertos de funciones $V(K_i, U_i) \subset C(\tilde{S}_{p_0}, \mathbb{C})$. Así, los elementos del abierto $U = I_{p_0}^{-1}(\bigcap_{i=1}^4 V(K_i, U_i))$ son las 1-formas holomorfas con una representación poligonal cercana a la figura L.

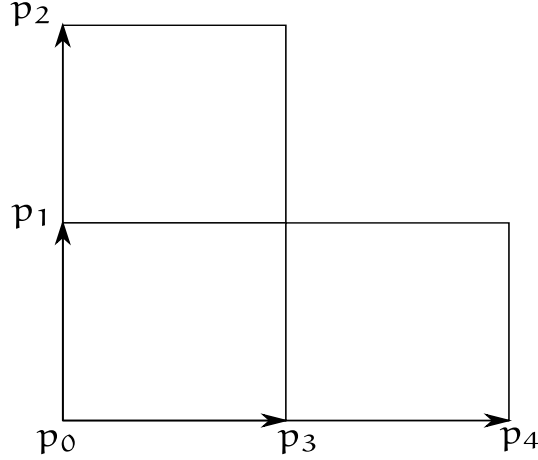


Figura (2.10) Abierto de la figura L.

Definición 2.3.7 (Equivalencia de 1-formas holomorfas). *Dos superficies de traslación, (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) en S son equivalentes si existe un biholomorfismo*

$$L : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2),$$

con $L^* \omega_2 = \omega_1$.

Según el Teorema 2.1.1 la anterior definición es equivalente a la siguiente definición.

Definición 2.3.8 (Equivalencia de estructuras de traslación). *Denotamos como $(S, \{\phi_\alpha^\omega\})$ al atlas de la estructura de superficie de Riemann en S obtenida de la definición geométrica de una superficie de traslación (M, ω) en S (vea el Teorema 2.1.1 punto 2). A dicho atlas también lo llamaremos estructura de traslación. El subíndice $\alpha \in I$ con I un índice. Se debe entender que para cada ϕ_α^ω hay un abierto $U_\alpha \subset S$ que es dominio de ϕ_α^ω . Dos estructuras de traslación $(S, \{\phi_\alpha^{\omega_1}\})$ y $(S, \{\phi_\beta^{\omega_2}\})$ son equivalentes si existe un biholomorfismo*

$$L : (S, \{\phi_\alpha^{\omega_1}\}) \rightarrow (S, \{\phi_\beta^{\omega_2}\}),$$

tal que en las coordenadas de traslación

$$L(\phi_{\alpha'}^{\omega_1})^{-1}(z) = z + b,$$

donde $z = \phi_{\beta'}^{\omega_2}$, para algún β' . Dicho de otro modo, el halado de la estructura de traslación $(S, \{\phi_\beta^{\omega_2}\})$ bajo L , i.e. $(S, \{\phi_\beta^{\omega_2} \circ L\})$, es compatible con $(S, \{\phi_\alpha^{\omega_1}\})$.

Definición 2.3.9 (Espacio móduli de superficies de traslación). *Con la relación de equivalencia en la Definición 2.3.7,*

$$\Omega\mathcal{M}_g := \mathcal{L}_g / \sim$$

es el espacio móduli de superficies de traslación de género g con la topología cociente.

⁴Es un ligero abuso de notación, obviamente es donde $I_{p_0}^{-1}$ esté definida.

Acción de $\text{Mod}(\mathcal{M})$ y $\text{Map}(\mathcal{S})$ en $\mathcal{L}_g$. Fijemos una superficie $\mathcal{M} \in \mathcal{L}_g$. Usando la Definición 2.3.8 un homeomorfismo que preserva orientación $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ actúa mediante halados en $\mathcal{L}_g$, i.e.

$$f \cdot (\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^\omega\}) := (\mathcal{S}, \{\phi_{\tilde{\alpha}}^\omega \circ f\}),$$

donde $\tilde{\alpha}$ está en el mismo índice que α . Definimos el espacio

$$\Omega\mathcal{T}_g := \mathcal{L}_g / \text{Map}^0(\mathcal{S}),$$

recordemos que $\text{Map}^0(\mathcal{S})$ es la componente conexa del homeomorfismo identidad. Una forma de ver a los elementos de $\Omega\mathcal{T}_g$ son como clases de equivalencia de estructuras de traslación que se pueden deformar mediante una isotopía de la identidad. En efecto, la carta $\phi_\alpha^\omega \circ f$ es isotópica a la carta $\phi_\alpha^\omega \circ \text{id}$, mediante la isotopía de f a id . Notemos que $\Omega\mathcal{T}_g$ es un haz sobre el espacio de Teichmüller de superficies de Riemann de género g . Los grupos $\text{Mod}(\mathcal{M})$ y $\text{Map}(\mathcal{S})$ actúan en $\Omega\mathcal{T}_g$ por halados eligiendo representantes. No es difícil ver que las acciones no dependen del representante. Tenemos otro modo de ver a $\Omega\mathcal{M}_g$.

Proposición 2.3.10. $\Omega\mathcal{M}_g$ es homeomorfo a $\Omega\mathcal{T}_g / \text{Mod}(\mathcal{M})$ para cualquier $\mathcal{M}$ en $\mathcal{L}_g$.

Demostración. Definamos la aplicación natural

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega\mathcal{M}_g &\rightarrow \Omega\mathcal{T}_g / \text{Mod}(\mathcal{M}), \\ [(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^\omega\})]_{\text{bihol}} &\rightarrow \text{Mod}(\mathcal{M}) \cdot [(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^\omega\})]_{\text{Map}^0(\mathcal{S})} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Probaremos que Φ está bien definida y que es biyección.

Paso 1. *La aplicación Φ es una función.*

Consideremos el elemento $[(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega_2}\})] \in \Omega\mathcal{M}_g$ y dos representantes, $(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega_2}\})$ y $(\mathcal{S}, \{\phi_\beta^{\omega_1}\})$. Entonces, hay un biholomorfismo

$$L : (\mathcal{S}, \{\phi_\beta^{\omega_1}\}) \rightarrow (\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega_2}\}),$$

que en coordenadas locales $L(z) = z + c$, es decir, $L^*\omega_2 = \omega_1$. El mapeo L es en particular un homeomorfismo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$, entonces, por el Teorema 1.3.27 L es isotópico a un cuasi-conforme $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. La isotopía a la identidad del mapeo $L^{-1} \circ h$ deforma la estructura de traslación $(\mathcal{S}, \{\phi_\beta^{\omega_1}\})$ en la estructura de traslación $(\mathcal{S}, \{\phi_\beta^{\omega'_1}\}) = h \cdot (\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega_2}\})$. Finalmente si hay una estructura $(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega'_2}\})$ isotópica a $(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega_2}\})$, $h \cdot (\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^{\omega'_2}\})$ es isotópica a $(\mathcal{S}, \{\phi_\beta^{\omega'_1}\})$. Con esto el Paso 1 está completo.

Paso 2. *La aplicación Φ tiene inversa.*

Para establecer el Paso 2 basta con ver que los elementos de las órbitas de la acción de $\text{Mod}(\mathcal{M})$ en $\Omega\mathcal{T}_g$ sean equivalentes entre sí en el sentido de la Definición 2.3.7. Consideremos una estructura de traslación dado por una 1-forma holomorfa ω , $(\mathcal{S}, \{\phi_\alpha^\omega\})$, con α en un índice.

Entonces, la acción de un homeomorfismo cuasiconforme $h : M \rightarrow M$ en $(S, \{\phi_\alpha^\omega\})$ es otra estructura de traslación en S mediante el halado de $(S, \{\phi_\alpha^\omega\})$ bajo h , i.e. $(S, \{\phi_\beta^\omega \circ h\})$. El subíndice β está en el mismo índice que α , pero para evitar confusión cambiamos la notación de índice en la nueva estructura de traslación. La aplicación

$$h : (S, \{\phi_\beta^\omega \circ h\}) \rightarrow (S, \{\phi_\alpha^\omega\})$$

es un biholomorfismo de estructuras de traslación. Si $\tilde{h}$ es un homeomorfismo cuasiconforme isotópico a h entonces $\tilde{h} \cdot (S, \{\phi_\alpha^\omega\})$ es una estructura de traslación isotópica a $h \cdot (S, \{\phi_\alpha^\omega\})$. Con esto se concluye el Paso 2.

Ahora no es difícil ver que la biyección Φ es homeomorfismo. □

Pensar a $\Omega\mathcal{M}_g$ como el cociente de una acción por un grupo tiene sus ventajas sobre todo al pensar en conexiones planas en algún haz de $\Omega\mathcal{M}_g$. Cuando hablemos del cociclo de Kontsevich-Zorich será claro el uso de la acción de $\text{Mod}(M)$ sobre $\Omega\mathcal{M}_g$.

Ejemplo 2.3.11 (Superficies de traslación equivalentes mediante la acción de $\text{Mod}(M)$, cf. Ejemplo 1). *En la Figura 2.11 a), tenemos una superficie de traslación (M, ω) que se obtiene de la Figura L mediante la identificación de sus lados opuestos. Haremos un giro de Dehn sobre γ , que está en color verde. Veamos cuál es el halado de (M, ω) bajo T_γ . Al halado lo denotamos por $(M_T, T_\gamma^* \omega)$, para entenderlo nos ayudamos de la curva α , que está indicada en color azul. En el inciso b) tenemos de manera topológica a $T_\gamma(\alpha)$. Dado que tenemos una estructura plana obtenida de ω , localmente α debe ser una línea recta o una unión de líneas rectas. Como se hizo en el Ejemplo 1 para saber cuál es la recta o rectas que componen a $T_\gamma(\alpha)$ en la estructura (M, ω) nos ayudamos de que los lados del cilindro donde está γ , al que llamamos C , se identifican por una traslación. Cortamos sobre la diagonal al cilindro y pegamos los lados por una traslación y obtenemos la Figura 2.11 c). Así, en la estructura de traslación dada por ω , $T_\gamma(\alpha)$ es la curva en azul en c). Al halado $T_\gamma^* \omega$ también lo podemos ver como el polígono en c), de tal forma que ahora la curva α en la estructura de traslación dada por $T_\gamma^* \omega$ es la curva azul en c). Notemos que en efecto $(M_T, T_\gamma^* \omega)$ es equivalente a (M, ω) . Finalmente, en la Figura 2.11 d) tenemos de nuevo la estructura (M, ω) y de ella podemos obtener cómo se escribe localmente T_γ en términos de (M, ω) . En C , $T_\gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + b$, $b \in \mathbb{C}$ en coordenadas locales. En los dos cuadrados restantes T_γ es simplemente la identidad. Usando la definición ACL (Definición 1.3.4) de un mapeo cuasiconforme podemos ver que en efecto T_γ es cuasiconforme.*

Estratos del espacio móduli $\Omega\mathcal{M}_g$. El espacio $\Omega\mathcal{M}_g$ está naturalmente estratificado en subespacios de 1-formas holomorfas con el mismo número de singularidades y mismo orden preescrito. Denotemos por $\Sigma(\omega)$ al conjunto de ceros de una 1-forma holomorfa ω y por $\kappa = \{\kappa_1, \dots, \kappa_\sigma\}$, a un conjunto de números naturales (que no incluye el cero) tal que

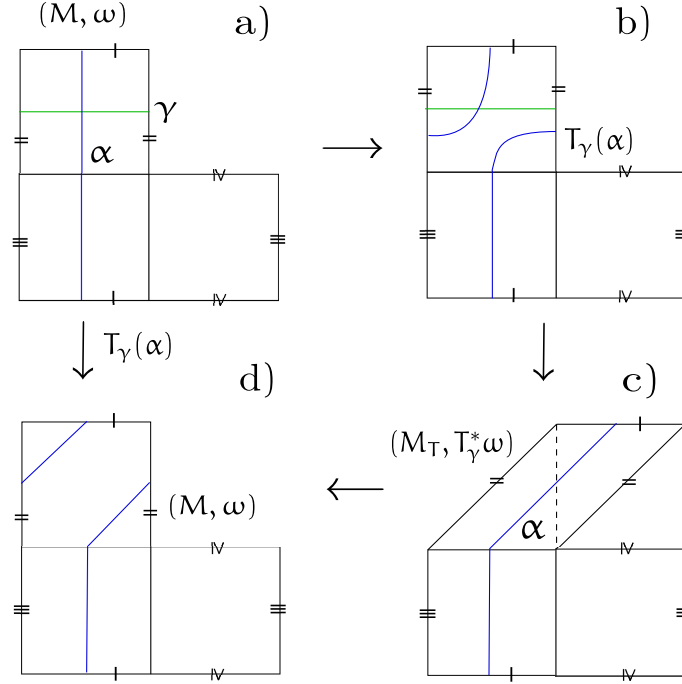


Figura (2.11) Giro de Dehn en una estructura de superficie de traslación y el halado de la estructura bajo el giro de Dehn.

$\sum_i \kappa_i = 2g - 2$. Denotamos como $\text{ord}(\mathbf{p})$ al orden de $\mathbf{p} \in \Sigma(\omega)$. Por el Teorema de Riemann-Roch o el de Poincaré-Hopf, κ puede expresarse exactamente en términos de los órdenes de los ceros de ω . Así,

$$\Omega\mathcal{M}_g = \bigsqcup_{\kappa, \sum \kappa_i = 2g-2} \Omega\mathcal{M}_g(\kappa).$$

Donde

$$\Omega\mathcal{M}_g(\kappa) = \{(M, \omega) : \mathbf{p} \in \Sigma(\omega), \text{ord}(\mathbf{p}) \in \kappa\}.$$

Gracias a Kontsevich y Zorich [KZ03] $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ es no vacío para cada dato de números naturales κ . Además Kontsevich y Zorich clasifican las componentes conexas de $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ en [KZ03], que son a lo más tres para cada estrato. De ahora en adelante haremos el abuso de notación $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ para referirnos a una componente conexa del estrato.

Coordenadas de periodo. A los estratos se le puede dotar de un atlas con coordenadas en el grupo de cohomología relativa $H^1(M, \Sigma, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g+m}$ (m es el número de singularidades menos 1, que es lo que corresponde a la parte relativa), mediante el mapeo:

$$\Phi(\omega) : \gamma \rightarrow \int_{\gamma} \omega, \gamma \in H_1(M, \Sigma, \mathbb{C}). \quad (2.6)$$

Yoccoz demuestra (en la Sección 6 de [Yoc07]) que el mapeo Φ es un homeomorfismo local. Los cambios de coordenadas son afines, por ende $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$, tiene una estructura de *variedad*.

A las coordenadas mencionadas se les suele llamar coordenadas de periodo. Podemos pensar intuitivamente en las coordenadas de periodo como una vecindad pequeña del vector en $\mathbb{C}^{2g+m}$ con elementos los lados de alguna representación poligonal de ω . Sin embargo, como la representación poligonal de una 1-forma holomorfa no es única, el objeto que de alguna manera *codifica* dichas representaciones es el mapeo Φ . Por lo que el atlas con imagen en la cohomología relativa es completamente natural.

Cubrientes finitos a los estratos. En realidad los estratos $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ son orbidades. Esto se debe a la presencia de automorfismos por la acción de $\text{Mod}(\mathcal{M})$, pero al igual que en el caso del móduli de superficies de Riemann, se pueden obtener cubrientes finitos a los estratos que sí son variedad. La manera de hacer esto es considerar el grupo (vea Sección 2.3)

$$\text{Mod}(\mathcal{M})[r] := \tilde{\rho}^{-1}(\text{Sp}(H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}))[r]),$$

donde

$$\text{Sp}(H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}))[r] = \text{Ker}(\text{Sp}(H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})) \rightarrow \text{Sp}(H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}/r\mathbb{Z})),$$

para r un natural mayor que 2. El grupo $\text{Mod}(\mathcal{M})[r] \subset \text{Mod}(\mathcal{M})$ es de índice finito y libre de automorfismos (vea la Sección 6.4 y el Capítulo 12 de [FM12]). A los grupos $\text{Mod}(\mathcal{M})[r]$ se les denomina grupos de congruencia de nivel r . Entonces, obtenemos $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)[r] := \Omega\mathcal{T}_g/\text{Mod}(\mathcal{M})[r]$. La variedad $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)[r]$ es un cubriente finito de $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$, que a veces se le denomina el cubriente finito de nivel r de $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$. Gracias a este hecho, en la literatura es usual pensar a $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ simplemente como una variedad. Solo se tiene que tener cuidado que cualquier construcción hecha sobre $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)[r]$ se cumpla para todo $r \geq 3$. Afortunadamente los objetos con los que trabajamos no tienen automorfismos (más adelante daremos la razón), así en lo subsecuente para construir el cociclo de Kontsevich-Zorich pensaremos a $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ como variedad.

2.3.2. Acción de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ y conexiones planas

Para poder definir el cociclo de Kontsevich-Zorich necesitamos tres ingredientes: La acción del grupo de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ en $\Omega\mathcal{M}_g$, la representación de $\text{Mod}(\mathcal{M})$ o $\text{Map}(\mathcal{S})$ en la homología de la superficie, $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, y la noción de conexión plana en el sentido de la geometría diferencial.

Acción de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ en el espacio móduli de superficies de traslación. El grupo lineal $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ actúa de manera natural y continua [Yoc07] en $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$. Para ver esto, basta con usar cualquier representación poligonal P_x de $x \in \Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$. Los lados del polígono P_x son vectores de $\mathbb{R}^2$ en los cuales una matriz puede actuar. Entonces el nuevo polígono $g \cdot P_x$, $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ conserva las identificaciones de los lados de x , así el cociente obtenido de $g \cdot P_x$ es una nueva 1-forma holomorfa, entonces la acción de g sobre x es $g \cdot x := (g \cdot P_x)/\sim$. Notemos que no depende de la representación poligonal P_x . Para verificar la continuidad basta con ver que una vecindad de x consiste en 1-formas con alguna representación poligonal de

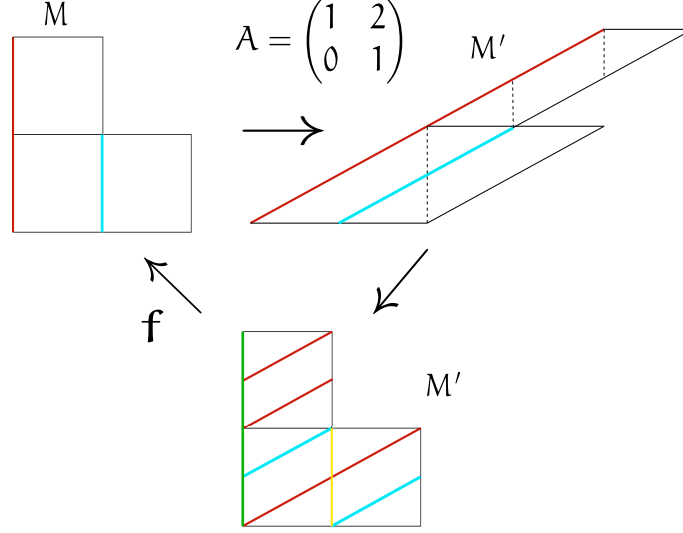


Figura (2.12) Acción de $SL(2, \mathbb{R})$ en una superficie de traslación (en este caso un origami), ejemplo de homeomorfismo afín y una visualización del cociclo de Kontsevich-Zorich.

la misma forma que la de x , pero con el ángulo y longitud de sus lados con pequeños cambios (vea el Ejemplo 2.3.6). Un ejemplo de la acción de $SL(2, \mathbb{R})$ se encuentra en la Figura 2.12, donde obtenemos la superficie M que se obtiene de la Figura L mediante la identificación de sus lados opuestos. Identificamos $A \cdot l$ con $A \cdot s$ si el lado s se identifica con l . Vamos a hacer uso seguido de la Figura 2.12 en reiteradas ocasiones ya que ilustra varios conceptos.

Conexiones planas. La notación y las afirmaciones hechas en esta sección están basadas en [Kob87]. Consideramos un haz vectorial E sobre una variedad orientable de clase C^∞ , $\mathcal{N}$. El haz E es plano si para toda cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{N}$ y marcos locales s_{U_i} , las funciones de transición $g_{U_i, U_j} \cdot s_{U_i} = s_{U_j}$ son constantes. Un haz plano siempre tiene asociado una conexión plana, es decir una conexión cuya curvatura es idénticamente cero. Si nos fijamos en un punto $x_0 \in \mathcal{N}$, y consideramos el transporte paralelo sobre un lazo en x_0 , entonces el transporte sólo depende de la clase de equivalencia de homotopía del lazo. Así, tenemos una representación $\rho : \pi(\mathcal{N}, x_0) \rightarrow GL(E_{x_0})$, donde E_{x_0} es la fibra de E sobre x_0 . De manera equivalente, si tenemos una representación $\rho : \pi(\mathcal{N}, x_0) \rightarrow GL(V)$, con V algún espacio vectorial, podemos construir un haz vectorial plano sobre $\mathcal{N}$. Consideramos el cubriente universal $\tilde{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ y el producto $\tilde{E} := \tilde{\mathcal{N}} \times V$. Decimos que dos elementos $(x, v), (y, w) \in \tilde{\mathcal{N}} \times V$ son equivalentes si $(y, w) = (\gamma \cdot x, \rho(\gamma)v)$ ó $(x, v) = (\gamma \cdot y, \rho(\gamma)w)$ para algún $\gamma \in \pi(\mathcal{N}, x_0)$. Al cociente con esta relación de equivalencia lo denotamos como $E := \tilde{\mathcal{N}} \times_\rho V$, que es un haz vectorial plano. Es conveniente pensar en una conexión plana de este último modo, ya que podemos pensar de mejor manera el transporte paralelo dado por ella. En efecto, en $\tilde{E}$ el transporte paralelo es constante, así nos podemos fijar en algún dominio fundamental D_0 en $\tilde{\mathcal{N}}$ para la acción de $\pi(\mathcal{N}, x_0)$. Fijando un levantamiento de x_0 , digamos $\tilde{x}_0$ consideremos una curva que inicie en $\tilde{x}_0$ y termine en otro dominio fundamental D_1 . Entonces, cuando hacemos el transporte

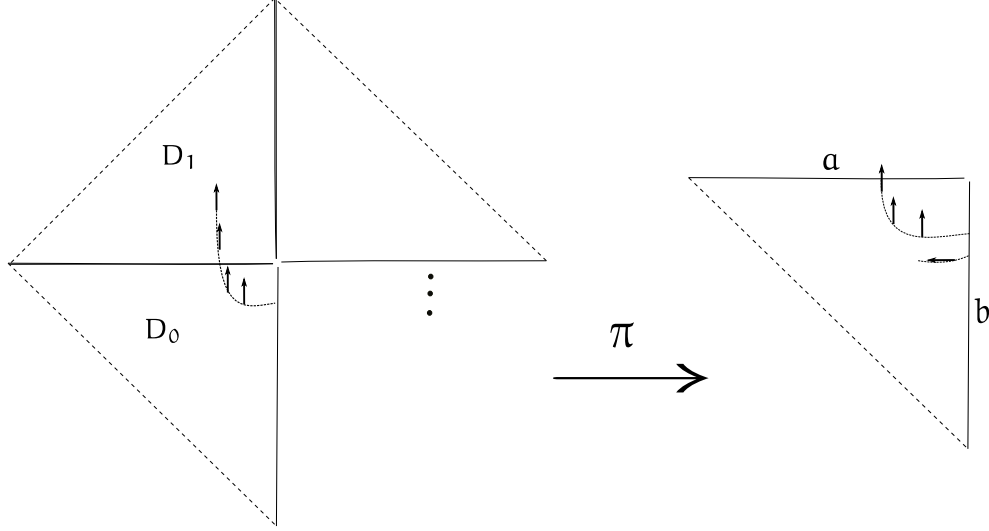


Figura (2.13) Ejemplo de transporte paralelo en un cono sin el vértice. A la izquierda el cubriente universal. El lado **a** se conecta se identifica con el lado **b** mediante una rotación.

paralelo sobre la curva y hallamos cruzado del dominio fundamental D_0 a D_1 , tendremos que regresar a D_0 con la acción de algún $\gamma \in \pi(\mathcal{N}, x_0)$ y su correspondiente acción en la fibra. Un ejemplo elemental usando el cono plano sin el vértice está en la Figura 2.13.

2.3.3. Cociclo de Kontsevich-Zorich

Ahora ya podemos construir el cociclo de Kontsevich-Zorich, que abreviaremos simplemente como el cociclo KZ. Para ello usaremos la definición que da S. Filip en [Fil16].

Haz de Hodge real. Consideremos el haz trivial $\tilde{\mathcal{E}} := \widetilde{\Omega\mathcal{M}_g} \times H_1(M, \mathbb{R})$, donde $\widetilde{\Omega\mathcal{M}_g}$ es el cubriente universal de $\Omega\mathcal{M}_g$. Como hemos pretendido que $\Omega\mathcal{M}_g$ sea una variedad, entonces para $M \in \Omega\mathcal{M}_g$, $\text{Mod}(M)$ es el grupo fundamental de $\Omega\mathcal{M}_g$. De la Subsección 2.3.2 usando la representación $\rho : \text{Mod}(M) \rightarrow \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R}))$ (Sección 2.3) definimos el Haz de Hodge real sobre $\Omega\mathcal{M}_g$ como $\mathcal{E} := \widetilde{\Omega\mathcal{M}_g} \times_{\rho} H_1(M, \mathbb{R})$. El haz $\mathcal{E}$ tiene una conexión plana a la que se le suele llamar conexión de Gauss-Manin.

Consideremos una curva γ_t que conecte la identidad e con un elemento $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Si $x \in \Omega\mathcal{M}_g$, entonces usando la conexión plana a lo largo de la curva $\gamma_t \cdot x \subset \Omega\mathcal{M}_g$ tenemos una transformación lineal $L_{x,g \cdot x}$ entre las fibras $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_{g \cdot x}$. Ambas fibras son isomorfas como espacios lineales a $H_1(M, \mathbb{R})$, entonces, por construcción del Haz de Hodge real, $L_{x,g \cdot x} \in \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{R}))$. Por lo que, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.12 (Cociclo de Kontsevich-Zorich). ⁵ Usando la conexión plana de $\mathcal{E}$, el cociclo de Kontsevich-Zorich sobre $\mathcal{E}$ es

⁵En realidad es más correcto trabajar en la cohomología, pero por la dualidad de Poincaré podemos tomar la homología.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{KZ} &:= \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \Omega\mathcal{M}_g \rightarrow \mathrm{Sp}(H_1(M, \mathbb{R})), \\ (g, x) &\rightarrow L_{x, g \cdot x},\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde, $L_{x, g \cdot x}$ es la transformación lineal (como arriba) obtenida por transporte paralelo a lo largo de una curva $\gamma_t \cdot x$, con $\gamma_t \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\gamma_0 = e$ y $\gamma_1 = g$.

Proposición 2.3.13. *La transformación $L_{x, g \cdot x}$ no depende de la curva elegida $\gamma_t \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ que conecta a e con g .*

Demostración. Notemos que la afirmación es equivalente a decir que para cualquier curva $\gamma_t \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ con $\gamma_0 = \gamma_1 = e$, el transporte paralelo de $\mathcal{E}_x$ a $\mathcal{E}_x$ usando $\gamma_t \cdot x$ es la identidad. Como $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ es contractible a $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, podemos suponer que $\gamma_t \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, $\forall t \in [0, 1]$. Consideremos el levantamiento de $\gamma_t \cdot x$ en $\widetilde{\Omega\mathcal{M}_g}$, $\widetilde{\gamma_t \cdot x}$. El levantamiento implica haber escogido algún representante en la clase de equivalencia de x en $\Omega\mathcal{M}_g$, por abuso de notación lo seguimos llamando x . El elemento x pertenece a algún dominio fundamental de $\widetilde{\Omega\mathcal{M}_g}$ por la acción de $\mathrm{Mod}(M)$. La acción de γ_t en x , $\gamma_t \cdot x$, es por rotaciones de x para todo t . Por lo que la acción de γ_t en x inicia y finaliza con exactamente la misma estructura de traslación x . Esto quiere decir que el levantamiento $\widetilde{\gamma_t \cdot x}$ inicia y regresa al dominio fundamental donde pertenece x en $\widetilde{\Omega\mathcal{M}_g}$. $\square$

Ejemplo 2.3.14 (Un elemento del cociclo de Kontsevich-Zorich). *Usemos de nuevo la Figura 2.12. Conectemos e con A mediante la curva⁶ $\gamma_t = A^t$, $t \in [0, 1]$. Fijemos D un dominio fundamental de la acción de $\mathrm{Mod}(M)$ en $\widetilde{\Omega\mathcal{M}_g}$ donde M pertenece. Notemos que a lo largo de la curva $\gamma_t \cdot M$ la homología no cambia, solo hemos cambiado la estructura de traslación en M . En efecto, estamos haciendo transporte paralelo mediante la identidad en $\tilde{\mathcal{E}}$ (c.f. Figura 2.13). Pero, $M' := \gamma_1 \cdot M$ está en otro dominio fundamental diferente al de M . Las superficies M y M' son diferentes pero son biholomorfas entre sí, por lo que las dos se identifican bajo un elemento f de $\mathrm{Mod}(M)$ en $\Omega\mathcal{M}_g$ (vea la Proposición 2.3.10 y el Ejemplo 2.3.11). Dicho de otro modo, el elemento f mapea M' de regreso al dominio fundamental D de M . La aplicación es a la vez un biholomorfismo $f : M' \rightarrow M$ y un mapeo $f : M \rightarrow M$, cuasiconforme. El homeomorfismo cuasiconforme f actúa en la homología de M y su acción en ella es justamente un elemento del cociclo KZ . Veamos cómo es f en términos de M . Observemos que podemos cortar en las líneas punteadas en M' y reordenar el polígono de tal forma que tengamos la misma figura poligonal que M . Entonces, el biholomorfismo f en términos de M , tiene la expresión local (fuera de la singularidad) $f(z) = A \cdot z + b$, es decir, tenemos un homeomorfismo afín, y en efecto una aplicación cuasiconforme de M en M . Así, $\rho(f)$ es un elemento del cociclo de KZ .*

⁶Esto significa que $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definición 2.3.15 (Cociclo de Kontsevich-Zorich). *Al cociclo $G^{KZ} := \mathcal{G}^{KZ}|_{A \times \Omega\mathcal{M}_g}$, con*

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

también se le llama el cociclo de Kontsevich-Zorich. Denotamos como A_t un elemento de A .

La definición anterior del cociclo de Kontsevich-Zorich es la clásica. Originalmente se pensó así en concordancia con la definición de cociclos en sistemas dinámicos respecto a flujos.

El interés de los cociclos en sistemas dinámicos es el comportamiento de ellos al infinito, con más precisión, se busca la tasa exponencial del cambio en la longitud de los vectores tangentes conforme la dinámica avanza. Es decir, se busca saber si la cantidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|G^{KZ}(A_t, x)(v)\| \quad (2.8)$$

existe para casi todo punto x respecto a una medida A -invariante μ en $\Omega\mathcal{M}_g$ y alguna norma en el haz $\mathcal{E}$. Si el límite (2.8) existe, entonces se le denomina exponente de Lyapunov. Si la medida μ es ergódica entonces los exponentes de Lyapunov son un número finito [Fil19] y corresponden a una descomposición medible en subhaces del haz $\mathcal{E}$. Es decir las fibras son sumas directas de subespacios, en donde para cada vector de los subespacios el límite (2.8) corresponde al exponente de Lyapunov asociado al subespacio donde vive el vector. La definición más general que hemos dado del cociclo de Kontsevich-Zorich (Definición 2.3.12) tiene mucha importancia para el análisis de las cerraduras de las $SL(2, \mathbb{R})$ -órbitas de $\Omega\mathcal{M}_g$ y su monodromía; por el trabajo de Eskin-Mirzakhani y Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [EM18; EMM15] las cerraduras son *variedades*, también llamadas *variedades afines*. Además, las variedades afines son el soporte de las medidas ergódicas invariantes bajo la acción de $SL(2, \mathbb{R})$.

Definición 2.3.16 (Monodromía de una variedad afín). *Considere una variedad afín V o de manera equivalente la cerradura de una $SL(2, \mathbb{R})$ -órbita en $\Omega\mathcal{M}_g$. La monodromía de V es el mapeo:*

$$\rho \circ \varphi_V : \pi_1(V) \rightarrow Sp(H_1(M, \mathbb{R})). \quad (2.9)$$

Donde $\varphi_V : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(\Omega\mathcal{M}_g) \approx \text{Mod}(M)$ es la proyección del grupo fundamental de V al grupo fundamental de $\Omega\mathcal{M}_g$ y ρ es como en la Sección 2.3.

En [EFW18] hay una exposición más explícita de la relación entre la monodromía de una variedad afín y el cociclo de KZ, es posible decir propiedades de las variedades afines a partir del comportamiento del cociclo de KZ. Esta es una primera justificación para el nombre de *monodromía de cociclo de Kontsevich-Zorich*.

La relación entre la monodromía de una variedad afín y el cociclo de KZ se vuelve más estrecha si consideramos el caso de la $SL(2, \mathbb{R})$ -órbita generada por una superficie de Veech M .

Proposición 2.3.17 (Smilie). *Una superficie de traslación M es de Veech si y solo si $SL(2, \mathbb{R}) \cdot M$ es cerrada en $\Omega\mathcal{M}_g$. Si M es una superficie de Veech, entonces $SL(2, \mathbb{R}) \cdot M$ es homeomorfa a $\mathcal{T}_M := SL(2, \mathbb{R})/SL(M)$. A la órbita $\mathcal{T}_M$ la llamamos variedad de Teichmüller⁷.*

Para una prueba de la proposición anterior vea [GW]. Recordemos que $SL(M)$ es el grupo de Veech (Definición 2.2.12) que también es el estabilizador de M bajo la acción de $SL(2, \mathbb{R})$ en $\Omega\mathcal{M}_g$; es un hecho que no es difícil usando la Proposición 2.3.10. La Figura 2.12 ayuda a ver el hecho.

Eskin y Matheus [EM15] mostraron que los exponentes de Lyapunov del cociclo⁸ respecto a la medida ergódica invariante de una variedad de Teichmüller (la forma de volumen de $\mathcal{T}_M$), se pueden obtener mediante productos aleatorios de matrices en $\rho \circ \varphi_{\mathcal{T}_M}(\pi_1(\mathcal{T}_M))$, respecto a una medida⁹. Así, toda la discusión anterior motiva la definición de monodromía del cociclo de Kontsevich-Zorich.

Definición 2.3.18 (Monodromía del cociclo de Kontsevich-Zorich bis). *Si $M \in \Omega\mathcal{M}_g$, llamamos la monodromía del cociclo de Kontsevich-Zorich a la imagen de la representación $\rho \circ \varphi_{\mathcal{V}} : \pi_1(\mathcal{V}) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{R})$. Donde $\mathcal{V} := \overline{SL(2, \mathbb{R}) \cdot M}$.*

La monodromía tiene espacios irreducibles, por lo que es más sensato discutir aritmetidad/delgadez en dichos espacios. Por ello, es posible hacer abusos de nomenclatura y llamar monodromía de Kontsevich-Zorich a la restricción de $\rho \circ \varphi_{\mathcal{V}}(\pi_1(\mathcal{V}))$ en algún espacio irreducible. Por otro lado, como $\text{Aff}(M)$ se encaja en $\text{Mod}(M)$ (Proposición 2.3.1), si M es superficie de Veech tenemos que $\rho \circ \varphi_{\mathcal{T}_M}(\pi_1(\mathcal{T}_M)) = \rho(\text{Aff}(M))$. De este modo recuperamos la Definición 2.3.3 de monodromía de KZ en el caso de una superficie de Veech aritmética.

2.4. Pregunta de P. Sarnak

P. Sarnak: *¿Cuál es la frecuencia de los grupos delgados/aritméticos en monodromías de KZ?*

Como hemos dicho en la introducción, la pregunta de P. Sarnak viene motivada por la ubicuidad de grupos delgados y aritméticos en varios contextos geométricos y de teoría de números. En particular, hay ejemplos de monodromías de ecuaciones diferenciales complejas en la esfera de Riemann menos tres puntos que son delgadas o aritméticas. Primero veamos lo que es un grupo delgado/aritmético en el sentido de P. Sarnak.

Definición 2.4.1 (Grupo aritmético/delgado). *Considere $\Gamma \subset GL(n, \mathbb{Z})$ un grupo discreto. Γ es aritmético (resp. delgado) si tiene índice finito (resp. infinito) en $Zcl(\Gamma)(\mathbb{Z})$. Donde*

⁷A veces en la literatura se le denomina *curva de Teichmüller*, sin embargo, es problemático ya que los géometras algebraicos se refieren a una curva de Teichmüller a la proyección de una variedad de Teichmüller en el móduli de superficies de Riemann.

⁸En este caso el cociclo no es todo $SL(2, \mathbb{R})$, si no el subgrupo diagonal.

⁹La medida que se obtiene es un empuje de una medida en $\pi_1(\mathcal{T}_M)$ bajo ρ ; es una construcción tipo Furstenberg.

$\mathrm{Zcl}(\Gamma)$ es la cerradura de Zariski de Γ en $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Zcl}(\Gamma)(\mathbb{Z})$ las matrices con elementos enteros.

Algunos ejemplos y antecedentes que motivan la pregunta de P. Sarnak:

Ejemplos 2.4.2 (Grupos aritméticos).

1. $\mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{Z})$. Por el Teorema de densidad de Borel (Teorema 3.2.5 de [Zim84]) $\mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{Z})$ es Zariski denso en $\mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$, así el grupo con elementos enteros es él mismo. Más en general cualquier grupo de índice finito de $\mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{Z})$ es aritmético. Esto porque sería una retícula y de nuevo se sigue por el Teorema de densidad de Borel.
2. **Superficies de Veech aritméticas con monodromía de Kontsevich Zorich aritmética.** M. Möller mostró que $\rho_0(\mathrm{Aff}(\mathcal{M}))$ es aritmético para todas las superficies de Veech aritméticas en el caso de género $\mathcal{M} = 2$. La idea esencial es mostrar que $\rho_0(\mathrm{Aff}(\mathcal{M}))$ es una retícula. Por retícula nos referimos a un grupo discreto de un grupo de Lie cuyo cociente tiene medida finita. La demostración es muy técnica y requiere bastante fundamento para poder entenderla. M. Möller nos dio permiso de poner su prueba en el Apéndice B de nuestro trabajo en [Bon+22]. En género 3, se conocía un único ejemplo de un origami con monodromía de KZ aritmética, este ejemplo es debido a P. Hubert y C. Matheus [HM19]. Recientemente M. Kany y C. Matheus [KM24] mostraron familias infinitas de origamis en género 4, 5 y 6 con monodromía de KZ aritmética usando técnicas parecidas a las que aparecen en esta tesis.
3. **Monodromía aritmética en los estratos.** Gutiérrez Romo [Gut19] demostró que el grupo $\mathbf{G} = \rho \circ \varphi_{\Omega\mathcal{M}(\kappa)}(\pi_1(\Omega\mathcal{M}(\kappa)))$ (vea la Definición 2.3.16) es aritmético en el sentido de P. Sarnak para cualquier componente conexa del estrato $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$. En particular, mostró que $\mathbf{G}$ es de índice finito en $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}))$. La Zariski densidad se obtiene del Teorema de densidad de Borel.
4. Singh y Venkataramana [Sin15] han probado que ciertos grupos de monodromía provenientes de ecuaciones hipergeométricas complejas son aritméticos.

Ejemplos 2.4.3 (Grupos delgados).

1. $\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, vea el Ejemplo 5 de [Kon+19].
2. Para monodromías de ecuaciones diferenciales en la esfera de Riemann menos tres puntos, C. Brav y H. Thomas [BT14], así como también S. Filip y C. Fougeron [FF21] han encontrado familias de grupos delgados.

3. **Grupos delgados asociados a superficies de Veech no aritméticas.** Agradecemos a C. Fougere por explicarnos el siguiente argumento. Consideremos una superficie de Veech no aritmética M de género g y K el campo generado por las trazas de todas las matrices de $SL(M)$. Hay una manera natural de considerar a $SL(M)$ como grupo delgado pero como subgrupo de productos de $SL(2, \mathbb{R})$ como sigue. De acuerdo a McMullen, K es una extensión algebraica de grado $d \leq g$ [McM03]. De modo que, $SL(M)$ naturalmente está en $SL(\mathcal{O}_K)$, donde $\mathcal{O}_K$ es el anillo de enteros de K . Por la Proposición 5.5.8 de [Mor15] el mapeo $\Delta : SL(\mathcal{O}_K) \rightarrow \prod_{i=1}^d SL(2, \mathbb{R})$, $\Delta(g) \rightarrow (g, \dots, \sigma_d(g))$ es un encaje. Las transformaciones de Galois σ_i son los diferentes encajes de K a $\mathbb{C}$; como K es totalmente real [McM03], $\sigma_i(K) \subset \mathbb{R}$ para todo σ_i . Así, si $\Delta(SL(M))$ fuese una retícula de $\Delta(SL(\mathcal{O}_K))$ tendría que ser irreducible pues $\Delta(SL(\mathcal{O}_K))$ lo es. Pero $SL(M)$ es una retícula en $SL(2, \mathbb{R})$, por lo que es una proyección discreta en la primera entrada, contradicción. Según M. Möller [Möl06] la anterior discusión es del grupo $\Delta(SL(M)) = \rho(\text{Aff}(M))|_W^{10}$ con W un cierto subhaz plano de $\mathcal{E}|_{\mathcal{T}_M}$. Notemos que hemos cambiado un poco la definición de P . Sarnak, en vez de considerar matrices con elementos enteros, las consideramos con números algebraicos como elementos.

Recientemente S. Filip [Fil22] logró colocar a los grupos aritméticos y delgados en los Ejemplos 2.4.2 y 2.4.3 en un contexto más amplio y clasificarlos.

Además de los trabajos mencionados y el nuestro no se conoce si hay monodromías aritméticas/delgadas para otras variedades afines.

Familias de origamis en el Teorema 2

Comenzaremos a describir las familias de origamis que nos interesan. Como la suma del orden de ceros de una 1-forma holomorfa debe dar $2g - 2$, el género quedara claro si hacemos el abuso de notación y sólo especificamos $\kappa = 4$. Las familias que consideraremos viven en una componente conexa del estrato $\Omega\mathcal{M}_3(4)$ denominada $\Omega\mathcal{M}_3^{\text{odd}}(4)$ (vea [KZ03]). Por la Proposición 2.4 de [MMY14] el homomorfismo D definido en (2.1) es una inyección, en particular no hay automorfismos afines, excepto la identidad. Por lo que, la variedad de Teichmüller (vea la Proposición 2.3.17) generada por una superficie de Veech en $\Omega\mathcal{M}_3(4)$ es en verdad una variedad. Las familias de origamis consideradas son del trabajo de C. Matheus, M. Möller y J.C. Yoccoz [MMY14]. Cada una de ellas se puede describir como en la Figura 2.14.

Las familias de origamis que consideramos tienen la forma prototipo como se muestra en la Figura 2.14. Donde los parámetros H_1, H_2, H_3 y V_1, V_2, V_3 varían de acuerdo a la Tabla 2.1. N es el número de cuadrados y los lados opuestos se identifican usando traslaciones.

Denotamos a las familias de origamis como $\mathcal{F}_N$, cada elemento de $\mathcal{F}_N$ es un origami con un número de cuadrados N y que tiene una representación poligonal como en la Figura

¹⁰Técnicamente es válido en una variedad que es cubierta finita de $\mathcal{T}_M$.

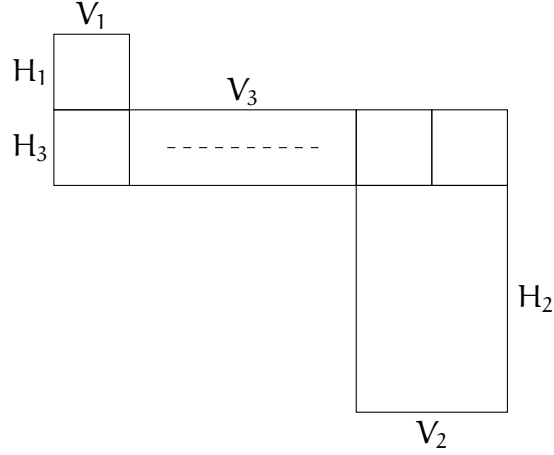


Figura (2.14) Prototipo de origamis primitivos en $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$

N	H ₁	H ₂	H ₃	V ₁	V ₂	V ₃
3n+8	1	2	1	1	2	3n
3n+10	1	3	1	1	2	3n
3n+12	1	4	1	1	2	3n
6n+13	2	4	1	1	2	6n
6n+14	2	3	1	1	2	6n
6n+17	2	6	1	1	2	6n
6n+18	2	5	1	1	2	6n+3
6n+21	2	8	1	1	2	6n
6n+22	2	7	1	1	2	6n+3

Tabla (2.1) Número de cuadrados para distintas familias de origamis, variando parámetros.

2.14. Las familias que consideraremos son $\mathcal{F}_{3n+8}, \mathcal{F}_{3n+10}, \mathcal{F}_{3n+12}, \mathcal{F}_{6n+14}, \mathcal{F}_{6n+18}, \mathcal{F}_{6n+22}$. En la demostración se verá cuáles son las subfamilias de origamis para los cuales logramos demostrar monodromía de KZ aritmética.

Por la Sección 2.3.3 y la Proposición 2.3.17 las familias $\mathcal{F}_N$, indexan variedades de Teichmüller. Así, podemos formular el Teorema 2 de la siguiente manera:

Teorema 2.4.4. *Toda familia $\mathcal{F}_N$ con $N \in \{3n+8, 3n+10, 3n+12, 6n+14, 6n+18, 6n+22\}$, tiene una subfamilia $\mathcal{F}'_N$, tal que para cada $M \in \mathcal{F}'_N$ la variedad de Teichmüller $\mathcal{T}_M$ tiene monodromía de KZ aritmética. En particular, $\rho_0(\text{Aff}(M))$ es una retícula en $\text{Sp}(H_1^{(0)}(M, \mathbb{R}))$.*

Damos una respuesta parcial a la pregunta de P. Sarnak mediante el teorema anterior.

En la demostración del Teorema 2.4.4 o Teorema 2 no utilizaremos la homología con coeficientes en $\mathbb{R}$, si no utilizaremos la homología con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Esto es porque la escisión de $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{R})^{\text{st}} \oplus H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$, cuando M es un origami, también se

respeto con coeficientes en $\mathbb{Q}$ gracias al trabajo de M. Möller [Möl06]. El beneficio es que podemos usar con tranquilidad el Teorema 2.5.1.

2.5. Herramientas de Grupos Algebraicos.

Ahora procederemos a enunciar algunos fundamentos de la teoría de grupos algebraicos que necesitamos para demostrar el Teorema 2.

El ingrediente principal para demostrar la aritmeticidad de las familias es el siguiente teorema de Singh-Venkataramana.

Teorema 2.5.1 (Teorema 1.2 en [SV14]). *Supongamos que Ω es una forma simpléctica no degenerada en $\mathbb{Q}^{2g}$ que toma valores enteros en la retícula $\mathbb{Z}^{2g}$. Supongamos también que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ es Zariski-denso en $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$ y que contiene tres transvecciones C_1, C_2, C_3 (i.e. $C_i(x) = x + \Lambda(x)v_i$, para un funcional Λ y un vector fijo v_i) tales que $\Omega(v_i, v_j) \neq 0$ para algún i, j y*

$$(C_i - \mathrm{Id})\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}v_i.$$

Supongamos que $V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ tiene dimensión tres y que el grupo generado por las restricciones de C_i en V tiene un elemento no trivial del radical unipotente de $\mathrm{Sp}(V)$. Entonces Γ es de índice finito.

Para poder aplicar el teorema anterior primero necesitamos saber cuál es la cerradura de Zariski de la monodromía, para ello necesitamos una definición técnica.

Definición 2.5.2 (Matriz Galois-pinching, Definición 4.1 en [MMY14]). *Una matriz simpléctica A con coeficientes enteros es Galois-pinching si el polinomio característico de A es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, sus raíces son reales y si su grupo de Galois¹¹ es el máximo posible.*

Nota 2.5.3. *El anterior criterio es un ingrediente para establecer la Zariski densidad de $\rho_0(\mathrm{Aff}(M))$. C. Matheus, M. Möller y J.C. Yoccoz ya han verificado por nosotros que siempre hay un elemento Galois-pinching en $\rho_0(\mathrm{Aff}(M))$ para las familias de origamis que consideraremos cuando el número de cuadrados es grande. Vea la Sección 6 y 7 de [MMY14], en particular la Proposición 7.5.*

El siguiente criterio muy general debido a Prasad-Rapinchuk ([Riv15], Teorema 1.5) nos ayudará a determinar la Zariski densidad de las monodromías de los origamis, que adaptado a nuestro contexto versa así:

Teorema 2.5.4. *Si $\Gamma \subset G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q})$, $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ son tales que γ_1 es Galois-pinching y γ_2 tiene orden infinito tal que no conmuta con γ_1 . Entonces $\mathrm{Zcl}(\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q})$ ó $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q})^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.*

¹¹Nos referimos al grupo de Galois del polinomio característico.

2.6. Radical unipotente de $\mathrm{Sp}(V)$.

Recordamos que el radical de un grupo de Lie es el subgrupo que se obtiene de considerar la subálgebra de Lie maximal soluble. El radical unipotente es la colección de elementos unipotentes del radical [Kna95].

En el enunciado del Teorema 2.5.1 tenemos un espacio vectorial de dimensión tres que hereda una forma simpléctica degenerada, entonces tenemos que existe un elemento, al que llamamos aniquilador, $\mathfrak{e}$, cuyo complemento ortogonal es V . Así, podemos calcular la forma de $\mathrm{Sp}(V)$ usando la base $\mathfrak{e}, v_1, v_2$. Entonces

$$\mathrm{Sp}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & X \\ 0 & B \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, X \in \mathbb{Q}^2, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \right\}.$$

Cuyo radical es

$$\mathrm{R}(\mathrm{Sp}(V)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & X \\ 0 & I \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, X \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

y su radical unipotente es

$$\mathrm{U}(\mathrm{Sp}(V)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & I \end{pmatrix} : X \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

2.6.1. Transvecciones

Un punto importante para aplicar el Teorema 2.5.1 son las transvecciones. Recordemos que una transvección de un espacio vectorial V es una transformación lineal $T : V \rightarrow V$, con $T(x) = \mathrm{id} + \lambda(x)v$. Donde, v es algún vector en V y λ un funcional.

Para encontrar transvecciones en origamis necesitamos considerar lo siguiente. Denotamos como θ una dirección del flujo geodésico de un origami. Si esta dirección descompone al origami en dos cilindros (recordemos que un cilindro es un encaje isométrico en una superficie de traslación de un cilindro euclidiano, tal que sus bordes son geodésicas que unen puntos singulares), entonces tenemos dos curvas, γ_1 y γ_2 , las almas de los cilindros (recordemos que es una curva cerrada que une los lados identificados de un cilindro). Las almas son linealmente independientes en su clase de homología ya que estamos en $\Omega\mathcal{M}_3(4)$ [MMY14]. Denotemos μ_1 y μ_2 el módulo de los cilindros, entonces por ser origamis tenemos que

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} \text{ irreducible.} \quad (2.10)$$

Así, el multigirot $D = T_{\gamma_1}^{k_1} \circ T_{\gamma_2}^{k_2}$ es un homeomorfismo afín, recordemos el Ejemplo 2.2.11. Hay una forma sencilla de obtener los coeficientes k_1 y k_2 . Primero notemos que las longitudes

de las imágenes de $p(\gamma_2)$ y $p(\gamma_1)$ son iguales respecto a la métrica plana del toro. Denotamos a la longitud como $|w|$. Los números enteros $f_1 := w_1/|w|$ y $f_2 := w_2/|w|$ son las longitudes combinatorias de γ_1 y γ_2 , respectivamente, que se pueden interpretar como *las veces que γ_i recorre a $p(\gamma_i)$* . A (2.10) también lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{f_1 h_2}{f_2 h_1} = \frac{w_1 h_2}{w_2 h_1} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Como el anterior cociente está en $\mathbb{Q}$, entonces podemos tomar el cociente irreducible de las alturas h_2/h_1 , c_2/c_1 , que también pertenece a $\mathbb{Q}$. Así,

$$\frac{f_1 c_2}{f_2 c_1} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (2.11)$$

Si $\text{mcd}(f_1 c_2, f_2 c_1) = 1$, entonces, $k_2 = f_1 c_2$ y $k_1 = f_2 c_1$. Si no, entonces k_2 es el numerador y k_1 el denominador del cociente irreducible de (2.11). La acción del homeomorfismo afín D en $H_1(M, \mathbb{Q})$ es

$$\rho(D) = \text{Id} + k_1 \Omega(\cdot, \gamma_1) \gamma_1 + k_2 \Omega(\cdot, \gamma_2) \gamma_2, \quad (2.12)$$

donde $\Omega(x, y)$ es la intersección algebraica entre x e y .

Proposición 2.6.1. *La acción del multigirot de Dehn afín D restringida a $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$, i.e. $\rho_0(D)$ es una transvección.*

Demostración. Como $\rho_0(D)(\beta) \in H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ para todo $\beta \in H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$, entonces,

$$\int_{D(\beta)} \omega = 0.$$

De lo anterior y de (2.12) tenemos que

$$k_2 \Omega(\beta, \gamma_2) \int_{\gamma_2} \omega = -k_1 \Omega(\beta, \gamma_1) \int_{\gamma_1} \omega.$$

Pero

$$\frac{\int_{\gamma_2} \omega}{\int_{\gamma_1} \omega} = \frac{w_2}{w_1},$$

así

$$\begin{aligned} \rho_0(D)(\beta) &= \beta + \frac{-w_2 k_2}{w_1} \Omega(\beta, \gamma_2) \gamma_1 + k_2 \Omega(\beta, \gamma_2) \gamma_2, \\ &= \beta + \left(\frac{-k_1 h_2}{h_1} \gamma_1 + k_2 \gamma_2 \right) \Omega(\beta, \gamma_2). \end{aligned}$$

De la anterior igualdad se sigue que

$$X := k_2 \gamma_2 - \frac{k_1 c_2}{c_1} \gamma_1 \quad (2.13)$$

pertenece a $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$. Entonces,

$$\rho_0(D) = \text{Id} + \Omega(\cdot, \gamma_2)X, \quad (2.14)$$

que en efecto es una transvección. $\square$

2.7. Demostración del Teorema 2

En esta sección demostramos el Teorema 2 (formulado de otra manera en el Teorema 2.4.4), primero estableceremos la Zariski densidad de las familias $\mathcal{F}_N$, para N suficientemente grande. Para esto usamos tres criterios, las proposiciones 4.3 y 7.5 de [MMY14] y el Teorema 2.5.4. Una vez establecida la Zariski densidad de las familias $\mathcal{F}_N$, procederemos a establecer la aritmetividad de la monodromía de KZ para subfamilias de $\mathcal{F}_N$ usando el Teorema 2.5.1. En la Sección 2.7 explicamos cómo implementar el Teorema 2.5.1.

Zariski densidad de las familias

La Zariski densidad la tenemos garantizada gracias a la Proposición 4.3 de [MMY14]:

Proposición 2.7.1. *Consideremos dos matrices simplécticas A y B . Supongamos que A es Galois-pinching y B es una matriz unipotente distinta de la identidad. Si A y B tienen un subespacio propio invariante entonces $(B - \text{Id})\mathbb{R}^{2g}$ es un subespacio lagrangiano de $\mathbb{R}^{2g}$ (i.e. su complemento ortogonal es el mismo).*

Con esta proposición probamos el siguiente Lema:

Lema 2.7.2. *Si N es suficientemente grande las familias $\mathcal{F}_N$ de la tabla 2.1 tienen monodromía de KZ Zariski densa, i.e. la cerradura de Zariski para su monodromía de KZ es $\text{Sp}(H_1^{(0)}(M, \mathbb{R}))$.*

Demostración. Por la Proposición 7.5 de [MMY14] las familias $\mathcal{F}_N$ tienen un elemento Galois-pinching, A_N , para N suficientemente grande. Por la Proposición 7.3 en [MMY14] todos los origamis en $\mathcal{F}_N$ tienen una descomposición en 2 cilindros que induce un multigiro, por lo tanto una transvección cuando se restringe a $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$. Tomemos cualquier transvección B_N . Si $G_N = \text{Zcl}(\langle B_N, A_N \rangle)$ es isomorfo a $\text{SL}(2, \mathbb{Q}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Q})$, entonces A_N y B_N tendrían un subespacio en común en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$, en particular en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$. Como tenemos un espacio vectorial real simpléctico V , entonces, por la Proposición 2.7.1 tenemos que si una matriz Galois-pinching y una matriz unipotente B comparten un subespacio invariante, entonces, $(B - \text{Id})V$ es lagrangiano. Pero $(B_N - \text{Id})H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$ es unidimensional, contradicción. Entonces, por el Teorema 2.5.4 se tiene que $G_N = \text{Sp}(H_1(M, \mathbb{Q}))$. $\square$

Aplicación del criterio de Singh-Venkataramana

Como nos interesa saber cómo actúa un homeomorfismo afín D en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ es conveniente tener una base para este subespacio; ésta se puede obtener a partir de una base de $H_1(M, \mathbb{Q})$, por ejemplo la que consiste en las almas de los cilindros horizontales y verticales. Llamémosles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, se pueden observar en la Figura 2.15. La base para $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ que utilizaremos es:

$$e_1 = \sigma_2 - V_3\sigma_1, \quad e_2 = \sigma_3 - 2\sigma_1, \quad e_3 = \xi_1 - (1 + H_1)\xi_2 \quad \text{y} \quad e_4 = \xi_3 - (1 + H_2)\xi_2. \quad (2.15)$$

Con las bases que elegimos de $H_1(M, \mathbb{Q})$ y $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ se puede calcular de manera sencilla $\rho_0(D)$ junto con la información de las intersecciones entre la base de $H_1(M, \mathbb{Q})$ y las almas de la dirección θ .

Pasos para implementar el criterio de Singh-Venkataramana

1. Necesitamos tres direcciones θ_1, θ_2 y θ_3 que descompongan en dos cilindros a M (recordemos la Definición 2.2.4). Las almas de ellos las denotamos como α_1, α_2 para θ_1 , β_1, β_2 para θ_2 , finalmente como γ_1 y γ_2 para θ_3 . Los multigiros en las respectivas almas dan homeomorfismo afines que denotaremos como D_1, D_2, D_3 , para las direcciones θ_1, θ_2 y θ_3 , respectivamente. Por abuso de notación nos referiremos a $\rho_0(D_i)$ como D_i . De acuerdo a la demostración de la Proposición 2.6.1, paso (2.13), las transvecciones D_i tienen asociado algún elemento X_i en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$. Para calcular las k_i necesarias para obtener a X_i , nos guíamos por (2.11); las obtenemos de la longitud combinatoria y la razón de las alturas de las respectivas almas.
2. Con los datos de las intersecciones algebraicas entre la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$ y las almas de los cilindros podemos obtener mediante operaciones de álgebra lineal los coeficientes de X_i en términos de la base $\{e_i\}$. Con ello podemos saber si el subespacio vectorial generado por las X_i , i.e. $V = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ es de dimensión 3. Por el paso anterior también verificamos si $(D_i - \text{Id})\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}X_i$. Otra aplicación más de operaciones de álgebra lineal nos permite saber el aniquilador $e \in V$ (recordemos la Sección 2.6).
3. El paso anterior también permite ver alguna pareja X_i, X_j , $i \neq j$ que cumple que $\Omega(X_i, X_j) \neq 0$. Escribimos las matrices de D_1, D_2 y D_3 , en términos de la base X_i, X_j, e y las denotamos como A_1, A_2 y A_3 , respectivamente. Con las matrices A_i encontramos alguna palabra no trivial que esté en el radical unipotente de $\text{Sp}(V)$ (vea la Sección 2.6). Este paso es de las partes más difíciles para probar el Teorema 2, ya que, involucra un problema de pertenencia en $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$. Por lo que, este paso es totalmente heurístico.

Aritmetividad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{3n+8}$

Paso (1). Esta familia tiene como prototipo la Figura 2.15. Para ella consideramos la base para $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ dada por los elementos

$$\begin{aligned} e_1 &= \sigma_2 - (-3n+3)\sigma_1, & e_2 &= \sigma_3 - 2\sigma_1, \\ e_3 &= \xi_2 - 2\xi_1 & \text{y} & & e_4 &= \xi_3 - 3\xi_2. \end{aligned}$$

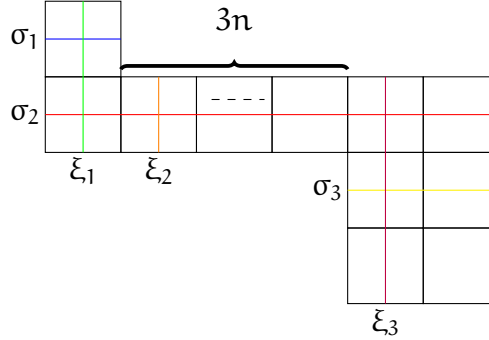


Figura (2.15) Familia $\mathcal{F}_{3n+8}$.

Para esta familia consideramos la descomposición en dos cilindros en las direcciones $(1, 2)$, $(-1, 2)$ y $(1, 3)$.

Denotamos como α_1 y α_2 a las almas de los cilindros para la 2-descomposición en la dirección $(1, 2)$. La longitud combinatoria de α_1 es $3n+7$ y la de α_2 es 1. Por otro lado el cociente irreducible $c_2/c_1 = 1/1$, por lo que el elemento en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ es $X_1 = (3n+7)\alpha_2 - \alpha_1$. El multigiros asociado es $D_1 = \text{Id} + \Omega(\cdot, \alpha_1)\alpha_1 + (3n+7)\Omega(\cdot, \alpha_2)\alpha_2$. En la Figura 2.16a está la 2-descomposición en cilindros para esta dirección.

Para la dirección $(-1, 2)$ denotamos como β_1 y β_2 a las almas de los cilindros para la respectiva 2-descomposición. Tienen longitudes combinatorias $3n+7$ y 1 respectivamente. El cociente irreducible entre las alturas de los cilindros es $c_2/c_1 = 1/1$. De tal forma que el elemento en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ es $X_2 = (3n+7)\beta_2 - \beta_1$. El multigiros asociado es $D_2 = \text{Id} + \Omega(\cdot, \beta_1)\beta_1 + (3n+7)\Omega(\cdot, \beta_2)\beta_2$. En la Figura 2.16b podemos apreciar la 2-descomposición.

Finalmente para la dirección $(1, 3)$ denotamos como γ_1 y γ_2 a las almas para la correspondiente 2-descomposición. Tienen longitudes combinatorias $3n+4$ y 2 respectivamente. El cociente respectivo entre las alturas de los cilindros es $c_2/c_1 = 2/1$. Así, el elemento en $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ es $X_3 = (3n+4)\gamma_2 - 2\gamma_1$. El multigiros asociado es $D_3 = \text{Id} + \Omega(\cdot, \gamma_1)\gamma_1 + (3n+4)\Omega(\cdot, \gamma_2)\gamma_2$. En la Figura 2.16c apreciamos la 2-descomposición. Los datos para obtener los multigiros están resumidos en la tabla 2.3.

Con esto el paso (1) está completo.

Paso (2). Nos ayudaremos de la matriz simpléctica O , con respecto a la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$:

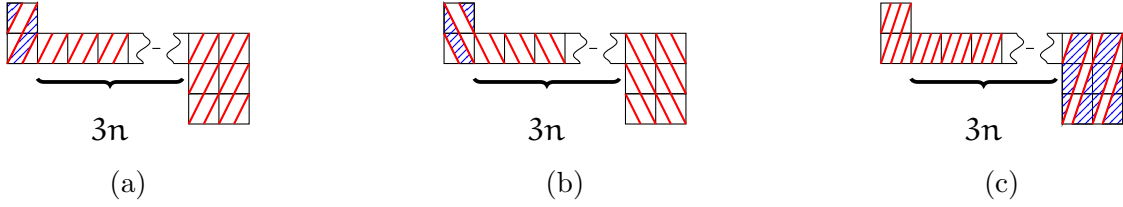


Figura (2.16) Descomposición en cilindros en las direcciones $(1,2)$, $(-1,2)$ y $(1,3)$ de un origami en $\mathcal{F}_{3n+8}$. Aquí, α_1 , β_1 y γ_1 son las almas de los cilindros blancos en su respectiva descomposición.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

De tal forma que $\Omega(x, y) = x^t O y$, para $x, y \in H_1(M, \mathbb{Q})$.

Los datos de intersección entre la base de $H_1(M, \mathbb{Q})$ y las almas están presentadas en la tabla 2.2.

Ω	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	1	1	1	1	3	0
σ_2	$6n+5$	1	$6n+5$	1	$9n+5$	2
σ_3	4	0	4	0	2	2
ζ_1	-1	-1	1	1	-2	0
ζ_2	-1	0	1	0	-1	0
ζ_3	-3	0	3	0	-1	-1

Tabla (2.2) Intersecciones algebraicas entre la base de la homología y las almas de los cilindros.

	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	2
f_1	$3n+7$	$3n+7$	$3n+4$
f_2	1	1	2
k_1	1	1	1
k_2	$3n+7$	$3n+7$	$3n+4$

Tabla (2.3) Datos para los multigiros en las direcciones θ_1 , θ_2 , θ_3 para los origamis en $\mathcal{F}_{3n+8}$

Con esta información podemos obtener cómo X_1, X_2 y X_3 se escriben en términos de la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$ y en términos de la base $\{e_i\}$, simplemente resolviendo las ecuaciones lineales (2.17) y (2.18).

Nota 2.7.3. *En el Apéndice mostramos un programa documentado para el caso de la familia $\mathcal{F}_{3n+8}$ que nos ayuda a resolver las ecuaciones de Álgebra lineal que naturalmente aparecen en la implementación del Teorema 2.5.1. Este mismo programa nos ayuda para las otras familias sólo hay que cambiar los datos de entrada. Los datos de entrada que necesita el programa son los siguientes:*

1. las diferentes longitudes combinatorias de las almas de los cilindros obtenidos de las descomposiciones en direcciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$,
2. la razón irreducible c_2/c_1 de los cilindros,
3. los coeficientes de la base $\{e_i\}$ en términos de la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$ y
4. los datos de intersección de las almas con la base escogida de la homología.

El programa arroja las expresiones (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23). También arroja las intersecciones algebraicas entre las X_i y expresiones del tipo de (2.24). Con la anterior información se decide qué base utilizar del espacio tres dimensional requerido en el Teorema 2.5.1 y así obtener la expresión (2.25).

Veamos cómo se hace esto paso por paso. Primero se calculan los coeficientes de las almas en términos de la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. Escribiendo $\eta = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3 + \lambda_4\xi_1 + \lambda_5\xi_2 + \lambda_6\xi_3$, donde η es algún alma de algún cilindro, entonces, podemos obtener los coeficientes $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a partir del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$[\Omega(\eta, \sigma_1), \Omega(\eta, \sigma_2), \Omega(\eta, \sigma_3), \Omega(\eta, \xi_1), \Omega(\eta, \xi_2), \Omega(\eta, \xi_3)] = O\eta. \quad (2.17)$$

Con los datos introducidos por el usuario también podemos saber las intersecciones algebraicas $\Omega(e_i, e_j)$. De este modo podemos saber cómo se escriben los elementos X_i en términos de $\{e_i\}$. Se resuelven los siguientes sistemas de ecuaciones lineales para $\lambda_l, l \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\Omega(X_i, e_j) = \lambda_{i_1}\Omega(e_1, e_j) + \lambda_{i_2}\Omega(e_2, e_j) + \lambda_{i_3}\Omega(e_3, e_j) + \lambda_{i_4}\Omega(e_4, e_j). \quad (2.18)$$

Así, X_1, X_2, X_3 se escriben en términos de e_i como:

$$\begin{aligned} X_1 &= -e_1 - 2e_2 + (3n+6)e_3 - 4e_4, \\ X_2 &= e_1 + 2e_2 + (3n+6)e_3 - 4e_4 \quad y \\ X_3 &= -2e_1 + (3n+4)e_2 - 6e_3 + (6n+4)e_4. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Con los datos de las longitudes combinatorias y los c_2 y c_1 , el programa puede computar los multigiros que actúan en e_i como :

$$D_1(e_1) = e_1 + (-3n - 2)X_1, \quad D_1(e_2) = e_2 - 2X_1, \quad D_1(e_3) = e_3 - X_1, \quad D_1(e_4) = e_4, \quad (2.20)$$

$$D_2(e_1) = e_1 + (-3n - 2)X_2, \quad D_2(e_2) = e_2 - 2X_2, \quad D_2(e_3) = e_3 + X_2, \quad D_2(e_4) = e_4, \quad (2.21)$$

$$D_3(e_1) = e_1 + 2X_3, \quad D_3(e_2) = e_2 + 2X_3, \quad D_3(e_3) = e_3 \quad y \quad D_3(e_4) = e_4 - X_3. \quad (2.22)$$

De aquí podemos comprobar que el paso (2) se cumple.

Paso (3). Finalmente hay que calcular el elemento aniquilador, para ello resolvemos el sistema de ecuaciones lineales $\Omega(e, X_1) = \Omega(e, X_2) = \Omega(e, X_3) = 0$. De donde, un elemento aniquilador tiene la forma:

$$e = 5X_1 + X_2 + (3n + 6)X_3. \quad (2.23)$$

El programa nos devuelve $e/5$, pero simplemente escogemos e , para evitar coeficientes racionales.

El programa computa también las diferentes intersecciones algebraicas entre parejas de X_i y vemos que $\Omega(X_1, X_3) = -6n - 16$. Entonces, escogemos la base X_1, X_3, e para V . La acción de las transvecciones en esta base queda como:

$$\begin{aligned} D_1(X_3) &= X_3 + 2X_1, \\ D_3(X_1) &= X_1 - 2X_3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} D_2(X_1) &= (-30(n + 2) + 1)X_1 + 18(n + 2)^2X_3 - 6(n + 2)e \quad y \\ D_2(X_3) &= -50X_1 + (30(n + 2) + 1)X_3 - 10e. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La forma de las matrices de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e queda como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -30(n + 2) + 1 & -50 & 0 \\ 18(n + 2)^2 & 30(n + 2) + 1 & 0 \\ 6(n + 2) & 10 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El problema de encontrar una palabra en el radical unipotente es un problema de pertenencia en $SL(3, \mathbb{Z})$. Sin embargo, al ser este un problema del cual no se sabe si es decidible [Don23] nos encontramos con un problema altamente no trivial. Por lo tanto, tenemos que hacer un sacrificio, por lo que consideramos una progresión aritmética en el número de cuadrados donde una palabra pueda ser sencilla de obtener. Consideramos $n = 10k - 2$, con $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que obtenemos la siguiente palabra:

$$A_3^{3k} A_2 A_3^{-3k} A_1^{-25}$$

que es un elemento no trivial del radical unipotente de $Sp(V)$. Por lo tanto, podemos concluir que para la familia $\mathcal{F}_{3n+8}$, la subfamilia $\mathcal{F}_{60k+2}$ tiene origamis con monodromía aritmética para k grande.

Aritmetividad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{3n+10}$.

Para evitar repeticiones innecesarias resumiremos los datos que necesita el programa para verificar los pasos (1) y (2) en forma de tablas. El paso (3) se hace de manera heurística para encontrar al elemento en el radical unipotente. Recordemos que usamos la base (2.15) del espacio $H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$ para los cálculos.

Paso (1). Para poder obtener descomposiciones en dos cilindros consideramos la subfamilia dada por $n = 2k - 1$. Así la descomposiciones en cilindros en las direcciones $\theta_1 = (2, 1)$, $\theta_2 = (-2, 1)$ y $\theta_3 = (1, 1)$ se observan en las Figuras 2.17a, 2.17b y 2.17c. De las figuras mencionadas obtenemos toda la información que necesitamos. En la Tabla 2.4 (A) mostramos los datos de intersección entre la base de la homología y las alas de los respectivos cilindros. La primera línea corresponde a la direcciones θ_i . En la Tabla 2.4 (B) mostramos las longitudes combinatorias, las c_i y las k_i . Con estos datos obtenemos a los vectores $\{X_1, X_2, X_3\}$ en términos de $\alpha_1, \dots, \gamma_2$ y también a los multigiros de Dehn correspondientes.

Paso (2). Las primeras tres líneas de la Tabla 2.5 muestran los coeficientes X_i en términos de la base $\{e_i\}$ de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{R})$. Necesitamos saber cómo es la acción de las respectivas transvecciones D_1 , D_2 and D_3 respecto de la base $\{e_i\}$, i.e., $D_i(e_j) = e_j + r_{i,j}X_i$. Los elementos de las últimas tres líneas de la tabla 2.5 muestran los $r_{i,j}$'s. De los datos y del programa también podemos saber que $\Omega(X_1, X_3) \neq 0$.

Paso (3). Usando la Tabla 2.4 (A) obtenemos el elemento aniquilador e que está en la segunda línea de la Tabla 2.6. Escribimos la acción de las transvecciones en términos de la base $\{X_1, X_3, e\}$. Estos datos están en las dos primeras líneas de la Tabla 2.6. Podemos computar las correspondientes matrices A_1 , A_2 y A_3 . Consideramos una subfamilia de la subfamilia anterior con $k = 2l - 1$. Así, el elemento no trivial en el radical unipotente de $Sp(W)$ es $A_3^l A_2 A_3^{-l} A_1^{-9}$.

Para las demás familias solo mostraremos las tablas ya que es esencialmente lo mismo.

Ω	$\theta_1 \parallel (2, 1)$		$\theta_2 \parallel (-2, 1)$		$\theta_3 \parallel (1, 1)$	
	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	0	1	0	1	1	0
σ_2	$3k$	$3k$	$3k$	$3k$	$6k - 1$	1
σ_3	1	1	1	1	1	1
ζ_1	-1	-3	1	3	-2	0
ζ_2	-1	-1	1	1	-1	0
ζ_3	-4	-4	4	4	-2	-2

(a)

	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	1
f_1	$3k + 4$	$3k + 4$	$6k + 3$
f_2	$3k + 5$	$3k + 5$	4
k_1	$3k + 5$	$3k + 5$	4
k_2	$3k + 4$	$3k + 4$	$6k + 3$

(b)

Tabla (2.4) Para la familia $\mathcal{F}_{3n+10}$: En (A): las intersecciones algebraicas de las almas en las direcciones $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ y los elementos en la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. En (B): Longitudes combinatorias y coeficientes c_i en las direcciones $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

	e_1	e_2	e_3	e_4
X_1	-1	-3	$3k + 3$	-1
X_2	1	3	$3k + 3$	-1
X_3	-4	$12k + 2$	-4	$6k - 1$
D_1	$-3k$	-1	-1	0
D_2	$-3k$	-1	1	0
D_3	1	1	0	-2

Tabla (2.5) Coeficientes de X_i en términos de la base de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ y coeficientes de la acción de las transvecciones en la familia $\mathcal{F}_{3n+10}$.

	X_1	X_3
D_1	X_1	$X_3 + 2X_1$
D_2	$(-18(k + 1) + 1)X_1 - 18(k + 1)^2X_3 + 6(k + 1)e$	$18X_1 + (18(k + 1) + 1))X_3 - 6e$
D_3	$X_1 - 2X_3$	X_3
Annihilator	$e = 3X_1 + X_2 + 3(k + 1)X_3$	
Word	$k = 2l - 1, A_3^l A_2 A_3^{-l} A_1^{-9}$	

Tabla (2.6) Acción de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e y elemento no trivial en $\text{Sp}(W)$ para la familia $\mathcal{F}_{3n+10}$.

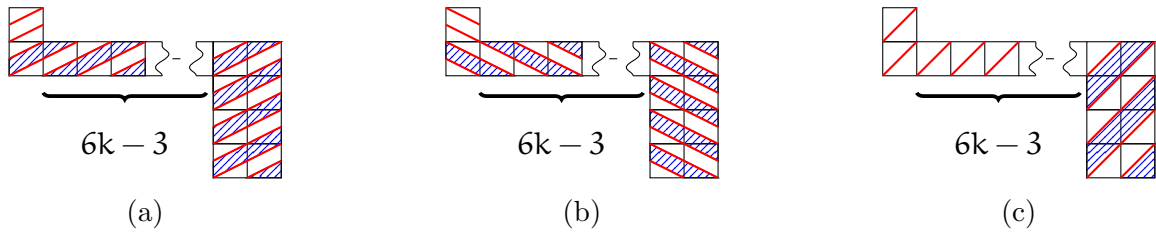


Figura (2.17) Descomposición en cilindros en las direcciones $(2, 1)$, $(-2, 1)$ y $(1, 1)$ de origamis en $\mathcal{F}_{3n+10}$. Aquí α_2 , β_2 and γ_1 son las almas de los cilindros blancos.

Aritmetividad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{3n+12}$

Consideramos la subfamilia dada por $n = 2k - 1$ de tal forma que las direcciones θ_1 , θ_2 y θ_3 nos den descomposiciones en dos cilindros. Al final consideramos otra subfamilia con $k = 36l - 1$ para encontrar una palabra apropiada en términos de A_1 , A_2 y A_3 . Las descomposiciones en cilindros se encuentran en las Figuras 2.18a, 2.18b y 2.18c; de ellas obtenemos las Tablas 2.7, 2.8 y 2.9.

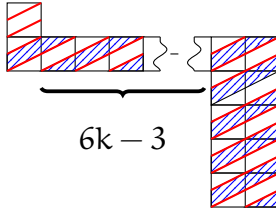
Ω	$\theta_1 \parallel (2, 1)$		$\theta_2 \parallel (1, 2)$		$\theta_3 \parallel (1, 5)$	
	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	1	0	1	1	5	0
σ_2	$3k$	$3k$	$12k - 1$	1	$30k - 8$	2
σ_3	1	1	4	0	2	2
ζ_1	-3	-1	-1	-1	-2	0
ζ_2	-1	-1	-1	0	-1	0
ζ_3	-5	-5	-5	0	-1	-1

(a)

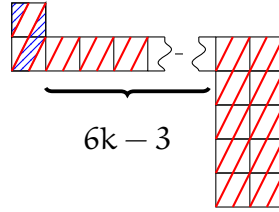
	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	4
f_1	$3k + 5$	$6k + 8$	$6k + 1$
f_2	$3k + 4$	1	2
k_1	$3k + 4$	$6k + 8$	1
k_2	$3k + 5$	$6k + 8$	$2(6k + 1)$

(b)

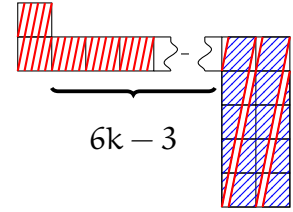
Tabla (2.7) Intersecciones algebraicas entre las almas y la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. y datos para los multigiros para la familia $\mathcal{F}_{3n+12}$.



(a)



(b)



(c)

Figura (2.18) Descomposición en cilindros en las direcciones $(2, 1)$, $(1, 2)$ y $(1, 5)$ de los origamis en $\mathcal{F}_{3n+12}$. Aquí α_1 , β_1 y γ_1 son las almas de los cilindros blancos en la respectiva descomposición.

	e_1	e_2	e_3	e_4
X_1	1	4	$-(3k+4)$	1
X_2	-1	-4	$6k+7$	-4
X_3	-4	$2(6k+1)$	-20	$24k-4$
D_1	$3k$	1	1	0
D_2	$-6k+1$	-2	-1	0
D_3	2	2	0	-1

Tabla (2.8) Coeficientes de X_i en términos de la base de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ y coeficientes de la acción de las transvecciones en la familia $\mathcal{F}_{3n+12}$.

	X_2	X_3
D_1	$(\frac{-9(k+1)}{2} + 1)X_2 + \frac{-3}{2}(k+1)^2X_3 - 3(k+1)e$	$27X_2 + (\frac{9(k+1)}{2} + 1)X_3 - 18e$
D_2	X_2	$X_3 + 12X_2$
D_3	$X_2 - 6X_3$	X_3
Annihilator	$e = X_1 + \frac{3}{2}X_2 + (\frac{k+1}{4})X_3$	
Word	$k = 36l - 1, A_3^l A_1^{12} A_3^{-l} A_2^{-27}$	

Tabla (2.9) Acción de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e y elemento no trivial en $\mathbf{Sp}(W)$ para la familia $\mathcal{F}_{3n+12}$.

Aritmetividad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{6n+14}$

Las descomposiciones en cilindros para esta familia está en las Figuras 2.19a, 2.19b y 2.19c. De las descomposiciones en dos cilindros obtenemos las Tablas 2.10 y 2.11. Aquí solo consideramos una subfamilia para encontrar una palabra apropiada en términos de A_1 , A_2 y A_3 . Está indicado en la Tabla 2.12.

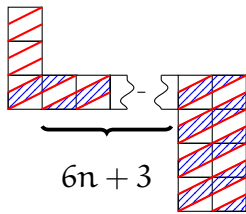
Ω	$\theta_1 \parallel (-2, 1)$		$\theta_2 \parallel (1, 1)$		$\theta_3 \parallel (2, 1)$	
	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	0	1	0	1	0	1
σ_2	$3n+3$	$3n+3$	1	$6n+5$	$3n+3$	$3n+3$
σ_3	1	1	1	1	1	1
ζ_1	1	5	0	-3	-1	-5
ζ_2	1	1	0	-1	-1	-1
ζ_3	4	4	2	-2	-4	-4

(a)

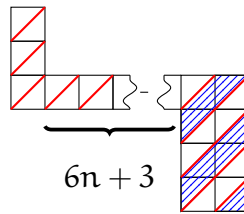
	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	1
f_1	$3n+6$	4	$3n+6$
f_2	$3n+8$	$6n+10$	$3n+8$
k_1	$3n+8$	$3n+5$	$3n+8$
k_2	$3n+6$	2	$3n+6$

(b)

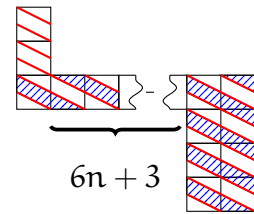
Tabla (2.10) Intersecciones algebraicas entre las almas y la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. y datos para los multigiros para la familia $\mathcal{F}_{6n+14}$.



(a)



(b)



(c)

Figura (2.19) Descomposición en cilindros en las direcciones $(2, 1)$, $(1, 1)$ y $(-2, 1)$ de origamis en $\mathcal{F}_{6n+14}$. Aquí α_2 , β_2 y γ_2 son las almas de los cilindros en la respectiva descomposición.

	e_1	e_2	e_3	e_4
X_1	2	6	$3n + 6$	-2
X_2	2	$-(6n + 8)$	2	$-(3n + 3)$
X_3	-2	-6	$3n + 6$	-2
D_1	$-(3n + 3)$	-1	2	0
D_2	-1	-1	0	2
D_3	$-(3n + 3)$	-1	-2	0

Tabla (2.11) Coeficientes de X_i en términos de la base de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ y coeficientes de la acción de las transvecciones en la familia $\mathcal{F}_{6n+14}$.

	X_2	X_3
D_1	$(1 + 36(n + 2))X_2 - 18X_3 + 6e$	$36(n + 2)^2X_2 + (1 - 36(n + 2))X_3 + 12(n + 2)e$
D_2	X_2	$X_3 + 4X_2$
D_3	$X_2 - 2X_3$	X_3
Annihilator	$e = X_1 - (6n + 12)X_2 + 3X_3$	
Word	$n = 2k - 2, A_2^k A_1 A_2^{-k} A_3^{-9}$	

Tabla (2.12) Acción de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e y elemento no trivial en $\mathbf{Sp}(W)$ para la familia $\mathcal{F}_{6n+14}$.

Aritmetividad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{6n+18}$.

La descomposición en cilindros para esta familia está en las Figuras 2.20a, 2.20b y 2.20c. De la descomposición obtenemos las Tablas 2.13 y 2.14. Aquí solo consideramos una subfamilia para encontrar una palabra apropiada en términos de A_1 , A_2 y A_3 . Está indicado en la Tabla 2.15.

Ω	$\theta_1 \parallel (2, 1)$		$\theta_2 \parallel (1, 1)$		$\theta_3 \parallel (-1, 1)$	
	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	0	1	0	1	0	1
σ_2	$3n+3$	$3n+3$	1	$6n+5$	1	$6n+5$
σ_3	1	1	1	1	1	1
ζ_1	1	5	0	-3	0	3
ζ_2	1	1	0	-1	0	1
ζ_3	6	6	-3	-3	3	3

(a)

	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	1
f_1	$3n+8$	6	6
f_2	$3n+10$	$6n+12$	$6n+12$
k_1	$3n+10$	$n+2$	$n+2$
k_2	$3n+8$	1	1

(b)

Tabla (2.13) Intersecciones algebraicas entre las almas y la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. y datos para los multigiros para la familia $\mathcal{F}_{6n+18}$.

	e_1	e_2	e_3	e_4
X_1	2	10	$3n+8$	-2
X_2	1	$-(3n+4)$	1	$-(n+1)$
X_3	-1	$3n+4$	1	$-(n+1)$
D_1	$-(3n+3)$	-1	2	0
D_2	-1	-1	0	3
D_3	-1	-1	0	-3

Tabla (2.14) Coeficientes de X_i en términos de la base de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ y coeficientes de la acción de las transvecciones en la familia $\mathcal{F}_{6n+18}$.

	X_1	X_3
D_1	X_1	$X_3 + X_1$
D_2	$(1 + 18(n + 1))X_1 - 54X_3 - 18e$	$6(n + 1)^2X_1 + (1 - 18(n + 1))X_3 - 6(n + 1)e$
D_3	$X_1 - 6X_3$	X_3
Annihilator	$e = (n + 1)X_1 + X_2 - 3X_3$	
Word	$n = 3k - 1, A_1^k A_2 A_1^{-k} A_3^{-9}$	

Tabla (2.15) Acción de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e y elemento no trivial en $\text{Sp}(W)$ para la familia $\mathcal{F}_{6n+18}$.

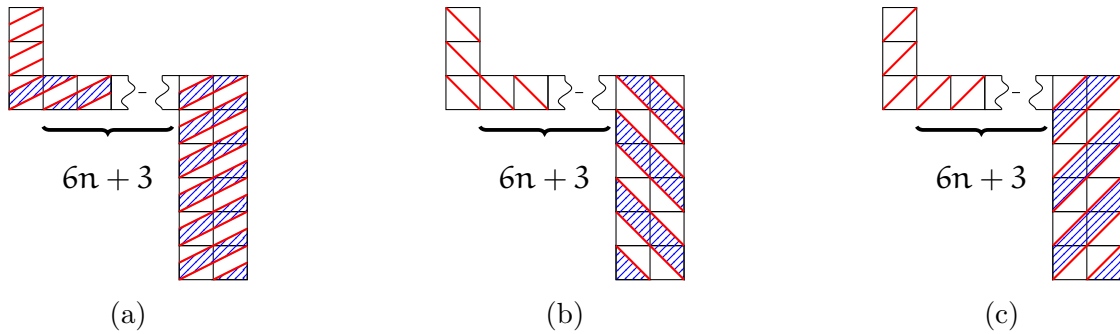


Figura (2.20) Descomposición en cilindros en la familia $(2, 1)$ $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ de origamis en $\mathcal{F}_{6n+18}$. Aquí α_2 , β_2 y γ_2 son las almas de los cilindros blancos en la respectiva descomposición.

Aritmeticidad de una subfamilia de $\mathcal{F}_{6n+22}$

La descomposición en cilindros para esta familia está en las Figuras 2.21a, 2.21b y 2.21c. De aquí obtenemos las Tablas 2.16, 2.17 y 2.18.

Ω	$\theta_1 \parallel (2, 1)$		$\theta_2 \parallel (1, 1)$		$\theta_3 \parallel (-1, 1)$	
	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
σ_1	0	1	0	1	0	1
σ_2	$3n+3$	$3n+3$	1	$6n+5$	1	$6n+5$
σ_3	1	1	1	1	1	1
ζ_1	1	5	0	-3	0	3
ζ_2	1	1	0	-1	0	1
ζ_3	8	8	-4	-4	4	4

(a)

	θ_1	θ_2	θ_3
c_1	1	1	1
c_2	1	1	1
f_1	$3n+10$	8	8
f_2	$3n+12$	$6n+14$	$6n+14$
k_1	$3n+12$	$3n+7$	$3n+7$
k_2	$3n+10$	4	4

(b)

Tabla (2.16) Intersecciones algebraicas entre las almas y la base $\{\sigma_i, \xi_i\}$. y datos para los multigiros para la familia $\mathcal{F}_{6n+22}$.

	e_1	e_2	e_3	e_4
X_1	2	14	$3n+10$	-2
X_2	4	$-(12n+16)$	4	$-(3n+3)$
X_3	-4	$12n+16$	4	$-(3n+3)$
D_1	$-(3n+3)$	-1	2	0
D_2	-1	-1	0	4
D_3	-1	-1	0	-4

Tabla (2.17) Coeficientes de X_i en términos de la base de $H_1^{(0)}(M, \mathbb{Q})$ y coeficientes de la acción de las transvecciones en la familia $\mathcal{F}_{6n+22}$.

	X_1	X_3
D_1	X_1	$X_3 + 4X_1$
D_2	$(1 + 72(n+1))X_1 - 72X_3 - 24e$	$72(n+1)^2X_1 + (1 - 72(n+1))X_3 - 24(n+1)e$
D_3	$X_1 - 8X_3$	X_3
Annihilator	$e = 3(n+1)X_1 + X_2 - 3X_3$	
Word	$n = 4k - 1, A_1^k A_2 A_1^{-k} A_3^{-9}$	

Tabla (2.18) Acción de las transvecciones en términos de la base X_1, X_3, e y elemento no trivial en $\text{Sp}(W)$ para la familia $\mathcal{F}_{6n+22}$.

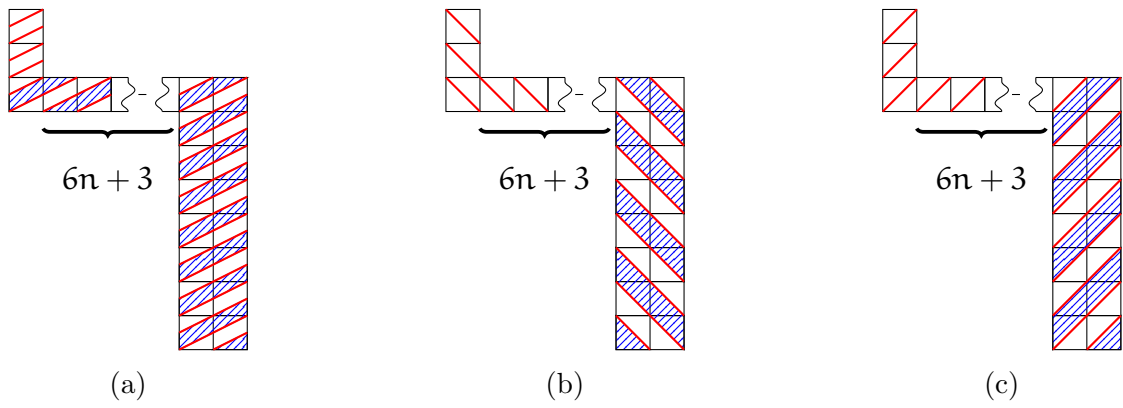


Figura (2.21) Descomposición en cilindros en las direcciones $(2, 1)$, $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ de los origamis en $\mathcal{F}_{6n+22}$. Aquí α_2 , β_2 y γ_2 son las almas de los cilindros blancos en la respectiva descomposición.

Apéndice

Este es el programa escrito en Sage que usamos para demostrar la aritmeticidad de las familias. Ponemos un ejemplo en la familia $\mathcal{F}_{3n+8}$ vea la nota 2.7.3. Para las demás familias solo es necesario cambiar los datos de entrada correspondientes, que son las variables $e1, e2, e3, e4, \text{inta2}, \text{inta1}, \text{intb2}, \text{intb1}, \text{intc2}, \text{intc1}, f1_a, f2_a, f1_b, f2_b, f1_c, f2_c, c1_a, c2_a, c1_b, c2_b, c1_c$ y $c2_c$. En el programa se detalla a qué corresponden las variables mencionadas.

```
#Datos para la familia 3n+8 direcciones (1,2) (-1,2) (1,3)

#Los sigma-i y xi juegan el papel de bases canónicas de un espacio
de
#dimensión 6, en el siguiente orden sigma1, sigma2, sigma3, xi1, xi2,
xi3.
#sigma1 tiene holonomía (1,0), sigma2, holonomía (6*n+6,0), sigma3
#hol (2,0), xi1, hol (0,3), xi2, (0,1), xi hol(0,4) de tal forma que
la
#2-forma simpléctica representada por la matriz O tiene entradas
#i(sigma-i, xi-j) y i(xi-i, sigma-j), así i(v,w)=v*O*w para vectores
v, w

O=Matrix([[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,1,1,1],[0,0,0,0,0,1],
[-1,-1,0,0,0,0],[0,-1,0,0,0,0],[0,-1,-1,0,0,0]])
```

```
n=var('n') #es nuestra variable para el cálculo simbólico
```

```
#El usuario introduce los coeficientes de las ei (base de la parte
no tautológica de la homología) en términos de la base sigma-i
, xi-i.
```

```

e1=vector([-3*n-3,1,0,0,0,0])
e2=vector([-2,0,1,0,0,0])
e3=vector([0,0,0,1,-2,0])
e4=vector([0,0,0,0,-3,1])

```

#El usuario introduce los datos para la dirección A. El tiene que decidir quiénes son las almas, ai,bi,ci. Para esto es necesario que el usuario introduzca los datos de intersección de las bases y ai, en este orden sigma1,sigma2,sigma3,xi1,xi2,xi3.

```

inta2=vector([1,1,0,-1,0,0])
inta1=vector([1,6*n+5,4,-1,-1,-3])

```

```

intb2=vector([1,1,0,1,0,0])
intb1=vector([1,6*n+5,4,1,1,3])

```

```

intc2=vector([0,2,2,0,0,-1])
intc1=vector([3,9*n+5,2,-2,-1,-1])

```

#El usuario introduce las longitudes combinatorias de las almas de los cilindros

```

f1_a=3*n+7
f2_a=1
f1_b=3*n+7
f2_b=1
f1_c=3*n+4
f2_c=2

```

#El usuario introduce las razones entre las alturas de los cilindros

```

c1_a=1
c2_a=1
c1_b=1
c2_b=1

```

```
c1_c=1
c2_c=2
```

```
m1_a=f2_a*c1_a
m2_a=f1_a*c2_a
m1_b=f2_b*c1_b
m2_b=f1_b*c2_b
m1_c=f2_c*c1_c
m2_c=f1_c*c2_c
```

#Se calculan las k_i

```
k2_a=(m2_a/m1_a).numerator()
k1_a=(m2_a/m1_a).denominator()
```

```
k2_b=(m2_b/m1_b).numerator()
k1_b=(m2_b/m1_b).denominator()
```

```
k2_c=(m2_c/m1_c).numerator()
k1_c=(m2_c/m1_c).denominator()
```

#para saber los coeficientes de las almas en términos de la base de toda la homología:

```
a2=O.solve_right(inta2)
a1=O.solve_right(inta1)
```

```
b2=O.solve_right(intb2)
b1=O.solve_right(intb1)
```

```
c2=O.solve_right(intc2)
c1=O.solve_right(intc1)
```

#Ahora definimos los elementos de en la homologia (0)

```

A=k2_a*a2-k1_a*(c2_a/c1_a)*a1
B=k2_b*b2-k1_b*(c2_b/c1_b)*b1
C=k2_c*c2-k1_c*(c2_c/c1_c)*c1

```

#Simplificamos las expresiones pues estamos trabando de manera simbólica

```

for i in range(0,len(A)): A[i]=A[i].full_simplify()
for i in range(0,len(B)): B[i]=B[i].full_simplify()
for i in range(0,len(C)): C[i]=C[i].full_simplify()

```

#Checamos independencia lineal

```

LIN=Matrix([A,B,C])
dimW=LIN.rank() # debe ser 3
print("dim(W)="+str(dimW))

```

#Computamos las intersecciones algebraicas entre A,B y C

```

print("i(A,B)="+str(A*B))
print("i(A,C)="+str(A*C))
print("i(B,C)="+str(B*C))

```

#Se resuelven ecuaciones lineales para saber los coeficientes de A ,B y C en los términos de la base ei

```

M1=Matrix([[e1*e3,e2*e3],[e1*e4,e2*e4]])
M2=Matrix([[e3*e1,e4*e1],[e3*e2,e4*e2]])
X=vector([A*e3,A*e4])
Y=vector([A*e1,A*e2])
lambdas1=M1.solve_right(X)
lambdas2=M2.solve_right(Y)

```

```

print("A="+str(lambdas1[0].full_simplify())+"e1"+"+"+"+"+str(
    lambdas1[1].full_simplify())+"e2"+"+"+"+"+"+str(lambdas2[0].
    full_simplify())+"e3"+"+"+"+"+"+str(lambdas2[1].full_simplify())
    +"e4")

```

```

X=vector([B*e3,B*e4])
Y=vector([B*e1,B*e2])

```

```

lambdas1=M1.solve_right(X)
lambdas2=M2.solve_right(Y)

print("B="+"(" +str(lambdas1[0].full_simplify())+" )e1"+"+"+"(" +str(
    lambdas1[1].full_simplify())+" )e2"+"+"+"(" +str(lambdas2[0].
    full_simplify())+" )e3"+"+"+"(" +str(lambdas2[1].full_simplify())
    +" )e4")

```

```

X=vector([C*O*e3,C*O*e4])
Y=vector([C*O*e1,C*O*e2])
lambdas1=M1.solve_right(X)
lambdas2=M2.solve_right(Y)

```

```

print("C="+"(" +str(lambdas1[0].full_simplify())+" )e1"+"+"+"(" +str(
    lambdas1[1].full_simplify())+" )e2"+"+"+"(" +str(lambdas2[0].
    full_simplify())+" )e3"+"+"+"(" +str(lambdas2[1].full_simplify())
    +" )e4")

```

#Estas funciones toman un vector y regresan el multigiros aplicado en él; en particular, la parte unipotente de la transvección

```

def UA(y):
    ua= k1_a*(y*O*a1)*a1+k2_a*(y*O*a2)*a2
    for i in range(0,len(ua)): ua[i]=ua[i].full_simplify()
    return ua

```

```

def UB(y):
    ub= k1_b*(y*O*b1)*b1+k2_b*(y*O*b2)*b2
    for i in range(0,len(ub)): ub[i]=ub[i].full_simplify()
    return ub

```

```

def UC(y):
    uc= k1_c*(y*O*c1)*c1+k2_c*(y*O*c2)*c2
    for i in range(0,len(uc)): uc[i]=uc[i].full_simplify()
    return uc

```

#Checamos que $UX(ei)/X$ sea entero

```

ei=[e1 , e2 , e3 , e4]
ei2=[ 'e1 ' , 'e2 ' , 'e3 ' , 'e4 ' ]
L=[UA,UB,UC]
L2=[A,B,C]
L3=[ 'A ' , 'B ' , 'C ' ]

#Se verifica la condición  $(D-ID)Z=Zw$  en la condicion del teorema
de Singh-Venkataramana

print(" Acción de las transvecciones sobre la base ei")
for i in range(0,len(L2)):
    print("D_"+L3[i]+":")
    for j in range(0,len(ei)):
        print ("D_"+L3[i]+" (" +ei2[j]+")=" +ei2[j]+ "+" +str((L[i](ei[j]))
            /L2[i]).full_simplify())+" "+L3[i])

#Calculos para encontrar el elemento aniquilador

w1w2=(A*O*B).full_simplify()
w1w3=(A*O*C).full_simplify()
w2w3=(B*O*C).full_simplify()
AnnM=Matrix([[0 , w1w2, w1w3],[ -w1w2, 0 , w2w3],[ -w1w3, -w2w3, 0]])

#Si la dimensión es 3 podemos continuar
if(dimW==3):
    e=copy((AnnM.right_kernel()).basis_matrix()[0])
    for i in range(0,len(e)): e[i]=e[i].full_simplify()
    print("");
    print("Elemento aniquilador:")
    print("e=(" +str(e[0])+" )A" + "(" +str(e[1])+" )B" + "(" +str(e[2])+" )
        C")

#Con estos datos el usuario puede decidir quién es w1,w2 para
obtener la base w1,w2,e y después escribir las matrices en
términos de esta nueva base.

print("")
print(" Matrices DX:")
for i in range(0,len(L2)):

```

```

print ("Para la matriz D_"+L3[i]+":")
for j in range(0,len(L2)):
    print ("D_"+L3[i]+"("+L3[j]+")="+L3[j]+"("+str((L[i](L2[j])/L2[
        i]).full_simplify())+"))"+L3[i])

```

Bibliografía

- [Ahl06] AHLFORS, Lars. *Lectures on quasiconformal mappings*. 2.^a ed. Estados Unidos: AMS., 2006. ISBN 9780821836446.
- [AV20] ARAMAYONA, Javier y VLAMIS, Nicholas G. Big Mapping Class Groups: An Overview. En: *In the Tradition of Thurston: Geometry and Topology* [en línea]. Ed. por OHSHIKA, Ken'ichi y PAPADOPOULOS, Athanase. Suiza: Springer International Publishing, 2020, págs. 459-496 [visitado 2024-02-05]. ISBN 9783030559281. Disp. desde: https://doi.org/10.1007/978-3-030-55928-1_12.
- [AM24] ATHREYA, Jayadev S. y MASUR, Howard. *Translation Surfaces*. Estados Unidos: AMS Graduate studies in Mathematics, 2024. ISBN 9781470476557.
- [BŠ19] BASMAJIAN, Ara y ŠARIĆ, Dragomir. Geodesically Complete Hyperbolic Structures. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* [en línea]. 2019, vol. 166, n.º 2, págs. 219-242 [visitado 2024-01-18]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1017/S0305004117000792>.
- [BW23] BAVARD, Juliette y WALKER, Alden. Two simultaneous actions of big mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* [en línea]. 2023, vol. 376, págs. 7603-7650 [visitado 2024-01-23]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1090/tran/8874>.
- [Bea12] BEARDON, Alan. *The Geometry of discrete groups*. Estados Unidos: Springer New York, NY, 2012. ISBN 9781461270225.
- [BM20] BENOIST, Yves y MIQUEL, Sébastien. Arithmeticity of discrete subgroups containing horospherical lattices. *Duke Mathematical Journal* [en línea]. 2020, vol. 169, n.º 8, págs. 1485-1539 [visitado 2024-05-14]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0082>.
- [Bon+22] BONNAFOUX, Etienne; KANY, Manuel; KATTLER, Pascal; MATHEUS, Carlos; NIÑO, Rogelio; SEDANO-MENDOZA, Manuel; VALDEZ, Ferrán y WEITZESCHMITHÜSEN, Gabriela. *Arithmeticity of the Kontsevich–Zorich monodromies of certain families of square-tiled surfaces* [en línea]. 2022 [visitado 2023-10-24]. Disp. desde arXiv: 2206.06595 [math.DS].

- [BT14] BRAV, Christopher y THOMAS, Hugh. Thin monodromy in $\mathrm{Sp}(4)$. *Compositio Mathematica* [en línea]. 2014, vol. 150, n.º 3, págs. 333-343 [visitado 2024-05-05]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1112/S0010437X13007550>.
- [CPV21] CHANDRAN, Yannis; PATEL, Priyam y VLAMIS, Nicholas G. *Infinite-type surfaces and mapping class groups: open problems* [en línea]. 2021 [visitado 2023-11-19]. Disp. desde: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:244870137>.
- [Don23] DONG, Ruiwen. Recent Advances in Algorithmic Problems for Semigroups. *ACM SIGLOG News* [en línea]. 2023, vol. 10, n.º 4, págs. 3-23 [visitado 2024-05-16]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1145/3636362.3636365>.
- [EFW18] ESKIN, Alex; FILIP, Simion y WRIGHT, Alex. The algebraic hull of the Kontsevich-Zorich cocycle. *Annals of Mathematics* [en línea]. 2018, vol. 188, págs. 1-33 [visitado 2024-03-21]. Disp. desde: <https://doi.org/10.4007/annals.2018.188.1.5>.
- [EM15] ESKIN, Alex y MATHEUS, Carlos. A coding-free simplicity criterion for the Lyapunov exponents of Teichmüller curves. *Geom Dedicata* [en línea]. 2015, vol. 179, págs. 45-67 [visitado 2024-04-23]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s10711-015-0067-7>.
- [EM18] ESKIN, Alex y MIRZAKHANI, Maryam. Invariant and stationary measures for the $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ action on Moduli space. *Publications mathématiques de l'IHÉS* [en línea]. 2018, vol. 127, págs. 95-324 [visitado 2024-02-04]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s10240-018-0099-2>.
- [EMM15] ESKIN, Alex; MIRZAKHANI, Maryam y MOHAMMADI, Amir. Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ action on moduli space. *Annals of Mathematics* [en línea]. 2015, vol. 182, págs. 673-721 [visitado 2024-02-04]. Disp. desde: <https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.2.7>.
- [EF15] EVANS, Lawrence C. y F., Garipey Ronald. *Measure Theory and fine properties of functions: revised edition*. Estados Unidos: CRC Press, 2015. ISBN 9781482242386.
- [FM12] FARB, Benson y MARGALIT, Dan. *A primer on mapping class groups*. Estados Unidos: Princeton University Press, 2012. ISBN 9780691147949.
- [Fil16] FILIP, Simion. Semisimplicity and rigidity of the Kontsevich-Zorich cocycle. *Inventiones mathematicae* [en línea]. 2016, vol. 205, págs. 617-670 [visitado 2023-11-03]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s00222-015-0643-3>.
- [Fil19] FILIP, Simion. Notes on the multiplicative ergodic theorem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* [en línea]. 2019, vol. 39, n.º 5, págs. 1153-1189 [visitado 2024-03-25]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1017/etds.2017.68>.
- [Fil22] FILIP, Simion. *Uniformization of some weight 3 variations of Hodge structure, Anosov representations and Lyapunov exponents* [en línea]. 2022 [visitado 2024-04-22]. Disp. desde arXiv: 2110.07533 [math.AG].

- [FF21] FILIP, Simion y FOUGERON, Charles. *A cyclotomic family of thin hypergeometric monodromy groups in $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$* [en línea]. 2021 [visitado 2024-04-01]. Disp. desde arXiv: 2106.09181 [math.AG].
- [FM06] FLETCHER, Alistair y MARKOVIC, Vladimir. *Quasiconformal maps and Teichmüller theory*. Reino Unido: Oxford University Press, 2006. ISBN 9780198569268.
- [FM14] FORNI, Giovanni y MATHEUS, Carlos. Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards. *Journal of Modern Dynamics* [en línea]. 2014, vol. 8, n.º 3&4, págs. 271-436 [visitado 2023-11-04]. Disp. desde: <https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/jmd.2014.8.271>.
- [For81] FORSTER, Otto. *Lectures on Riemann Surfaces*. Estados Unidos: Springer, New York, NY, 1981. ISBN 9780387906171.
- [Fra66] FRANKEL, T. On Theorems of Hurwitz and Bochner. *Journal of Mathematics and Mechanics* [en línea]. 1966, vol. 15, n.º 3, págs. 373-377 [visitado 2024-05-04]. Disp. desde: <https://www.jstor.org/stable/24901340>.
- [Fre44] FREUDENTHAL, Hans. Über die Enden diskreter Räume und Gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici* [en línea]. 1944, vol. 17, págs. 1-38 [visitado 2024-02-22]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/BF02566233>.
- [FR16] FUCHS, Elena y RIVIN, Igor. Generic Thinness in Finitely Generated Subgroups of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. *International Mathematics Research Notices* [en línea]. 2016, vol. 2017, n.º 17, págs. 5385-5414 [visitado 2024-02-23]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1093/imrn/rnw136>.
- [GW] GEKHTMAN, Ilya y WRIGHT, Alex. *Smillie's theorem on closed $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ orbits of quadratic differentials* [en línea]. [s.f.] [visitado 2024-04-12]. Disp. desde: <https://websites.umich.edu/~alexmw/Smillie.pdf>.
- [Gut19] GUTIÉRREZ-ROMO, Rodolfo. Classification of Rauzy–Veech groups: proof of the Zorich conjecture. *Invent. math.* [en línea]. 2019, vol. 215, págs. 741-778 [visitado 2024-05-01]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0836-7>.
- [GJ00] GUTKIN, Eugene y JUDGE, Chris. Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic. *Duke Mathematical Journal* [en línea]. 2000, vol. 103, n.º 2, págs. 191-213 [visitado 2023-12-12]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10321-3>.
- [Hat22] HATCHER, Allen. *The Kirby torus trick for surfaces* [en línea]. 2022 [visitado 2024-01-25]. Disp. desde: <https://arxiv.org/abs/1312.3518>.
- [Hub06] HUBBARD, John H. *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics Volume 1: Teichmüller Theory*. Estados Unidos: Matrix Editions, 2006. ISBN 9780971576629.

- [HL06] HUBERT, Pascal y LELIÈVRE, Samuel. Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel Journal of Mathematics* [en línea]. 2006, vol. 151, págs. 281-321 [visitado 2024-01-15]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/BF02777365>.
- [HM19] HUBERT, Pascal y MATHEUS, Carlos. An origami of genus 3 with arithmetic Kontsevich–Zorich monodromy. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* [en línea]. 2019, págs. 1-12 [visitado 2022-08-23]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1017/S0305004119000057>.
- [KM24] KANY, Manuel y MATHEUS, Carlos. *Arithmeticity of the Kontsevich–Zorich monodromies of certain families of square-tiled surfaces II* [en línea]. 2024 [visitado 2024-04-26]. Disp. desde arXiv: 2301.06894 [math.DS].
- [Kna95] KNAPP, Anthony W. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Estados Unidos: Birkhäuser, Boston, MA, 1995. ISBN 9781475724530.
- [Kob87] KOBAYASHI, Shoshichi. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*. Estados Unidos: Princeton University Press, 1987. ISBN 9781400858682.
- [Kon+19] KONTOROVICH, Alex; LONG, Darren D.; LUBOTZKY, Alexander y REID, Alan W. What Is... A Thin Group? *Notices of the American Mathematical Society* [en línea]. 2019, vol. 66, n.º 6, págs. 905-910 [visitado 2024-03-12]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1090/noti1900>.
- [KZ03] KONTSEVICH, Maxim y ZORICH, Anton. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Inventiones Mathematicae* [en línea]. 2003, vol. 153, n.º 3, págs. 631-678 [visitado 2024-04-10]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s00222-003-0303-x>.
- [Leh87] LEHTO, Olli. *Univalent functions and Teichmüller spaces*. Estados Unidos: Springer-Verlag, 1987. ISBN 9781461386544.
- [LV73] LEHTO, Olli. y VIRTANEN, Kaarlo I. *Quasiconformal mappings in the plane*. Alemania: Springer Berlin, Heidelberg, 1973. ISBN 9783642655159.
- [MT02] MASUR, Howard y TABACHNIKOV, Serge. Rational billiards and flat structures. En: HASSELBLATT, Boris y KATOK, Anatole (eds.) [impreso]. Países Bajos: Elsevier Science, 2002, vol. 1, págs. 1015-1089 [visitado 2024-04-10]. Handbook of Dynamical Systems: Vol. 1 Part A. ISBN 9780444826695.
- [Mat18] MATHEUS, Carlos. *Dynamical Aspects of Teichmüller Theory*. Países Bajos: Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319921587.
- [MMY14] MATHEUS, Carlos; MÖLLER, Martin y YOCCOZ, Jean-Christophe. A criterion for the simplicity of the Lyapunov spectrum of square-tiled surfaces. *Inventiones Mathematicae* [en línea]. 2014, vol. 202, n.º 1, págs. 333-425 [visitado 2023-10-03]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/s00222-014-0565-5>.

- [Mat03] MATSUZAKI, Katsuhiko. The infinite direct product of Dehn twists acting on infinite dimensional Teichmüller spaces. *Kodai Mathematical Journal* [en línea]. 2003, vol. 26, n.º 3, págs. 279-287 [visitado 2024-11-22]. Disp. desde: <https://doi.org/10.2996/kmj/1073670609>.
- [Mat04] MATSUZAKI, Katsuhiko. A countable Teichmüller modular group. *Trans. Amer. Math. Soc* [en línea]. 2004, vol. 357, págs. 3119-3131 [visitado 2023-10-09]. Disp. desde: <https://www.jstor.org/stable/3845091>.
- [McM03] MCMULLEN, Curtis. Billiards and Teichmüller Curves on Hilbert Modular Surfaces. *Journal of the American Mathematical Society* [en línea]. 2003, vol. 16, n.º 4, págs. 857-885 [visitado 2023-11-16]. Disp. desde: <https://www.jstor.org/stable/30041457>.
- [McM] MCMULLEN, Curtis T. *Riemann surfaces, dynamics and geometry* [en línea]. [s.f.] [visitado 2024-06-22]. Disp. desde: <https://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/17/html/base/rs/rs.pdf>.
- [Möl06] MÖLLER, Martin. Variations of Hodge Structures of a Teichmüller Curve. *Journal of the American Mathematical Society* [en línea]. 2006, vol. 19, n.º 2, págs. 327-344 [visitado 2024-03-15]. Disp. desde: <https://www.jstor.org/stable/20161280>.
- [Mor15] MORRIS, Dave W. *Introduction to Arithmetic Groups*. Estados Unidos: Deductive Press, 2015. ISBN 9780986571602.
- [Niñ23] NIÑO HERNANDEZ, Rogelio. *Countable modular groups of infinite type surfaces* [en línea]. 2023 [visitado 2024-01-03]. Disp. desde arXiv: 2310.12388 [math.GT].
- [PV18] PATEL, Priyam y VLAMIS, Nicholas G. Algebraic and topological properties of big mapping class groups. *Algebr. Geom. Topol.* [en línea]. 2018, vol. 18, n.º 7, págs. 4109-4142 [visitado 2024-09-06]. Disp. desde: <https://doi.org/10.2140/agt.2018.18.4109>.
- [Ric63] RICHARDS, Ian. On the classification of non compact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc* [en línea]. 1963, vol. 106, págs. 259-269 [visitado 2024-03-18]. Disp. desde: <https://www.ams.org/journals/tran/1963-106-02/S0002-9947-1963-0143186-0/S0002-9947-1963-0143186-0.pdf>.
- [Riv15] RIVIN, Igor. *Large Galois groups with applications to Zariski density* [en línea]. 2015 [visitado 2023-10-07]. Disp. desde arXiv: 1312.3009 [math.NT].
- [Sar14] SARNAK, Peter. Notes on Thin Matrix Groups. En: BREUILLARD, Emmanuel y OH, Hee (eds.). *Thin Groups and Superstrong Approximation* [impreso]. Reino Unido: MSRI Publications, 2014, págs. 343-362 [visitado 2024-01-20]. ISBN 9781107036857.

- [Sin15] SINGH, Sandip. Arithmeticity of some hypergeometric monodromy groups in $\mathrm{Sp}(4)$. *Journal of Algebra* [en línea]. 2015, vol. 473, págs. 142-165 [visitado 2024-03-22]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.09.030>.
- [SV14] SINGH, Sandip y VENKATARAMANA, Tyakal N. Arithmeticity of certain symplectic hypergeometric groups. *Duke Mathematical Journal* [en línea]. 2014, vol. 163, n.º 3, págs. 591-617 [visitado 2023-10-17]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1215/00127094-2410655>.
- [Spi99] SPIVAK, Michael. *A comprehensive Introduction to differential geometry, volume four*. 3ª. Estados Unidos: Publish or Perish, Inc., 1999. ISBN 091409873X.
- [Str84] STREBEL, Kurt. *Quadratic Differentials*. Alemania: Springer Berlin, Heidelberg, 1984. ISBN 9783540130352.
- [Vee89] VEECH, William A. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Inventiones Mathematicae* [en línea]. 1989, vol. 97, n.º 3, págs. 553-584 [visitado 2024-03-28]. Disp. desde: <https://doi.org/10.1007/BF01388890>.
- [Wol79] WOLPERT, Scott. The Length Spectra as Moduli for Compact Riemann Surfaces. *Annals of Mathematics* [en línea]. 1979, vol. 109, n.º 2, págs. 323-351 [visitado 2024-01-28]. Disp. desde: <https://doi.org/10.2307/1971114>.
- [Yoc07] YOCCOZ, Jean-Christophe. Interval Exchange maps and Translation Surfaces. En: EINSIEDLER, Manfred L.; ELLWOOD, David A.; ESKIN, Alex; KLEINBOCK, Dmitry; LINDENSTRAUSS, Elon; MARGULIS, Gregory; MARMI, Stefano y YOCCOZ, Jean-Christophe (eds.). *Homogeneous Flows, Moduli Spaces and Arithmetic* [impreso]. Estados Unidos: Clay Mathematics Institute, 2007, págs. 1-69 [visitado 2024-04-12]. ISBN 9780821847428.
- [Zim84] ZIMMER, Robert. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Estados Unidos: Birkhäuser Boston, MA, 1984. ISBN 9781468494907.