



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Una extensión del concepto de monomios y exponentes característicos y su
relación con el Polígono de Newton del discriminante

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Annel Ayala Velasco

DIRECTOR DE LA TESIS
Fuensanta Aroca Bisquert
Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Fabiola Manjarrez Gutiérrez
Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM
Fernando Barrera Mora
Área académica de matemáticas y física, UAEH

CIUDAD DE MÉXICO, 14 de febrero de 2025.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En este trabajo extendemos el concepto de monomios y exponentes característicos de hipersuperficies casi ordinarias a hipersuperficies arbitrarias para un orden dado. Lipman demostró que el conjunto de exponentes característicos de una hipersuperficie casi ordinaria es independiente de la elección de la raíz [34]. Motivados por este resultado, introducimos los conceptos de \preceq -rama de un polinomio y \preceq -exponentes asociados a un elemento ξ que pertenece a un campo algebraicamente cerrado dado por el orden \preceq . Asimismo, en uno de nuestros resultados principales Teorema 5.2.5, establecemos condiciones bajo las cuales el conjunto de \preceq -exponentes asociados a una raíz coincide con el conjunto de \preceq -exponentes característicos asociados a la \preceq -rama que contiene a dicha raíz.

Además mostramos que algunas propiedades que son válidas en el caso casi ordinario también se mantienen en nuestro contexto. Tornero define a los exponentes distinguidos como aquellos que cumplen las condiciones establecidas en [45, Teorema, pág. 2]. Uno de nuestros resultados importantes es el Teorema 4.4.3, en el que generalizamos el teorema de Tornero a los \preceq -exponentes asociados a un elemento ξ .

Cada orden \preceq permite construir un conjunto de \preceq -exponentes característicos. Para analizar las relaciones entre estos conjuntos, introducimos el concepto de σ -Polígono de Newton, una extensión natural del conocido polígono de Newton al contexto de series formales con exponentes en conos. Algunos de nuestros resultados principales son el Lema 6.2.3 y el Teorema 6.2.5 en los que establecemos condiciones bajo las cuales, dados dos órdenes \preceq_1 y \preceq_2 , los \preceq_1 -exponentes característicos y los \preceq_2 -exponentes característicos coinciden, además de analizar las posibles formas en que estos exponentes pueden ordenarse.

Para justificar nuestros teoremas principales, presentamos varios resultados fundamentales que también pueden ser útiles en otros contextos. Por ejemplo, en el Lema 3.3.5 demostramos que cualquier serie posee un exponente dominante.

In this work, we extend the concept of monomials and characteristic exponents of quasi-ordinary hypersurfaces to arbitrary hypersurfaces for a given order. Lipman proved that the set of characteristic exponents of a quasi-ordinary hypersurface is independent of the choice of the root [34]. Motivated by this result, we introduce the concepts of a \preceq -branch of a polynomial and \preceq -exponents associated with an element ξ that belongs to an algebraically closed field, given by the order \preceq . Moreover, in one of our main results, Theorem 5.2.5, we establish conditions under which the set of \preceq -exponents associated with a root coincides with the set of \preceq -characteristic exponents associated with the \preceq -branch containing that root. We also show that some properties that hold in the almost ordinary case are also preserved in our context. Tornero defines the distinguished exponents as those that satisfy the conditions established in [45, Theorem, p. 2]. One of our main results is Theorem 4.4.3, in which we generalize Tornero's theorem to the \preceq -exponents associated with an element ξ .

Each order \preceq allows us to construct a set of \preceq -characteristic exponents. To analyze the relationships between these sets, we introduce the concept of the σ -Newton Polygon, a natural extension of the well-known Newton polygon to the context of formal series with exponents in cones.

Some of our main results are Lemma 6.2.3 and Theorem 6.2.5, in which we establish conditions under which, given two orders \preceq_1 and \preceq_2 , the \preceq_1 -characteristic exponents and the \preceq_2 -characteristic exponents coincide. We also analyze the possible ways in which these exponents can be ordered.

To justify our main theorems, we present several fundamental results that may also be useful in other contexts. For example, in Lemma 3.3.5, we prove that any series has a dominant exponent.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a mi asesora, la Dra. Fuensanta Aroca Bisquert, por haber sido mi principal guía a lo largo de este proceso. Estoy muy agradecida por su paciencia, su apoyo incondicional y sus ánimos, que fueron fundamentales para completar esta etapa. Con ella, he aprendido mucho más que matemáticas; su ejemplo y determinación me han llevado a reflexionar sobre diversos desafíos que enfrentamos en nuestra vida cotidiana.

También deseo agradecer a los doctores Fabiola Manjarréz Gutiérrez y Fernando Barrera Mora, quienes, como miembros de mi comité tutorial, estuvieron siempre al pendiente de mis avances al final de cada semestre, brindándome su orientación y respaldo en mi trabajo de investigación.

Extiendo mi gratitud a mis sinodales, los doctores Mark Spivakovsky, Daniel Duarte, Fabiola Manjarrez Gutiérrez, Vinicio Gómez Gutiérrez y Manuel González Villa, por sus valiosas sugerencias y correcciones, las cuales contribuyeron significativamente a mejorar mi trabajo.

A mis amigos del doctorado, Oscar Castañón, Damián Ochoa y Diana Mendez, por su invaluable apoyo y porque gracias a que hemos compartido juntos esta etapa, tengo muy buenas experiencias y aprendizajes.

A mi familia, les agradezco por estar presente en cada etapa de mi vida, por su apoyo incondicional, su motivación y por ser siempre mi mayor inspiración. A Frank, por acompañarme y respaldarme en este camino. Y a César (Jeffrey), mi pequeño compañero felino de desvelos.

Finalmente, agradezco al Conahcyt CVU 781891 por la beca que me permitió realizar mis estudios, así como al Proyecto PAPIIT IN113323 por la beca de obtención de grado.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Notación, terminología y preliminares	7
1.1. Notación y preliminares	7
1.2. Extensiones de campos	9
1.3. Grupos, semigrupos y acciones	10
1.4. Anillo de series de potencias	11
1.5. Órdenes	15
1.6. Valoraciones	19
2. Hipersuperficies casi ordinarias	21
2.1. Teorema de Preparación de Weierstrass	22
2.2. Discriminante	24
2.3. Hipersuperficies casi ordinarias	26
2.4. Monomios y exponentes característicos	28
3. Campos algebraicamente cerrados que contienen a las series de potencias	35
3.1. Conos	36
3.2. El anillo de series de potencias formales con exponentes en un cono	38
3.3. Campos algebraicamente cerrados de series de potencias con soporte en conos trasladados	39
3.3.1. Conos ω -positivos y polinomios σ -libres	45

4. \preceq-monomios y exponentes característicos asociados a un polinomio de Weierstrass	47
4.1. \preceq -monomios y exponentes característicos asociados a un polinomio de Weierstrass	48
4.2. \preceq -exponentes asociados a un elemento de \mathcal{S}_{\preceq}	51
4.3. El grupo de Galois de la extensión	52
4.4. Extensión de dos resultados de Tornero	55
5. \preceq-ramas	59
5.1. Polinomios \preceq -libres y \preceq -ramas	59
5.2. \preceq -monomios y exponentes característicos asociados a una \preceq -rama	67
6. \preceq-exponentes característicos asociados a los vértices del discriminante	75
6.1. σ -Polígono de Newton	76
6.2. Discriminante y los \preceq -exponentes característicos	81
7. Ejemplos	89
Bibliografía	101
Índice alfabético	106
Glosario	109
A. Algunos resultados que se utilizan y que se encuentran en la literatura	113
B. Preguntas	115

Introducción

Sea K un campo algebraicamente cerrado de característica 0. Denotaremos por $K[[x]]$ al anillo de series de potencias formales en x con coeficientes en K y por $K((x))$ su campo de fracciones.

El teorema de Newton-Puiseux [41], establece que si $f \in K[[x]][y]$ es un polinomio mónico e irreducible de grado d , entonces se factoriza en $K[[x^{\frac{1}{d}}]][y]$ como

$$f = \prod_{\eta^d=1} (y - \xi(\eta x^{\frac{1}{d}})) \quad (0.0.1)$$

donde $\xi(x) \in K[[x]]$.

Dada una serie $\xi = \sum_{i=\alpha}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{d}} \in K((x^{\frac{1}{d}}))$ denotamos

$$\text{ord}_x(\xi) := \min_{a_i \neq 0} \frac{i}{d}. \quad (0.0.2)$$

En el último cuarto del siglo XIX, M. Halphen y H.J.S. Smith introducen la noción de exponente característico para estudiar singularidades de curvas planas, ver en [25, 44] o un artículo más reciente [20]. En una serie de artículos de Abhyankar y Moh [2, 3, 4], en los años setenta, se definen los exponentes característicos de f como

$$\left\{ \text{ord}_x(\xi'(x^{\frac{1}{d}}) - \xi(x^{\frac{1}{d}})) \mid \xi, \xi' \in K[[x]] \text{ con } \xi'(x^{\frac{1}{d}}) \text{ y } \xi(x^{\frac{1}{d}}) \text{ raíces de } f \right\}. \quad (0.0.3)$$

Como consecuencia de (0.0.1), los exponentes característicos de un polinomio irreducible f también pueden definirse a partir de una raíz $\xi(x^{\frac{1}{d}})$ como

$$\left\{ \text{ord}_x(\xi(x^{\frac{1}{d}}) - \xi(\eta x^{\frac{1}{d}})) \mid \eta^d = 1 \right\}. \quad (0.0.4)$$

El conjunto de los exponentes característicos es una herramienta útil para estu-

diar y clasificar singularidades de curvas planas, en particular determina el tipo topológico de la singularidad, ver por ejemplo [13, 48]. Con el conjunto de los exponentes característicos se puede calcular el semigrupo asociado a la curva, ver por ejemplo en [4]. La estructura de tal semigrupo tiene aplicaciones incluso en la teoría de códigos, se puede ver en [12, 18].

Para definir el concepto de exponentes característicos de curvas a hipersuperficies necesitamos:

- Para extender (0.0.3) y (0.0.4), un campo \mathcal{S} que contenga a $K[[x_1, \dots, x_n]]$ tal que $f \in K[[x_1, \dots, x_n]][y]$ se factoriza como un elemento de $\mathcal{S}[y]$, de manera que tenga sentido hablar de las raíces de f en \mathcal{S} .
- Para extender (0.0.2), una función $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}^n$ análoga a $ord_x : K((x^{\frac{1}{a}})) \rightarrow \mathbb{Q}$.

En 1983, A. Sathaye [43] presentó una generalización de los resultados de Abhyankar-Moh cuando x se reemplaza por una n -tupla (x_1, \dots, x_n) .

La definición de A. Sathaye usa el campo de series de Puiseux iteradas como \mathcal{S} y el mínimo del soporte con el orden lexicográfico como ν . Lipman y Gau en 1988 presentan una extensión para singularidades casi ordinarias [34], usando el Teorema de Jung Abhyankar para su construcción, misma que ha sido extendida para singularidades σ -libres por Abbas-Assi [11] usando las raíces con exponentes en conos de McDonald [36], y las ideas de J.M. Tornero presentadas en [46, 45] como orden.

En este trabajo construimos, para una hipersuperficie arbitraria, una familia de conjuntos de exponentes característicos, definida en términos de la familia de campos algebraicamente cerrados construidos en [8]. Estos campos algebraicamente cerrados tienen una valoración natural que va a corresponder con el orden. También damos condiciones necesarias para que los exponentes característicos no dependan de la elección de la raíz ξ en (0.0.4).

Los exponentes característicos construidos por A. Sathaye, Lipman, Gau y Abbas-Assi, cuando están definidos, aparecen, de manera natural, como elementos de nuestra familia de exponentes.

También probamos una relación entre las distintas formas de ordenar estos exponentes y el discriminante de la proyección, respondiendo a una de las preguntas planteadas durante el primer Congreso Nacional de Geometría Algebraica, celebrado en la Casa Matemática Oaxaca del 3 al 7 de octubre de 2016.

Esta tesis está estructurada en siete capítulos. A partir del capítulo tres se presentan nuestras principales contribuciones. Todos los resultados que no sean de nuestra autoría estarán debidamente referenciados para que puedan ser consultados en sus fuentes originales.

En el primer capítulo se establece la notación, terminología y los conceptos fundamentales necesarios para la exposición del trabajo. Asimismo, se introducen propiedades clave relacionadas con el anillo de series de potencias formales en varias variables. También se incluyen propiedades sobre grupos, extensiones de campos, el grupo de Galois asociado a una extensión y casos destacados como las extensiones de Kummer. Los contenidos tratados en estas secciones pueden consultarse en [29] y [14].

En el capítulo dos presentamos la construcción de los exponentes y monomios característicos para hipersuperficies casi ordinarias, así como sus propiedades fundamentales, todas las ideas centrales de las demostraciones y los enunciados fueron tomados de [16, 34]. Presentamos propiedades de hipersuperficies casi ordinarias definidas por un polinomio de Weierstrass en el anillo de series de potencias $K[[x_1, \dots, x_n, y]]$. Los Teoremas de División y de Preparación de Weierstrass nos permiten concluir que cualquier germen de hipersuperficie puede ser definido por un polinomio de Weierstrass, ver por ejemplo [24]. Teniéndose que un germen de singularidad de hipersuperficie en \mathbb{C}^{n+1} se puede ver como una cubierta ramificada de una bola en \mathbb{C}^n .

El Teorema de Jung-Abhyankar, Teorema 2.3.3, el cual fue demostrado en [5], establece que si $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]][y]$ es un polinomio irreducible casi ordinario, sus raíces se encuentran en $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}]]$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Otras demostraciones de este hecho se pueden encontrar en [50, 35, 38]. Calculando las diferencias entre las raíces de f , se construyen sus monomios y exponentes característicos. Los cuales determinan la topología de la singularidad. Esto fue demostrado por Lipman y Gau, ver [34] y [21].

Mediante un orden parcial, se establece que los exponentes característicos de una singularidad casi ordinaria forman un conjunto ordenado y que los monomios característicos forman un conjunto totalmente ordenado bajo la relación de divisibilidad, Proposición 2.4.6. Tornero en [45], extiende el concepto de exponente característico a hipersuperficies de Puiseux, a dichos elementos los denomina exponentes distinguidos y propone un algoritmo para identificarlos, aportando una herramienta clave para su análisis y cálculo. Lipman demuestra que el conjunto de

exponentes característicos de una hipersuperficie casi ordinaria es independiente de la elección de la raíz, tal como se establece en el Teorema 2.4.9.

En el capítulo tres presentamos los campos algebraicamente cerrados construidos por Aroca, Ilardi y Rond en [8, 9], los cuales se obtienen como una unión infinita de anillos de series con soporte en conos poliédricos fuertemente convexos. Estos son los campos que se utilizarán en el siguiente capítulo para extender la noción de exponente característico.

Introducimos el concepto de cono y sus propiedades más relevantes, así como la definición del anillo de series de potencias con soporte en conos.

A continuación, definimos los campos algebraicamente cerrados \mathcal{S}_{\preceq} de series de potencias con soporte en conos trasladados. También introducimos una valoración natural (3.3.8) sobre \mathcal{S}_{\preceq} y demostramos en el Lema 3.3.7 que cada elemento de \mathcal{S}_{\preceq} puede expresarse como un monomio multiplicado por una unidad en su anillo de valoración, es decir, que todo elemento tiene término dominante.

Finalmente, en el Lema 3.3.12 mostramos que si $f \in K[[x_1, \dots, x_n]][y]$ es un polinomio irreducible de Weierstrass, sus raíces pertenecen al anillo de valoración de \mathcal{S}_{\preceq} . Los resultados que presentamos en la Sección 3.3 son de nuestra autoría, con excepción de aquellos cuyas demostraciones se encuentran citadas en las referencias correspondientes.

En el capítulo cuatro presentamos una extensión de los conceptos de monomios y exponentes característicos a singularidades arbitrarias de hipersuperficie.

Los resultados de polinomios casi ordinarios se basan en la comprensión del grupo de Galois de la extensión $K((x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}))/K((x_1, \dots, x_n))$, uno de nuestros resultados importantes de este capítulo es el Lema 4.3.1 en el que describimos las extensiones análogas $K_{\preceq}((x_1, \dots, x_n)_k)/K_{\preceq}((x_1, \dots, x_n))$ que tienen el mismo grupo de Galois.

Dado que $f \in K((x_1, \dots, x_n))[y]$ es irreducible y $K((x_1, \dots, x_n))$ es un campo de característica 0, se cumple que $\xi \neq \xi'$ para todo par de raíces ξ y ξ' de f , ver A.0.1. Esto asegura que $\nu_{\preceq}(\xi - \xi')$ está definido, lo que permite definir los \preceq -exponentes y monomios característicos, Definición 4.1.1.

A cada elemento $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ asociamos un conjunto de vectores en \mathbb{Q}^n , denominados \preceq -exponentes asociados a ξ (Definición 4.2.1). Esta noción extiende la de los exponentes en el caso casi ordinario (Teorema 2.4.9). Para las singularidades casi ordinarias, ambas definiciones son equivalentes; sin embargo, en el caso de singularidades arbitrarias de hipersuperficies, esta equivalencia no siempre se cumple.

Presentamos ejemplos ilustrativos que evidencian esta diferencia. Uno de nuestros resultados principales es el Teorema 4.4.3, en el que extendemos el Teorema de Tornero [45, Teorema, pág. 2] al contexto de los exponentes distinguidos, logrando así una generalización aplicable a los \preceq -exponentes asociados a un elemento $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$.

En el capítulo cinco, presentamos las condiciones bajo las cuales las definiciones de \preceq -exponentes característicos y \preceq -exponentes asociados a una raíz, introducidas en el capítulo cuatro, son equivalentes.

Si $f \in K[[x_1, \dots, x_n]][y]$ es un polinomio irreducible, esto no implica necesariamente que también lo sea en el anillo $K_{\preceq}[[x_1, \dots, x_n]][y]$. Esta observación nos lleva a introducir el concepto de \preceq -libre, Definición 5.1.1. Un ejemplo básico de polinomios \preceq -libres son los polinomios casi ordinarios irreducibles, los cuales cumplen esta propiedad para cualquier orden. En los casos en que f no sea \preceq -libre, definimos las \preceq -ramas del polinomio, Definición 5.1.2, una herramienta que permite agrupar conjuntos disjuntos que tienen los mismos \preceq -exponentes característicos.

En la Proposición 5.2.2 mostramos cómo, a partir de una raíz perteneciente a una \preceq -rama, se pueden obtener todas las demás. En la Proposición 5.2.4 mostramos que si fijamos una raíz de una rama, el exponente característico que se obtiene al restar las raíces de otra rama, es el mismo. Nuestro resultado principal de este capítulo es el Teorema 5.2.5, en el que demostramos que el conjunto de los \preceq -exponentes asociados a una raíz, que pertenece a una \preceq -rama, coincide con el conjunto de \preceq -exponentes característicos asociados a dicha \preceq -rama.

En el capítulo seis analizamos la relación entre las distintas formas de ordenar los \preceq -exponentes característicos y el discriminante de la proyección.

Comenzamos introduciendo, en la Definición 6.1.1, el concepto de σ -polígono de Newton, una generalización natural del polígono de Newton al contexto de series formales en el anillo $K[[\sigma]]$. Luego, en la Observación 6.1.3 y el Lema 6.1.4, establecemos propiedades clave que relacionan la valoración $\nu_{\preceq}(\varphi)$ con el σ -polígono de Newton asociado a φ . En la Definición 6.1.5, para cada $\varphi \in K[[X]]$ y para cada vértice v del σ -polígono de Newton de φ , definimos el concepto de cono asociado al vértice v .

Un resultado importante que demostramos en este capítulo es la Proposición 6.2.1, en el que presentamos una fórmula explícita que relaciona el conjunto de exponentes característicos calculados con un orden, con las coordenadas de un

vértice del polígono de Newton del discriminante.

Finalmente, el Lema 6.2.3 y el Teorema 6.2.5 son dos de los resultados más importantes que demostramos y en los que establecemos condiciones bajo las cuales, dados dos órdenes \preceq_1 y \preceq_2 , los \preceq_1 -exponentes característicos y los \preceq_2 -exponentes característicos coinciden, además de analizar las posibles formas en que estos exponentes pueden ordenarse.

En el capítulo siete se recopilan todos los ejemplos desarrollados a lo largo de esta tesis. Cada vez que sea necesario hacer referencia a un ejemplo, citaremos los que se encuentran en este capítulo. Cabe destacar que los ejercicios presentados antes del capítulo siete no tendrán numeración.

Buchacher ha implementado un algoritmo en @Mathematica que calcula los primeros términos de la raíz en $\mathcal{S}_{\leq \omega}$ de polinomios en el anillo $K[[X]][y]$, ver en [15]. Gracias a este algoritmo, hemos podido realizar los cálculos necesarios para algunos de los ejemplos presentados.

Para una lectura más accesible del trabajo, la tesis cuenta con un glosario y un índice de notación.

Al final del documento se presentan dos apéndices, uno que recopila todos los resultados utilizados en este trabajo y provenientes de la literatura, y el último apéndice es para registrar las preguntas que quedan abiertas.

CAPÍTULO 1

Notación, terminología y preliminares

En este capítulo presentamos la notación, la terminología y los resultados fundamentales que serán esenciales para el desarrollo de este trabajo. Estas herramientas conceptuales y técnicas proporcionarán el marco necesario para abordar los problemas y métodos discutidos en los capítulos posteriores.

Comenzamos con una introducción a los conceptos clave relacionados con extensiones de campos algebraicos, valorados y de Galois, lo que permitirá establecer las bases para comprender estructuras algebraicas avanzadas y sus propiedades fundamentales. A lo largo de esta sección, enfatizamos tanto la teoría como ejemplos concretos que ilustran estas nociones.

A continuación, exploramos el anillo de series de potencias en varias variables con exponentes enteros positivos. Detallamos sus propiedades principales, con especial atención a su estructura algebraica y las operaciones que lo definen.

Finalmente, abordamos el concepto de orden, un tema central para la teoría de valoraciones. Incluimos ejemplos detallados que ilustran cómo se calcula el orden de un elemento en diferentes contextos, y mostramos la relación entre este concepto y las valoraciones en estructuras algebraicas.

1.1. Notación y preliminares

Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un elemento $u \in A$ es **unidad** si existe $v \in A$ tal que $uv = 1$. Al grupo multiplicativo de unidades del anillo A lo denotaremos por A^* .

Se dice que $a, b \in A$ son **asociados** si existe $u \in A^*$ tal que $a = ub$.

Si $a, b \in A$, se dice que a **divide** a b si existe $c \in A$ con $b = ca$. Y usaremos la

notación $a|b$.

Un elemento $p \in A$, es **irreducible** si cuando $p = ab$, entonces a ó b es unidad.

Sean $a_1, \dots, a_n \in A$, el **ideal generado por los elementos** $a_1, \dots, a_n \in A$ será denotado por $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Definición 1.1.1. Se dice que A es un **dominio Euclidiano** si existe una función $\partial : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que:

1. $\partial(r) \geq 0$,
2. Para todos $a, b \in A$, existen $q, r \in A$ tales que $a = bq + r$, con $r = 0$ o $r \neq 0$ y $\partial(r) < \partial(b)$,
3. Si $a, b \in A$ y $a|b$, entonces $\partial(a) \leq \partial(b)$.

Denotaremos por $A[x]$ al **anillo de polinomios en la indeterminada** x con coeficientes en A , es decir,

$$A[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in A, \text{ para todo } i \right\}.$$

Definición 1.1.2. Se dice que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ son **racionalmente independientes** si $a_1 \alpha_1 + \dots + a_l \alpha_l = 0$, con $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Q}$, implica que $a_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, l$.

Ejemplo. ▪ $\{1, \sqrt{2}\}$ son racionalmente independientes.

▪ $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ son racionalmente dependientes.

Proposición 1.1.3. Si $\omega \in \mathbb{R}^n$ es de coordenadas racionalmente independientes y $\alpha \in \mathbb{Q}^n$, entonces

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \omega \cdot x = \omega \cdot \alpha\} \cap \mathbb{Q}^n = \{\alpha\}.$$

Demostración. Sea $\beta \in \mathbb{Q}^n$ tal que $\omega \cdot \beta = \omega \cdot \alpha$. Si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, entonces

$$(\alpha_1 - \beta_1)\omega_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\omega_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\omega_n = 0.$$

Dado que ω es de coordenadas racionalmente independientes, entonces $\alpha_i = \beta_i \forall i = 0, 1, \dots, n$, por lo que $\alpha = \beta$. □

1.2. Extensiones de campos

Sean F y K campos tales que $K \subset F$ es un homomorfismo inyectivo de campos, se dice que F es una **extensión de K** y lo denotaremos por F/K .

Si F/K es una extensión de campos, entonces F tiene una estructura natural de K -espacio vectorial. La dimensión de F como espacio vectorial sobre K se denotará por $[F : K]$. Si la dimensión del espacio vectorial es finita, se dice que la **extensión es finita**.

Sea F/K una extensión de campos y $\alpha \in F$. Se dice que α es **algebraico** sobre K si existe un polinomio $p(y) \in K[y]$ tal que $p(\alpha) = 0$. En otro caso diremos que α es **trascendente**.

Se dice que la **extensión F/K es algebraica** si todo elemento de F es algebraico sobre K .

Sea $\alpha \in F$ algebraico sobre K , se dice que $P \in K[y]$ es el **polinomio mínimo** de α si es mónico, irreducible y $P(\alpha) = 0$.

Sea $f \in K[x]$ un polinomio de grado $d \geq 1$. El campo mínimo en el que f tiene todas sus raíces se denomina **campo de factorización** de f sobre K y lo denotaremos como K_f .

Una extensión F/K es **normal** si para todo polinomio irreducible $f(x) \in K[x]$ que tiene una raíz en F , se tiene que F contiene a todas las raíces de f .

Cualquier extensión de grado 2 es normal, pero hay extensiones que se obtienen a partir de extensiones de grado dos y sin embargo no son normales, por ejemplo $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ no es normal pues las raíces complejas de $x^4 - 2$ no pertenecen a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, sin embargo el grado de cada extensión de la siguiente torre de campos es 2

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}).$$

La demostración del siguiente teorema puede consultar en [29, Teorema 3.3, pág. 237].

Teorema 1.2.1. *La extensión finita F/K es normal si y sólo si F es el campo de factorización de una familia de polinomios en $K[x]$.*

Sea F una extensión de K y $\alpha \in F$ algebraico sobre K , se dice que α es **separable** sobre K , si el polinomio mínimo de α sobre K tiene raíces simples. Si F es una extensión algebraica y todo elemento de F es separable, se dice que F es una **extensión separable** sobre K .

Se dice que una **extensión algebraica** F/K es de **Galois** si es normal y separable.

Sea F un campo y G un subgrupo del grupo de automorfismos de F . Se denota por F^G al subconjunto de F que consiste de todos los elementos de $x \in F$ tal que $\varphi(x) = x$, para todo $\varphi \in G$. El conjunto F^G es un campo, el cual se denomina **campo fijo** de G .

El **grupo de Galois** de una extensión de campos algebraica F/K es el grupo de automorfismos de F que dejan fijo al campo K . Usaremos la notación $Gal(F : K)$ para denotar al grupo de Galois de F/K .

Sea K un campo y $k > 1$ un entero, las **raíces k -ésimas de la unidad** en K son todos los elementos $\xi \in K$ tales que $\xi^k = 1$.

El conjunto de las raíces k -ésimas de la unidad forman un grupo el cual es cíclico. A un generador de este grupo se le denomina **raíz k -ésima primitiva de la unidad**.

Sea F/K una extensión de campos tal que F contiene a una raíz k -ésima primitiva de la unidad, se dice que es una **extensión de Kummer** si es el campo de factorización de un polinomio de la forma $(x^k - a_1)(x^k - a_2) \cdots (x^k - a_r)$, donde $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$.

Si la característica del campo K es igual a 0, $a_i \neq 0$ todas distintas entre sí, ninguno de los factores $x^k - a_i$ tiene raíces múltiples, pues la única raíz de la derivada kx^{k-1} es 0. De manera que la extensión es F/K es separable y normal, por lo tanto de Galois.

1.3. Grupos, semigrupos y acciones

Las definiciones y resultados de esta sección pueden consultarse en [14] y [29].

Sea C_k el grupo de las raíces k -ésimas de la unidad en un campo K y $l, k \in \mathbb{N}$ son primos relativos, se tiene que

$$C_{lk} \cong C_l \times C_k.$$

Sea $\xi \in \mathbb{C}$ una raíz k -ésima primitiva de la unidad. Sea $f(x)$ el polinomio mínimo de ξ sobre \mathbb{Q} . Se tiene que $f(x)$ divide a $x^k - 1$. Además se cumple que

$$Gal(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}) \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} \right)^*.$$

Sea Λ un conjunto de cardinalidad n , el conjunto $S_\Lambda := \{f : \Lambda \rightarrow \Lambda \mid f \text{ es biyectiva}\}$ es el **grupo de permutaciones** de los elementos de Λ , con la operación composición de funciones.

Sean G un grupo, Λ un conjunto no vacío y un homomorfismo $\rho : G \rightarrow S_\Lambda$. El homomorfismo define una acción de G en Λ , ver por ejemplo en [14].

Sea G un grupo que actúa en Λ , dado $x \in \Lambda$, se define la **órbita de x** , denotada por $\text{orb}(x)$, como el conjunto $\{gx \mid g \in G\}$.

Se dice que una acción de G **sobre Λ es transitiva** si todos los elementos de Λ están en la misma órbita, es decir, para cualesquiera $x, y \in \Lambda$ existe $g \in G$ tal que $x = gy$.

Un **semigrupo** es un conjunto A no vacío, junto con una operación binaria $+$ que satisface:

1. (Operación interna) Para todos $a, b \in A$, se tiene que $a + b \in A$.
2. (Asociatividad) Para todos $a, b, c \in A$, se tiene que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Definición 1.3.1. Un **monoide** es un semigrupo A tal que:

1. (Elemento neutro) Existe $e \in A$ tal que $e + a = a$ y $a + e = a$ para todo $a \in A$.

Sean A un semigrupo, B un conjunto con $A \subset B$ y $\{a_1, \dots, a_r\} \subset B$. Se dice que A es un semigrupo finitamente generado por el conjunto $\{a_1, \dots, a_r\}$, si A es el semigrupo más pequeño que contiene a $\{a_1, \dots, a_r\}$. En cuyo caso, se dice que $\{a_1, \dots, a_r\} \subset A$ genera a A . Es decir $A = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo. Sean $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{Q}^n$, no todos cero.

1. El conjunto $\sigma = \{\mu_1 q_1 + \dots + \mu_r q_r \mid \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ es un semigrupo, el cual no es finitamente generado.
2. El conjunto $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ es un monoide finitamente generado. Nótese que, si $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, \sqrt{2})$ y $\sigma = \{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, entonces $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ no es finitamente generado.

1.4. Anillo de series de potencias

En esta sección definiremos el anillo de series de potencias y presentaremos propiedades generales. Usaremos la letra K para denotar a un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

Denotaremos por $K[x_1, \dots, x_n]$ al **anillo de polinomios en las indeterminadas** x_1, \dots, x_n , con coeficientes en K , es decir,

$$K[x_1, \dots, x_n] := \left\{ f = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Lambda \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \in K \text{ y } |\Lambda| < \infty \right\}. \quad (1.4.1)$$

Cuando no cree confusión, usaremos la expresión $K[X]$ en lugar de $K[x_1, \dots, x_n]$ para simplificar notación.

Dado

$$f = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Lambda \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in K[x_1, \dots, x_n], \quad (1.4.2)$$

se define el **grado de f** denotado por $\partial(f)$, como:

$$\partial(f) := \max_{\alpha \in \Lambda \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \{ |\alpha| \mid a_\alpha \neq 0, \text{ en donde } \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ y } |\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \}.$$

Se dice que f es **homogéneo** si es suma de términos con el mismo grado, esto es, para todo $a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \neq 0$, en donde f es como en (1.4.2) se tiene que $|\alpha| = \partial(f)$.

Denotaremos por $K[[x_1, \dots, x_n]]$ al conjunto de sumas formales de la forma:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + \cdots,$$

en donde cada $P_i \in K[X]$ es un polinomio homogéneo de grado i .

Los elementos de $K[[x_1, \dots, x_n]]$ son llamados **series de potencias formales** en las indeterminadas x_1, \dots, x_n con coeficientes en K .

Usaremos la expresión $K[[X]]$ para simplificar notación.

El campo de fracciones del anillo $K[[X]]$ es:

$$K((x_1, \dots, x_n)) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[[X]], g \neq 0 \right\}.$$

El cual denotaremos por $K((X))$.

Otras formas de escribir a los elementos de $K[[X]]$ son las siguientes:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = i} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (1.4.3)$$

$$f = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha X^\alpha, \quad (1.4.4)$$

con $\Lambda \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ y $X^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

El conjunto $K[[X]]$ tiene estructura natural de anillo conmutativo con identidad con las operaciones suma y producto dadas por

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \quad \text{y} \quad fg = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i P_j Q_{i-j}.$$

donde $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i, g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in K[[X]]$.

La siguiente proposición establece las condiciones necesarias y suficientes para que un elemento en $K[[X]]$ sea invertible.

Proposición 1.4.1. *Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in K[[X]]$, entonces f es invertible si y sólo si $P_0 \neq 0$.*

Demostración. Queremos encontrar $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in K[[X]]$ tal que $fg = 1$, o equivalentemente:

$$\begin{aligned} P_0 Q_0 &= 1 \\ P_1 Q_0 + P_0 Q_1 &= 0 \\ P_n Q_0 + P_{n-1} Q_1 + \cdots + P_0 Q_n &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Si f es invertible, entonces $P_0 Q_0 = 1$, por lo que $P_0 \neq 0$.

Recíprocamente, si $P_0 \neq 0$, sean $Q_0 := P_0^{-1}, Q_1 := -P_0^{-1} P_1 Q_0$. De esta forma sea

$$Q_n := -P_0^{-1} (P_n Q_0 + \cdots + P_1 Q_{n-1}).$$

Teniéndose que $g := \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = -P_0^{-1} \left(-1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_P + i_Q = i \\ i_Q \neq i}} P_{i_P} Q_{i_Q} \right)$ es la inversa de f . □

Sea $f \in K[[X]]$, con $f = \sum_{i=m}^{\infty} P_i$ y $P_m \neq 0$. Se dice que P_m es la **forma inicial** de f y que m es la **multiplicidad** de f , la cual será denotada por $\text{mult}(f)$. Cuando $f = 0$, se dice que $\text{mult}(f) = \infty$.

Se dice que $f \in K[[X]]$ es **de orden** l con respecto a la indeterminada x_j si l es el máximo entero no negativo con la propiedad de que $f(0, \dots, x_j, \dots, 0)$ es divisible por x_j^l . Denotaremos al orden de f en x_j como $\text{ord}_{x_j}(f(0, \dots, x_j, \dots, 0))$. Si f es de orden m con respecto a x_j y $m = \text{mult}(f)$, se dice que f es **regular** con respecto a x_j .

Definición 1.4.2. Sea $\varphi = \sum a_\alpha x^\alpha \in K[[X]]$, definimos el **soporte de** φ , $\text{Supp}(\varphi)$, como:

$$\text{Supp}(\varphi) := \{\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}. \quad (1.4.6)$$

Observación 1.4.3. Con esta notación se tiene que si $f \in K[X]$, el grado de f es $\partial(f) = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in \text{Supp}(f)\}$.

Si $f \in K[[X]]$, la multiplicidad de f es $\text{mult}(f) = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in \text{Supp}(f)\}$.

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ al subanillo de $\mathbb{C}[[X]]$ de series convergentes.

Una función $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una **función analítica** en un punto x_0 de su dominio si existe una serie de potencias centrada en x_0 :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i,$$

que converge en una vecindad $U \subset \mathbb{C}$ de x_0 y que coincide con la función en esa vecindad.

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Se dice que $S \subseteq U$ es una **variedad analítica** en U si $\forall x \in U$ existe una vecindad abierta U' de x en U y $f_1, f_2, \dots, f_r : U' \rightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas tales que

$$S \cap U' = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_1(p) = \dots = f_r(p) = 0\}.$$

Si $r = 1$, se dice que S es una **hipersuperficie analítica**.

Sea S una variedad analítica. Denominaremos **álgebra analítica** de S al anillo cociente $A = \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{I(S)}$. En donde $I(S) := \{g \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} : g(p) = 0 \text{ para todo } p \in S\}$ es un ideal de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Definición 1.4.4. Sean $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}^n$ dos subconjuntos abiertos. Se dice que dos variedades analíticas $S_1 \subset U_1$ y $S_2 \subset U_2$, con $\underline{0} \in S_1 \cap S_2$ son equivalentes en el origen si existe un abierto $U' \subset U_1 \cap U_2$, con $\underline{0} \in U'$ tal que $S_1 \cap U' = S_2 \cap U'$. Cada clase de equivalencia con la relación antes mencionada la denominaremos

como **germen en el origen de variedad analítica** en $\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ y la denotaremos por $(S, \underline{0})$.

Se dice que $(S, \underline{0})$ es irreducible si dados $(S_1, \underline{0})$ y $(S_2, \underline{0})$ tales que $(S, \underline{0}) = (S_1, \underline{0}) \cup (S_2, \underline{0})$, entonces $(S, \underline{0}) = (S_1, \underline{0})$ o $(S, \underline{0}) = (S_2, \underline{0})$.

Si dos series convergentes son asociadas definen el mismo germen de hipersuperficie, lo que motiva la siguiente definición:

Una **hipersuperficie algebroide** es una clase de equivalencia de elementos de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y\}$ módulo la relación asociados.

En lo que sigue se utilizará el término hipersuperficie, en lugar de hipersuperficie algebroide.

1.5. Órdenes

Para poder abordar los campos algebraicamente cerrados que contienen al campo de fracciones del anillo de series de potencias que Aroca e Ilardi construyen en [8], vamos a introducir el concepto de orden en \mathbb{R}^n .

Un ejemplo en \mathbb{Q}^n muy especial es \leq_ω , definido por la fórmula (1.5.2) más adelante. Este orden es total en \mathbb{Q}^n , pero no en \mathbb{R}^n . Sin embargo, según Robbiano [42], puede extenderse a un orden total en \mathbb{R}^n , aunque dicha extensión no siempre es única.

Los resultados que exponemos en esta sección, cuyas demostraciones no se presentan, se pueden consultar en [42]. Se considerará que los órdenes en \mathbb{R}^n con los que trabajaremos en este escrito son totales.

Un **orden total** \preceq en un conjunto Π es una relación binaria sobre Π que satisface las siguientes condiciones:

1. (Reflexividad) Si $a \in \Pi$, entonces $a \preceq a$.
2. (Transitividad) Si $a, b, c \in \Pi$, $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$.
3. (Antisimetría) Si $a, b \in \Pi$, $a \preceq b$ y $b \preceq a$, entonces $a = b$.
4. (Totalidad) Para todos $a, b \in \Pi$, $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Sea (G, \preceq) un grupo ordenado. Dado $\gamma \in G$ denotaremos

$$G_{\succ\gamma} := \{g \in G \mid \gamma \prec g\} \quad \text{y} \quad G_{\succeq\gamma} := \{g \in G \mid \gamma \preceq g\}. \quad (1.5.1)$$

Con esta notación, el primer ortante es denotado por $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$.

Se dice que un orden \preceq en un grupo Π con operación $+$ es **compatible con la estructura de grupo** si $\gamma \preceq \beta$ y $\alpha \preceq \delta$, entonces $\gamma + \alpha \preceq \beta + \delta$.

Un **morfismo ordenado** sobre un grupo G es una función $\alpha : (G, \leq_1) \rightarrow (G, \leq_2)$, que es morfismo y si $a \leq_1 b$, entonces $\alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$.

Sea ω un vector de coordenadas racionalmente independientes. El vector ω induce un orden en \mathbb{Q}^n dado por

$$\alpha \leq_{\omega} \beta \text{ si y sólo si } \omega \cdot \alpha \leq \omega \cdot \beta. \quad (1.5.2)$$

Proposición 1.5.1. *El orden \leq_{ω} definido antes es un orden total en \mathbb{Q}^n .*

Demostración. 1. (Reflexividad) Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}^n$, se tiene que $\omega \cdot \alpha \leq \omega \cdot \alpha$.

2. (Transitividad) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^n$ tales que $\alpha \leq_{\omega} \beta$ y $\beta \leq_{\omega} \gamma$, entonces $\omega \cdot \alpha \leq \omega \cdot \beta$ y $\omega \cdot \beta \leq \omega \cdot \gamma$, por la transitividad del orden \leq en los números reales se tiene que $\omega \cdot \alpha \leq \omega \cdot \gamma$, esto es, $\alpha \leq_{\omega} \gamma$.

3. (Antisimetría) Si $\alpha \leq_{\omega} \beta$ y $\beta \leq_{\omega} \alpha$, entonces $\omega \cdot \alpha \leq \omega \cdot \beta$ y $\omega \cdot \beta \leq \omega \cdot \alpha$, de aquí que $\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta = 0$. Pero por la Proposición 1.1.3, se tiene que $\alpha = \beta$.

4. (Totalidad) Sean $\alpha, \beta \in \sigma$, entonces por la totalidad del orden \leq en los números reales se tiene que $\omega \cdot \alpha \leq_{\omega} \cdot \beta$ o $\omega \cdot \beta \leq \omega \cdot \alpha$, por lo que $\alpha \leq_{\omega} \beta$ o $\beta \leq_{\omega} \alpha$.

□

Por propiedades del producto punto, concluimos que el orden \leq_{ω} es compatible con la estructura de grupo.

Ejemplo (Orden lexicográfico). El orden lexicográfico, denotado por \leq_{lex} , sobre \mathbb{R}^n se define como:

$$(a_1, \dots, a_n) <_{lex} (b_1, \dots, b_n)$$

si y sólo si existe $k = \min\{i | a_i < b_i\}$ tal que $a_j = b_j$ para todo $j < k$.

Observación 1.5.2. *El orden \leq_{lex} es compatible con la estructura de grupo. Si $(a_1, \dots, a_n) \leq_{lex} (b_1, \dots, b_n)$ y $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq_{lex} (\beta_1, \dots, \beta_n)$, entonces existen k_1, k_2 tales que $a_{k_1} < b_{k_1}$, $\alpha_{k_2} < \beta_{k_2}$, $a_j = b_j$, $\alpha_l = \beta_l$, para todos $1 \leq j < k_1$ y*

$1 \leq l < k_2$. Sea $k = \min\{k_1, k_2\}$, entonces $a_k + \alpha_k < b_k + \beta_k$ y $a_j + \alpha_j = b_j + \beta_j$ para todos $1 \leq j < k$. De manera que $(a_1, \dots, a_n) + (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq_{lex} (b_1, \dots, b_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Dado un orden \preceq en \mathbb{R}^n , con la notación introducida en (1.5.1), el conjunto de elementos no negativos es denotado por

$$(\mathbb{R}^n)_{\succeq \underline{0}} := \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \underline{0} \preceq \alpha\}.$$

Se dice que el conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es \preceq -no negativo cuando $S \subset (\mathbb{R}^n)_{\succeq \underline{0}}$.

Definición 1.5.3. Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un orden \preceq es σ -positivo si $\sigma \subset (\mathbb{R}^n)_{\succeq \underline{0}}$. Si $\sigma = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ se dice que el orden es positivo .

Ejemplo. Sea $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y \leq_ω el orden en \mathbb{Q}^2 definido por ω . El conjunto $(\mathbb{Q}^2)_{\succeq_{\omega} \underline{0}}$ es el semiplano delimitado por la recta $r(t) = t\omega^\perp$, con $t \in \mathbb{R}$ y ω^\perp es un vector perpendicular a ω , intersección (\mathbb{Q}^2) .

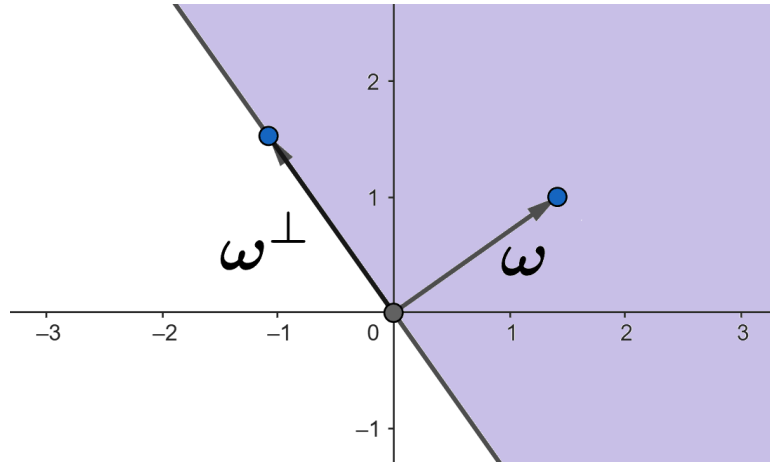


Figura 1.1: Conjunto $(\mathbb{Q}^2)_{\succeq_{\omega} \underline{0}}$.

Definición 1.5.4. Sea G un grupo con una topología dada y elemento neutro e , se dice que un orden \preceq sobre G es **continuo**, si para todo $p \in G$ tal que existe una vecindad U_p con $U_p - \{p\} \subseteq G_{\succ e} := \{g \in G \mid e \prec g\}$, se tiene que $p \in G_{\succ e}$.

Si \preceq es un orden continuo sobre un grupo G compatible con la estructura de grupo, se concluye de la definición que si para todo $p \in G$ tal que existe una vecindad U_p con $U_p - \{p\} \subseteq G_{\prec e}$, entonces $p \in G_{\prec e} := \{g \in G \mid g \prec e\}$.

Observación 1.5.5. Sean $\omega \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas racionalmente independientes, $p \in \mathbb{Q}^n$ y U_p una bola abierta tal que $p \in U_p$ y $U_p - \{p\} \subset (\mathbb{Q}^n)_{>\omega \underline{0}}$. Se tiene que $\inf_{v \in \overline{U_p}} v \cdot \omega = \inf_{v \in \overline{U_p} \setminus \{p\}} v \cdot \omega$, como se muestra en la Figura 1.2, de modo que $\underline{0} <_{\omega} p$. Consecuentemente $p \in (\mathbb{Q}^n)_{>\omega \underline{0}}$. Por lo tanto, \leq_{ω} es un orden continuo.

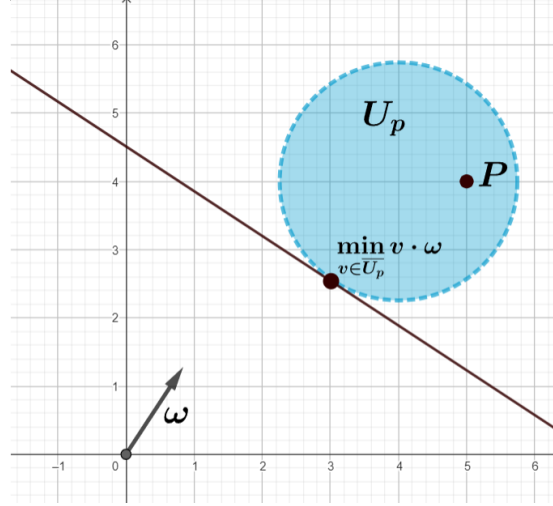


Figura 1.2

La demostración de la siguiente proposición pueden consultarse en [42, Proposición 2.3, pág. 150]

Proposición 1.5.6. Todo orden sobre \mathbb{Q}^n se extiende a un orden continuo sobre \mathbb{R}^n , esta extensión no es necesariamente única.

Ejemplo. Sea $\omega = (1, \sqrt{2})$ y \leq_{ω} el orden definido por ω sobre \mathbb{Q}^2 , como en (1.5.2).

El orden total \preceq_1 en \mathbb{R}^2 definido por los vectores ω y $(1, 0)$ es:

$$\alpha \preceq_1 \beta \text{ si y sólo si } \omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta \text{ o } (\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \text{ y } (1, 0) \cdot \alpha < (1, 0) \cdot \beta).$$

Y el orden total \preceq_2 en \mathbb{R}^2 definido por los vectores ω y $(0, 1)$ es:

$$\alpha \preceq_2 \beta \text{ si y sólo si } \omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta \text{ o } (\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \text{ y } (0, 1) \cdot \alpha < (0, 1) \cdot \beta).$$

Al restringir cada uno de los órdenes \preceq_1 y \preceq_2 a \mathbb{Q}^2 , se obtiene el orden \preceq_{ω} . Sin embargo, \leq_{ω} no se extiende de manera única a \mathbb{R}^2 pues $(-\sqrt{2}, 1) \preceq_1 (0, 0)$ y $(0, 0) \preceq_2 (-\sqrt{2}, 1)$.

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [42, Proposición 2.4, pág. 151].

Proposición 1.5.7. *Sea \preceq un orden continuo sobre \mathbb{R}^n . Existe un isomorfismo ordenado $\alpha : (\mathbb{R}^n, \preceq) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \leq_{lex})$.*

La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [42, Teorema 2.5, pág. 151]

Teorema 1.5.8. *Sea \preceq un orden sobre \mathbb{Q}^n . Existen un entero s , con $1 \leq s \leq n$, $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$ y un homomorfismo inyectivo ordenado*

$$\alpha : (\mathbb{Q}^n, \preceq) \rightarrow (\mathbb{R}^s, \leq_{lex}),$$

en donde $\alpha(u) = (u \cdot u_1, \dots, u \cdot u_s)$.

En un abuso de notación, denotaremos por \leq_ω a un orden total en \mathbb{R}^n que extiende al orden total \leq_ω en \mathbb{Q}^n .

1.6. Valoraciones

Como se ha mencionado previamente, Abhyankar y Moh en [4, 2, 3] definen los exponentes característicos de f basándose en el orden de sus raíces. Para ampliar estos conceptos a una hipersuperficie arbitraria, resulta fundamental introducir una valoración que permita asignar un orden a los elementos de los campos algebraicamente cerrados donde se encuentran las raíces. Por ello, presentamos el concepto de valoración, sus propiedades fundamentales y algunos ejemplos representativos.

Definición 1.6.1. Sean K un campo y Λ un grupo totalmente ordenado, una **valoración** ν es una función $\nu : K^* \rightarrow \Lambda$ que satisface:

1. para todos $a, b \in K^*$, $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,
2. para todos $a, b \in K^*$ tales que $a + b \in K^*$, $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$,
3. existe $a \in K^*$ tal que $\nu(a) \neq 0$.

Las propiedades que mencionamos en la siguiente Proposición las utilizaremos durante el desarrollo del trabajo, por ejemplo en el Lema 3.3.12. Las propiedades pueden consultarse en [26].

Proposición 1.6.2. Sean K un campo y ν una valoración sobre K , entonces para todos $a, b \in K^*$ se tiene:

1. $\nu(a) = \nu(-a)$, $\nu(1) = 0$ y $\nu(a^{-1}) = -\nu(a)$,
2. si $\nu(a) \neq \nu(b)$, entonces $\nu(a + b) = \min\{\nu(a), \nu(b)\}$,
3. si a_1, a_2, \dots, a_n son elementos de K^* , entonces $\nu\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{\nu(a_i)\}$ y la igualdad se cumple si $\nu(a_i) \neq \nu(a_j)$ para todos $i \neq j$,
4. si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, entonces $\nu(a_i) = \nu(a_j)$ para algunos $i \neq j$.

Ejemplo. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Cualquier racional $\frac{a}{b}$ se puede escribir de la forma $p^r \frac{a'}{b'}$, con a' y b' no divisibles por p . Sea $\nu_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, la función tal que $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = r$, entonces ν_p es una valoración de \mathbb{Q} .

Ejemplo. Sean \preceq un orden total sobre \mathbb{R}^n y $\varphi \in K((X))$, dado por $\varphi = \frac{f}{g}$, con $f, g \in K[[X]]$ y $g \neq 0$. La aplicación $v_{\preceq} : K((X)) \rightarrow \mathbb{Q}^n$, definido por

$$v_{\preceq}(\varphi) = \min_{\preceq} \text{Supp}(f) - \min_{\preceq} \text{Supp}(g) \quad (1.6.1)$$

es una valoración.

Sea A un dominio entero y K su campo de cocientes. Se dice que A es un **anillo de valoración** si existe un grupo abeliano totalmente ordenado Γ y una valoración $\nu : K^* \rightarrow \Gamma$ tal que $A = \{a \in K \mid \nu(a) \geq 0\}$. El anillo A es un anillo local y su ideal maximal es el conjunto $\mathcal{M} := \{a \in K \mid \nu(a) > 0\}$.

CAPÍTULO 2

Hipersuperficies casi ordinarias

El concepto de singularidad de hipersuperficie casi ordinaria surge en [28] en el contexto de la resolución de singularidades de hipersuperficies. Zariski y Abhyankar abordaron el problema de describir las singularidades de las curvas algebraicas mediante parametrizaciones locales en [48, 2]. Su enfoque introdujo herramientas fundamentales para analizar la estructura algebraica y geométrica de las curvas, sentando las bases para métodos modernos en la teoría de singularidades.

Para el caso particular de las hipersuperficies casi ordinarias, Joseph Lipman [34] amplió y formalizó la noción de exponentes característicos. Los cuales tienen diversas aplicaciones en la teoría de singularidades, como puede consultarse en [49, 19].

Los exponentes característicos juegan un papel fundamental en el cálculo del semigrupo asociado a una singularidad. A partir de los exponentes característicos (y del semigrupo) se describen propiedades geométricas y algebraicas de la singularidad, como ha sido abordado extensamente en la literatura, como se detalla en trabajos clave [23, 16, 22, 39, 40, 31].

Los exponentes y los monomios característicos se presentan en el contexto del estudio de los polinomios de Weierstrass, ya que la definición algebraica del discriminante depende de la existencia de un polinomio.

Introducimos los conceptos de resultante, discriminante, hipersuperficie casi ordinaria y monomios y exponentes característicos. También presentamos teoremas fundamentales como el Teorema de Preparación de Weierstrass, el Teorema de Jung-Abhyankar y el Teorema de Lipman. Este último es especialmente relevante, ya que caracteriza los exponentes característicos y permite concluir que estos no dependen de la elección de la raíz.

En este capítulo hemos presentado resultados relacionados con los monomios y exponentes característicos de polinomios casi ordinarios, estableciendo una base sólida para su análisis, las ideas centrales de las demostraciones y los enunciados fueron tomados de [16, 34]. Estos resultados se extienden en capítulos posteriores al caso más general de hipersuperficies arbitrarias.

2.1. Teorema de Preparación de Weierstrass

El objetivo de esta sección es presentar el Teorema de Preparación de Weierstrass, planteado por primera vez en [47]. Este teorema establece que cualquier germen de hipersuperficie puede definirse mediante un polinomio de Weierstrass. Las demostraciones que no se incluyen en esta sección pueden consultarse en [24].

A lo largo de este trabajo, el símbolo K representará un campo de característica cero y algebraicamente cerrado.

Definición 2.1.1. Se dice que $f \in K[[x_1, \dots, x_n, y]]$ es un **polinomio de Weierstrass** en y si es de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = y^d + a_1(x_1, \dots, x_n)y^{d-1} + \dots + a_d(x_1, \dots, x_n) \in K[[x_1, \dots, x_n]][y],$$

en donde $d \geq 1$ y $\text{mult}(a_i) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, d$.

Teorema 2.1.2 (Teorema de división de Weierstrass). *Sean $F(x_1, \dots, x_n), H(x_1, \dots, x_n) \in K[[X]]$. Supongamos que $\text{mult}(F(0, \dots, 0, x_n)) = d > 0$, entonces existen únicos $A \in K[[X]]$ y $B \in K[[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]][x_n]$, tales que $H = AF + B$ y $\deg_{x_n} B < d$.*

Lema 2.1.3. *Sea K un campo infinito. Dada una familia finita \mathcal{F} de polinomios homogéneos en $K[Y]$ no nulos, existe una transformación lineal invertible $T : K[X] \rightarrow K[Y]$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}$ de grado d , existe $C_F \in K^*$,*

$$T(F(x_1, \dots, x_n)) = C_F x_n^d + (\text{términos de menor grado en } x_n).$$

Corolario 2.1.4. *Sea K un campo infinito. Dada una familia finita \mathcal{F} de elementos no nulos en $K[[X]]$. Existe un automorfismo T de $K[[X]]$ tal que $T(F)$ es regular con respecto a $x_n \forall F \in \mathcal{F}$.*

Teorema 2.1.5 (Teorema de Preparación de Weierstrass). Sea $F(x_1, \dots, x_n) \in K[[X]]$ con $\text{mult}(F) = d$ y regular con respecto a x_n . Existe un único $A \in K[[X]]$ invertible tal que

$$AF = x_n^d + A_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + A_d(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

con $A_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in K[[X]]$ y $\text{mult}(A_i(x_1, \dots, x_{n-1})) \geq i \forall i = 1, \dots, d$.

Demostración. Sea $H = x_n^d$, por hipótesis $\text{mult}(F(0, \dots, 0, x_n)) = d = \text{mult}(F) > 0$, de modo que por el Teorema de División de Weierstrass (Teorema 2.1.2), existen $A \in K[[X]]$ y $B \in K[[x_1, \dots, x_{n-1}]]x_n$ con $\text{deg}_{x_n}(B) < d$ y $H = AF + B$. Por lo que $AF = x_n^d - B = x_n^d + A_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + A_d(x_1, \dots, x_{n-1})$. Dado que $\text{mult}(F) = \text{mult}(F(0, \dots, 0, x_n)) = d$, entonces $\text{mult}(AF) \geq d$. Por otro lado tenemos que $AF(0, \dots, 0, x_n) = x_n^d + A_1(0, \dots, 0)x_n^{d-1} + \dots + A_d(0, \dots, 0)$, entonces $A_i(0, \dots, 0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ahora, $F(0, \dots, 0, x_n) = Cx_n^d$, con $C \in K[[x_n]]$ invertible pues $\text{mult}(F(0, \dots, 0, x_n)) = d$. De aquí que $A = C^{-1}$, esto es, A es invertible.

Finalmente, dado que $d = \text{mult}(F) = \text{mult}(AF) = \text{mult}(x_n^d + A_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + A_d(x_1, \dots, x_{n-1}))$, entonces $\text{mult}(A_i(x_1, \dots, x_n)) \geq i$.

□

Si $K = \mathbb{C}$ y F es convergente, se tiene el mismo resultado siendo A una unidad convergente, ver por ejemplo [24].

Corolario 2.1.6. Del Corolario 2.1.4 y del Teorema de Preparación de Weierstrass, Teorema 2.1.5, se deduce que toda serie de potencias es asociada a un polinomio de Weierstrass de grado la multiplicidad de la serie. Dicha asociación no es canónica pues requiere una transformación lineal genérica preliminar.

Para comprender los gérmenes de singularidades de hipersuperficies complejas, es suficiente estudiar los ceros de los polinomios de Weierstrass $f = y^d + a_1y^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}[y]$, donde $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}[[X]]$ son series convergentes. Además, dado que f es un polinomio en y , podemos considerar la proyección $P : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(x_1, \dots, x_n, y) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, con y y (x_1, \dots, x_n) relacionados por la ecuación $y^d + a_1(x_1, \dots, x_n)y^{d-1} + \dots + a_d(x_1, \dots, x_n) = 0$, donde $(x_1, \dots, x_n) \in B(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ y $r = \min \left\{ \text{radio de convergencia de } a_i \right\}_{i=1}^d$.

Ejemplo. Consideremos : $F = y^2 + xy + x \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

La multiplicidad de F es 1 y es regular con respecto a x , por el Teorema de Preparación de Weierstrass existe $A \in \mathbb{C}[[x, y]]$ unidad tal que $AF = x + A_1$, con $A_1 \in \mathbb{C}[[y]]$ y $\text{mult}(A_1) \geq 1$.

En efecto,

$$(1 - y + y^2 - y^3 + \dots)(y^2 + xy + x) = x + (y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \dots),$$

con $1 - y + y^2 - y^3 + \dots \in \mathbb{C}[[x, y]]$ unidad. En cuyo caso $y^2 + xy + x$ y $x + (y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \dots)$ son elementos asociados en el anillo $\mathbb{C}[[x, y]]$.

2.2. Discriminante

Un germen de singularidad de hipersuperficie en \mathbb{C}^{n+1} puede verse como una cubierta ramificada de una vecindad pequeña en \mathbb{C}^n , donde el lugar de ramificación está determinado por el discriminante.

En esta sección presentamos los conceptos y propiedades de la resultante y el discriminante de un polinomio. Los resultados que presentamos sobre la resultante pueden consultarse en [37].

Definición 2.2.1. Sea A un dominio entero y sean $f, h \in A[y]$ con $f(x) = a_0y^d + a_1y^{d-1} + \dots + a_d$ y $h(y) = b_0y^{d'} + b_1y^{d'-1} + \dots + b_{d'}$. **La resultante de f y h** , denotada por $R_y(f, h)$, se define como $\det(R)$ en donde R es la matriz de $(d + d') \times (d + d')$ dada por:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_d & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{d-1} & a_d & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{d'-1} & b_{d'} & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{d'-1} & b_{d'} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_{d'-1} & b_{d'} \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Notemos que $R_y(f, h) \in A$.

Otra forma de calcular la resultante de f y h es

$$R_y(f, h) = a_0^d b_0^{d'} \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^{d'} (r_i - s_j), \quad (2.2.2)$$

en donde r_i y s_j son las raíces de f y h , respectivamente, ver por ejemplo [37, pág. 398].

Sea $f(y) = a_d y^d + a_{d-1} y^{d-1} + \dots + a_0 \in A[y]$, la derivada de f , denotada por f_y , es $f_y(y) = a_d d y^{d-1} + a_{d-1} (d-1) y^{d-2} + \dots + a_1$.

Definición 2.2.2. Sea $f(y) = a_d y^d + a_{d-1} y^{d-1} + \dots + a_0 \in A[y]$, con $d = \deg(f)$ y a_d invertible en A . Se define el **discriminante de f** , denotado por $\Delta_y f$, como:

$$\Delta_y f := \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{a_d} R_y(f, f_y). \quad (2.2.3)$$

Se puede verificar en [37, pág. 403] que otra forma de calcular el discriminante de f es:

$$\Delta_y f = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_d^{2d-2} \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^2, \quad (2.2.4)$$

en donde ξ_i son las raíces de f , las cuales pertenecen a un campo que contiene al campo de fracciones de A .

La igualdad (2.2.4) la usaremos en diversas ocasiones durante el texto. En particular en la demostración del Teorema 6.2.3.

Observación 2.2.3. Sea f como en la Definición 2.2.2. Se tiene que $\Delta_y(f) = 0$ si y sólo si f tiene una raíz doble.

Ejemplo. Consideremos $f(z) = z^2 + y - x^2 \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$. El discriminante de f es $\Delta_z(f) = 4(x^2 - y)$. En la Figura 2.1 graficamos $f(z) = 0$ y $\Delta_z(f) = 0$. Podemos observar que existen valores para x, y de manera que f tiene raíces múltiples.

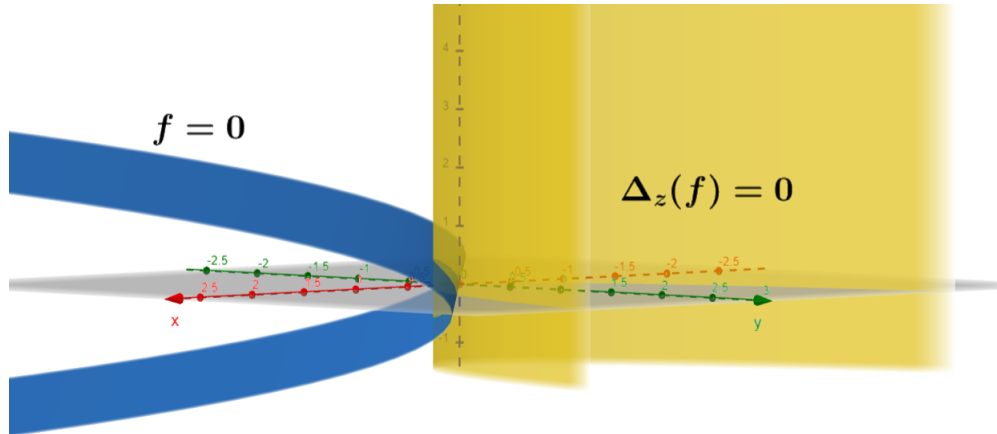


Figura 2.1: $f(z) = 0$ y $\Delta_z(f) = 0$

2.3. Hipersuperficies casi ordinarias

En esta sección el campo K denotará un campo de característica 0 y algebraicamente cerrado.

Definición 2.3.1. Se dice que una hipersuperficie definida por $f = y^d + A_1 y^{d-1} + \dots + A_{d-1} y + A_d \in K[[X]][y]$ es **casi ordinaria** si

$$\Delta_y f = X^\delta u, \quad (2.3.1)$$

con $u \in K[[X]]$ unidad y $\delta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. Al polinomio que define a dicha hipersuperficie le llamaremos **polinomio casi ordinario**. Si ξ es raíz de f , se dice que ξ es una **raíz casi ordinaria**.

Ejemplo. En la siguiente lista de polinomios mostramos algunos que son casi ordinarios y otro que no lo son, como en los Ejemplos 1, 2, 3 y 4, del capítulo 7.

1. Sea $f(y) = y^3 + 2x^2 y - 3x \in \mathbb{C}[[x]][y]$. El discriminante de f es $\Delta_y(f) = (-1)^{\frac{3(2)}{2}} \det(R)$, en donde R es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^2 & -3x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x^2 & -3x \\ 3 & 0 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\Delta_y(f) = -x^2(243 + 32x^4)$, con $243 + 32x^4 \in \mathbb{C}[[x]]$ unidad, por la Proposición 1.4.1, de manera que f es un polinomio casi ordinario.

2. Sea $f(y) = y^2 + x_1 y + x_2 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$. Sea R como en (2.2.1):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 2 & x_1 & 0 \\ 0 & 2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\Delta_y(f) = x_1^2 - 4x_2 \neq x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} u$, con u unidad de $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]$ y $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{N}$. Por lo que, f no es un polinomio casi ordinario.

3. Sea $f(z) = (z - x)^2 + xy \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$ y $\Delta_z(f) = -4xy$, por lo que es casi ordinario.

4. Consideremos $f(z) = z^2 + y - x^2 \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$. El discriminante de f es $\Delta_z(f) = 4(x^2 - y)$, por lo que f no es casi ordinario.

Observación 2.3.2. *Del Corolario 2.1.6 obtenemos que cualquier curva algebroide plana definida por $f \in \mathbb{C}[[x_1, y]]$, tiene un representante de la forma*

$$f = y^d + A_1 y^{d-1} + \cdots + A_{d-1} y + A_d,$$

con $A_i \in \mathbb{C}[[x_1]]$, $\text{mult}(A_i) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, d$.

Puesto que $\Delta_y(f)$ es suma y producto de los A_i , entonces $\Delta_y(f) \in \mathbb{C}[[x_1]]$. De manera que $\Delta_y(f) = x_1^{\delta_1} u$, con $u \in \mathbb{C}[[x_1]]$ unidad y $\delta_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En consecuencia cualquier curva algebroide plana es casi ordinaria.

Uno de los teoremas fundamentales para el cálculo de raíces de polinomios con coeficientes en series de potencias es el *Teorema de Newton-Puiseux*. Este establece que, dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[[x_1]][y]$ analítico en el origen y de grado d , sus raíces pertenecen al anillo $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{d}}]]$. Para más detalles, véase [41, Puiseux]. En el caso de varias variables, Jung y Abhyankar demostraron un importante teorema que establece condiciones bajo las cuales un polinomio en el anillo $K[[X]][y]$ tiene sus raíces en el anillo de series de potencias en las variables $x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}$, para algún k , denotado por $K[[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}]]$.

Para simplificar notación usaremos la expresión $K[[X^{\frac{1}{k}}]]$ para representar al anillo $K[[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}]]$.

Teorema 2.3.3. *(Jung- Abhyankar) Sean K un campo algebraicamente cerrado de característica cero y $f \in K[[X]][y]$ un polinomio casi ordinario e irreducible con respecto a y . Entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que f tiene a todas sus raíces en $K[[X^{\frac{1}{k}}]]$.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [5], [50] y [35]. □

Podemos notar en la prueba de la demostración de [50], que k puede ser considerado como el grado de f .

Ejemplo. Sea $f(y) = y^2 + x_1 y + x_1 \in \mathbb{C}[[x_1]][y]$, como en el Ejemplo 5. Las raíces de f son:

$$y = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{x_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{x_1 - 4}}{2} = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{x_1^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{8} + \frac{x_1^3}{16} + \cdots)}{2} \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}]].$$

Ejemplo. Sea $f(y) = y^2 - 2(x_2 + 1)y + (x_2 + 1) - x_1 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 6. Se tiene que $\Delta_y(f) = -4x_1$, por lo que f es casi ordinario, y sus raíces son $\xi = \pm x_1^{\frac{1}{2}} + x_2 + 1 \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$.

Ejemplo. El siguiente ejemplo fue tomado de [16]. Sea $f(y) = y^4 - 8x_2y^3 + (24x_2^2 - 2x_2^3 - 2x_1x_2^4)y^2 + (-32x_2^3 + 8x_2^4 + 8x_1x_2^5)y + 16x_2^4 - 8x_2^5 + x_2^6 + 2x_1x_2^7 - 8x_1x_2^6 + x_1^2x_2^8 - 4x_1x_2^7 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 7, con $\Delta_y(f) = 4096x_1^2x_2^{20}(1 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2)$, por lo que f es casi ordinario.

Se tiene que $\xi = 2x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$ es raíz de f , de modo que las raíces de f pertenecen a $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$, esto debido a la acción del grupo de Galois del campo de factorización de f , como se discutirá más adelante, Ecuación 2.4.3, en cuyo caso $k = 2 \neq \deg(f) = 4$; sin embargo, $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]] \subset \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{4}}, x_2^{\frac{1}{4}}]]$.

También hay hipersuperficies que no son casi ordinarias cuyas raíces se encuentran en $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{k}}]]$, como el siguiente ejemplo:

Ejemplo. El siguiente ejemplo fue tomado de [16]. Sea $f(z) = (z^2 - x - y)^2 - 4xy \in K[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 13. Las raíces de f son:

$$\pm x^{\frac{1}{2}} \pm y^{\frac{1}{2}},$$

las cuales pertenecen a $K[[x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}}]]$, en este caso $k = 2$.

Notemos que $\Delta_y(f) = -256(y - x)(y + y(2x + 1) + x^2 - x)^2$, por lo que f no es un polinomio casi ordinario.

2.4. Monomios y exponentes característicos

En esta sección $f \in K[[X]][y]$ denotará un polinomio de Weierstrass, casi ordinario e irreducible, de grado d y K un campo algebraicamente cerrado de característica 0, dado como $f(y) = y^d + a_{d-1}y^{d-1} + \cdots + a_0$.

Los resultados que presentamos en esta sección fueron tomados de [16].

Proposición 2.4.1. *Sea $f(y) = y^d + a_{d-1}y^{d-1} + \cdots + a_0 \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass, casi ordinario e irreducible de grado d . Sean $\xi, \xi' \in K[[X^{\frac{1}{d}}]]$ raíces de f todas distintas, existe $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tal que $\xi - \xi' = X^{\frac{\lambda}{d}}u$, con u unidad en $K[[X^{\frac{1}{d}}]]$.*

Demostración. Por definición de polinomio casi ordinario se tiene que

$$\Delta_y f = X^\delta u, \quad (2.4.1)$$

con $u \in K[[X]]$ unidad.

Por otro lado, por la ecuación (2.2.4),

$$\Delta_y f = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^2, \quad (2.4.2)$$

en donde ξ_i son las raíces de f .

Sean $\xi, \xi' \in K[[X^{\frac{1}{a}}]]$ raíces de f . Dado que $K[[X]] \subset K[[X^{\frac{1}{a}}]]$, los cuales son anillos de factorización, igualando las expresiones (2.4.1) y (2.4.2) obtenemos que

$$\xi - \xi' = x_1^{\frac{\lambda_1}{d}} \cdots x_n^{\frac{\lambda_n}{d}} u,$$

en donde u es unidad en $K[[X^{\frac{1}{a}}]]$ y $\lambda_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $l = 1, \dots, n$. □

Definición 2.4.2. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de grado d casi ordinario, $M = X^\lambda$, con $\lambda \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ es un **monomio característico de f** si existen ξ, ξ' raíces de f tales que $\xi - \xi' = Mu$, con $u \in K[[X^{\frac{1}{a}}]]$ unidad.

El conjunto $\{\lambda \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid X^\lambda \text{ es un monomio característico}\}$ es el conjunto de **exponentes característicos de f** .

Ejemplo. ■ El polinomio $f(y) = y^2 + x_1 y + x_1$, como en el Ejemplo 5, tiene un único exponente característico que es $\frac{1}{2}$.

- El polinomio $f(y) = y^2 - 2(x_2 + 1)y + (x_2 + 1) - x_1$, como en Ejemplo 6, tiene un único exponente característico que es $(\frac{1}{2}, 0)$.
- El polinomio $f(y) = y^4 - 8x_2 y^3 + (24x_2^2 - 2x_2^3 - 2x_1 x_2^4)y^2 + (-32x_2^3 + 8x_2^4 + 8x_1 x_2^5)y + 16x_2^4 - 8x_2^5 + x_2^6 + 2x_1 x_2^7 - 8x_1 x_2^6 + x_1^2 x_2^8 - 4x_1 x_2^7 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 7, tiene dos exponentes característicos que son $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(0, \frac{3}{2})$.

Sea $f \in K[[X]][y]$ y $\xi \in K[[X^{\frac{1}{a}}]]$ una raíz de f . Se tiene que

$$K[[X]] \subset K[[X]][\xi] \subset K[[X^{\frac{1}{a}}]].$$

Consideremos a sus respectivos campos de fracciones

$$L \subset L(\xi) \subset L_d.$$

Abhyankar demuestra en [5, Teorema 3, pág. 585] que el campo L_d es una extensión finita de Galois de L . Y la acción del grupo de Galois de la extensión es dada por alguna n -tupla (η_1, \dots, η_n) donde η_i son raíces d -ésimas de la unidad y

$$x_i^{\frac{1}{d}} \mapsto \eta_i x_i^{\frac{1}{d}}. \quad (2.4.3)$$

Observación 2.4.3. Sea $M \in L_d$ un monomio, con $M = x_1^{\frac{\alpha_1}{d}} \cdots x_n^{\frac{\alpha_n}{d}}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y $\varphi \in \text{Gal}(L_d : L)$, entonces $\varphi(M) = \eta^\alpha M$, para algún $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ con η_i raíces d -ésimas de la unidad.

Sean $\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{d-1} \in L_d$ las raíces de f . Denotemos al conjunto de las raíces de f por $Z(f)$. Como $\text{Gal}(L_d : L)$ actúa transitivamente sobre las raíces de f entonces $Z(f) = \{\varphi(\xi) : \varphi \in \text{Gal}(L_d : L)\}$, ver A.0.5.

Las técnicas empleadas en la demostración de la siguiente proposición se aplicarán nuevamente en la demostración de la Proposición 5.2.2.

Proposición 2.4.4. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible casi ordinario. Fijado $\xi \in Z(f)$, si M es un monomio característico de f , entonces existe $\xi' \in Z(f)$ tal que $Mu = \xi' - \xi$, con u unidad de $K[[X^{\frac{1}{d}}]]$.

Demostración. Sea M_{ij} un monomio característico de f , con $M_{ij}u_{ij} = \xi_i - \xi_j$, $\xi_i, \xi_j \in Z(f)$. Por la transitividad del grupo de Galois de un polinomio irreducible existen $\varphi_i, \varphi_j \in \text{Gal}(L_d : L)$, tales que

$$\begin{aligned} M_{ij}u_{ij} &= \xi_i - \xi_j = \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) \\ &= \varphi_j \varphi_j^{-1}(\varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi)) \\ &= \varphi_j(\varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \xi) \\ &= \varphi_j(\xi_k - \xi), \end{aligned}$$

donde $\xi_k = \varphi_k(\xi)$, con $\varphi_k = \varphi_j^{-1} \varphi_i \in \text{Gal}(L_d : L)$. De donde obtenemos que $\varphi_j^{-1}(M_{ij}u_{ij}) = \xi_k - \xi$.

De la Observación 2.4.3 se tiene que $M_{ij}\overline{u_{ij}} = \xi_k - \xi$, donde $\overline{u_{ij}}$ es unidad de $K[[X^{\frac{1}{d}}]]$.

□

Como consecuencia del resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.4.5. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible casi ordinario, el cardinal del conjunto de monomios característicos de f es menor o igual que el grado de f .*

Sean $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in K[[X^{\frac{1}{d}}]]$ se dice que $\Upsilon_1 \leq \Upsilon_2$ mediante la relación de divisibilidad si Υ_1 divide a Υ_2 en el anillo $K[[X^{\frac{1}{d}}]]$.

Proposición 2.4.6. *El conjunto $\{M_i\}_{1 \leq k \leq g}$ de monomios característicos es totalmente ordenado mediante la relación de divisibilidad \leq en el anillo $K[[X^{\frac{1}{d}}]]$.*

Demostración. Se tiene que

$$M_i u_{i0} - M_j u_{j0} = (\xi_i - \xi_0) - (\xi_j - \xi_0) = \xi_i - \xi_j = M_{ij} u_{ij}. \quad (2.4.4)$$

Si $M_i = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $M_j = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ y $M_{ij} = x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$, entonces por (2.4.4) tenemos que

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} u_{i0} - x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} u_{j0} = x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} u_{ij}. \quad (2.4.5)$$

Si $\alpha_i < \gamma_i$ y $\alpha_j > \gamma_j$ para algunos i, j con $0 \leq i, j \leq n$, entonces (2.4.5) no se cumpliría. Por lo que necesariamente $\alpha_i \leq \gamma_i$ o $\alpha_i \geq \gamma_i$ para todo $0 \leq i \leq n$ y, en consecuencia, M_i divide a M_j o M_j divide a M_i . □

Observación 2.4.7. *Como consecuencia se tiene que los exponentes característicos están totalmente ordenados mediante la relación de orden parcial*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ si } \alpha_i \leq \beta_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

El siguiente resultado destaca una de las propiedades fundamentales de los monomios característicos de singularidades casi ordinarias. Tornero define los monomios distinguidos de una superficie de Puiseux como los monomios que cumplen esta propiedad [45]. En el Teorema 4.4.3, se presenta una extensión de este resultado.

Proposición 2.4.8. *Sea $\{M_i\}_{0 \leq i \leq g}$ el conjunto de monomios característicos de una raíz casi ordinaria ξ , entonces $L(\xi) = L(M_1, \dots, M_g)$.*

El siguiente teorema caracteriza a las raíces casi ordinarias y da una forma de definir los exponentes característicos de polinomios casiordinarios en función del soporte de una de sus raíces. La demostración puede consultarse, por ejemplo en [16]. Presentamos una extensión de este resultado en el Teorema 5.2.5.

Teorema 2.4.9. *Sea $\xi = \sum c_\lambda X^\lambda \in K[[X^{\frac{1}{d}}]]$, no unidad. Entonces ξ es una raíz casi ordinaria si y sólo si, existen $\lambda_i \in (\frac{1}{d}\mathbb{N})^n$, para $i = 1, \dots, g$, tales que:*

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$, y $c_{\lambda_i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, g$.
2. $c_\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{Z}^n + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$.
3. Para $j = 1, \dots, g$ se tiene que λ_j no pertenece a $\mathbb{Z}^n + \sum_{\lambda_i < \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_i$.

en cuyo caso $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ son los exponentes característicos.

Ejemplo. Consideremos $\xi = x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2 \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$. Sean $\lambda := (0, 1)$, $\lambda_1 := (0, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 := (\frac{1}{2}, 2)$. Entonces

1. $\lambda_1 < \lambda_2$,
2. $c_\lambda = 1$ y $\lambda \in \mathbb{Z}^2 + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$,
3. $\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^2$, $\lambda_2 \notin \mathbb{Z}^2 + (0, \frac{3}{2})\mathbb{Z}$.

Por el Teorema 2.4.9, ξ es una raíz casi ordinaria.

Por otro lado ξ es raíz de $f(y) = [(y - x_2)^2 - x_1x_2^4 - x_2^3]^2 - 4x_1x_2^7 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 8, y $\Delta_y(f) = 4096x_1^2x_2^{20}(1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2)$.

Las raíces de f son $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = x_2 - x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$, $\xi_3 = x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$ y $\xi_4 = x_2 - x_2^{\frac{3}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$. Haciendo diferencias entre las raíces tenemos

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &= 2x_2^{\frac{3}{2}} + 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2 = x_2^{\frac{3}{2}}(2 + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}), \\ \xi_1 - \xi_3 &= \xi_2 - \xi_3 = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2, \\ \xi_1 - \xi_4 &= \xi_2 - \xi_4 = 2x_2^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Teniéndose que $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$ son los exponentes característicos. Cumpliéndose, en efecto, lo que establece el Teorema 2.4.9.

Consideremos a los siguientes grupos abelianos:

$$Q_0 := \mathbb{Z}^n,$$

$$Q_i := Q_{i-1} + \mathbb{Z}\lambda_i \text{ para todo } i = 1, \dots, g.$$

Notemos que $Q_{i-1} \subset Q_i$, por lo que podemos definir el grupo cociente $\frac{Q_i}{Q_{i-1}}$. Consideremos a $n_i = \left| \frac{Q_i}{Q_{i-1}} \right|$.

Se tiene que

$$\frac{Q_i}{Q_{i-1}} = \{q + Q_{i-1} : q \in Q_i\} = \{z\lambda_i + Q_{i-1} : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Dado que $\lambda_i \in \mathbb{Q}^n$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_i = \frac{1}{k}a$, con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n, k) = 1$.

Probaremos que $\frac{Q_i}{Q_{i-1}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$, mediante el mapeo

$$\varphi : z\lambda_i + Q_{i-1} = z\frac{a}{k} + Q_{i-1} \mapsto z + k\mathbb{Z}.$$

Sean $z_1\lambda_i + Q_{i-1}, z_2\lambda_i + Q_{i-1} \in \frac{Q_i}{Q_{i-1}}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi((z_1\lambda_i + Q_{i-1}) + (z_2\lambda_i + Q_{i-1})) &= \varphi((z_1 + z_2)\lambda_i + Q_{i-1}) \\ &= (z_1 + z_2) + k\mathbb{Z} \\ &= (z_1 + k\mathbb{Z}) + (z_2 + k\mathbb{Z}) \\ &= \varphi(z_1\lambda_i + Q_{i-1}) + \varphi(z_2\lambda_i + Q_{i-1}), \end{aligned}$$

de manera que φ es un homomorfismo.

Sea $z + k\mathbb{Z} \in \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$, entonces $\varphi(z\lambda_i + Q_{i-1}) = z + k\mathbb{Z}$, por lo que φ es suprayectiva.

Sean $z_1\lambda_i + Q_{i-1}, z_2\lambda_i + Q_{i-1} \in \frac{Q_i}{Q_{i-1}}$ tales que $\varphi(z_1\lambda_i + Q_{i-1}) = \varphi(z_2\lambda_i + Q_{i-1})$, entonces $z_1 + k\mathbb{Z} = z_2 + k\mathbb{Z}$, de modo que $z_1 - z_2 \in k\mathbb{Z}$, esto es, $z_1 - z_2 = km$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.

Por lo que $(z_1 - z_2)\lambda_i + Q_{i-1} = (km)\frac{a}{k} + Q_{i-1} = ma + Q_{i-1} = Q_{i-1}$, de modo que $z_1\lambda_i + Q_{i-1} = z_2\lambda_i + Q_{i-1}$, consecuentemente φ es inyectiva.

Denotemos a $e_j = n_j \cdots n_g$, para $j = 1, \dots, g$ y $n_0 = 1$.

Observación 2.4.10. *Por el Lema 2.4.8 se tiene que $M_i \in L(\xi)$ para todo $i = 1, \dots, g$. Por lo que $L(M_1, \dots, M_j) \subset L(\xi)$ y $L(M_1, \dots, M_{j-1}) \subset L(M_1, \dots, M_j)$, además*

$$n_1 = [L(M_1) : L],$$

$$n_j = [L(M_1, \dots, M_j) : L(M_1, \dots, M_{j-1})], \text{ para } j = 2, \dots, g,$$

$$e_j = [L(\xi) : L(M_1, \dots, M_j)], \text{ para } j = 1, \dots, g.$$

Se tiene que $[L(\xi) : L] = n_0 \cdot n_1 \cdots n_g$.

Ejemplo. El elemento $\xi = x^{\frac{1}{2}}y + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}$ es una raíz casi ordinaria del polinomio $f(z) = z^4 - 2xy^2z^2 - 2x^3y^5z^2 + x^2y^4 + 2x^4y^7 + x^6y^{10} - 4x^4y^7$, como en el Ejemplo 9.

Los exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ y $\lambda_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ y sus monomios característicos son $M_1 = X^{\lambda_1}$ y $M_2 = X^{\lambda_2}$.

Se tiene que

$$[L(M_1) : L] = 2$$

y

$$[L(M_1, M_2) : L(M_2)] = 2.$$

Teniéndose que $[L(\xi) : L] = n_1 \cdot n_2 = 4$, el cual coincide con el grado de f .

CAPÍTULO 3

Campos algebraicamente cerrados que contienen a las series de potencias

El campo de fracciones de las series de potencias en la indeterminada x es denotado por $K((x))$, el cual no es algebraicamente cerrado. Su clausura algebraica es el campo

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} K\left(\left(x^{\frac{1}{k}}\right)\right),$$

conocido como el **campo de las series de Puiseux** [41, 13].

En el caso de varias variables no se cumple que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} K\left(\left(X^{\frac{1}{k}}\right)\right) \tag{3.0.1}$$

sea la clausura algebraica de $K((X))$. Para polinomios muy particulares, en el anillo $K[[X]][y]$, se puede garantizar que las raíces se encuentren en (3.0.1), como por ejemplo, los polinomios casi ordinarios, tal como lo establece el Teorema de Jung-Abhyankar. Cuando un polinomio tiene raíces en el anillo 3.0.1 se dice que define una **hipersuperficie de Puiseux**. Tornero estudia estas hipersuperficies en [45]. En el caso de un polinomio arbitrario en el anillo $K[[X]][y]$, McDonald demuestra en [36] que las raíces pueden expresarse como series cuyo soporte se encuentra contenido en un cono poliédrico racional fuertemente convexo.

En este contexto, Aroca, Ilardi y Rond, en [8, 9], construyen un campo algebraicamente cerrado para cada orden continuo en \mathbb{R}^n .

Introducimos el concepto de cono fuertemente convexo y el anillo de series de potencias con exponentes enteros en conos. Finalmente, presentamos la construcción de los campos algebraicamente cerrados utilizando un orden total positivo.

Definimos una valoración (3.3.8) para los campos y construimos sus anillos de valoración. Mostramos en el Lema 3.3.12 que si $f \in K[[X]][y]$ es un polinomio irreducible de Weierstrass, las raíces de f se encuentran en los anillos de valoración y demostramos en el Lema 3.3.7 que cada elemento de \mathcal{S}_{\preceq} puede expresarse como un monomio multiplicado por una unidad en su anillo de valoración. Concluimos que existen extensiones de campos de Galois en las cuales se pueden encontrar todas las raíces y conocer su soporte. Los resultados presentados en la Sección 3.3 son de nuestra autoría, con excepción de aquellos cuyas demostraciones se encuentran citadas en las referencias correspondientes.

A lo largo de este capítulo \preceq denotará un orden continuo total positivo en \mathbb{R}^n compatible con la estructura de grupo.

3.1. Conos

Se dice que $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un **cono** (poliedrico convexo) si existen $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\sigma = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle := \{ \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_s u_s \mid \mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}.$$

En cuyo caso se dice que u_1, \dots, u_s son **generadores** de σ .

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, el **cono generado por el conjunto** S es

$$\sigma = \langle \mu_1 s_1 + \dots + \mu_l s_l \mid s_1, \dots, s_l \in S \text{ y } \mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}_{\geq 0} \rangle.$$

Observación 3.1.1. Si σ es un cono, entonces $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ es un monoide, ver Definición 1.3.1.

Se dice que $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un **cono racional** si existe un conjunto de generadores de σ que pertenecen a \mathbb{Q}^n .

Ejemplo. Los siguientes conos son racionales:

1. $\sigma = \langle (\frac{3}{4}, \frac{4}{3}), (\frac{5}{6}, \frac{7}{2}) \rangle = \langle (9, 8), (5, 21) \rangle.$
2. $\sigma = \langle (-1, 0), (1, 0), (1, \sqrt{2}) \rangle = \langle (-1, 0), (1, 0), (0, 1) \rangle.$
3. $\sigma = \langle (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rangle = \langle (1, 1) \rangle.$

4. Mientras que $\sigma = \langle (1, 0), (1, \sqrt{2}) \rangle$ no es racional, pues $\lambda(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}^2$ si y sólo si $\lambda = 0$.

Se dice que σ es un **cono fuertemente convexo** si no contiene ningún subespacio lineal propio de dimensión mayor que 0.

Ejemplo. 1. $\sigma_1 = \langle (1, 0), (1, 1) \rangle$, $\sigma_2 = \langle (-1, 2) \rangle$ son conos fuertemente convexos.

2. $\sigma_3 = \langle (-1, 0), (0, 1), (1, 0) \rangle$ no es un cono fuertemente convexo, pues contiene a la recta $y = 0$.

Sea σ un cono en \mathbb{R}^n , definimos el **dual** de σ , denotado por σ^\vee , como:

$$\sigma^\vee := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot \alpha \geq 0 \quad \forall \alpha \in \sigma\}.$$

Observación 3.1.2. *Presentamos algunas propiedades de σ^\vee :*

1. $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$.
2. Si σ es fuertemente convexo, entonces σ^\vee no necesariamente lo es. Por ejemplo, $\sigma = \langle (0, 1) \rangle$ es fuertemente convexo y $\sigma^\vee = \langle (-1, 0), (0, 1), (1, 0) \rangle$ no es fuertemente convexo.
3. σ es fuertemente convexo y de dimensión maximal si y sólo si σ^\vee es fuertemente convexo y de dimensión maximal.

Sea \preceq un orden en \mathbb{R}^n compatible con la estructura de grupo. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es \preceq -no negativo si y sólo si el cono generado por S es \preceq -no negativo.

Al conjunto de conos racionales en \mathbb{R}^n que son \preceq -no negativos lo denotaremos por \mathcal{C}_{\preceq} .

Proposición 3.1.3. *Sea \preceq un orden sobre \mathbb{R}^n compatible con la estructura de grupo, si $\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}$ entonces es fuertemente convexo.*

Demostración. Si σ no fuese fuertemente convexo, existiría $\alpha \in \sigma \setminus \{0\}$ tal que $-\alpha \in \sigma$. Dado que $\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}$, entonces $\alpha \succ 0$ y de aquí que $0 \succ -\alpha$, pero $-\alpha \in \sigma$, por lo que $-\alpha \succ 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, σ es fuertemente convexo. \square

Observación 3.1.4. *Sea σ un cono en \mathbb{R}^n , si $\omega \in \sigma^\vee$, entonces $0 \leq_\omega \alpha$ para toda $\alpha \in \sigma$.*

3.2. El anillo de series de potencias formales con exponentes en un cono

Sea σ un cono racional fuertemente convexo y K un campo algebraicamente cerrado. Denotaremos al conjunto de **series con exponentes en un cono**, como $K[[\sigma]]$, esto es:

$$K[[\sigma]] := \left\{ \sum_{\gamma \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} a_\gamma x^\gamma \mid a_\gamma \in K \right\}.$$

Se tiene que $K[[\sigma]]$ tiene una estructura natural de anillo con las operaciones suma y producto dadas por:

$$a + b := \sum_{\gamma \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} c_\gamma x^\gamma,$$

en donde $a = \sum_{\alpha \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} a_\alpha x^\alpha$, $b = \sum_{\beta \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} a_\beta x^\beta$ y $c_\gamma = a_\gamma + b_\gamma$, por lo que $a + b \in K[[\sigma]]$.

Así también,

$$ab := \sum_{\gamma \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} d_\gamma x^\gamma,$$

con $d_\gamma = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} a_\alpha b_\beta$.

Dado que $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ es un monoide, si $a, b \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$, entonces $a + b \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$.

Por ser σ fuertemente convexo, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, existe una cantidad finita de $\alpha, \beta \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ que cumplen $\alpha + \beta = \gamma$. De manera que, la suma $\sum_{\alpha + \beta = \gamma} a_\alpha b_\beta$ está bien definida para toda γ , consecuentemente $ab \in K[[\sigma]]$.

El anillo $K[[\sigma]]$ es el completado del anillo de coordenadas de la variedad tórica afín asociada al cono σ .

Diremos que un cono σ en \mathbb{R}^n es **positivo** si contiene al primer ortante.

Observación 3.2.1. Si σ es un cono positivo, se tiene una inclusión natural del anillo $K[[X]]$ en $K[[\sigma]]$.

Similarmente se define el anillo de series de potencias con exponentes en un cono σ y denominador $k \in \mathbb{N}$, $K[[\sigma]]_k$, como

$$K[[\sigma]]_k := \left\{ \sum_{\gamma \in \sigma \cap \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n} a_\gamma x^\gamma \mid a_\gamma \in K \right\}.$$

Denotaremos por $K((\sigma))$ al campo de fracciones de $K[[\sigma]]$ y como $K((\sigma))_k$ al campo de fracciones de $K[[\sigma]]_k$.

El siguiente resultado establece cuándo una serie en $K[[\sigma]]$ es invertible. La demostración puede consultarse en [10], siendo suficiente adaptar la demostración de la Proposición 1.4.1.

Proposición 3.2.2. *Sea $f \in K[[\sigma]]$, entonces f es invertible en $K[[\sigma]]$ si y sólo si f tiene término constante distinto de cero.*

Sea $x - y \in K[[x, y]]$, por la Proposición 1.4.1, no es de la forma $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}u$, con u unidad de $K[[x, y]]$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$. Por otro lado, $x - y = x(1 - x^{-1}y)$ y $x + y = y(1 - xy^{-1})$. Sean $\sigma_1 = \langle (1, 0), (-1, 1) \rangle$ y $\sigma_2 = \langle (0, 1), (1, -1) \rangle$ entonces $x - y$ sí es de la forma $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}u$, con u unidad en $K[[\sigma_1]]$ y en $K[[\sigma_2]]$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$. Notemos que $\sigma_1 \cup \sigma_2$ no es fuertemente convexo.

3.3. Campos algebraicamente cerrados de series de potencias con soporte en conos trasladados

Recordemos que a lo largo de este capítulo \preceq denotará un orden total positivo continuo en \mathbb{R}^n .

El **soporte de una serie** $\varphi = \sum_{\gamma \in \Lambda} a_\gamma x^\gamma$ con $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, $Supp(\varphi)$, como en (1.4.6) es

$$Supp(\varphi) := \{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}.$$

Observación 3.3.1. *Sean $\varphi_1 = \sum_{\gamma \in \Lambda_1} a_\gamma x^\gamma$ y $\varphi_2 = \sum_{\gamma \in \Lambda_2} b_\gamma x^\gamma$, con $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$Supp(\varphi_1 + \varphi_2) \subset Supp(\varphi_1) \cup Supp(\varphi_2).$$

Cuando $\varphi_1\varphi_2$ está definida, esto es, $\{(\gamma', \gamma'') \mid \gamma', \gamma'' \in \mathbb{R}^n, a_{\gamma'} \neq 0, b_{\gamma''} \neq 0, \gamma' + \gamma'' = \gamma\}$ sea finito, entonces

$$Supp(\varphi_1\varphi_2) \subset Supp(\varphi_1) + Supp(\varphi_2).$$

Consideremos $n = 2$, $\varphi_1 = x_1 - x_2$ y $\varphi_2 = x_1 + x_2$. Entonces $Supp(\varphi_1) =$

$Supp(\varphi_2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$, por lo que

$$Supp(\varphi_1\varphi_2) = \{(2, 0), (0, 2)\} \subsetneq \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\} = Supp(\varphi_1) + Supp(\varphi_2).$$

El **anillo de series de potencias con exponentes enteros en conos \preceq -no negativos**, denotado por $K_{\preceq}[[X]]$, se define como

$$K_{\preceq}[[X]] := \left\{ \varphi \mid \exists \sigma \in \mathcal{C}_{\preceq} \text{ tal que } Supp(\varphi) \subset \sigma \cap \mathbb{Z}^n \right\} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}} K[[\sigma]],$$

la demostración de que $K_{\preceq}[[X]]$ es un anillo puede consultarse en [10, Teorema 15]. Como consecuencia de la Proposición 3.2.2 el conjunto $K_{\preceq}((X))$ definido por

$$\begin{aligned} K_{\preceq}((X)) &:= \left\{ \varphi \mid \exists \gamma \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } X^\gamma \varphi \in K_{\preceq}[[X]] \right\} \\ &= \left\{ \varphi \mid \exists \sigma \in \mathcal{C}_{\preceq} \text{ y } \gamma \in \mathbb{Z}^n \text{ tales que } Supp(\varphi) \subset (\sigma + \gamma) \cap \mathbb{Z}^n \right\} \quad (3.3.1) \\ &= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}} K((\sigma)) \end{aligned}$$

es su campo de fracciones, ver también en [10, Teorema 15].

La demostración que se presenta en [10] para justificar que $K_{\preceq}[[X]]$ y $K_{\preceq}((X))$ son anillo y campo, respectivamente, se puede adaptar para los conjuntos que presentamos a continuación.

El **anillo de series de potencias con exponentes enteros en conos \preceq -no negativos con k -ramificación**, con $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, denotado por $K_{\preceq}[[X]]_k$, se define como

$$K_{\preceq}[[X]]_k := \left\{ \varphi \mid \varphi(X^k) \in K_{\preceq}[[X]] \right\} \quad (3.3.2)$$

$$= \left\{ \varphi \mid \exists \sigma \in \mathcal{C}_{\preceq} \text{ tal que } Supp(\varphi) \subset \sigma \cap \left(\frac{1}{k} \mathbb{Z} \right)^n \right\} \quad (3.3.3)$$

$$= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}} K[[\sigma]]_k \quad (3.3.4)$$

y el conjunto $K_{\preceq}((X))_k$ definido por

$$\begin{aligned}
K_{\preceq}((X))_k &:= \left\{ \varphi \mid \exists \gamma \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } X^\gamma \varphi \in K_{\preceq}[[X]]_k \right\} \\
&= \left\{ \varphi \mid \exists \sigma \in \mathcal{C}_{\preceq} \text{ y } \gamma \in \mathbb{Z}^n \text{ tales que } \text{Supp}(\varphi) \subset (\sigma + \gamma) \cap \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n \right\} \\
&= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}} K((\sigma))_k
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

es su campo de fracciones.

El conjunto de **series de Puiseux con exponentes en conos \preceq -no negativos** \mathcal{A}_{\preceq} definido por

$$\mathcal{A}_{\preceq} := \left\{ \varphi \mid \exists \sigma \in \mathcal{C}_{\preceq} \text{ y } k \in \mathbb{N} \text{ tales que } \text{Supp}(\varphi) \subset \sigma \cap \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} K_{\preceq}[[X]]_k \tag{3.3.6}$$

es un anillo.

Como consecuencia de la Proposición 3.2.2 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3.2. *Un elemento en \mathcal{A}_{\preceq} es una unidad si y sólo si su término constante es distinto de cero.*

Como consecuencia de la Proposición 3.3.2, el conjunto \mathcal{S}_{\preceq} dado por

$$\mathcal{S}_{\preceq} := \left\{ \varphi \mid \exists \gamma \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } x^\gamma \varphi \in \mathcal{A}_{\preceq} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} K_{\preceq}((X))_k \tag{3.3.7}$$

es su campo de fracciones.

Teorema 3.3.3 (Aroca-Ilardi-Rond). *El campo de fracciones del anillo de series de Puiseux con exponentes en conos \preceq -no negativos \mathcal{S}_{\preceq} , descrito en (3.3.7), es algebraicamente cerrado.*

La prueba del Teorema 3.3.3 puede consultarse en [8, Teorema 1], para órdenes \leq_ω y para órdenes continuos en [9, Teorema 4.5].

Sea \preceq un orden positivo en \mathbb{R}^n . La valoración ν_{\preceq} como en (1.6.1) se extiende de manera natural a $\nu_{\preceq} : \mathcal{S}_{\preceq} \rightarrow \mathbb{Q}^n \cup \{\infty\}$ como:

$$\nu_{\preceq}(\varphi) := \min_{\preceq} \text{Supp}(\varphi) \tag{3.3.8}$$

y $\nu_{\preceq}(0) = \infty$.

Notemos que el mínimo del conjunto $Supp(\varphi)$ existe pues los conos son racionales y los elementos del soporte tienen denominador acotado.

Observación 3.3.4. Sean $\varsigma = \sum a_\alpha X^\alpha \in \mathcal{S}_\preceq$ y $\varsigma^{\prec\gamma} := \sum_{\alpha \prec \gamma} a_\alpha X^\alpha$, se tiene que $\nu_\preceq(\varsigma - \varsigma^{\prec\gamma}) \succeq \gamma$.

Dada una serie $\xi = \sum_{i=\alpha}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{d}} \in K((x^{\frac{1}{d}}))$ denotamos por

$$ord_x(\xi) := \min_{a_i \neq 0} \frac{i}{d}. \quad (3.3.9)$$

Dada una serie $\xi \in K((x))$ y ord_x como en (3.3.9) se tiene que

$$\xi = x^{ord_x(\xi)} \bar{\xi} \quad (3.3.10)$$

donde $\bar{\xi} = x^{-ord_x(\xi)} \xi$ es una unidad de $K[[x]]$. El término $ax^{ord_x(\xi)}$ en la serie ξ se llama **término dominante**. El exponente del término dominante se llama **exponente dominante**.

Por el lema que presentamos a continuación concluimos que toda serie en \mathcal{S}_\preceq posee un término dominante.

Lema 3.3.5. Todo elemento $\varsigma \in \mathcal{S}_\preceq$ es de la forma $\varsigma = X^{\nu_\preceq(\varsigma)} u$, con $u \in \mathcal{A}_\preceq$ unidad.

Demostración. Sea $\varsigma = \sum a_\alpha X^\alpha \in \mathcal{S}_\preceq$. Para todo $\alpha \in Supp(\varsigma)$ se tiene que $\nu_\preceq(\varsigma) \preceq \alpha$, por lo que $\mathbf{0} \preceq \alpha - \nu_\preceq(\varsigma)$. Escribamos a ς como

$$\varsigma = \sum a_\alpha X^\alpha = X^{\nu_\preceq(\varsigma)} \left(\sum a_\alpha X^{\alpha - \nu_\preceq(\varsigma)} \right).$$

Sea $\phi := \sum a_\alpha X^{\alpha - \nu_\preceq(\varsigma)} = \sum b_\alpha X^\alpha$ donde $b_\alpha = a_{\alpha + \nu_\preceq(\varsigma)}$. Como $b_{(0, \dots, 0)} = a_{\nu_\preceq(\varsigma)} \neq 0$, tenemos que ϕ es una unidad, Proposición 3.3.2. \square

Proposición 3.3.6. Sea \preceq un orden total en \mathbb{R}^n . El anillo de valoración de \mathcal{S}_\preceq es \mathcal{A}_\preceq .

Demostración. Sea $\varsigma \in \mathcal{S}_\preceq$ tal que $\nu_\preceq(\varsigma) \succeq \mathbf{0}$. Por (3.3.7) existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $Supp(\varsigma) \subset \frac{1}{k} \mathbb{Z}^n$. Por el Lema 3.3.5, $\varsigma = X^{\nu_\preceq(\varsigma)} u$, con u unidad de \mathcal{A}_\preceq . Consideremos al cono $\sigma = \langle \nu_\preceq(\varsigma) \rangle$. Se tiene que σ es positivo para \preceq pues $\nu_\preceq(\varsigma) \succeq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $X^{\nu_\preceq(\varsigma)} \in K[[\sigma]]_k \subset \mathcal{A}_\preceq$. Dado que \mathcal{A}_\preceq es un anillo y

$u \in \mathcal{A}_{\preceq}$, entonces $X^{\nu_{\preceq}(X)}u \in \mathcal{A}_{\preceq}$. Ahora, sea $\varsigma \in \mathcal{A}_{\preceq}$, por (3.3.6) existen $\sigma \in \mathcal{C}_{\preceq}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{Supp}(\varsigma) \subset \sigma \cap \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n$. Dado que σ es \preceq -no negativo, entonces $\nu_{\preceq}(\varsigma) \succeq 0$. Teniéndose la igualdad. \square

Proposición 3.3.7. *Sea $\varphi \in K[[\sigma]]_k$. Se tiene que φ es unidad en $K[[\sigma]]_k$ si y sólo si para todo orden σ -positivo \preceq , se tiene que $\nu_{\preceq}(\varphi) = 0$.*

Demostración. El resultado es consecuencia directa de la Proposición 3.2.2 y del Lema 3.3.5. \square

Corolario 3.3.8. *Sea $\varphi \in K[[\sigma]]_k$. Se tiene que $\varphi = X^\alpha u$ con $\alpha \in \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n$ y $u \in K[[\sigma]]_k^*$ si y sólo si para todo orden σ -positivo \preceq , se tiene que $\nu_{\preceq}(\varphi) = \alpha$.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de la Proposición 3.3.7. \square

Proposición 3.3.9. *Sea \preceq un orden total positivo sobre \mathbb{R}^n y $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se tiene que $K_{\preceq}((X))_k = K_{\preceq}((X))\left[X^{\frac{1}{k}}\right]$.*

Demostración. Observemos que $K_{\preceq}((X))\left[X^{\frac{1}{k}}\right] \subset K_{\preceq}((X))_k$. A continuación probaremos la otra inclusión.

Sea $\varphi \in K_{\preceq}((X))_k$, con $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k}}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}} a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, k-1\}^n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i_j \equiv \alpha_j \pmod{k}}} a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, k-1\}^n} \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i_j \equiv \alpha_j \pmod{k}}} a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k} - \frac{(i_1, \dots, i_n)}{k}} \right) X^{\frac{(i_1, \dots, i_n)}{k}} \end{aligned}$$

Dado que $\alpha_j \equiv i_j \pmod{k}$, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $\frac{\alpha}{k} - \frac{(i_1, \dots, i_n)}{k} \equiv 0 \pmod{k}$. De donde obtenemos que $\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i_j \equiv \alpha_j \pmod{k}}} a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k} - \frac{(i_1, \dots, i_n)}{k}} \in K_{\preceq}((X))$. También,

dado que $\{(i_1, \dots, i_n) \mid \{1, \dots, k-1\}^n\}$ es un conjunto finito, se tiene que $\varphi \in K_{\preceq}((X))\left[X^{\frac{1}{k}}\right]$. \square

Sean η una raíz k -ésima primitiva de la unidad y $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \{0, \dots, k-1\}^n$. De manera natural se define el automorfismo de campos, $\tau_{\eta, \mu} : K_{\preceq}((X))_k \rightarrow K_{\preceq}((X))_k$, dado por

$$\tau_{\eta,\mu} : \varphi\left(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}\right) \mapsto \varphi\left(\eta^{\mu_1} x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, \eta^{\mu_n} x_n^{\frac{1}{k}}\right). \quad (3.3.11)$$

Observación 3.3.10. Con los automorfismos definidos en (3.3.11) se tiene que $\text{Supp}\left(\varphi\left(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}\right)\right) = \text{Supp}\left(\tau_{\eta,\mu}\left(\varphi\left(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}\right)\right)\right)$.

Observación 3.3.11. Aparicio demuestra que $K[[\sigma]]$ es un dominio entero [10, Teorema 11] dicha prueba puede adaptarse para el anillo $K[[\sigma]]_k$, con $k \in \mathbb{N}$, por lo que podemos aplicar el Criterio de Kaplansky [30, Corolario 3.4] para concluir que $K[[\sigma]]_k$ es un dominio de factorización única.

Lema 3.3.12. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass. Si $\xi \in S_{\preceq}$ es raíz de f , entonces $\xi \in \mathcal{A}_{\preceq}$. Más aún, ξ pertenece al ideal maximal de \mathcal{A}_{\preceq} .

Demostración. Dado que $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$, existen un cono σ positivo y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\xi \in K((\sigma))_k$. Por otro lado se tiene que $f \in K[[\sigma]]_k[y]$, por lo que existen $f_1, \dots, f_l \in K[[\sigma]]_k[y]$ irreducibles y $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $f = f_1^{a_1} \cdots f_l^{a_l}$. Sea f_i para el cual ξ es raíz. Dado que $K((\sigma))_k$ es el campo de fracciones de $K[[\sigma]]_k$ y f_i es irreducible en $K[[\sigma]]_k[y]$, entonces por el Lema de Gauss, ver A.0.2, $\xi \in K[[\sigma]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq}$.

Vamos a suponer que $\nu_{\preceq}(\xi) = \underline{0}$, por propiedades de la valoración, $\nu_{\preceq}(\xi^j) = j\nu_{\preceq}(\xi) = j\underline{0} = \underline{0}$.

Dado que $\text{mult}(a_i) > 0$, para todo i , entonces $\nu_{\preceq}(a_i) \succ \underline{0}$. Por otro lado, toda valoración satisface que $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$, con igualdad si $\nu(a) \neq \nu(b)$. Dado que $\xi^d + a_1\xi^{d-1} + \cdots + a_d = 0$, entonces $\nu_{\preceq}(\xi^d + a_1\xi^{d-1} + \cdots + a_d) = \nu_{\preceq}(0)$. Dado que $\nu_{\preceq}(a_i) \succ \underline{0}$ entonces $\nu_{\preceq}(\xi^d + a_1\xi^{d-1} + \cdots + a_d) = \underline{0}$. Sin embargo, $\underline{0} \neq \nu_{\preceq}(0)$. De manera que, $\nu_{\preceq}(\xi) \succ \underline{0}$, consecuentemente ξ pertenece al ideal maximal de \mathcal{A}_{\preceq} . □

Observación 3.3.13. El Lema 3.3.12 también funciona para polinomios $f(y) = y^d + a_1y^{d-1} + \cdots + a_d \in K[[X]][y]$ con la condición de que $\text{mult}(a_i) > 0$.

Lema 3.3.14. Sean \preceq un orden total positivo, $\varphi \in \mathcal{A}_{\preceq}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, σ un cono tal que $\varphi \in K[[\sigma]]_k$ y \preceq es σ -positivo. Si existe \preceq' un orden σ -positivo tal que $\nu_{\preceq}(\varphi) \neq \nu_{\preceq'}(\varphi)$ entonces φ no es unidad de $(K[[\sigma]]_k)_{x_1^{\frac{1}{k}} \cdots x_n^{\frac{1}{k}}}$.

Demostración. Sea \preceq' un orden σ -positivo tal que $\nu_{\preceq}(\varphi) \neq \nu_{\preceq'}(\varphi)$. Supongamos que $\varphi = X^\gamma u$, con $\gamma \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $u \in K[[\sigma]]_k$ unidad. Dado que \preceq y \preceq' son

σ -positivos, entonces $u \in K[[\sigma]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq}$ y $u \in K[[\sigma]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq'}$, en ambos anillos u es unidad, por lo que $\nu_{\preceq}(u) = 0$ y $\nu_{\preceq'}(u) = 0$, por lo tanto $\nu_{\preceq}(\varphi) = \gamma$ y $\nu_{\preceq'}(\varphi) = \gamma$, de donde obtenemos que $\nu_{\preceq}(\varphi) = \nu_{\preceq'}(\varphi)$, lo cual no es posible. Consecuentemente, φ no es unidad de $(K[[\sigma]]_k)_{x_1^{\frac{1}{k}} \cdots x_n^{\frac{1}{k}}}$. \square

Corolario 3.3.15. *Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass y \preceq un orden total positivo en \mathbb{R}^n . Sea σ un cono tal que \preceq es σ -positivo y $\xi_1, \xi_2 \in K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, son raíces de f . Si existe \preceq' un orden σ -positivo tal que $\nu_{\preceq}(\xi_1 - \xi_2) \neq \nu_{\preceq'}(\xi_1 - \xi_2)$, entonces $\xi_1 - \xi_2$ no es de la forma $X^\gamma u$, con $\gamma \in (\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n)$ y $u \in K[[\sigma]]_k$ unidad.*

Demostración. El resultado es consecuencia del Lema 3.3.14. \square

3.3.1. Conos ω -positivos y polinomios σ -libres

Sea $\omega \in \mathbb{R}^n$ un vector de coordenadas racionalmente independientes. Se dice que un cono σ en \mathbb{R}^n es ω -positivo si $\sigma \subset \langle \omega \rangle^\vee$. Un cono racional ω -positivo siempre es fuertemente convexo.

El Teorema de McDonald [36], que enunciamos a continuación, es un caso particular del Teorema de Aroca-Ilardi, Teorema 3.3.3.

Teorema 3.3.16. *[McDonald] Dado $\omega \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas racionalmente independientes, $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, existen $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, un cono racional σ el cual es ω -positivo y $\xi_1, \dots, \xi_d \in K[[\sigma]]_k$ tales que $f = \prod_{i=1}^d (y - \xi_i)$.*

Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio y σ un cono en \mathbb{R}^n . Se dice que f es un polinomio σ -libre si es irreducible como elemento de $K[[\sigma]][y]$ y tiene sus raíces en $K[[\sigma]]_k$, para algún k .

Abbas-Assi introducen este concepto en [11]. Y utilizan el Teorema de McDonald para encontrar raíces y así poder definir los monomios y exponentes característicos de un polinomio σ -libre.

Ejemplo. Por Jung-Abhyankar (Teorema 2.3.3) se tiene que cualquier polinomio casi ordinario irreducible es $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ -libre.

CAPÍTULO 4

\preceq -monomios y exponentes característicos asociados a un polinomio de Weierstrass

En este capítulo consideramos un polinomio arbitrario de Weierstrass irreducible $f \in K[[X]][[y]]$ y presentamos extensiones de Kummer $K_{\preceq}((X))_k/K_{\preceq}((X))$, en las cuales se encuentran todas sus raíces. Las raíces de f no pueden ser múltiples, lo que facilita el cálculo de las diferencias entre ellas y la definición de los \preceq -exponentes característicos asociados a f haciendo uso del Lema 3.3.5.

En el caso casiordinario, dimos dos definiciones equivalentes de exponente característico: Definición 2.4.2 y Teorema 2.4.9. Las extensiones de estas definiciones al caso que nos ocupa no son equivalentes. La extensión de la primera definición serán los \preceq -exponentes característicos asociados a f y la segunda serán los \preceq -exponentes asociados a un elemento de \mathcal{S}_{\preceq} .

Finalmente, extendemos dos resultados presentados por Tornero en [45] al caso de series de Puiseux. En el Lema 4.4.1, determinamos el grado de las extensiones de la forma $K_{\preceq}((X))[\xi]/K_{\preceq}((X))$, donde $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ es algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$, utilizando los \preceq -exponentes asociados a ξ . Por otro lado, en el Teorema 4.4.3, generalizamos el resultado de Tornero sobre los exponentes que él denomina *distinguidos* [45, Teorema, pág. 2].

Los resultados presentados en este capítulo son de nuestra autoría, con excepción de aquellos cuyas demostraciones se encuentran citadas en las referencias correspondientes.

A lo largo de este capítulo, K representará un campo algebraicamente cerrado de característica 0, \preceq un orden total positivo continuo en \mathbb{R}^n y $f \in K[[X]]$ un polinomio mónico irreducible de Weierstrass.

4.1. \preceq – monomios y exponentes característicos asociados a un polinomio de Weierstrass

Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio mónico de Weierstrass irreducible de grado d , \preceq un orden total positivo y $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{A}_{\preceq}$ las raíces de f . Por definición, el campo de factorización de f es $K((X))[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Dado que $f \in K((X))[y]$ es irreducible y $K((X))$ es un campo de característica 0, entonces $\xi_i \neq \xi_j$, para todo $i \neq j$, ver A.0.1.

Ya estamos en posición de extender a singularidades generales la definición de exponente característico dada para singularidades casiordinarias en la Definición 2.4.2.

Definición 4.1.1. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio mónico irreducible de Weierstrass y \preceq un orden total positivo continuo sobre \mathbb{R}^n . Se dice que M es un \preceq -**monomio característico** de f si existen $\xi, \xi' \in \mathcal{A}_{\preceq}$, raíces de f , tales que $\xi - \xi' = Mu$, con u unidad en \mathcal{A}_{\preceq} . El conjunto $\{\alpha : x^\alpha \text{ es un } \preceq\text{-monomio característico de } f\}$, es el conjunto de \preceq -**exponentes característicos** de f .

Usaremos la notación $\preceq\text{-char}(f)$ para denotar al conjunto de los \preceq – exponentes característicos de f .

Ejemplo. Sean $f(y) = y^2 - (x_1^2 + x_2^2) \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 15, y $\sigma = \langle (0, 1), (1, -1) \rangle$. Con ayuda del binomio de Newton podemos calcular las raíces de f en $K[[\sigma]]$, las cuales son $\xi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i}$, $\xi_2 = -\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i} \in K[[\sigma]]$, donde $\mu = \frac{1}{2}$.

Sean $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y \leq_ω un orden total en \mathbb{R}^2 que extiende al orden total \leq_ω en \mathbb{Q}^2 .

Tenemos que $\xi_1 - \xi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i} = X^{(0,1)} u$, tal que $u \in \mathcal{A}_{\leq_\omega}$, es una unidad. Por lo tanto $(0, 1)$ es el \leq_ω – exponente característico de f .

Ejemplo. Consideremos $f(y) = y^5 + x_1^2 x_2^2 y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 10, y $\omega = (1, \sqrt{5})$. En el campo $K_{\leq_\omega}((x_1, x_2))_6$ podemos hallar a las raíces de f las cuales son:

$$\xi_1 = -x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} x_1^{-\frac{8}{3}} x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-6} x_2^4 - \frac{44}{81} x_1^{-\frac{28}{3}} x_2^{\frac{17}{3}} + \dots$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2i}{3i + 3\sqrt{3}} x_1^{-\frac{8}{3}} x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-6} x_2^4 - \frac{-44i + 44\sqrt{3}}{81i + 81\sqrt{3}} x_1^{-\frac{28}{3}} x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_3 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{2i}{-3i + 3\sqrt{3}} x_1^{-\frac{8}{3}} x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-6} x_2^4 - \frac{44i + 44\sqrt{3}}{-81i + 81\sqrt{3}} x_1^{-\frac{28}{3}} x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_4 &= -ix_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-6} x_2^4 + \frac{9i}{8} x_1^{11} x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2} x_1^{-16} x_2^9 + \dots \\ \xi_5 &= ix_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-6} x_2^4 - \frac{9i}{8} x_1^{11} x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2} x_1^{-16} x_2^9 + \dots\end{aligned}$$

Calculando las diferencias entre las raíces obtenemos

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_1 & \xi_2 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_6 \\ \xi_1 - \xi_3 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_2 & \xi_2 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_7 \\ \xi_2 - \xi_3 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_3 & \xi_3 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_8 \\ \xi_1 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_4 & \xi_3 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_9 \\ \xi_1 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_5 & \xi_4 - \xi_5 &= x_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}} u_{10}\end{aligned}$$

Obteniendo que $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y $(-1, \frac{3}{2})$ son los \leq_ω -exponentes característicos de f .

El siguiente ejemplo muestra que para distintos órdenes podemos obtener los mismos exponentes pero ordenados de distinta manera.

Ejemplo. Sea $f(y) = (y^2 - x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 13, el cual no es casi ordinario pero sí de Puiseux. Las raíces de f son $\pm x_1^{\frac{1}{2}} \pm x_2^{\frac{1}{2}}$. Si consideramos $\xi_1 = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$, $\xi_2 = -x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}$, $\xi_3 = -x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$ y $\xi_4 = x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}$ entonces

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 &= 2x_1^{\frac{1}{2}} + 2x_2^{\frac{1}{2}} \\ \xi_1 - \xi_3 &= 2x_1^{\frac{1}{2}} \\ \xi_1 - \xi_4 &= 2x_2^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Llamemos $\lambda_1 := (0, \frac{1}{2})$ y $\lambda_2 := (\frac{1}{2}, 0)$.

Consideremos $\omega_1 = (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\lambda_1 \leq_{\omega_1} \lambda_2$. Además $\xi_1 - \xi_2 = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 2x_2^{\frac{1}{2}} = x_2^{\frac{1}{2}}(2 + 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}})$, en donde $2 + 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}$ es una unidad en $A_{\leq_{\omega_1}}$, por la Proposición 3.3.2. Por lo que, los \leq_{ω_1} -exponentes característicos de f son $(0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

Ahora bien, consideremos $\omega_2 = (1, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$. En este caso, $\lambda_2 \leq_{\omega_2} \lambda_1$ y $\xi_1 - \xi_2 = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 2x_2^{\frac{1}{2}} = x_1^{\frac{1}{2}}(2 + 2x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})$, en donde $2 + 2x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ es una unidad en $A_{\leq_{\omega_2}}$, por la

Proposición 3.3.2. Por lo que, los \leq_{ω_2} -exponentes característicos de f también son $(0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 0)$, con distinto orden.

Ejemplo. Sea $f(y) = y^2 + x_1y - x_1^3 - x_2 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 14. Si $\omega = (1, \pi)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^2 + x_1^{-1}x_2 - x_1^3 - 2x_2 - x_1^{-3}x_2^2 + 6x_1x_2 + 6x_1^{-2}x_2^{-2} + \dots, \\ \xi_2 &= -x_1 - x_1^2 + x_1^3 - 2x_1^4 + 5x_1^5 + 2x_2 - x_2x_1^{-1} - 6x_1x_2 + 20x_1^2x_2 + x_2^2x_1^{-3} - \\ &\quad 6x_2^2x_1^{-2} - 2x_2^3x_1^{-5} + \dots\end{aligned}$$

son las raíces de f .

Calculando la diferencia entre las raíces obtenemos:

$$\xi_1 - \xi_2 = x_1 - 2x_1^2 - x_1^3 + 4x_2 + 2x_1^{-1}x_2 + \dots = x_1u, \quad (4.1.2)$$

con u unidad en $A_{\leq \omega}$. El \leq_{ω} -exponente característico de f es $(1, 0)$.

Lema 4.1.2. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono positivo tal que las raíces de f pertenecen a $K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si para todo par \preceq, \preceq' de órdenes σ -positivos, $\preceq -\text{char}(f) = \preceq' -\text{char}(f)$ ordenados de la misma forma, entonces $\xi_1 - \xi_2$ es unidad en el anillo $(K[[\sigma]]_k)_{x_1^{\frac{1}{k}} \dots x_n^{\frac{1}{k}}}$ para todo par de raíces ξ_1 y ξ_2 de f .

Demostración. Sean \preceq, \preceq' dos órdenes σ -positivos tales que $\preceq -\text{char}(f) = \preceq' -\text{char}(f)$.

Sean ξ_1, ξ_2 dos raíces de f . Por hipótesis $\text{Supp}(\xi_1), \text{Supp}(\xi_2) \subset \sigma$, de manera que $\text{Supp}(\xi_1 - \xi_2) \subset \sigma$, por Observación 3.3.1. Sean $\beta_1 := \min_{\preceq} \text{Supp}(\xi_1 - \xi_2)$ y $\beta_2 := \min_{\preceq'} \text{Supp}(\xi_1 - \xi_2)$, se tiene que $\beta_1, \beta_2 \in \text{Supp}(\xi_1 - \xi_2)$. Por lo que $\beta_1 \preceq \beta_2$ y $\beta_2 \preceq' \beta_1$.

Dado que $\preceq -\text{char}(f) = \preceq' -\text{char}(f)$ y son ordenados de la misma forma, entonces $\beta_1 = \beta_2$.

Por transitividad se tiene que para cualquier otro orden \preceq'' que sea σ -positivo, la valoración $\nu_{\preceq''}(\xi_1 - \xi_2)$ es la misma. Usando el Corolario 3.3.8 concluimos la demostración. \square

4.2. \preceq -exponentes asociados a un elemento de

\mathcal{S}_{\preceq}

En esta sección extendemos a elementos de \mathcal{S}_{\preceq} la definición de exponente característico enunciada en el Teorema 2.4.9 para raíces casi ordinarias.

Para todo $\varsigma \in \mathcal{S}_{\preceq}$, existen $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ y σ un cono \preceq -no negativo, tales que $Supp(\varsigma) \subset (\gamma + \sigma) \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. De manera que, existe el conjunto $\{\lambda^{(i)}\} \subset (\gamma + \sigma) \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$, dado por

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \underset{\preceq}{\text{mín}}\{Supp(\varsigma) \setminus \mathbb{Z}^n\} \\ \lambda^{(2)} &= \underset{\preceq}{\text{mín}}\{Supp(\varsigma) \setminus (\mathbb{Z}^n + \lambda^{(1)}\mathbb{Z})\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \lambda^{(i)} &= \underset{\preceq}{\text{mín}}\{Supp(\varsigma) \setminus (\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda^{(j)}\mathbb{Z})\}. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Notemos que el conjunto $\{\lambda^{(i)}\}$ tiene a lo más k^n elementos, pues el hipercubo $[0, 1]^n$ tiene a lo más k^n elementos de la forma $(\frac{a_1}{k}, \dots, \frac{a_n}{k})$ y cualquier otro elemento $(\frac{b_1}{k}, \dots, \frac{b_n}{k})$ puede ser generado por algún $(\frac{a_1}{k}, \dots, \frac{a_n}{k})$. El conjunto $\{\lambda^{(i)}\}$ también puede ser vacío.

Si $f \in K[[X]][[y]]$ es un polinomio de Weierstrass y $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ raíz de f . Existe un conjunto $\{\lambda^{(i)}\}$ asociado a ξ como en (4.2.1).

Definición 4.2.1. Sean \preceq un orden positivo y $\varsigma \in \mathcal{S}_{\preceq}$. Definimos los \preceq -**exponentes asociados a ς** como en (4.2.1). Cuando $\{\lambda^{(i)}\}$ es vacío, diremos que ς no posee \preceq -exponentes asociados.

Ejemplo. Consideremos

$$\xi_1 = x_1^2 + x_1^{-1}x_2 - x_1^3 - 2x_2 - x_1^{-3}x_2^2 + 6x_1x_2 + 6x_1^{-2}x_2^{-2} + \dots,$$

y

$$\xi_2 = -x_1 - x_1^2 + x_1^3 - 2x_1^4 + 5x_1^5 + 2x_2 - x_2x_1^{-1} - 6x_1x_2 + 20x_1^2x_2 + x_2^2x_1^{-3} + \dots,$$

como en el Ejemplo 14. Dado que $Supp(\xi_1), Supp(\xi_2) \subset \mathbb{Z}^2$, ξ_1 y ξ_2 no poseen \preceq -exponentes asociados. Concluyendo que las definiciones que eran equivalentes en el caso casiordinario ya dejan de serlo (es decir la Definición 2.4.2 y Teorema 2.4.9) para singularidades más generales.

Ejemplo. Sea $\xi = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$, la cual es raíz del polinomio $f \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 13.

Sea $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y el orden \leq_ω . Los \leq_ω -exponentes asociados a ξ son $\lambda^{(1)} = \min_{\leq_\omega} Supp(\xi) \setminus \mathbb{Z}^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\lambda^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Si $f \in K[[X]][y]$ es un polinomio irreducible pero es reducible como elemento de $K_{\preceq}((X))[y]$ no siempre sucede que el conjunto de los \preceq -exponentes asociados a una raíz ξ de f coincide con el conjunto de los \preceq -exponentes característicos de f . Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sean $f(y) = y^2 - (x_1^2 + x_2^2) \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 15 y $\xi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i}$, $\xi_2 = -\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i} \in \mathcal{S}_{\leq_\omega}$, con $\mu = \frac{1}{2}$, sus raíces. El conjunto de \leq_ω -exponentes asociados a ξ_1 es vacío, pues $Supp(\xi_1) \subset \mathbb{Z}^2$.

4.3. El grupo de Galois de la extensión

El campo $K_{\preceq}((X))_k = K_{\preceq}((X))[X^{\frac{1}{k}}]$ es una extensión finita de Galois de $K_{\preceq}((X))$, pues es campo de factorización del polinomio $(y^k - x_1)(y^k - x_2) \cdots (y^k - x_n)$, el cual es separable. Más precisamente, se tiene que $K_{\preceq}((X))_k/K_{\preceq}((X))$ es una extensión de Kummer.

Dado que $x_1^{\frac{1}{k}}$ es un elemento algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$, entonces $K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}] = K_{\preceq}((X))(x_1^{\frac{1}{k}})$, ver A.0.3.

De la misma forma dado que $x_i^{\frac{1}{k}}$ es algebraico sobre $K_{\preceq}((X))(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}})$, entonces $K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}, x_i^{\frac{1}{k}}] = K_{\preceq}((X))(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}, x_i^{\frac{1}{k}})$, por lo que, obtenemos la siguiente torre de campos:

$$\begin{aligned}
K_{\preceq}((X)) &\subset K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}] \\
&\subset K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, x_2^{\frac{1}{k}}] \subset \cdots \\
&\subset K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{n-1}^{\frac{1}{k}}] \\
&\subset K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}] \\
&= K_{\preceq}((X))_k.
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
[K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))] &= [K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{n-1}^{\frac{1}{k}}]] \\
&\cdots [K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}] : K_{\preceq}((X))].
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Dado que $x_i^{\frac{1}{k}}$ es algebraico sobre $K_{\preceq}((X))(x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}})$ y $y^k - x_i$ es su polinomio mínimo, entonces

$$[K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}, x_i^{\frac{1}{k}}] : K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}]] = k, \tag{4.3.3}$$

ver A.0.3. De manera que, por (4.3.2), obtenemos

$$[K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))] = k^n.$$

El grupo de Galois de la extensión $K_{\preceq}((X))_k/K_{\preceq}((X))$ tiene orden k^n , esto se obtiene de (4.3.1) y (4.3.3).

Se tiene que

$$Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}]) \subset Gal(K_{\preceq}((X))_k / K_{\preceq}((X))). \tag{4.3.4}$$

Si $\vartheta \in Gal(K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_i^{\frac{1}{k}}] : K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}])$, por (4.3.4) y A.0.4, existe $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, tal que $\tau|_{K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_i^{\frac{1}{k}}]} = \vartheta$.

Sea η una raíz primitiva k -ésima de la unidad, entonces $x_i^{\frac{1}{k}}, \eta x_i^{\frac{1}{k}}, \dots, \eta^{k-1} x_i^{\frac{1}{k}}$ son las raíces de $y^k - x_i$. Dado que ϑ es un automorfismo de $K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_i^{\frac{1}{k}}]$ que deja fijo a $K_{\preceq}((X))[x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_{i-1}^{\frac{1}{k}}]$, entonces $\vartheta(\xi_i^{\frac{1}{k}})$ también es raíz de $y^k - x_i$, por lo que $\vartheta(x_i^{\frac{1}{k}}) = \eta^l x_i^{\frac{1}{k}}$, para algún $l \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, en particular, $\tau(x_i^{\frac{1}{k}}) = \eta^l x_i^{\frac{1}{k}}$, para algún $l \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Puesto que las imágenes de

$x_1^{\frac{1}{k}}, x_2^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}$ bajo $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ determinan completamente a τ , concluimos que los automorfismos $\tau_{\eta, \mu}$ definidos a continuación son elementos del grupo de Galois de la extensión.

Lema 4.3.1. *Sea η una raíz k -ésima primitiva de la unidad. El grupo de Galois de la extensión $K_{\preceq}((X))_k$ sobre el campo $K_{\preceq}((X))$ es*

$$\text{Gal}\left(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))\right) = \left\{ \tau_{\eta, \mu} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \{0, 1, \dots, k-1\}^n \right\} \quad (4.3.5)$$

en donde $\tau_{\eta, \mu}$ se define como en (3.3.11).

Demostración. Dado que $\text{Gal}\left(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))\right)$ tiene k^n elementos, es suficiente probar que si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{0, \dots, k-1\}^n$ son distintos, entonces $\tau_{\eta, \mu}$ y $\tau_{\eta, \lambda}$ también lo son.

Supongamos lo contrario. Entonces, $\tau_{\eta, \mu}(x_i^{\frac{1}{k}}) = \tau_{\eta, \lambda}(x_i^{\frac{1}{k}})$, para toda i . Por lo que $\eta^{\mu_i} x_i^{\frac{1}{k}} = \eta^{\lambda_i} x_i^{\frac{1}{k}}$, lo cual solo ocurre si $\mu_i \equiv \lambda_i \pmod{k}$. Puesto que $\lambda_i, \mu_i \in \{0, \dots, k-1\}$, entonces $\mu_i = \lambda_i$ para toda i , por lo tanto $\mu = \lambda$, lo cual no puede ser posible.

De manera que, existe al menos un i tal que $\tau_{\eta, \mu}(x_i^{\frac{1}{k}}) \neq \tau_{\eta, \lambda}(x_i^{\frac{1}{k}})$ y consecuentemente $\tau_{\eta, \mu} \neq \tau_{\eta, \lambda}$.

□

Observación 4.3.2. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible y sean M_1, \dots, M_g los \preceq -monomios característicos de f . Sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que las raíces de f pertenecen a $K_{\preceq}((X))_k$ y sea G el grupo de Galois de $K_{\preceq}((X))_k$ sobre $K_{\preceq}((X))$. Dada ξ una raíz de f , definimos $G_{0, \xi} := \{\varphi \in G \mid \varphi(\xi) - \xi = 0\}$ y para $i = 1, \dots, g$ definimos $G_{i, \xi} := \{\varphi \in G \mid \xi - \varphi(\xi) = M_i u, \text{ con } u \text{ unidad en } \mathcal{A}_{\preceq}\}$. Si $\tau \in G$, entonces $\tau(\xi) = \xi$ o $\tau(\xi) \neq \xi$. Si $\tau(\xi) = \xi$, entonces $\tau \in G_{0, \xi}$. Si $\tau(\xi) \neq \xi$, como ξ es raíz de f , $\tau(\xi)$ también es una raíz de f pues $f(\tau(\xi)) = \tau(f(\xi))$, entonces $\xi - \tau(\xi) = M_i u$, con $u \in \mathcal{A}_{\preceq}$ unidad y para algún $i \in \{1, \dots, g\}$, por el Lema 3.3.5, así $\tau \in G_{i, \xi}$. Por lo tanto, $G = \bigcup G_{i, \xi}$, siendo una unión disjunta.*

Observación 4.3.3. *Sea $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ y $\varphi \in K_{\preceq}((X))_k$, por el Lema 4.3.1 y la Observación 3.3.10 se tiene que $\text{Supp}(\varphi) = \text{Supp}(\tau(\varphi))$. En particular $\nu_{\preceq}(\varphi) = \nu_{\preceq}(\tau(\varphi))$ y en consecuencia τ es un automorfismo de campos valorados.*

Proposición 4.3.4. *Sea $f \in K_{\preceq}[[X]][y]$ un polinomio mónico irreducible. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que las raíces de f , ξ_1, \dots, ξ_d , pertenecen a $K_{\preceq}((X))_k$. Para todo $\{i, j\} \subset \{1, \dots, d\}$, existe $\vartheta \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\vartheta(\xi_i) = \xi_j$.*

Demostración. Puesto que $f \in K_{\preceq}[[X]][y]$ es irreducible por el Lema de Gauss, ver A.0.2, también lo es en $K_{\preceq}((X))[y]$. Sea $L := K_{\preceq}((X))[\xi_1, \dots, \xi_d] \subset K_{\preceq}((X))_k$, al ser L el campo de factorización de f , $L \setminus K_{\preceq}((X))$ es una extensión finita de Galois, ver A.0.6.

El grupo de Galois del campo de factorización de un polinomio irreducible actúa transitivamente sobre sus raíces, ver A.0.7, por lo que existe $\tau \in \text{Gal}(L : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\tau(\xi_i) = \xi_j$.

Por otro lado, dado que $K_{\preceq}((X)) \subset L \subset K_{\preceq}((X))_k$, con $L/K_{\preceq}((X))$ una extensión de Galois, entonces para cada elemento $\tau \in \text{Gal}(L : K_{\preceq}((X)))$, existe un elemento $\vartheta \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\tau = \vartheta|_L$, ver A.0.4.

$$\begin{array}{ccccc} K_{\preceq}((X)) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K_{\preceq}((X))_k \\ \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \vartheta \\ K_{\preceq}((X)) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K_{\preceq}((X))_k \end{array} \quad (4.3.6)$$

De manera que $\vartheta(\xi_i) = \tau(\xi_i) = \xi_j$. □

4.4. Extensión de dos resultados de Tornero

Sea $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$. Sean $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ los \preceq -exponentes asociados a ξ , como en (4.2.1). Sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)} \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. Escribamos a $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ como $\lambda^{(1)} = \left(\frac{j_1^{(1)}}{k}, \dots, \frac{j_n^{(1)}}{k}\right), \dots, \lambda^{(g)} = \left(\frac{j_1^{(g)}}{k}, \dots, \frac{j_n^{(g)}}{k}\right)$. Definamos la matriz M :

$$M := \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & k\left(\frac{j_1^{(1)}}{k}\right) & k\left(\frac{j_1^{(2)}}{k}\right) & \cdots & k\left(\frac{j_1^{(g)}}{k}\right) \\ 0 & k & \cdots & 0 & k\left(\frac{j_2^{(1)}}{k}\right) & k\left(\frac{j_2^{(2)}}{k}\right) & \cdots & k\left(\frac{j_2^{(g)}}{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & k\left(\frac{j_i^{(1)}}{k}\right) & k\left(\frac{j_i^{(2)}}{k}\right) & \cdots & k\left(\frac{j_i^{(g)}}{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & k\left(\frac{j_n^{(1)}}{k}\right) & k\left(\frac{j_n^{(2)}}{k}\right) & \cdots & k\left(\frac{j_n^{(g)}}{k}\right) \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

La parte izquierda de M es una matriz unidad $n \times n$ multiplicada por k . La parte

derecha de M consiste de g vectores columna $k\lambda^{(1)}, k\lambda^{(2)}, \dots, k\lambda^{(g)}$. La matriz M es de $(n) \times (n + g)$.

Las técnicas de la siguiente demostración se obtuvieron de [45], para el caso de hipersuperficies de Puiseux.

Lema 4.4.1. *Sea $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$. Sean $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ los \preceq -exponentes asociados a ξ , como en (4.2.1). Sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)} \in \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^n$. Entonces $[K_{\preceq}((X))[\xi] : K_{\preceq}((X))] = \frac{k^n}{d}$, en donde d es el máximo común divisor de los menores de orden n de la matriz M .*

Demostración. Sean $\lambda^{(1)} = \left(\frac{j_1^{(1)}}{k}, \dots, \frac{j_n^{(1)}}{k}\right), \dots, \lambda^{(g)} = \left(\frac{j_1^{(g)}}{k}, \dots, \frac{j_n^{(g)}}{k}\right)$ los exponentes asociados a ξ y $G_1 := \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$. Sean M_1, \dots, M_g , con $M_i = X^{\lambda^{(i)}}$, para todo $i = 1, \dots, g$ y $G := \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$. Se tiene que $G \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^n$, por el Lema 4.3.1.

Definamos $H := \{\overline{i} = \overline{(i_1, \dots, i_n)} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^n \mid X^{\frac{i}{k}} \in K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]\}$.

Se tiene que

$$\overline{i} = \overline{(i_1, \dots, i_n)} \in H \text{ si y sólo si } \sum_{j=1}^n a_j i_j = 0 \pmod{k} \text{ para todo } \overline{(a_1, \dots, a_n)} \in G. \quad (4.4.2)$$

Notemos que $H = \left\langle \overline{(j_1^{(1)}, \dots, j_n^{(1)})}, \dots, \overline{(j_1^{(g)}, \dots, j_n^{(g)})} \right\rangle$, de modo que H es un subgrupo de $G \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^n$.

Por [45, Proposición, pág. 4], se tiene que $H \cong \text{Hom}\left(\frac{G}{G_1}, \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)$, a través del isomorfismo φ dado por $(i_1, \dots, i_n) \mapsto \varphi_{(i_1, \dots, i_n)}$, en donde $\varphi_{(i_1, \dots, i_n)}((t_1, \dots, t_n) + G_1) = \sum_{j=1}^n t_j i_j$.

Puesto que $G \cong C_k^n$, en donde C_k es el grupo cíclico de orden k , por tener cocientes de grupos cíclicos se tiene que $\frac{G}{G_1} \cong C_{a_1} \oplus \dots \oplus C_{a_q}$, en donde a_j divide a k para todo $j = 1, \dots, q$. De manera que

$$H \cong \text{Hom}\left(\frac{G}{G_1}\right) \cong \bigoplus_{j=1}^q \text{Hom}\left(C_{a_j}, \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right) = \bigoplus_{j=1}^q C_{a_j} \cong \frac{G}{G_1}. \quad (4.4.3)$$

Por (4.4.3) se tiene que $\left|\frac{G}{G_1}\right|$ es $|H|$ y por lo tanto $|G_1| = \left|\frac{G}{H}\right|$.

Puesto que $|G_1| = [K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi]]$, debemos calcular $\left|\frac{G}{H}\right|$.

Se tiene que $\frac{G}{H} \cong \frac{\mathbb{Z}^n}{\overline{H}}$, en donde

$$\overline{H} = \left\langle \overline{(k, 0, \dots, 0)}, \dots, \overline{(0, 0, \dots, k)}, \overline{(j_1^{(1)}, \dots, j_n^{(1)})}, \dots, \overline{(j_1^{(g)}, \dots, j_n^{(g)})} \right\rangle.$$

Sea $\varphi \in \text{Hom}\left(\mathbb{Z}^n, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$, con \overline{H} isomorfo a un subgrupo de $\ker(\varphi)$ y $\overline{\varphi}$ sobre $\frac{\mathbb{Z}^n}{\overline{H}}$.

Se puede justificar que $\frac{\mathbb{Z}^n}{\overline{H}} \cong \text{Hom}\left(\frac{\mathbb{Z}^n}{\overline{H}}, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$.

Sea $\alpha_j = \overline{\varphi}(e_j + \overline{H})$, en donde e_j es el j -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{Z}^n . Se tiene que $\overline{H} \subset \ker(\varphi)$ o equivalentemente

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot M = (0, \dots, 0). \quad (4.4.4)$$

Por [45], existen transformaciones lineales L_1, \dots, L_n tales que

$$(L_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, L_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0). \quad (4.4.5)$$

En donde $\eta_1 = (1)\text{mcd}(M) = 1$, $\eta_1 \cdots \eta_n = (n)\text{mcd}(M)$ y $(i)\text{mcd}(M)$ es el máximo común divisor de los menores de orden i de la matriz M . Puesto que lo anterior se debe cumplir en $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, entonces podemos notar que existen exactamente $(n)\text{mcd}(M)$ morfismos distintos en $\text{Hom}\left(\frac{\mathbb{Z}^n}{\overline{H}}, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$, por lo tanto $|G_1| = \frac{k^n}{|H_1|} = \frac{k^n}{\frac{k^n}{(n)\text{mcd}(M)}} = (n)\text{mcd}(M)$.

De donde obtenemos que $[K_{\preceq}((X))[\xi] : K_{\preceq}((X))] = \frac{k^n}{(n)\text{mcd}(M)}$. □

Observación 4.4.2. Recordemos que $K_{\preceq}((X))_k$ es un extensión finita de Galois de $K_{\preceq}((X))$. Sean $f \in K_{\preceq}[[X]][y]$ irreducible, con $\xi \in K_{\preceq}((X))_k$ raíz de f , $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ los \preceq -exponentes asociados de ξ , como en (4.2.1) y M_1, \dots, M_g , con $M_i = X^{\lambda^{(i)}}$ para todo $i = 1, \dots, g$. Se tiene que M_i es algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$, para todo $i = 1, \dots, g$, pues es raíz de $y^k - M_i^k$, entonces las extensiones $K_{\preceq}((X))_k/K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]$ y $K_{\preceq}((X))_k/K_{\preceq}((X))[\xi]$ son de Galois, ver por ejemplo [29, Teorema 1.2, página 262]. De manera que, los campos fijos de $\text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$ y $\text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g])$, son $K_{\preceq}((X))[\xi]$ y $K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]$, respectivamente, ver por ejemplo [29, Teorema 1.2, página 262].

El siguiente teorema generaliza el Teorema de Tornero [45, Teorema, pág. 2], en el caso de series de Puiseux.

Teorema 4.4.3. *Sea $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ algebraico sobre $K_{\preceq}((X))$. Sean $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ los \preceq -exponentes asociados a ξ . Entonces $K_{\preceq}((X))[\xi] = K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]$, con $M_i = X^{\lambda^{(i)}}$ para todo $i = 1, \dots, g$.*

Demostración. Existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\xi \in K_{\preceq}((X))_k$. Como en la Observación 4.4.2, si demostramos que $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]) = Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$, obtendríamos $K_{\preceq}((X))[\xi] = K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]$.

Se tiene que $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]) \subset Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$.

A continuación vamos a demostrar que $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]) \subseteq Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$.

Sean $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g])$ y $\lambda \in Supp(\xi)$, por definición se tiene que

$$\lambda \in \mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^g \mathbb{Z}\lambda^{(j)}. \quad (4.4.6)$$

De manera que $\tau(\xi) = \xi$. Por lo tanto, $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$. En consecuencia, $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]) \subset Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$.

Recíprocamente, sea $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi])$, entonces $\tau(\xi) = \xi$. Se tiene que $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi]) \subset Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$.

A continuación vamos a demostrar que $Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[\xi]) \subseteq Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g])$.

Dado que $\lambda^{(i)} \in Supp(\xi)$ y $M_i = X^{\lambda^{(i)}}$, entonces $\tau(M_i) = M_i$, por Observación 3.3.10, para todo $i = 1, \dots, g$, por lo tanto, $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g] : K_{\preceq}((X)))$. En consecuencia $Gal(K_{\preceq}((X)) : K_{\preceq}((X))[\xi]) \subset Gal(K_{\preceq}((X)) : K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g])$.

□

Observación 4.4.4. *Los exponentes $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)}$ que satisfacen las condiciones del Teorema 4.4.3, Tornero en [45] los llama exponentes distinguidos.*

CAPÍTULO 5

\preceq -ramas

Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible casi ordinario, entonces f también es irreducible en $K_{\preceq}[[X]][y]$ para cualquier orden \preceq . Sin embargo, si f es un polinomio arbitrario irreducible, no siempre es irreducible en el anillo $K_{\preceq}[[X]][y]$, lo que motiva la introducción del concepto de \preceq -rama, un concepto que extiende la definición de σ -rama que Aroca define en [6], para el caso complejo y para conos σ que contienen a conos asociados a los vértices del polígono de Newton del discriminante, dichos conos se definirán en el capítulo 6, permitiendo agrupar las raíces de f . Si $f \in K[[X]][y]$ es irreducible en el anillo $K_{\preceq}[[X]][y]$, lo denominamos \preceq -libre, extendiendo así el concepto propuesto por Assi-Abbas como σ -libre, ver Sección 3.3.1. En particular, un polinomio casi ordinario irreducible es \preceq -libre para cualquier orden \preceq y un polinomio σ -libre es \preceq -libre para cualquier orden σ -positivo.

Agrupamos las raíces de un polinomio irreducible de $K[[X]][y]$ en \preceq -ramas de forma que todas las raíces de una \preceq -rama tengan el mismo conjunto de exponentes característicos.

Todos los resultados y definiciones que presentamos en este capítulo son de nuestra autoría.

A lo largo de este capítulo \preceq denotará un orden total positivo continuo y $f \in K[[X]][y]$ un polinomio mónico irreducible de Weierstrass, de grado d .

5.1. Polinomios \preceq -libres y \preceq -ramas

Definición 5.1.1. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass. Diremos que f es un **polinomio \preceq -libre** si es irreducible como elemento de $K_{\preceq}((X))[y]$.

Ejemplo. Sea $f(z) = z^2 - (x+y^2) \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 11. Tomando el orden $\omega_1 = (\sqrt{2}, 1)$, las raíces de f son

$$\xi_1 = -x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^2 + \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^4 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^6 + \frac{5}{128}x^{-\frac{7}{2}}y^8 + \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}y^{10} + \dots$$

y

$$\xi_2 = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^2 - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^4 - \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^6 - \frac{5}{128}x^{-\frac{7}{2}}y^8 - \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}y^{10} + \dots$$

Tomando el orden $\omega_2 = (4, \sqrt{2})$ se tiene que las raíces de f son:

$$\xi' = \frac{7i}{256}x^5y^{-9} + \frac{5i}{128}x^4y^{-7} + \frac{i}{16}x^3y^{-5} + \frac{i}{8}x^2y^{-3} + \frac{i}{2}xy^{-1} - iy$$

y

$$\xi'' = \frac{7i}{256}x^5y^{-9} - \frac{5i}{128}x^4y^{-7} - \frac{i}{16}x^3y^{-5} - \frac{i}{8}x^2y^{-3} - \frac{i}{2}xy^{-1} + iy.$$

De manera que f es \leq_{ω_1} -libre, pues en caso de ser reducible, f tendría que factorizarse como producto de dos polinomios de grado 1, a saber, $y - \xi_1$ y $y - \xi_2$, sin embargo, $y - \xi_1, y - \xi_2 \notin K_{\leq_{\omega_1}}((x_1, x_2))[y]$. Por otro lado f no es \leq_{ω_2} -libre, pues f se factoriza como $(y - \xi')(y - \xi'')$, donde $y - \xi', y - \xi'' \in K_{\leq_{\omega_2}}((x_1, x_2))[y]$.

Definición 5.1.2. Sean $f \in K[[X]][y]$ y sean $f_1, \dots, f_l \in K_{\preceq}[[X]][y]$ irreducibles (como elementos del anillo $K_{\preceq}[[X]][y]$) tales que $f = f_1^{a_1} \dots f_l^{a_l}$, con $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}_{>0}$. Cada conjunto de las raíces de un polinomio f_i lo llamaremos \preceq -rama de f .

Ejemplo. Consideremos $f(z) = z^2 - (x + y^2) \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 11, el polinomio f tiene una \leq_{ω_1} -rama ya que es \leq_{ω_1} -libre y dos \leq_{ω_2} -ramas, pues f es producto de dos polinomios irreducibles en $K_{\leq_{\omega_2}}((x_1, x_2))[y]$.

Observación 5.1.3. El polinomio $f \in K[[X]][y]$ es \preceq -libre si y sólo si tiene una única \preceq -rama.

Como consecuencia de A.0.1, si $f \in K[[X]][y]$ es irreducible, entonces los a_i de la Definición 5.1.2 son todos iguales a 1 y las \preceq -ramas son disjuntas.

Observación 5.1.4. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass. Sea σ un cono positivo y $k \in \mathbb{N}$ tales que las raíces de f , ξ_1, \dots, ξ_d pertenecen al anillo $K[[\sigma]]_k$. Para todo orden total positivo continuo \preceq en \mathbb{R}^n el cual es σ -positivo, las \preceq -ramas de f son las mismas.

Lema 5.1.5. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio mónico e irreducible (como elemento del anillo $K[[X]][y]$) y $f_1, \dots, f_l \in K_{\preceq}[[X]][y]$ irreducibles (como elementos del anillo $K_{\preceq}[[X]][y]$) tales que $f = f_1 \cdots f_l$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que las raíces de f , ξ_1, \dots, ξ_d , pertenecen a $K_{\preceq}((X))_k$. Entonces ξ_i, ξ_j pertenecen a la misma \preceq -rama si y sólo si existe $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\tau(\xi_i) = \xi_j$.

Demostración. Si ξ_i, ξ_j pertenecen a la misma \preceq -rama, el resultado se obtiene de la Proposición 4.3.4.

Recíprocamente, supongamos que existe $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\tau(\xi_i) = \xi_j$. Sean $m_i, m_j \in K_{\preceq}((X))[y]$ los polinomios mínimos de ξ_i y ξ_j , respectivamente. Dado que $\text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ permuta a las raíces de m_i , entonces $\tau(\xi_i) = \xi_j$ es raíz de $m_i(x)$. Puesto que m_j es el polinomio mínimo de ξ_j , necesariamente $m_j | m_i$, y como m_i es irreducible se tiene que $m_i = m_j$. En consecuencia, ξ_i y ξ_j pertenecen a la misma \preceq -rama. \square

Proposición 5.1.6. Sea $f \in K[[X]][y]$ y \preceq un orden total positivo sobre \mathbb{R}^n . Sean ξ una raíz de f , $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $\xi \in K_{\preceq}((X))_k$ y η una raíz primitiva k -ésima de la unidad. La \preceq -rama de f que contiene a ξ , denotado por B , es el conjunto

$$B = \{\tau_{\eta, \mu}(\xi); \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \{0, \dots, k-1\}^n\} \quad (5.1.1)$$

donde $\tau_{\eta, \mu}$ es como en (3.3.11).

Demostración. Sea $f = f_1^{a_1} \cdots f_l^{a_l}$ la factorización de f en $K_{\preceq}((X))[y]$ en elementos irreducibles. Como ξ es raíz de f , entonces es raíz de algún f_i , para algún i . Por el Lema 4.3.1 y la Proposición 4.3.4, se obtiene que $B = \{\tau_{\eta, \mu}(\xi); \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \{0, \dots, k-1\}^n\}$. \square

Ejemplo. Sean $f(y) = y^5 + x_1 x_2 y^2 + x_2^4 \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 12, $\omega = (\sqrt{2}, 2)$ y consideremos el orden \leq_{ω} . Podemos hallar las raíces de f en el campo $K_{\leq_{\omega}}((X))_6$, las cuales son:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} x_1^{-\frac{4}{3}} x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-3} x_2^5 - \frac{44}{81} x_1^{-\frac{14}{3}} x_2^{\frac{22}{3}} + \cdots \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} + \frac{2i}{3i + 3\sqrt{3}} x_1^{-\frac{4}{3}} x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-3} x_2^5 + \frac{-44i + 44\sqrt{3}}{81i + 81\sqrt{3}} x_1^{-\frac{14}{3}} x_2^{\frac{22}{3}} + \cdots \\ \xi_3 &= \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} + \frac{2i}{-3i + 3\sqrt{3}} x_1^{-\frac{4}{3}} x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} x_1^{-3} x_2^5 + \frac{44i + 44\sqrt{3}}{-81i + 81\sqrt{3}} x_1^{-\frac{14}{3}} x_2^{\frac{22}{3}} + \cdots \end{aligned}$$

$$\xi_4 = -ix_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-3}x_2^5 + \frac{9i}{8}x_1^{-\frac{11}{2}}x_2^{-\frac{17}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-8}x_2^{-8} + \dots$$

$$\xi_5 = ix_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-3}x_2^5 - \frac{9i}{8}x_1^{-\frac{11}{2}}x_2^{-\frac{17}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-8}x_2^{-8} + \dots$$

Consideremos $\eta = -1$ una raíz 2-ésima primitiva de la unidad, para cualquier $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_4) = \xi_5$.

Ahora, consideremos $\eta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ una raíz 3-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2\}^2$. Si $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (0, 1), (1, 0)$, entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_2$. Ahora, si $\mu = (1, 1)$ entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_1$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que las \leq_{ω} -ramas de f son $B_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ y $B_2 = \{\xi_4, \xi_5\}$.

El polinomio f se factoriza en $K_{\leq_{\omega}}[[X]][y]$ como $f = gh$, en donde $h(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2)(y - \xi_3)$ y $g(y) = (y - \xi_4)(y - \xi_5)$.

Ahora, consideremos a $\omega_1 = (\sqrt{5}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Las raíces de f son

$$\xi_1 = -\frac{1}{625}x^4y^{-\frac{24}{5}} + \frac{1}{125}x^3y^{-\frac{17}{5}} - \frac{1}{5}xy^{\frac{3}{5}} - y^{\frac{4}{5}} + \dots$$

$$\xi_2 = (-0,309 - 0,951i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{-0,809 + 0,588i}{1,55 - 4,76i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{-0,0124 - 0,0380i}{1,55 - 4,76i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_3 = (-0,309 + 0,951i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{-0,809 - 0,588i}{1,55 + 4,76i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{-0,0124 + 0,0380i}{1,55 + 4,76i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_4 = (0,809 - 0,588i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{0,309 - 0,951i}{-4,05 - 2,94i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{0,0324 - 0,0235i}{-4,05 - 2,94i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_5 = (0,809 + 0,588i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{0,309 + 0,951i}{-4,05 + 2,94i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{0,0324 + 0,0235i}{-4,05 + 2,94i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

Sea η una raíz 5-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2$. Para toda raíz de f existe μ tal que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_5) = \xi_i$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que f tiene una única \leq_{ω_1} -rama, $B = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$, por lo tanto f es \leq_{ω_1} -libre, Observación 5.1.3.

Ejemplo. Consideremos $f(y) = y^5 + x_1^2x_2^2y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 10, y $\omega = (1, \sqrt{5})$. Las raíces de f en el campo $K_{\leq_{\omega}}((X))$, las cuales son:

$$\xi_1 = -x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{44}{81}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots$$

$$\xi_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2i}{3i + 3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{-44i + 44\sqrt{3}}{81i + 81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots$$

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{2i}{-3i+3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{44i+44\sqrt{3}}{-81i+81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_4 &= -ix_1^{-1}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-6}x_2^4 + \frac{9i}{8}x_1^{11}x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-16}x_2^9 + \dots \\ \xi_5 &= ix_1^{-1}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-6}x_2^4 - \frac{9i}{8}x_1^{11}x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-16}x_2^9 + \dots\end{aligned}$$

Consideremos $\eta = -1$ una raíz 2-ésima primitiva de la unidad, para cualquier $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_4) = \xi_5$.

Ahora, consideremos $\eta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ una raíz 3-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2\}^2$. Si $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (1, 1)$, entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_2$. Ahora, si $\mu = (2, 2)$ entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_1$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que las \leq_ω -ramas de f son $B_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ y $B_2 = \{\xi_4, \xi_5\}$.

Consideremos ahora a $\omega_1 = (\sqrt{5}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Se tiene que las raíces de f son

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -y - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{625}x^8y^{-3} + \frac{1}{125}x^6y^{-2} + \dots \\ \xi_2 &= (-0,309 - 0,951i)y - \frac{-0,809 + 0,588i}{1,55 - 4,76i}x^2 - \frac{-0,0124 - 0,0380i}{1,55 - 4,76i}x^6y^{-2} + \dots \\ \xi_3 &= (-0,309 + 0,951i)y - \frac{-0,809 - 0,588i}{1,55 + 4,76i}x^2 - \frac{-0,0124 + 0,0380i}{1,55 + 4,76i}x^6y^{-2} + \dots \\ \xi_4 &= (0,809 - 0,588i)y - \frac{0,309 - 0,951i}{-4,05 - 2,94i}x^2 - \frac{0,0324 - 0,0235i}{-4,05 - 2,94i}x^6y^{-2} + \dots \\ \xi_5 &= (0,809 + 0,588i)y - \frac{0,309 + 0,951i}{-4,05 + 2,94i}x^2 - \frac{0,0324 + 0,0235i}{-4,05 + 2,94i}x^6y^{-2} + \dots\end{aligned}$$

Usando la Proposición 5.1.6 se tiene que las raíces de f , al tener soporte en \mathbb{Z}^2 son invariantes para todo $\tau_{\eta, \mu}$. De manera que f tiene 5 \leq_{ω_1} -ramas, a saber, $B_1 = \{\xi_1\}$, $B_2 = \{\xi_2\}$, $B_3 = \{\xi_3\}$, $B_4 = \{\xi_4\}$ y $B_5 = \{\xi_5\}$.

Proposición 5.1.7. Sean $k \in \mathbb{N}$, \preceq un orden total positivo sobre \mathbb{R}^n . Para todo $f \in K[[X]][[y]]$ irreducible de Weierstrass, tal que todas las raíces de f pertenecen a $K_{\preceq}((X))_k$, existe un morfismo natural

$$\Psi : Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))) \rightarrow Gal(K((X))_f : K((X)))$$

con $\Psi(\tau) = \tau|_{K((X))_f}$.

Además, las órbitas de $\text{Imagen}(\Psi)$ son las \preceq -ramas de f .

Demostración. Sea $Z = \{\xi_1, \dots, \xi_d\} \subset K_{\preceq}((X))_k$ el conjunto de las raíces de f . Dado que $f \in K[[X]][y]$ es irreducible, por el Lema de Gauss, ver A.0.2, también lo es en $K((X))[y]$. De manera que $K((X))_f = K((X))[\xi_1, \dots, \xi_d]$.

Sea $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, entonces para todo $\phi \in K((X))$ se tiene que $\tau(\phi) = \phi$, pues $K((X)) \subset K_{\preceq}((X))$. Falta ver que $\tau(K((X))_f) = K((X))_f$. Para todo ξ_i se cumple que $\tau(\xi_i)$ es raíz de f pues $f(\tau(\xi_i)) = \tau(f(\xi_i))$.

Si $|\{\tau(\xi_1), \dots, \tau(\xi_d)\}| < |\{\xi_1, \dots, \xi_d\}|$, entonces existen ξ_i, ξ_j , con $\xi_i \neq \xi_j$, tales que $\tau(\xi_i) = \tau(\xi_j)$, dado que τ es inyectiva, entonces $\xi_i = \xi_j$, lo cual no es posible.

De manera que τ permuta a todas las raíces de f .

Sea $\phi \in K((X))_f$, entonces $\phi = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d}$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, de manera que $\tau(\phi) \in K((X))_f$. Recíprocamente, sea $\phi = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d} \in K((X))_f$, usando el hecho de que τ permuta a las raíces de f , existe $\phi' \in K((X))_f$ tal que $\tau(\phi') = \phi$. De modo que $\tau(K((X))_f) = K((X))_f$.

Consideremos la acción

$$\Theta : \text{Imagen}(\Psi) \rightarrow S_Z$$

dado por

$$\Theta(\tau)(\xi) = \tau(\xi),$$

para todo $\xi \in Z$, en donde S_Z es el grupo simétrico actuando sobre el conjunto Z con d elementos. Dado que τ permuta a las raíces de f , entonces $\Theta(\tau)$ es un elemento de S_Z .

Sean $\xi \in Z$, B una \preceq -rama de f tal que $\xi \in B$ y consideremos a $\text{Orb}(\xi)$.

Una raíz $\xi' \in \text{Orb}(\xi)$, si existe $\Upsilon \in \text{Imagen}(\Psi)$ tal que $\Upsilon(\xi) = \xi'$, con $\Upsilon = \tau|_{K((X))_f}$ para algún $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X)) : K_{\preceq}((X)))$. De donde obtenemos que $\xi' \in B$, por la Proposición 5.1.6 y el Lema 4.3.1.

Sea $\xi' \in Z$, con $\xi' \neq \xi$ y $\xi' \in B$, entonces por el Proposición 4.3.4 existe $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\xi' = \tau(\xi)$. De modo que $\xi' \in \text{Orb}(\xi)$.

Por lo tanto $B = \text{Orb}(\xi)$, con $\xi \in B$.

□

Ejemplo. Sea $f(z) = (z^2 - x - y)^2 - 4xy \in K[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 13. La superficie definida por f es de Puiseux. Las raíces de f , calculadas con cualquier orden positivo son

$$\xi_1 = x^{\frac{2}{4}} + y^{\frac{2}{4}}, \xi_2 = -x^{\frac{2}{4}} - y^{\frac{2}{4}}, \xi_3 = x^{\frac{2}{4}} - y^{\frac{2}{4}}, \xi_4 = -x^{\frac{2}{4}} + y^{\frac{2}{4}}.$$

Consideremos a $\omega = (1, \sqrt{2})$ y al orden \leq_ω . Los \leq_ω -exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $\lambda_2 = ((0, \frac{1}{2}))$, en donde $(\frac{1}{2}, 0) \leq_\omega (0, \frac{1}{2})$.

Los elementos de $Gal(K_{\leq_\omega}((X))_4 : K_{\leq_\omega}((X)))$ son τ_1, \dots, τ_{16} , donde:

$$\begin{array}{ll}
\tau_1 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} & \tau_9 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} \\
\tau_2 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} & \tau_{10} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} \\
\tau_3 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{11} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} \\
\tau_4 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{12} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} \\
\tau_5 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} & \tau_{13} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} \\
\tau_6 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} & \tau_{14} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} \\
\tau_7 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{15} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} \\
\tau_8 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{16} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}}
\end{array}$$

El campo de factorización de f sobre $K((x, y))$ es $K((x, y))_f = K((x, y))[x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}}]$ y $Gal(K((x, y))_f : K((x, y))) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$, en donde:

$$\begin{array}{ll}
\rho_1 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto y^{\frac{1}{2}}, & \rho_3 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto -x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto y^{\frac{1}{2}}, \\
\rho_2 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto -x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto -y^{\frac{1}{2}}, & \rho_4 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto -y^{\frac{1}{2}}.
\end{array}$$

El conjunto $Im(\Psi)$, como en la Proposición 5.1.7 es $Im(\Psi) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\} = Gal(K((x, y))_f : K((x, y)))$. De donde,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \Psi(\tau_1) = \Psi(\tau_2) = \Psi(\tau_5) = \Psi(\tau_6), \\
\rho_2 &= \Psi(\tau_{11}) = \Psi(\tau_{12}) = \Psi(\tau_{15}) = \Psi(\tau_{16}), \\
\rho_3 &= \Psi(\tau_9) = \Psi(\tau_{10}) = \Psi(\tau_{13}) = \Psi(\tau_{14}), \\
\rho_4 &= \Psi(\tau_3) = \Psi(\tau_4) = \Psi(\tau_7) = \Psi(\tau_8).
\end{aligned}$$

Las hipersuperficies de Puiseux irreducibles son \preceq -libres para cualquier orden positivo, por lo cual $Im(\Psi)$ tiene una única órbita.

Lema 5.1.8. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\xi, \xi' \in K_{\preceq}((X))_k$ son raíces de f pertenecientes a la misma \preceq -rama, entonces $Supp(\xi) = Supp(\xi')$.*

Demostración. Por el Lema 5.1.5, existe $\tau \in Gal(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tal que $\tau(\xi) = \xi'$. Por lo tanto, por la Observación 3.3.10, se tiene que $Supp(\xi) = Supp(\xi')$.

□

Lema 5.1.9. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible \preceq -libre, $\xi \in K_{\preceq}((X))_k$ raíz de f , $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ y $\alpha \in \text{Supp}(\xi)$, entonces $\alpha \in \text{Supp}(\xi - \tau(\xi))$ si y sólo si $\tau(X^\alpha) \neq X^\alpha$.

Demostración. Si $\xi = \sum a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k}}$, de la ecuación (3.3.11) se tiene que $\tau(\xi) = \tau(\sum a_\alpha X^{\frac{\alpha}{k}}) = \sum a_\alpha \tau(X^{\frac{\alpha}{k}}) = \sum a_\alpha \mu^\alpha X^{\frac{\alpha}{k}}$ de lo que se sigue el enunciado del lema. □

Lema 5.1.10. Sean \preceq un orden total positivo en \mathbb{R}^n , $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que todas las raíces de f pertenecen a $K_{\preceq}((X))_k$. Sean $\xi \in K_{\preceq}((X))_k$ raíz de f , M un \preceq -monomio característico de f y $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ tales que $\xi - \tau(\xi) = Mu$, con u unidad de \mathcal{A}_{\preceq} , entonces para toda ξ' raíz de f que pertenezca a la misma \preceq -rama que ξ , $\xi' - \tau(\xi') = Mu'$, con u' unidad de \mathcal{A}_{\preceq} .

Demostración. Sean ξ raíz de f , M un \preceq -monomio característico y $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$ que satisfacen $\xi - \tau(\xi) = Mu$, con u unidad en \mathcal{A}_{\preceq} . Si M' es un \preceq -monomio característico de f tal que $\tau(M') \neq M'$, entonces $M \preceq M'$, pues de lo contrario $\xi - \tau(\xi) \neq Mu$.

Sea ξ' una raíz de f en la misma rama que ξ , dado que M es un término de ξ , entonces M también es un término de ξ' , Lema 5.1.8. Dado que $\tau(M) \neq M$, entonces M es un término de $\xi' - \tau(\xi')$, además como M es el menor monomio característico de f con tal propiedad se tiene que $\xi' - \tau(\xi') = Mu'$, con $u' \in \mathcal{A}_{\preceq}$ unidad. □

Definición 5.1.11. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible y \preceq un orden total positivo en \mathbb{R}^n . Sean $\xi \in \mathcal{S}_{\preceq}$ una raíz de f y λ un \preceq -exponente característico de f . Definimos el **conjunto de automorfismos asociados a λ** como $H_{\lambda, \xi} := \{\tau \in \text{Gal}(K((X))_f : K((X))) \mid \xi - \tau(\xi) = X^\lambda u, \text{ con } u \text{ unidad de } \mathcal{A}_{\preceq}\}$.

Observación 5.1.12. Se tiene que $H_{\lambda_i, \xi} \cap H_{\lambda_j, \xi} = \emptyset$, cuando $i \neq j$.

Observación 5.1.13. Si ξ, ξ' pertenecen a la misma \preceq -rama, entonces por el Lema 5.1.10 se tiene que $H_{\lambda, \xi} = H_{\lambda, \xi'}$, para todo \preceq -exponente característico λ . En particular, si $f \in K[[X]][y]$ es \preceq -libre, $H_{\lambda, \xi}$ no depende de la elección de ξ , en dicho caso usaremos la notación H_λ .

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Del Ejemplo 13, tomando a ξ_1 se tiene que $H_{\lambda_1} = \{\rho_2, \rho_3\}$ y $H_{\lambda_2} = \{\rho_4\}$. Podemos notar que para cualquier raíz ξ_i de f , se obtienen los mismos conjuntos H_{λ_1} y H_{λ_2} . Además, $H_{\lambda_1} \cap H_{\lambda_2} = \emptyset$.

Definición 5.1.14. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass y \preceq un orden total positivo sobre \mathbb{R}^n . Sea λ un \preceq -exponente característico de f . El **orden de λ en f** es el cardinal del conjunto $\{\xi - \xi' \mid \xi - \xi' = X^\lambda u, u \in \mathcal{A}_{\preceq}^*, \xi, \xi' \text{ raíces de } f\}$ y lo denotamos como N_λ .

Lema 5.1.15. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio \preceq -libre y λ un \preceq -exponente característico de f , entonces $N_\lambda = |\text{Gal}(K((X))_f : K((X)))| \cdot |H_\lambda|$.

Demostración. Sean $\xi \in \mathcal{A}_{\preceq}$ raíz de f y $\tau_1, \dots, \tau_s \in \text{Gal}(K((X))_f : K((X)))$ tales que $\xi - \tau_j(\xi) = X^\lambda u_j$, con u_j unidad de \mathcal{A}_{\preceq} . Se tiene que $|H_\lambda| = s$.

Para todo elemento $\tau \in \text{Gal}(K((X))_f : K((X)))$ se tiene que $\tau(\xi), \tau(\tau_j(\xi))$ son raíces de f y $\tau(\xi) - \tau(\tau_j(\xi)) = X^\lambda u_{j,\tau}$, con $u_{j,\tau} \in \mathcal{A}_{\preceq}$, unidad. De donde obtenemos que $|\text{Gal}(K((X))_f : K((X)))| \cdot s = N_\lambda$. \square

Ejemplo. Del Ejemplo 13 se tiene que $N_{\lambda_1} = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_4, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \xi_2 - \xi_1, \xi_4 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \xi_4 - \xi_3\}| = 8$ y $N_{\lambda_2} = |\{\xi_1 - \xi_3, \xi_2 - \xi_4, \xi_3 - \xi_1, \xi_4 - \xi_2\}| = 4$.

5.2. \preceq -monomios y exponentes característicos asociados a una \preceq -rama

Definición 5.2.1. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible, \preceq un orden total positivo y B una \preceq -rama de f . Definimos los \preceq -**monomios característicos de f asociados a la rama B** como aquellos M tales que $\xi - \xi' = Mu$, con u unidad de \mathcal{A}_{\preceq} y $\xi, \xi' \in B$. Los \preceq -**exponentes característicos asociados a la \preceq -rama B** , son aquellos que se corresponden con los \preceq -monomios característicos asociados a la \preceq -rama B .

Proposición 5.2.2. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, \preceq un orden total positivo y B una \preceq -rama de f . Fijado $\xi \in B$, si M es un \preceq -monomio característico de f asociado a B , entonces existe $\xi' \in B$ tal que $\xi - \xi' = Mu$, con u unidad de \mathcal{A}_{\preceq} .

Demostración. Sea M un \preceq -monomio característico asociado a B , existen $\xi_1, \xi_2 \in B$ tales que $\xi_1 - \xi_2 = Mu$, con u unidad de \mathcal{A}_{\preceq} . Por otro lado, por el Corolario 5.1.5 existen $\tau_1, \tau_2 \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, tales que $\tau_1(\xi) = \xi_1$ y $\tau_2(\xi) = \xi_2$. De manera que, $Mu = \xi_1 - \xi_2 = \tau_1(\xi) - \tau_2(\xi) = \tau_1(\xi - \xi')$, con $\xi' = \tau_1^{-1}\tau_2(\xi) \in B$, Proposición 5.1.7. De donde obtenemos que, $\tau_1^{-1}(Mu) = \xi - \xi'$. Como en la Observación 4.3.3, $\text{Supp}(Mu) = \text{Supp}(\tau_1^{-1}(Mu))$, por lo que $\tau_1^{-1}(Mu) = Mu'$, con u' unidad en \mathcal{A}_{\preceq} . Por lo tanto, $\xi - \xi' = Mu'$, con $\xi' \in B$. \square

Ejemplo. Consideremos el polinomio $f(y) = y^5 + x_1^2 x_2^2 y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$ del Ejemplo 10, el cual tiene dos \leq_{ω} -ramas, B_1 y B_2 . Los \leq_{ω} -monomios característicos de f son $x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$ y $x_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}}$.

Podemos observar del Ejemplo 10 que f tiene un único \leq_{ω} -monomio característico asociado a la B_1 , a saber, $x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. El \leq_{ω} -monomio característico asociado a la B_2 es $x_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}}$.

Definición 5.2.3. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, \preceq un orden total positivo y B, B' dos \preceq -ramas de f . Definimos los \preceq -**monomios característicos de contacto de las \preceq -ramas B y B'** , como todos los \preceq -monomios característicos M tales que $Mu = \xi - \xi'$, en donde $u \in \mathcal{A}_{\preceq}$ es unidad, $\xi \in B$ y $\xi' \in B'$.

Ejemplo. Consideremos al polinomio $f(y) = y^5 + x_1^2 x_2^2 y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$ como en el Ejemplo 10. El \leq_{ω} -monomio característico de contacto de las ramas B_1 y B_2 es $x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$.

Proposición 5.2.4. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, \preceq un orden total positivo y B_1, B_2 dos \preceq -ramas de f . Fijado $\xi \in B_1$, si M es un \preceq -monomio característico de contacto de B_1 y B_2 , existe $\xi' \in B_2$ tal que $\xi - \xi' = Mu$, con u unidad de \mathcal{A}_{\preceq} .

Demostración. Sea M un \preceq -monomio característico de contacto de B y B' , entonces existen $\xi_1 \in B_1$ y $\xi_2 \in B_2$ tales que $\xi_1 - \xi_2 = Mu$, con u unidad en \mathcal{A}_{\preceq} . Por otro lado, por la Proposición 4.3.4 existe $\tau \in G$ tal que $\tau(\xi) = \xi_1$. De manera que, $Mu = \xi_1 - \xi_2 = \tau(\xi) - \xi_2 = \tau^{-1}(\xi - \xi')$, en donde $\xi' = \tau^{-1}(\xi_2) \in B_2$, por lo que $\xi - \xi' = \tau^{-1}(Mu) = Mu'$, pues $\text{Supp}(Mu) = \text{Supp}(\tau^{-1}(Mu))$, como en la Observación 4.3.3. \square

El siguiente resultado extiende el que Lipman demuestra en el caso de polinomios casi ordinarios, donde se caracterizan los exponentes característicos (Teorema 2.4.9).

Teorema 5.2.5. *Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, B una \preceq -rama de f y $\xi \in B$. El conjunto de los \preceq -exponentes asociados a ξ , definidos como en (4.2.1), coincide con el conjunto de los \preceq -exponentes característicos asociados a B .*

Demostración. Sean $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(g)}$ los \preceq -exponentes asociados a ξ .

Sea $f = f_1^{b_1} \cdots f_l^{b_l}$ la factorización de f en elementos irreducibles de $K_{\preceq}((X))$. Supongamos que ξ es raíz de f_j , para algún j .

Sean N_1, N_2, \dots, N_g dados por $N_i = X^{\lambda^{(i)}}$. Si para todo $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, $\tau(N_1) = N_1$, entonces $N_1 \in K_{\preceq}((X))$, ver por ejemplo en [29], lo cual no es posible pues $\lambda^{(1)} = \min_{\preceq} \{ \text{Supp}(\xi) \setminus \mathbb{Z}^n \}$ y para todo $\phi \in K_{\preceq}((X))$, $\text{Supp}(\phi) \subset \mathbb{Z}^n$.

Sea $\tau_1 \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, tal que $\tau_1(N_1) \neq N_1$.

Sea $\xi^{\prec \lambda^{(1)}}$ como en la Observación 3.3.4. Se tiene que $\xi^{\prec \lambda^{(1)}} \in K_{\preceq}((X))$ y

$$\xi = \xi^{\prec \lambda^{(1)}} + \xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}}.$$

De manera que

$$\tau_1(\xi) = \xi^{\prec \lambda^{(1)}} + \tau_1(\xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}}).$$

Por lo que,

$$\xi - \tau_1(\xi) = \left(\xi^{\prec \lambda^{(1)}} + \xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}} \right) - \left(\xi^{\prec \lambda^{(1)}} + \tau_1(\xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}}) \right) = \xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}} - \tau_1(\xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}}). \quad (5.2.1)$$

Dado que $\lambda^{(1)} \in \text{Supp}(\xi - \tau_1(\xi))$, entonces $\nu_{\preceq}(\xi - \tau_1(\xi)) \preceq \lambda^{(1)}$. Por otro lado, por las Observaciones 3.3.4 y 4.3.3 se tiene que $\nu_{\preceq}(\xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}}) \succeq \lambda^{(1)}$ y $\nu_{\preceq}(\tau_1(\xi - \xi^{\prec \lambda^{(1)}})) \succeq \lambda^{(1)}$. De manera que, de (5.2.1) y de la Definición 1.6.1, obtenemos $\nu_{\preceq}(\xi - \tau_1(\xi)) \succeq \lambda^{(1)}$. Por lo tanto, $\nu_{\preceq}(\xi - \tau_1(\xi)) = \lambda^{(1)}$. En consecuencia,

$$\xi - \tau_1(\xi) = N_1 u, \quad (5.2.2)$$

u unidad en \mathcal{A}_{\preceq} , Lema 3.3.5. Dado que $\tau_1(\xi)$ también es raíz de f_j entonces N_1 es un \preceq -monomio característico asociado a la B , Proposición 5.2.2.

Ahora, si para todo $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[N_1, \dots, N_m])$ es tal que $\tau(N_{m+1}) = N_{m+1}$, entonces $N_{m+1} \in K_{\preceq}((X))[N_1, \dots, N_m]$, lo cual no es posible pues $\lambda^{(m+1)} \notin \mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^m \lambda^{(j)}\mathbb{Z}$.

Sea $\tau_{m+1} \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X))[N_1, \dots, N_m])$ tal que $\tau_{m+1}(N_{m+1}) \neq N_{m+1}$. Procediendo de la misma forma que en el caso anterior obtenemos que $\nu_{\preceq}(\xi - \tau_{m+1}(\xi)) = \lambda^{(m+1)}$. Por lo tanto

$$\xi - \tau_{m+1}(\xi) = N_{m+1}u, \quad (5.2.3)$$

u unidad en \mathcal{A}_{\preceq} , Lema 3.3.5, por lo que N_{m+1} es un \preceq -monomio característico asociado a B , Proposición 5.2.2.

Recíprocamente, sean $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}$ los \preceq -exponentes característicos asociados a B ordenados como $\alpha^{(1)} \preceq \dots \preceq \alpha^{(s)}$. Dado que $\xi \in B$ entonces por las Proposiciones 5.2.2 y 5.1.6,

$$\xi - \bar{\tau}_i(\xi) = X^{\alpha^{(i)}}u_i, \quad (5.2.4)$$

con $\bar{\tau}_i \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X)) : K_{\preceq}((X)))$ y $u_i \in \mathcal{A}_{\preceq}$ unidad.

Anteriormente justificamos que el conjunto $\{\lambda^{(i)}\}_{i=1}^g \subseteq \{\alpha^{(i)}\}_{i=1}^s$, entonces $\alpha^{(1)} \preceq \lambda^{(1)}$.

Ahora, para todo $\tau \in \text{Gal}(K_{\preceq}((X))_k : K_{\preceq}((X)))$, $\tau(X^a) = X^a$ con $a \in \mathbb{Z}^n$, por otro lado por (4.2.1) se tiene que $\text{Supp}(\xi - \tau(\xi))$ está acotado inferiormente por $\lambda^{(1)}$, por lo tanto $\nu_{\preceq}(\xi - \tau(\xi)) \notin \mathbb{Z}^n$. En consecuencia $\nu_{\preceq}(\xi - \tau(\xi)) \succeq \lambda^{(1)}$.

Por lo anterior y por (5.2.4) obtenemos que $\alpha^{(1)} \succeq \lambda^{(1)}$.

Sea $\bar{\tau}_2$ como en (5.2.4). Se tiene que $\bar{\tau}_2(X^{\alpha^{(1)}}) = X^{\alpha^{(1)}}$, de otra forma $\xi - \bar{\tau}_2(\xi) \neq X^{\alpha^{(2)}}u$, con $u \in \mathcal{A}_{\preceq}$ unidad. También, por (4.2.1) se tiene que $\text{Supp}(\xi) \setminus (\mathbb{Z}^n + \lambda^{(1)})$ y $\text{Supp}(\bar{\tau}_2(\xi)) \setminus (\mathbb{Z}^n + \lambda^{(1)})$ están acotados inferiormente por $\lambda^{(2)}$. Entonces $\nu_{\preceq}(\xi - \bar{\tau}_2(\xi)) \notin \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}\lambda^{(1)}$. Por lo tanto, $\alpha^{(2)} = \nu_{\preceq}(\xi - \bar{\tau}_2(\xi)) \succeq \lambda^{(2)}$.

Dado que $\{\lambda^{(i)}\}_{i=2}^g \subseteq \{\alpha^{(i)}\}_{i=2}^s$, entonces $\alpha^{(2)} \preceq \lambda^{(2)}$.

Inductivamente podemos concluir que $\{\alpha^{(i)}\}_{i=1}^s \subseteq \{\lambda^{(i)}\}_{i=1}^g$. \square

Corolario 5.2.6. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass \preceq -libre y ξ una raíz de f . Se tiene que el conjunto de los \preceq -exponentes característicos de f es el conjunto de los \preceq -exponentes asociados a ξ .

Demostración. El resultado es consecuencia directa del Teorema 5.2.5 y de que al ser f \preceq -libre solo tiene una \preceq -rama, Observación 5.1.3. \square

Ejemplo. Consideremos a $f(y) = y^6 - 3x_1y^4 + 2x_2y^3 + 3x_1^2y^2 + 6x_1x_2y - x_1^3$, como en el Ejemplo 16, a $\omega = (1, \sqrt{2})$ y a \leq_ω un orden total en \mathbb{R}^n que extiende al orden total \leq_ω en \mathbb{Q}^n .

Las raíces de f las podemos hallar en el campo $K_{\leq_\omega}((X))_6$, las cuales son:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\ \xi_2 &= -\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\ \xi_3 &= -\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\ \xi_4 &= -x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}, \\ \xi_5 &= -\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}, \\ \xi_6 &= -\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}.\end{aligned}$$

Se tiene que f es \leq_ω -libre, por lo que tiene una única \leq_ω -rama, a saber, $B = \{\xi_1, \dots, \xi_6\}$.

Los \leq_ω -exponentes característicos de f son $(0, \frac{2}{6})$ y $(\frac{3}{6}, 0)$.

Por otro lado, los \leq_ω -exponentes asociados a ξ_1 son $\lambda_1 = \min_{\preceq} \{Supp(\xi) \setminus \mathbb{Z}^2\} = (0, \frac{2}{6})$. Además, $(\frac{3}{6}, 0) \notin \mathbb{Z}^2 + (0, \frac{2}{6})\mathbb{Z}$. Por lo que, $\lambda_2 = \min_{\preceq} \{Supp(\xi) \setminus (\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, 0)\mathbb{Z}^2)\} = (\frac{3}{6}, 0)$.

En efecto, como el Teorema 5.2.5 asegura, los \leq_ω -exponentes característicos de f son los \leq_ω -exponentes asociados a ξ_1 .

Proposición 5.2.7. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass, B una \preceq -rama de f , $\xi \in B$ y M_1, \dots, M_g los \preceq -monomios característicos asociados a B , entonces $K_{\preceq}((X))[\xi] = K_{\preceq}((X))[M_1, \dots, M_g]$.

Demostración. El resultado es consecuencia del Teorema 4.4.3 y del Teorema 5.2.5. □

Corolario 5.2.8. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio \preceq -libre, cuyas raíces son $\xi_1, \dots, \xi_d \in K_{\preceq}((X))_k$, entonces $K_{\preceq}((X))[\xi_i] = K_{\preceq}((X))[\xi_1, \dots, \xi_d]$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Demostración. Sean $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{A}_{\preceq}$ las raíces de f . Como f es \preceq -libre, se tiene que $\xi_i = \tau_i(\xi)$, para algún $\tau_i \in Gal(K_{\preceq}((X)) : K_{\preceq}((X)))$, por la Proposición

5.1.6, para todo $i = 1, \dots, d$. Dado que $Supp(\xi) = Supp(\tau_j(\xi))$, los \preceq -exponentes asociados a ξ , son los mismos que los de $\tau_j(\xi)$. Por lo que, el resultado se obtiene del Teorema 5.2.5 y de la Proposición 5.2.7. \square

Proposición 5.2.9. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio \preceq -libre y $\xi \in S_{\preceq}$ una raíz de f . Sean $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(g)} \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ los \preceq -exponentes característicos de f . Entonces $[K_{\preceq}((X))[\xi] : K_{\preceq}((X))] = \frac{k^n}{d}$, en donde d es el máximo común divisor de los menores de orden n de la matriz M , como en (4.4.1). En particular, $\frac{k^n}{d} = deg(f)$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del Lema 4.4.1 y del Corolario 5.2.6. Ahora bien, dado que f es \preceq -libre, entonces $[K((X))[\xi] : K((X))] = [K_{\preceq}((X))[\xi] : K_{\preceq}((X))]$. Puesto que $[K((X))[\xi] : K((X))] = deg(f)$, entonces $\frac{k^n}{d} = deg(f)$. \square

Si $f \in K[[X]][y]$ no es \preceq -libre la Proposición 5.2.9 no se cumple. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sean $f(z) = z^4 + x^3yz^3 - 12x^2y^2z^2 + x^3yz - 5x^3y^5 \in K[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 17, y consideremos el orden $\omega = (1, \sqrt{11})$.

Las raíces de f son

$$\xi_1 = x^{-3}y^{-1} + 103680yx^{-13} - 3456yx^{-9} + 144yx^{-5} - 12yx^{-1} - x^3y + \dots$$

$$\xi_2 = -xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y - 4xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{9}x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y + (2+2i\sqrt{3})xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{18}(1+i\sqrt{3})x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}(2-2i\sqrt{3})x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y + (2-2i\sqrt{3})xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{18}(1-i\sqrt{3})x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}(2+2i\sqrt{3})x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

El polinomio f no es \leq_{ω} -libre, pues $\xi_1 \in K_{\leq_{\omega}}((x, y))$.

Por otro lado, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in K_{\leq_{\omega}}((x, y))_3$, por lo que los \leq_{ω} -exponentes característicos de f pertenecen a $\frac{1}{3}\mathbb{Z}^2$, los cuales se obtienen restando las raíces, $\xi_1 - \xi_i = X^{(-1, -3)}u_i$, con $i = 2, 3, 4$ y $\xi_j - \xi_m = X^{(1, \frac{1}{3})}u_{jm}$ con $j, k = 2, 3, 4$, de manera que $\lambda^{(1)} = (-3, -1)$ y $\lambda^{(2)} = (1, \frac{1}{3})$. Construyamos a M como en (4.4.1):

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

Se tiene que los menores de orden 2 de la matriz M son: 9, 27, 0 y 3. Por lo que, $mcd(9, 27, 0, 3) = 3$.

De modo que $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] = \frac{3^2}{3} = 3$, con $i = 2, 3, 4$ y $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_1] : K_{\leq \omega}((x, y))] = 1$. Sin embargo, $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] \neq \deg(f)$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo. Sea $f(z) = z^4 + 3xyz^3 + x^2y^6z^2 + xy^7z + x^6y^5 - x^2y^3 \in K[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 18. Sea $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y consideremos al orden $\leq \omega$.

Calculemos las raíces de f en $S_{\leq \omega}$:

$$\xi_1 = -x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy - \frac{27}{32}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} - \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$\xi_2 = -ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy + \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} + \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$\xi_3 = ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy - \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} + \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$\xi_4 = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy + \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} - \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Se tiene que $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in K_{\leq \omega}((x, y))_4$. Además f es $\leq \omega$ -libre. Si calculamos la resta de las raíces de f se tiene que $\xi_i - \xi_l = X^{(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}u_{jl}$ con $j \neq l$ y $j, l = 1, 2, 3, 4$. Por lo que f tiene un único $\leq \omega$ -exponente característico, a saber, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}^2$. Calculemos a M como en (4.4.1):

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

Se tiene que los menores de orden 2 de la matriz M son: 16, -8, 12. Por lo que, $\text{mcd}(16, -8, 12) = 4$. Por lo tanto, $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] = \frac{4^2}{4} = 4$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

CAPÍTULO 6

\preceq -exponentes característicos asociados a los vértices del discriminante

En este capítulo exploramos la relación entre las distintas formas de ordenar los \preceq -exponentes característicos y el discriminante de la proyección.

Dado un orden total \preceq en \mathbb{R}^n , Tornero propone un método para seleccionar exponentes a los que denomina exponentes distinguidos. Por otro lado, en la construcción de los exponentes característicos presentada por Assi-Abbas, no se establece explícitamente que los exponentes característicos obtenidos sean distintos, en función del orden utilizado para construirlos. Sin embargo, su construcción depende del orden considerado.

Comenzamos este capítulo introduciendo en la Definición 6.1.1 el concepto de σ -polígono de Newton, una extensión natural del conocido polígono de Newton al contexto de series formales con exponentes en conos. Este concepto generalizado no sólo preserva las propiedades fundamentales del polígono clásico, sino que también incorpora nuevas herramientas para analizar series formales que dependen de una estructura σ -positiva.

Para cada $\varphi \in K[[X]]$ y para cada vértice v del σ -polígono de Newton de φ , definimos el concepto de cono asociado al vértice v en la Definición 6.1.5.

En la Proposición 6.2.1 damos una fórmula explícita que relaciona el conjunto de exponentes característicos calculados con un orden, con las coordenadas de un vértice del polígono de Newton del discriminante.

Finalmente, en el Lema 6.2.3 y en el Teorema 6.2.5, establecemos condiciones precisas bajo las cuales, dados dos órdenes \preceq_1 y \preceq_2 , los \preceq_1 -exponentes característicos y los \preceq_2 -exponentes característicos coinciden. Más aún, damos condiciones necesarias para que los exponentes calculados con diferentes órdenes, coincidan y estén

ordenados de la misma manera.

A lo largo de este capítulo se asumirá que todos los conos son positivos y \preceq denotará un orden total positivo y continuo en \mathbb{R}^n .

6.1. σ -Polígono de Newton

Definición 6.1.1. Sea σ un cono positivo en \mathbb{R}^n y $\eta = \sum c_\alpha X^\alpha \in K[[\sigma]]$. Definimos el σ -polígono de Newton de η , denotado por $\mathcal{N}_{X,\sigma}(\eta)$, como la envolvente convexa en \mathbb{R}^n del conjunto $\text{Supp}(\eta) + \sigma$. Los vértices de dicho conjunto los llamaremos **vértices del polígono de Newton**.

Cuando $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ sólo diremos polígono de Newton y lo denotaremos por $\mathcal{N}_X(\eta)$.

Observación 6.1.2. ■ *El σ -polígono de Newton de un elemento $\varphi \in K[[\sigma]]$ tiene un número finito de vértices.*

- *Un polinomio $f \in K[[X]][[y]]$ es casi ordinario si y sólo si el polígono de Newton del discriminante de f tiene un único vértice.*

Ejemplo. Sea $\varphi = x^2y^6 + x^5y^2 + x^6y + x^7y^4 + x^8y^7 \in K[[x, y]]$. Consideremos al cono σ dado por $\sigma = \langle (-1, 2), (2, -1) \rangle$. El σ -Polígono de Newton de φ se muestra en la Figura 6.1.

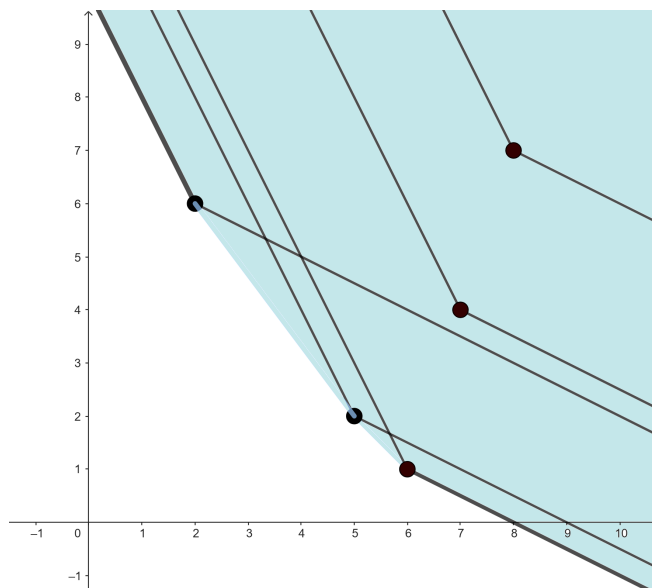


Figura 6.1: σ -Polígono de Newton de φ

Observación 6.1.3. Sea \preceq un orden total positivo continuo sobre \mathbb{R}^n y $\varphi \in K[[X]]$. Por la Proposición 1.5.7, concluimos que $\nu_{\preceq}(\varphi)$ es un vértice del Polígono de Newton de φ .

Lema 6.1.4. Sea σ un cono positivo. Una serie en $K[[\sigma]]$ es de la forma $X^\alpha u$, con $u \in K[[\sigma]]^*$ si y sólo si α es el único vértice del σ -polígono de Newton de f .

Demostración. Supongamos que $\varphi = X^\alpha u$, con $u \in K[[\sigma]]^*$ unidad. Por la Observación 3.3.1, $\text{Supp}(\varphi) = \text{Supp}(X^\alpha u) = \alpha + \text{Supp}(u)$, entonces cualquier elemento en $\text{Supp}(\varphi)$ es de la forma $\alpha + \gamma$, con $\gamma \in \sigma$, de manera que $\text{Sup}(\varphi) \subset \alpha + \sigma$. Dado que $\alpha \in \text{Supp}(\varphi)$ se tiene que la envolvente convexa de $\text{Supp}(\varphi) + \sigma$ es el conjunto $\alpha + \sigma$. Por lo tanto, el σ -Polígono de Newton de f tiene un único vértice α .

Recíprocamente, supongamos que α es el único vértice del σ -polígono de Newton de f . Entonces $\text{Supp}(\varphi) \subset \alpha + \sigma$. De manera que $\varphi = \sum a_{\gamma+\alpha} X^{\alpha+\gamma} = X^\alpha \sum b_\gamma X^\gamma$, donde $b_\gamma = a_{\alpha+\gamma}$. Como, $b_{(0,\dots,0)} = a_\alpha \neq 0$, tenemos que $\sum b_\gamma X^\gamma$ es una unidad, Proposición 3.3.2.

□

Ejemplo. Consideremos al cono $\sigma = \langle (-1, 5), (2, -1) \rangle$. Sea $\phi = xy^7 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^3y^2 + x^4y + x^5y^6 + x^6 + x^6y^2 + x^6y^5$. El σ -polígono de Newton de ϕ se muestra en la Figura 6.2. Dado que el σ -polígono de Newton de ϕ tiene un único vértice, ϕ es unidad en el anillo $K[[\sigma]]_{x_1 \dots x_n}$.

Ejemplo. Sea $\varphi = x + y \in K[[x, y]]$. El polígono de Newton de φ , se muestra en la Figura 6.3. De manera que φ no es de la forma $x^\alpha u$, con $u \in K[[x, y]]$ unidad. Ahora, consideremos a los conos $\sigma_1 = \langle (-2, 1), (3, -1) \rangle$ y $\sigma_2 = \langle (-1, 3), (1, -2) \rangle$. Podemos ver en las Figuras 6.4 y 6.5 que los σ_1, σ_2 -polígonos de Newton, tienen un sólo vértice. De manera que φ es de la forma $X^{\alpha_1} u_1 \in K[[\sigma_1]]$ y $X^{\alpha_2} u_2 \in K[[\sigma_2]]$, con $u_1 \in K[[\sigma_1]]^*$ y $u_2 \in K[[\sigma_2]]^*$.

Sean σ un cono positivo en \mathbb{R}^n y $\varphi \in K[[\sigma]]$. Para cada vértice v del σ -polígono de Newton de φ , existe una representación de φ de la forma $X^v u$, con u unidad en $K[[\sigma_v]]$, en donde

$$\sigma_v := \langle \alpha - v \rangle |_{\alpha \in \mathcal{N}_{X, \sigma}(\varphi)}. \quad (6.1.1)$$

Definición 6.1.5. Sean σ un cono positivo en \mathbb{R}^n y $\varphi \in K[[\sigma]]$. Sea v un vértice del σ -polígono de Newton de φ . Diremos que σ_v es el **cono asociado al vértice** v , como en (6.1.1).

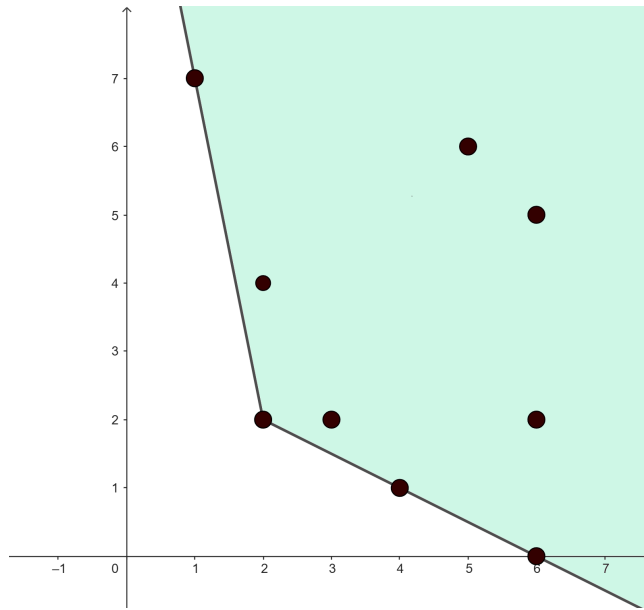


Figura 6.2: σ -Polígono de Newton de ϕ

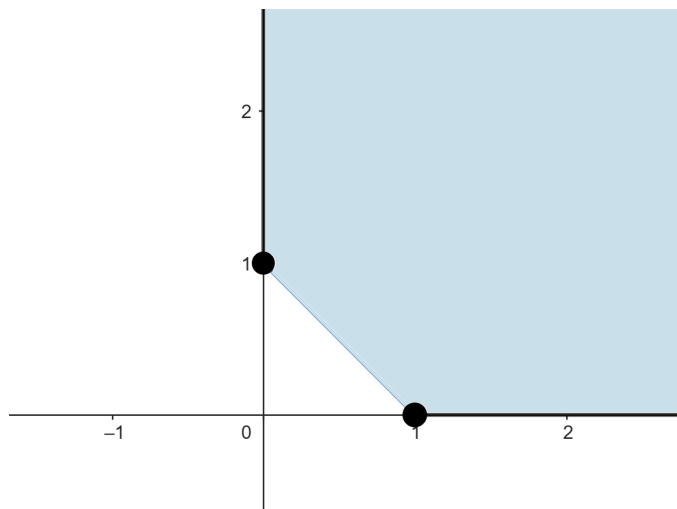


Figura 6.3: Polígono de Newton de φ

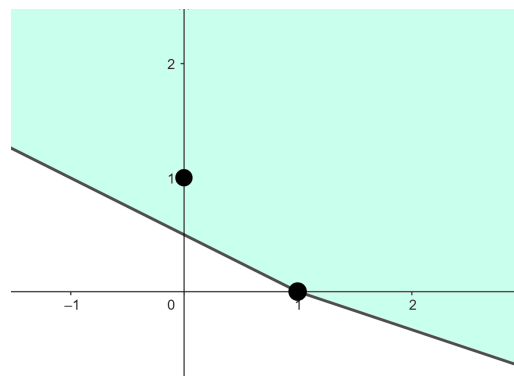


Figura 6.4: σ_1 -polígono de Newton de φ

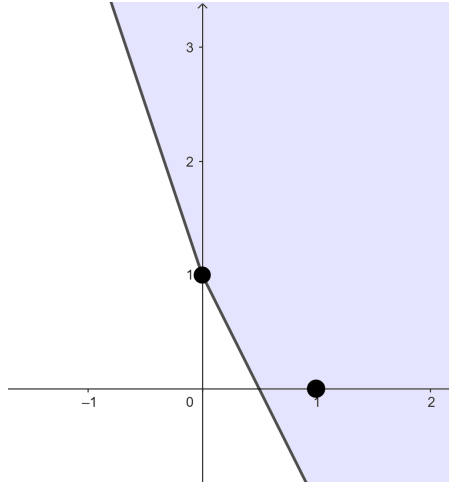


Figura 6.5: σ_2 -polígono de Newton de φ

Observación 6.1.6. Para cada vértice v del σ -polígono de Newton de $\varphi \in K[[\sigma]]$, φ es unidad del anillo localizado $K[[\sigma_v]]_{x_1 \dots x_n}$. En general, si σ es un cono que contiene a σ_v , para algún vértice v , φ es unidad de $K[[\sigma]]_{x_1 \dots x_n}$.

Para todo $\varphi \in K[[\sigma]]$, si v es un vértice del σ -polígono de Newton de φ entonces

$$\varphi = X^v(X^{-v}\varphi), \quad (6.1.2)$$

en donde $X^{-v}\varphi$ es unidad en $K[[\sigma_v]]$.

Ejemplo. Sea $\varphi = xy^5 + x^3y^4 + x^2y^3 + x^4y^3 + x^3y^2 + x^5y \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Se tiene que los vértices del polígono de Newton de f son $(1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)$. Sea $v = (2, 3)$, entonces el cono asociado al vértice v , σ_v , es como se muestra en la Figura 6.6.

Escribiendo a φ como en (6.1.2) se tiene que

$$\varphi = x^2y^3(1 + x^{-1}y^2 + xy + x^2 + xy^{-1} + x^3y^{-2}),$$

en donde $1 + x^{-1}y^2 + xy + x^2 + xy^{-1} + x^3y^{-2} \in \mathbb{C}[[\sigma_v]]$ es unidad.

El siguiente corolario es consecuencia directa de la Observación 6.1.6.

Corolario 6.1.7. Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio y σ un cono en \mathbb{R}^n . Si σ contiene a un cono asociado a un vértice del polígono de Newton de $\Delta(f)$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tal que $X^\alpha \Delta_y(f)$ es una unidad de $K[[\sigma]]$.

Observación 6.1.8. Sea σ un cono positivo en \mathbb{R}^n y $\varphi \in K[[\sigma]]$. Sean v_1, \dots, v_l

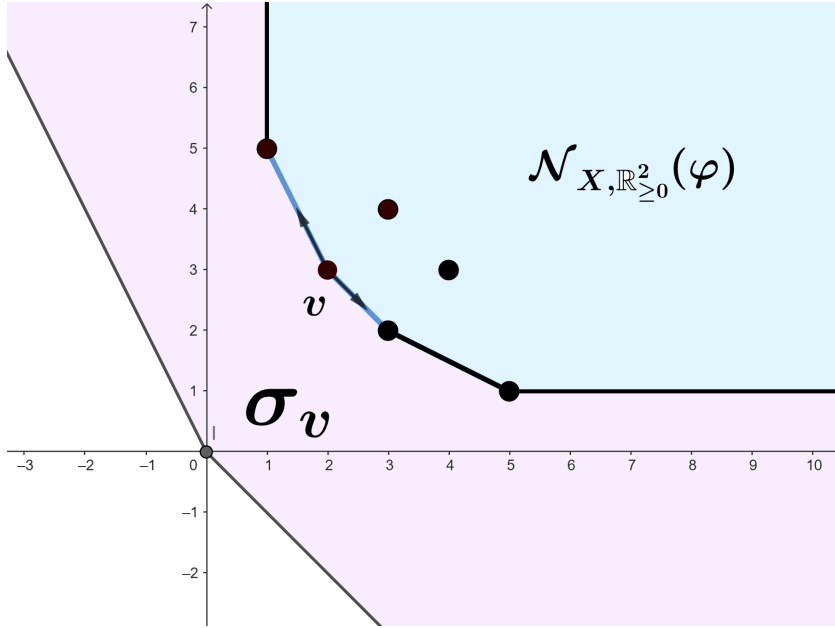


Figura 6.6: Polígono de Newton de φ y como asociado al vértice v .

los vértices del σ -polígono de Newton de φ . Entonces $\bigcap_{i=1}^l \sigma_{v_i} = \sigma$.

Ejemplo. Consideremos el σ -polígono de Newton de φ de la Figura 6.1, en donde $\sigma = \langle (-1, 2), (2, -1) \rangle$. Podemos observar que $\mathcal{N}_{X,\sigma}$ tiene dos vértices, $v_1 := (2, 6)$ y $v_2 := (6, 1)$. En la Figura 6.7 construimos los conos asociados a los vértices v_1 y v_2 . Podemos observar que $\sigma_{v_1} \cap \sigma_{v_2} = \sigma$.

Lema 6.1.9. Sean σ un cono positivo de \mathbb{R}^n , \preceq un orden σ -positivo y $\varphi \in K[[\sigma]]$. Sean v un vértice del σ -polígono de Newton de φ y σ_v el cono asociado a ese vértice. Se tiene que v coincide con $\nu_{\preceq}(\varphi)$ si y sólo si \preceq es σ_v -positivo.

Demostración. Supongamos que $v = \nu_{\preceq}(\varphi)$. Por definición de ν_{\preceq} , $v = \min_{\preceq} \{\alpha \mid \alpha \in \text{Supp}(\varphi)\}$. Dado que \preceq es σ -positivo, $v = \min_{\preceq} \{\alpha \mid \alpha \in \text{Supp}(\varphi) + \sigma\}$. Por definición de envolvente convexa, los elementos de $\mathcal{N}_{X,\sigma}(\varphi)$ son combinaciones positivas de elementos de $\text{Supp}(\varphi) + \sigma$, entonces por propiedades de valoración $v = \min_{\preceq} \{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{N}_{X,\sigma}(\varphi)\}$. Por lo tanto para todo $\alpha - v \in \mathcal{N}_{X,\sigma}(\varphi)$, se cumple $0 \preceq \alpha - v$. De modo que \preceq es σ_v -positivo.

Recíprocamente, si \preceq es σ_v -positivo, entonces $0 \preceq \alpha - v$, para todo $\alpha \in \mathcal{N}_{X,\sigma}$, en particular para todo $\alpha \in \text{Supp}(\varphi)$. Dado que $v \in \text{Supp}(\varphi)$, entonces $v = \nu_{\preceq}(\varphi)$.

□

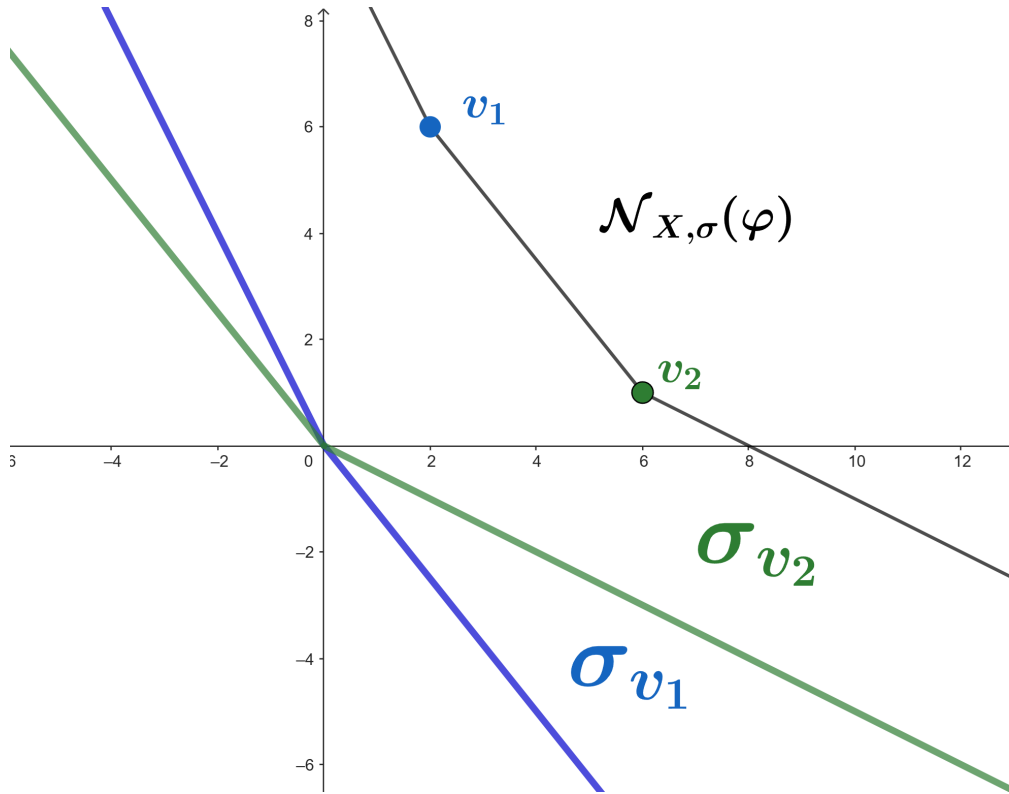


Figura 6.7: Conos asociados σ_{v_1} y σ_{v_2} .

6.2. Discriminante y los \preceq -exponentes característicos

En esta sección estaremos trabajando con polinomios $f \in K[[X]][y]$ mónicos irreducibles de Weierstrass de grado d . Recordemos que si B es una \preceq -rama de f y $\xi \in B$, entonces los \preceq -exponentes característicos asociados a B coinciden con los \preceq -exponentes asociados a ξ . En particular, si f es \preceq -libre, los \preceq -exponentes característicos de f coinciden con los \preceq -exponentes asociados a sus raíces, por lo que en algunos resultados vamos a estar usando indistintamente a cada uno de estos conjuntos.

Para el siguiente resultado, recordemos que dado λ , un \preceq -exponente característico de f , N_λ es el orden de λ en f , es decir, el cardinal del conjunto $\{\xi - \xi' \mid \xi - \xi' = X^\lambda u, u \in \mathcal{A}_{\preceq}^*, \xi, \xi' \text{ raíces de } f\}$, Definición 5.1.14.

Proposición 6.2.1. Sean \preceq un orden total positivo sobre \mathbb{R}^n y $f \in K[[X]][y]$ un

polinomio de Weierstrass irreducible. Se tiene que

$$\sum_{\lambda \in \leq\text{-char}(f)} \lambda N_\lambda = \nu_{\leq}(\Delta(f)).$$

Demostración. Por (2.2.4) se tiene que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_d^{2d-2} \prod_{j < i} (\xi_i - \xi_j)^2$.

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \nu_{\leq}(\Delta(f)) &= \nu_{\leq} \left((-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_d^{2d-2} \prod_{j < i} (\xi_i - \xi_j)^2 \right), \\ &= \sum_{j < i} 2\nu_{\leq}(\xi_i - \xi_j) \quad (\text{por propiedad 1 de la Definición 1.6.1}) \\ &= 2 \sum_{\lambda \in \leq\text{-char}(f)} \lambda \left(\frac{N_\lambda}{2} \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \leq\text{-char}(f)} \lambda N_\lambda. \end{aligned}$$

□

Corolario 6.2.2. Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible, \leq -libre. Entonces $|Gal(K((X))_f : K((X)))| \left(\sum_{\lambda \in \leq\text{-char}(f)} \lambda |H_\lambda| \right) = \nu_{\leq}(\Delta(f))$.

Demostración. El resultado es consecuencia de la Proposición 6.2.1 y de la Lema 5.1.15. □

Ejemplo. Consideremos $f(y) = y^5 + x_1^2 x_2^2 y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$, como en el Ejemplo 10. El discriminante de f es $\Delta(f) = 108x_1^{10}x_2^{15} + 3125x_2^{20}$.

Consideremos $\omega = (1, \sqrt{5})$. Se tiene que f no es \leq_ω -libre.

Los \leq_ω -exponentes característicos de f son $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y $(-1, \frac{3}{2})$.

Se tiene que $\nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = (10, 15)$, $N_{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} = 18$ y $N_{(-1, \frac{3}{2})} = 2$, por lo que

$$\begin{aligned} (10, 15) &= \nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) \\ &= 18 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) + 2 \left(-1, \frac{3}{2} \right) \\ &= N_{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) + N_{(-1, \frac{3}{2})} \left(-1, \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Cumpléndose lo que en efecto la Proposición 6.2.1 establece.

Ejemplo. Consideremos $f(z) = z^2 - (x + y)^2 \in K[[x, y]][z]$, como en el Ejemplo 19, a $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y al orden \leq_ω . Las raíces de f son $\xi_1 = x + y$ y $\xi_2 = -x - y$, por lo que f no es \leq_ω -libre. Por otro lado, el único \leq_ω -exponente característico de f es $(1, 0)$.

Se tiene que $N_\lambda = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_1\}| = 2$ y $\Delta(f) = x^2 + 2xy + y^2$, de manera que $\nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = (2, 0)$.

En efecto, como la Proposición 6.2.1 lo establece

$$(2, 0) = \nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = N_\lambda \lambda = 2(1, 0) = (2, 0).$$

Sin embargo, dado que f no es \leq_ω -libre y $\xi_1, \xi_2 \in K((x, y))$, entonces $\text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y)))$ tiene un único elemento, la identidad. Por lo que, $H_{\lambda, \xi_1} = \{\varphi \in \text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y))) \mid \varphi(\xi_1) - \xi_1 = X^\lambda u, \text{ unidad}\} = \emptyset$. Así,

$$(2, 0) = \nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) \neq |\text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y)))| |H_{\lambda, \xi_1}| \lambda = 1 \cdot 0 \cdot (1, 0) = (0, 0).$$

En cuyo caso, el Corolario 6.2.2 no se cumple pues f no es \leq_ω -libre.

Ejemplo. El discriminante del polinomio $f(z) = (z^2 - x - y)^2 - 4xy \in K[[x, y]][z]$, del Ejemplo 13, es $\Delta(f) = 4096x^4y^2 - 8192x^3y^3 + 4096x^2y^4$. El polígono de Newton de $\Delta(f)$ se muestra en la Figura 6.8, el cual solo tiene dos vértices.

Consideremos $\omega = (1, \sqrt{2})$ y al orden \leq_ω . Se tiene que $\nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = (4, 2)$.

Los \leq_ω -exponentes característicos son $\lambda_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $\lambda_2 = (0, \frac{1}{2})$ y $N_{\lambda_1} = 8$ y $N_{\lambda_2} = 4$.

En efecto, como la Proposición 6.2.1 lo establece,

$$\begin{aligned} (4, 2) &= \nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) \\ &= N_{\lambda_1} \lambda_1 + N_{\lambda_2} \lambda_2 \\ &= 8 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + 4 \left(0, \frac{1}{2} \right) = (4, 2). \end{aligned}$$

También $|H_{\lambda_1}| = 2$ y $|H_{\lambda_2}| = 1$ y $|\text{Gal}(K((X))_f : K((X)))| = 4$, teniéndose que,



Figura 6.8: Polígono de Newton de $\Delta(f)$

como el Corolario 6.2.2 lo establece

$$\begin{aligned}
(4, 2) &= \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) \\
&= |\text{Gal}(K((X))_f : K((X)))| (|H_{\lambda_1}| \lambda_1 + |H_{\lambda_2}| \lambda_2) \\
&= 4 \left(2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) = (4, 2).
\end{aligned}$$

Ahora consideremos $\omega_1 = (\sqrt{2}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Se tiene que $\nu_{\leq_{\omega_1}}(\Delta(f)) = (2, 4)$.

Los \leq_{ω_1} -exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (0, \frac{1}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, con $\lambda_1 \leq_{\omega_1} \lambda_2$.

Se tiene que $N_{\lambda_1} = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \xi_2 - \xi_4, \xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1, \xi_4 - \xi_3, \xi_4 - \xi_2\}| = 8$ y $N_{\lambda_2} = |\{\xi_1 - \xi_4, \xi_2 - \xi_3, \xi_4 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2\}| = 4$.

En efecto, como la Proposición 6.2.1 lo establece

$$(2, 4) = \nu_{\leq_{\omega_1}}(\Delta(f)) = N_{\lambda_1} \lambda_1 + N_{\lambda_2} \lambda_2 = 8 \left(0, \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = (2, 4).$$

Lema 6.2.3. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass. Sea σ en \mathbb{R}^n un cono tal que todas las raíces de f pertenecen a $K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si σ contiene a un cono asociado a un vértice del polígono de Newton de $\Delta(f)$ y \preceq_1 y \preceq_2 son órdenes σ -positivos entonces $\preceq_1 - \text{char}(f) = \preceq_2 - \text{char}(f)$.*

Demostración. Por el Corolario 6.1.7 existe $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tal que $X^\alpha \Delta_y(f)$ es una unidad de $K[[\sigma]]$. Por otro lado, por (2.2.4) se tiene que $\Delta_y(f) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^2$, en donde ξ_1, \dots, ξ_d son las raíces de f .

De manera que

$$(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)^2 = X^{-\alpha} u. \quad (6.2.1)$$

Dado que las raíces de f pertenecen a $K[[\sigma]]_k$, el cual es un dominio de factorización única, Observación 3.3.11, y por (6.2.1) se tiene que

$$\xi_i - \xi_j = X^{\delta_{ij}} u_{ij}, \quad (6.2.2)$$

con u_{ij} unidad de $K[[\sigma]]_k$ y $\delta_{ij} \in \frac{1}{k} \mathbb{Z}^n$.

Por hipótesis \preceq_1, \preceq_2 son σ -positivos. Por la definición (3.3.6), se tiene

$$\xi_1, \dots, \xi_d \in K[[\sigma]]_k \subset K_{\preceq_1}[[X]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq_1} \quad \text{y} \quad \xi_1, \dots, \xi_d \in K[[\sigma]]_k \subset K_{\preceq_2}[[X]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq_2}.$$

Siendo u_{ij} unidad en $K[[\sigma]]_k$, para todo i, j , también lo son en los anillos \mathcal{A}_{\preceq_1} y \mathcal{A}_{\preceq_2} .

De manera que el conjunto de δ_{ij} , construídos como en (6.2.2), es el conjunto de \preceq_1 - $\text{char}(f) = \preceq_2$ - $\text{char}(f)$.

□

Corolario 6.2.4. *Sea $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass. Sea σ en \mathbb{R}^n un cono tal que todas las raíces de f pertenecen al anillo $K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ y sean \preceq_1 y \preceq_2 órdenes σ -positivos. Si $\nu_{\preceq_1}(\Delta f) = \nu_{\preceq_2}(\Delta f)$, entonces los \preceq_1 -exponentes característicos de f y los \preceq_2 -exponentes característicos de f son los mismos.*

Demostración. Sea $v := \nu_{\preceq_1}(\Delta f) = \nu_{\preceq_2}(\Delta f)$, el cual es un vértice del polígono de Newton de $\Delta_y(f)$, por la Observación 6.1.3. Por el Lema 6.1.9, los órdenes \preceq_1 y \preceq_2 son σ_v -positivos.

Sea $\hat{\sigma}$ el cono más pequeño que contiene a σ y a σ_v . Dado que \preceq_1 y \preceq_2 son σ, σ_v -positivos, entonces \preceq_1, \preceq_2 también son $\hat{\sigma}$ -positivos. También, todas las raíces de f pertenecen al anillo $K[[\hat{\sigma}]]_k$ y $\hat{\sigma}$ contiene a σ_v , el cual es un cono asociado a un vértice del polígono de Newton de $\Delta(f)$, por lo tanto, del Teorema 6.2.3 concluimos el resultado.

□

El siguiente resultado extiende al que Lipman y Gau demuestran en [34], sobre los exponentes característicos de polinomios casi ordinarios.

Teorema 6.2.5. *Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono positivo tal que las raíces de f pertenecen a $K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si σ contiene a un cono asociado a un vértice del polígono de Newton del discriminante de f entonces para todo orden \preceq -positivo \preceq y B una \preceq -rama de f , los \preceq -exponentes característicos de f asociados a B , son los mismos, ordenados de la misma forma.*

Demostración. Por la Observación 5.1.4 se tiene que las \preceq -ramas de f son las mismas para todo \preceq orden que es σ -positivo.

Sea f_i el polinomio irreducible en $K_{\preceq}((X))[y]$ para el cual los elementos de B son raíces. Razonando como en la demostración del Lema 6.2.3, para el polinomio f_i , obtenemos que para todo orden \preceq -positivo para σ , los \preceq -exponentes característicos asociados a la \preceq -rama B , son lo mismos.

Sean M_1 y M_2 \preceq -monomios característicos asociados a la rama B , con $M_i = X^{\delta_i}$. Sea $\xi \in B$, por la Proposición 5.2.2, existen $\xi_1, \xi_2 \in B$ tales que $\xi_1 - \xi = M_1 u_1$ y $\xi_2 - \xi = M_2 u_2$, con $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_{\preceq}$ unidades. Dado que σ es \preceq -positivo y las raíces de f pertenecen al anillo $K[[\sigma]]_k \subset \mathcal{A}_{\preceq}$, entonces $u_1, u_2 \in K[[\sigma]]_k$.

Tenemos $M_1 u_1 - M_2 u_2 = (\xi_1 - \xi) + (\xi_2 - \xi) = \xi_1 - \xi_2 = M' u'$, para algún $M' \preceq$ -monomio característico de f y $u' \in K[[\sigma]]_k$. De donde obtenemos que

$$M_1 u_1 - M_2 u_2 = M' u' \quad (6.2.3)$$

Se tiene que $\nu_{\preceq}(M_1 u_1 - M_2 u_2) = \min\{\nu_{\preceq}(M_1 u_1), \nu_{\preceq}(M_2 u_2)\}$. Supongamos que $\nu_{\preceq}(M_1 u_1 - M_2 u_2) = \nu_{\preceq}(M_1 u_1) = \nu_{\preceq}(M_1) = \delta_1$. Por (6.2.3) se tiene que $\nu_{\preceq}(M_1 u_1 - M_2 u_2) = \nu_{\preceq}(M') = \delta'$, para algún $\delta' \preceq$ -exponente característico de f con $M' = X^{\delta'}$, por lo que $\delta_1 = \delta'$.

Ahora, de (6.2.3) obtenemos que $X_1^{\delta}(u_1 - X^{\delta_2 - \delta_1}) = X^{\delta_1} u'$, por lo tanto

$$u_1 - X^{\delta_2 - \delta_1} = u' \in K[[\sigma]]_k. \quad (6.2.4)$$

Dado que $u_1, u' \in K[[\sigma]]_k$, entonces $X^{\delta_2 - \delta_1} \in K[[\sigma]]_k$, de donde obtenemos que $\delta_2 - \delta_1 \in \sigma$.

Sea \preceq_1 otro orden positivo para σ . Dado que $\delta_i - \delta_j \in \sigma$, entonces $0 \preceq_1 \delta_1 - \delta_2$. De donde obtenemos que $\delta_1 \preceq_1 \delta_2$.

□

Corolario 6.2.6. *Sean $f \in K[[X]][y]$ un polinomio irreducible de Weierstrass, $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono positivo tal que las raíces de f pertenecen a $K[[\sigma]]_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ y f es \preceq -libre para todo orden \preceq que es σ -positivo. Entonces σ contiene a un cono asociado a un vértice del polígono de Newton del discriminante de f si y sólo si para todo orden \preceq que es σ -positivo, los \preceq -exponentes característicos de f , son los mismos, ordenados de la misma forma.*

Demostración. Por el Teorema 6.2.5, para todo orden σ -positivo \preceq tal que f es \preceq -libre se tiene que los \preceq -exponentes característicos de f , son los mismos, ordenados de la misma forma.

Recíprocamente, por el Lema 4.1.2 obtenemos que $\Delta(f) = X^{\delta} u$, con $u \in K[[\sigma]]^*$ y $\delta \in \mathbb{Z}^n$. Se tiene que $\nu_{\preceq}(\Delta_y(f)) = -\delta$. Por lo que $v := -\delta$ es un vértice de $\mathcal{N}_X(\Delta_y(f))$. Sea σ_v el cono asociado al vértice v .

Se tiene que $\mathcal{N}_X(\Delta_y(f)) \subset \mathcal{N}_{X,\sigma}(\Delta_y(f))$. Por el Lema 6.1.4, $\mathcal{N}_{X,\sigma}(\Delta_y(f))$ tiene un único vértice, a saber, $-\delta$. De donde obtenemos que $\mathcal{N}_{X,\sigma}(\Delta_y(f)) = -\delta + \sigma$. Sea $\bar{\sigma}_v$ el cono asociado al σ -polígono de Newton de $\mathcal{N}_{X,\sigma}(\Delta_y(f))$, entonces $\sigma_v \subset \bar{\sigma}_v$. Dado que $\bar{\sigma}_v = \sigma$, entonces concluimos que σ contiene a un cono asociado a v .

□

CAPÍTULO 7

Ejemplos

En este capítulo presentamos todos los ejemplos que se exponen en este trabajo. Buchacher ha implementado un algoritmo en @Mathematica que calcula los primeros términos de la raíz en $\mathcal{S}_{\leq w}$ de polinomios $f \in K[[X]][y]$, ver en [15]. Hemos utilizado su algoritmo para calcular algunos de los ejemplos de este trabajo.

Ejemplo 1. Sea $f(y) = y^3 + 2x^2y - 3x \in \mathbb{C}[[x]][y]$. Por la ecuación (2.2.4) se tiene que $\Delta_y(f) = (-1)^{\frac{3(2)}{2}} \det(R)$, en donde R es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^2 & -3x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x^2 & -3x \\ 3 & 0 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2x^2 \end{pmatrix} \quad (7.0.1)$$

Por lo que $\Delta_y(f) = -x^2(243 + 32x^4)$, con $243 + 32x^4 \in \mathbb{C}[[x]]$ unidad, Proposición 1.4.1, de manera que f es un polinomio casi ordinario.

Ejemplo 2. Sea $f(y) = y^2 + x_1y + x_2 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$. Sea R como en (2.2.1):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 2 & x_1 & 0 \\ 0 & 2 & x_1 \end{pmatrix} \quad (7.0.2)$$

Entonces $\Delta_y(f) = x_1^2 - 4x_2 \neq x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} u$, con u unidad de $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]$, Proposición 1.4.1, y $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{N}$. Por lo que, f no es un polinomio casi ordinario.

Ejemplo 3. Sea $f(z) = (z - x)^2 + xy \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$ y $\Delta_z(f) = -4xy$. De manera que f es casi ordinario.

Las raíces de f son $\xi_1 = x + ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ y $\xi_2 = x - ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, entonces $\xi_1 - \xi_2 = 2ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, por lo que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el exponente característico de f .

Ejemplo 4. Consideremos $f(z) = z^2 + y - x^2 \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$. El discriminante de f es $\Delta_z(f) = 4(x^2 - y)$, por lo que f no es casi ordinario.

Ejemplo 5. Sea $f(y) = y^2 + x_1y + x_1 \in \mathbb{C}[[x_1]][y]$. Las raíces de f son:

$$y = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{x_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_1 - 4}}{2} = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{x_1^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{8} + \frac{x_1^3}{16} + \dots)}{2} \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}]].$$

El discriminante de f es $\Delta(f) = x_1(x_1 - 4)$, de manera que f es casi ordinario. Haciendo la diferencia entre las raíces obtenemos que $\frac{1}{2}$ es el exponente característico de f .

Ejemplo 6. Sea $f(y) = y^2 - 2(x_2 + 1)y + (x_2 + 1) - x_1 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$. Se tiene que $\Delta_y(f) = -4x_1$, por lo que f es casi ordinario, y sus raíces son $\xi = \pm x_1^{\frac{1}{2}} + x_2 + 1 \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$. El exponente característico de f es $(\frac{1}{2}, 0)$ y $M = X^{(\frac{1}{2}, 0)}$ es su monomio característico.

Ejemplo 7. El siguiente ejemplo fue tomado de [16]. Sea $f(y) = y^4 - 8x_2y^3 + (24x_2^2 - 2x_2^3 - 2x_1x_2^4)y^2 + (-32x_2^3 + 8x_2^4 + 8x_1x_2^5)y + 16x_2^4 - 8x_2^5 + x_2^6 + 2x_1x_2^7 - 8x_1x_2^6 + x_1^2x_2^8 - 4x_1x_2^7 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$, con $\Delta_y(f) = 4096x_1^2x_2^{20}(1 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2)$, por lo que f es casi ordinario.

Las raíces de f son $\xi = 2x_2 \pm x_2^{\frac{3}{2}} \pm x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$, las cuales pertenecen al anillo $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$, en cuyo caso $k = 2 \neq \deg(f) = 4$; sin embargo, $\mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]] \subset \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{4}}, x_2^{\frac{1}{4}}]]$. Haciendo las diferencias de las raíces de f obtenemos que los exponentes característicos son $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(0, \frac{3}{2})$.

Ejemplo 8. Consideremos $f(y) = [(y - x_2)^2 - x_1x_2^4 - x_2^3]^2 - 4x_1x_2^7 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$. Se tiene que $\Delta_y(f) = 4096x_1^2x_2^{20}(1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2)$, por lo que f es casi ordinario. Las raíces de f son $x_2 \pm x_2^{\frac{3}{2}} \pm x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2 \in \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{2}}, x_2^{\frac{1}{2}}]]$.

Sean $\xi := x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$, $\lambda = (0, 1)$, $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$. Entonces

1. $\lambda_1 < \lambda_2$,
2. $c_\lambda = 1$ y $\lambda \in \mathbb{Z}^2 + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$,

3. $\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^2$, $\lambda_2 \notin \mathbb{Z}^2 + (0, \frac{3}{2})\mathbb{Z}$.

De manera que ξ es una raíz casi ordinaria y los exponentes característicos asociados a ξ son $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$.

Ahora bien, consideremos $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = x_2 - x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$, $\xi_3 = x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$ y $\xi_4 = x_2 - x_2^{\frac{3}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2$, por lo que

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 &= 2x_2^{\frac{3}{2}} + 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2 = x_2^{\frac{3}{2}}(2 + x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}), \\ \xi - \xi_3 &= \xi_2 - \xi_3 = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^2, \\ \xi - \xi_4 &= \xi_2 - \xi_4 = 2x_2^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{7.0.3}$$

Teniéndose que $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$ son los exponentes característicos. Como el Teorema 2.4.9 garantiza, los exponentes característicos de f coinciden con los exponentes asociados a ξ .

Ejemplo 9. Consideremos $f(z) = z^4 - 2xy^2z^2 - 2x^3y^5z^2 + x^2y^4 + 2x^4y^7 + x^6y^{10} - 4x^4y^7 \in K[[x, y]][z]$. El discriminante de f es $\Delta(f) = 4096x^{10}b^{18}(x^4b^6 - 2x^2y^3 + 1)$, por lo que f es casi ordinario. Las raíces de f son $\pm x^{\frac{1}{2}}y \pm x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}$.

Los exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ y $\lambda_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ y sus monomios característicos son $M_1 = X^{\lambda_1}$ y $M_2 = X^{\lambda_2}$.

Ejemplo 10. Consideremos $f(y) = y^5 + x_1^2x_2^2y^2 + x_2^5 \in K[[x_1, x_2]][y]$. El discriminante de f es $\Delta(f) = 108x_1^{10}x_2^{15} + 3125x_2^{20}$, por lo que f no es casi ordinario. Consideremos $\omega = (1, \sqrt{5})$, en el campo $K_{\leq \omega}((x_1, x_2))_6$ podemos hallar a las raíces de f las cuales son:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{44}{81}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_2 &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2i}{3i + 3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{-44i + 44\sqrt{3}}{81i + 81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_3 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - \frac{2i}{-3i + 3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{8}{3}}x_2^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{44i + 44\sqrt{3}}{-81i + 81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{28}{3}}x_2^{\frac{17}{3}} + \dots \\ \xi_4 &= -ix_1^{-1}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-6}x_2^4 + \frac{9i}{8}x_1^{11}x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-16}x_2^9 + \dots \\ \xi_5 &= ix_1^{-1}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-6}x_2^4 - \frac{9i}{8}x_1^{11}x_2^{\frac{13}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-16}x_2^9 + \dots\end{aligned}$$

Calculando las diferencias entre las raíces obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_2 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_1, & \xi_1 - \xi_3 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_2, \\
\xi_2 - \xi_3 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_3, & \xi_1 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_4, \\
\xi_1 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_5, & \xi_2 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_6, \\
\xi_2 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_7, & \xi_3 - \xi_4 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_8, \\
\xi_3 - \xi_5 &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} u_9, & \xi_4 - \xi_5 &= x_1^{-1} x_2^{\frac{3}{2}} u_{10}.
\end{aligned}$$

De manera que $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y $(-1, \frac{3}{2})$ son los \leq_ω -exponentes característicos de f .

Consideremos $\eta = -1$ una raíz 2-ésima primitiva de la unidad, para cualquier $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_4) = \xi_5$.

Ahora, consideremos $\eta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ una raíz 3-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2\}^2$. Si $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (1, 1)$, entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_2$. Ahora, si $\mu = (2, 2)$ entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_1$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que las \leq_ω -ramas de f son $B_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ y $B_2 = \{\xi_4, \xi_5\}$, teniéndose que f no es \leq_ω -libre.

El \leq_ω -exponente característico asociado a B_1 es $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ y el \leq_ω -exponente característico asociado a B_2 es $(-1, \frac{3}{2})$. Además, el \leq_ω -exponente característico de contacto de las ramas B_1 y B_2 es $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Se tiene que $\nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = (10, 15)$, $N_{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} = 18$ y $N_{(-1, \frac{3}{2})} = 2$, por lo que

$$\begin{aligned}
(10, 15) &= \nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) \\
&= 18\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + 2\left(-1, \frac{3}{2}\right) \\
&= N_{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + N_{(-1, \frac{3}{2})}\left(-1, \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Cumplíndose lo que en efecto la Proposición 6.2.1 establece.

Consideremos ahora a $\omega_1 = (\sqrt{5}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Se tiene que las raíces de f son

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -y - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{625}x^8y^{-3} + \frac{1}{125}x^6y^{-2} + \dots \\
\xi_2 &= (-0,309 - 0,951i)y - \frac{-0,809 + 0,588i}{1,55 - 4,76i}x^2 - \frac{-0,0124 - 0,0380i}{1,55 - 4,76i}x^6y^{-2} + \dots \\
\xi_3 &= (-0,309 + 0,951i)y - \frac{-0,809 - 0,588i}{1,55 + 4,76i}x^2 - \frac{-0,0124 + 0,0380i}{1,55 + 4,76i}x^6y^{-2} + \dots \\
\xi_4 &= (0,809 - 0,588i)y - \frac{0,309 - 0,951i}{-4,05 - 2,94i}x^2 - \frac{0,0324 - 0,0235i}{-4,05 - 2,94i}x^6y^{-2} + \dots
\end{aligned}$$

$$\xi_5 = (0,809 + 0,588i)y - \frac{0,309 + 0,951i}{-4,05 + 2,94i}x^2 - \frac{0,0324 + 0,0235i}{-4,05 + 2,94i}x^6y^{-2} + \dots$$

Haciendo las diferencias de las raíces obtenemos que f tiene un \leq_{ω_1} -exponente característico, a saber, $(0, 1)$.

Usando la Proposición 5.1.6 se tiene que las raíces de f , al tener soporte en \mathbb{Z}^2 son invariantes para todo $\tau_{\eta,\mu}$. De manera que f tiene 5 \leq_{ω_1} -ramas, a saber, $B_1 = \{\xi_1\}$, $B_2 = \{\xi_2\}$, $B_3 = \{\xi_3\}$, $B_4 = \{\xi_4\}$ y $B_5 = \{\xi_5\}$.

El polinomio f no tiene \leq_{ω_1} -exponentes característicos asociados a sus \leq_{ω_1} -ramas. Pero sí tiene \leq_{ω_1} -exponentes característicos de contacto entre las \leq_{ω_1} -ramas, el cual es $(0, 1)$.

Ejemplo 11. Sea $f(z) = z^2 - (x + y^2) \in \mathbb{C}[[x, y]][z]$. El discriminante de f es $\Delta(f) = 4(x + y^2)$, por lo que no es casi ordinario. Tomando el orden $\omega_1 = (\sqrt{2}, 1)$, las raíces de f son

$$\xi_1 = -x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^2 + \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^4 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^6 + \frac{5}{128}x^{-\frac{7}{2}}y^8 + \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}y^{10} + \dots$$

y

$$\xi_2 = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^2 - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^4 - \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^6 - \frac{5}{128}x^{-\frac{7}{2}}y^8 - \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}y^{10} + \dots$$

Tomando el orden $\omega_2 = (4, \sqrt{2})$ se tiene que las raíces de f son:

$$\xi_1 = \frac{7i}{256}x^5y^{-9} + \frac{5i}{128}x^4y^{-7} + \frac{i}{16}x^3y^{-5} + \frac{i}{8}x^2y^{-3} + \frac{i}{2}xy^{-1} - iy + \dots$$

y

$$\xi_2 = -\frac{7i}{256}x^5y^{-9} - \frac{5i}{128}x^4y^{-7} - \frac{i}{16}x^3y^{-5} - \frac{i}{8}x^2y^{-3} - \frac{i}{2}xy^{-1} + iy + \dots$$

Usando la Proposición 5.1.6, si $\eta = -1$, raíz 2-ésima primitiva de la unidad, para cualquier $\mu \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\tau_{\eta,\mu}(\xi_1) = \xi_2$. Por lo que f tiene una \leq_{ω_1} -rama.

Ahora, tomando el orden \leq_{ω_2} , el soporte de $Supp(\xi_1), Supp(\xi_2) \subset \mathbb{Z}^2$, por lo que es invariante para cualquier $\tau_{\eta,\mu}$. De manera que f tiene dos \leq_{ω_2} -ramas.

El \leq_{ω_1} -exponente característico de f es $(\frac{1}{2}, 0)$, el cual también es el asociado a la \leq_{ω_1} -rama de f .

El \leq_{ω_2} -exponente característico de f es $(5, -9)$, el cual también es el \leq_{ω_2} -exponente característico de contacto entre las \leq_{ω_2} -ramas de f .

Ejemplo 12. Sea $f(y) = y^5 + x_1x_2y^2 + x_2^4 \in K[[x_1, x_2]][y]$. El discriminante de f es $\Delta(f) = x_2^9(108x_1^5 + 3125x_2^7)$, por lo que f no es casi ordinario.

Consideremos $\omega = (\sqrt{2}, 2)$ y al orden \leq_ω . Podemos hallar las raíces de f en el campo $K_{\leq_\omega}((X))_6$, las cuales son:

$$\xi_1 = -x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x_1^{-\frac{4}{3}}x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-3}x_2^5 - \frac{44}{81}x_1^{-\frac{14}{3}}x_2^{\frac{22}{3}} + \dots$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} + \frac{2i}{3i + 3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{4}{3}}x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-3}x_2^5 + \frac{-44i + 44\sqrt{3}}{81i + 81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{14}{3}}x_2^{\frac{22}{3}} + \dots$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} + \frac{2i}{-3i + 3\sqrt{3}}x_1^{-\frac{4}{3}}x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3}x_1^{-3}x_2^5 + \frac{44i + 44\sqrt{3}}{-81i + 81\sqrt{3}}x_1^{-\frac{14}{3}}x_2^{\frac{22}{3}} + \dots$$

$$\xi_4 = -ix_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-3}x_2^5 + \frac{9i}{8}x_1^{-\frac{11}{2}}x_2^{-\frac{17}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-8}x_2^{-8} + \dots$$

$$\xi_5 = ix_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x_1^{-3}x_2^5 - \frac{9i}{8}x_1^{-\frac{11}{2}}x_2^{-\frac{17}{2}} + \frac{7}{2}x_1^{-8}x_2^{-8} + \dots$$

Haciendo las diferencia de las raíces de f se tiene que los \leq_ω -exponentes característicos de f son $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, con $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \leq_\omega (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Consideremos $\eta = -1$ una raíz 2-ésima primitiva de la unidad, para cualquier $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_4) = \xi_5$.

Ahora, consideremos $\eta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ una raíz 3-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2\}^2$. Si $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (0, 1), (1, 0)$, entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_2$. Ahora, si $\mu = (1, 1)$ entonces $\tau_{\eta, \mu}(\xi_3) = \xi_1$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que las \leq_ω -ramas de f son $B_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ y $B_2 = \{\xi_4, \xi_5\}$.

El polinomio f se factoriza en $K_{\leq_\omega}[[X]][y]$ como $f = gh$, en donde $h(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2)(y - \xi_3)$ y $h(y) = (y - \xi_4)(y - \xi_5)$.

El \leq_ω -exponente característico asociado a B_1 es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; el \leq_ω -exponente característico asociado a B_2 es $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; y el \leq_ω -exponente característico de contacto de B_1 y B_2 es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ahora, consideremos a $\omega_1 = (\sqrt{5}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Las raíces de f son

$$\xi_1 = -y^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{625}x^4y^{-\frac{24}{5}} + \frac{1}{125}x^3y^{-\frac{17}{5}} - \frac{1}{5}xy^{\frac{3}{5}} + \dots$$

$$\xi_2 = (-0,309 - 0,951i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{-0,809 + 0,588i}{1,55 - 4,76i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{-0,0124 - 0,0380i}{1,55 - 4,76i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_3 = (-0,309 + 0,951i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{-0,809 - 0,588i}{1,55 + 4,76i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{-0,0124 + 0,0380i}{1,55 + 4,76i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_4 = (0,809 - 0,588i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{0,309 - 0,951i}{-4,05 - 2,94i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{0,0324 - 0,0235i}{-4,05 - 2,94i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

$$\xi_5 = (0,809 + 0,588i)y^{\frac{4}{5}} - \frac{0,309 + 0,951i}{-4,05 + 2,94i}xy^{-\frac{3}{5}} - \frac{0,0324 + 0,0235i}{-4,05 + 2,94i}x^3y^{-\frac{17}{5}} + \dots$$

Haciendo las diferencias entre las raíces de f , su \leq_{ω_1} -exponente característico es $(0, \frac{4}{5})$.

Sea η una raíz 5-ésima primitiva de la unidad y $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2$. Para toda raíz de f existe μ tal que $\tau_{\eta, \mu}(\xi_5) = \xi_i$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Usando la Proposición 5.1.6, obtenemos que f tiene una única \leq_{ω_1} -rama, $B = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$, por lo tanto f es \leq_{ω_1} -libre, Observación 5.1.3.

El \leq_{ω_1} -exponente característico asociado a la rama B es $(0, \frac{4}{5})$.

Ejemplo 13. Sea $f(z) = (z^2 - x - y)^2 - 4xy \in K[[x, y]][z]$. Se tiene que $\Delta(f) = 4096x^4y^2 - 8192x^3y^3 + 4096x^2y^4$, por lo que f no es un polinomio casi ordinario. Pero la superficie definida por f sí es de Puiseux. Las raíces de f , calculadas con cualquier orden positivo son

$$\xi_1 = x^{\frac{2}{4}} + y^{\frac{2}{4}}, \xi_2 = -x^{\frac{2}{4}} - y^{\frac{2}{4}}, \xi_3 = x^{\frac{2}{4}} - y^{\frac{2}{4}}, \xi_4 = -x^{\frac{2}{4}} + y^{\frac{2}{4}}.$$

Consideremos a $\omega = (1, \sqrt{2})$ y al orden \leq_{ω} . Los \leq_{ω} -exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $\lambda_2 = ((0, \frac{1}{2}))$, en donde $(\frac{1}{2}, 0) \leq_{\omega} (0, \frac{1}{2})$.

Los elementos de $Gal(K_{\leq_{\omega}}((X))_4 : K_{\leq_{\omega}}((X)))$ son τ_1, \dots, τ_{16} , donde:

$$\begin{array}{ll} \tau_1 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} & \tau_9 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} \\ \tau_2 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} & \tau_{10} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} \\ \tau_3 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{11} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} \\ \tau_4 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{12} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} \\ \tau_5 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} & \tau_{13} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto y^{\frac{1}{4}} \\ \tau_6 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} & \tau_{14} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -y^{\frac{1}{4}} \\ \tau_7 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{15} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto iy^{\frac{1}{4}} \\ \tau_8 : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} & \tau_{16} : x^{\frac{1}{4}} \mapsto -ix^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}} \mapsto -iy^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

El campo de factorización de f sobre $K((x, y))$ es $K((x, y))_f = K((x, y))[x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}}]$ y $Gal(K((x, y))_f : K((x, y))) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$, en donde:

$$\begin{array}{ll} \rho_1 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto y^{\frac{1}{2}}, & \rho_3 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto -x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto y^{\frac{1}{2}}, \\ \rho_2 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto -x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto -y^{\frac{1}{2}}, & \rho_4 : x^{\frac{1}{2}} \mapsto x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}} \mapsto -y^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

El conjunto $Im(\Psi)$, como en la Proposición 5.1.7 es $Im(\Psi) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\} = Gal(K((x, y))_f : K((x, y)))$. De donde,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \Psi(\tau_1) = \Psi(\tau_2) = \Psi(\tau_5) = \Psi(\tau_6), \\ \rho_2 &= \Psi(\tau_{11}) = \Psi(\tau_{12}) = \Psi(\tau_{15}) = \Psi(\tau_{16}), \\ \rho_3 &= \Psi(\tau_9) = \Psi(\tau_{10}) = \Psi(\tau_{13}) = \Psi(\tau_{14}), \\ \rho_4 &= \Psi(\tau_3) = \Psi(\tau_4) = \Psi(\tau_7) = \Psi(\tau_8).\end{aligned}$$

Las singularidades de Puiseux irreducibles son \preceq -libres para cualquier orden positivo, por lo cual $Im(\Psi)$ tiene una única órbita.

Tomando a ξ_1 se tiene que $H_{\lambda_1} = \{\rho_2, \rho_3\}$ y $H_{\lambda_2} = \{\rho_4\}$. Podemos notar que para cualquier raíz ξ_i de f , se obtienen los mismos conjuntos H_{λ_1} y H_{λ_2} . Además, $H_{\lambda_1} \cap H_{\lambda_2} = \emptyset$.

Se tiene que $N_{\lambda_1} = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_4, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \xi_2 - \xi_1, \xi_4 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \xi_4 - \xi_3\}| = 8$, $N_{\lambda_2} = |\{\xi_1 - \xi_3, \xi_2 - \xi_4, \xi_3 - \xi_1, \xi_4 - \xi_2\}| = 4$ y $\nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) = (4, 2)$.

Entonces,

$$\begin{aligned}(4, 2) &= \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) \\ &= N_{\lambda_1} \lambda_1 + N_{\lambda_2} \lambda_2 \\ &= 8 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + 4 \left(0, \frac{1}{2} \right) = (4, 2).\end{aligned}$$

Se tiene que $|H_{\lambda_1}| = 2$ y $|H_{\lambda_2}| = 1$ y $|Gal(K((X))_f : K((X)))| = 4$, por lo que

$$\begin{aligned}(4, 2) &= \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) \\ &= |Gal(K((X))_f : K((X)))| (|H_{\lambda_1}| \lambda_1 + |H_{\lambda_2}| \lambda_2) \quad (7.0.4) \\ &= 4 \left(2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) = (4, 2).\end{aligned}$$

Ahora, consideremos $\omega_1 = (\sqrt{2}, 1)$ y al orden \leq_{ω_1} . Los \leq_{ω_1} -exponentes característicos de f son $\lambda_1 = (0, \frac{1}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, con $\lambda_1 \leq_{\omega_1} \lambda_2$.

Se tiene que $N_{\lambda_1} = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \xi_2 - \xi_4, \xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1, \xi_4 - \xi_3, \xi_4 - \xi_2\}| = 8$ y $N_{\lambda_2} = |\{\xi_1 - \xi_4, \xi_2 - \xi_3, \xi_4 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2\}| = 4$ y $\nu_{\leq_{\omega_1}}(\Delta(f)) = (2, 4)$.

De donde obtenemos

$$(2, 4) = \nu_{\leq_{\omega_1}}(\Delta(f)) = N_{\lambda_1} \lambda_1 + N_{\lambda_2} \lambda_2 = 8 \left(0, \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = (2, 4). \quad (7.0.5)$$

Cumpléndose en (7.0.4) y (7.0.5) lo que establece la Proposición 6.2.1.

Ejemplo 14. Sea $f(y) = y^2 + x_1y - x_1^3 - x_2 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]][y]$. El discriminante de f es $\Delta(f) = 4x_1^3 + x_1^2 + 4x_2$, por lo que f no es casi ordinario. Consideremos $\omega = (1, \pi)$. En el campo $K_{\leq \omega}((X))$ podemos encontrar a las raíces de f , las cuales son

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^2 + x_1^{-1}x_2 - x_1^3 - 2x_2 - x_1^{-3}x_2^2 + 6x_1x_2 + 6x_1^{-2}x_2^{-2} + \dots, \\ \xi_2 &= -x_1 - x_1^2 + x_1^3 - 2x_1^4 + 5x_1^5 + 2x_2 - x_2x_1^{-1} - 6x_1x_2 + 20x_1^2x_2 + x_2^2x_1^{-3} - 6x_2^2x_1^{-2} - 2x_2^3x_1^{-5} + \dots\end{aligned}$$

Calculando la diferencia entre las raíces obtenemos:

$$\xi_1 - \xi_2 = x_1 - 2x_1^2 - x_1^3 + 4x_2 + 2x_1^{-1}x_2 + \dots = x_1u, \quad (7.0.6)$$

con u unidad en $A_{\leq \omega}$.

El polinomio tiene dos $\leq \omega$ -ramas, a saber, $B_1 = \{\xi_1\}$ y $B_2 = \{\xi_2\}$. También, f tiene un $\leq \omega$ -exponente característico $(1, 0)$. Dado que cada $\leq \omega$ -rama tiene un único elemento, entonces no hay $\leq \omega$ -exponentes característicos asociados a las \leq -ramas. Por otro lado, tampoco hay $\leq \omega$ -exponentes asociados a las raíces, pues $Supp(\xi_1), Supp(\xi_2) \subset \mathbb{Z}^2$. Teniéndose que el conjunto de los $\leq \omega$ -exponentes característicos asociados a una rama de f coincide con el conjunto de $\leq \omega$ -exponentes característicos asociados a las raíces, tal como lo establece el Teorema 5.2.5.

Ejemplo 15. Sean $f(y) = y^2 - (x_1^2 + x_2^2) \in K[[x_1, x_2]][y]$ y $\sigma = \langle (0, 1), (1, -1) \rangle$. Con ayuda del binomio de Newton podemos calcular las raíces de f en $K[[\sigma]]$, las cuales son, $\xi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i}$, $\xi_2 = -\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i} \in K[[\sigma]]$, donde $\mu = \frac{1}{2}$. Consideremos $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y al orden $\leq \omega$ en \mathbb{R}^n .

Tenemos que $\xi_1 - \xi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \binom{\mu}{i} x_1^{2i} x_2^{1-2i} = X^{(0,1)}u$, tal que $u \in \mathcal{A}_{\leq \omega}$, es una unidad. Por lo tanto $(0, 1)$ es el $\leq \omega$ -exponente característico de f .

El polinomio f tiene dos $\leq \omega$ -ramas, a saber, $B_1 = \{\xi_1\}$ y $B_2 = \{\xi_2\}$, las cuales no tienen $\leq \omega$ -exponentes asociados, pues cada rama tiene una única raíz. De igual manera, cada raíz ξ_1, ξ_2 , no tiene $\leq \omega$ -exponentes asociados, pues $Supp(\xi_1), Supp(\xi_2) \subset \mathbb{Z}^2$. Concluyendo que los $\leq \omega$ -exponentes característicos asociados a las ramas coincide con el conjunto de los $\leq \omega$ -asociados a las raíces, tal como lo establece el Teorema 5.2.5.

Ejemplo 16. Sean $f(y) = y^6 - 3x_1y^4 + 2x_2y^3 + 3x_1^2y^2 + 6x_1x_2y - x_1^3$, $\omega = (1, \sqrt{2})$ y $\leq \omega$ un orden total en \mathbb{R}^n .

Las raíces de f las podemos hallar en el campo $K_{\leq \omega}((X))_6$, las cuales son:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\
\xi_2 &= -\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\
\xi_3 &= -\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} + x_1^{\frac{3}{6}}, \\
\xi_4 &= -x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}, \\
\xi_5 &= -\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}, \\
\xi_6 &= -\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x_2^{\frac{2}{6}} - x_1^{\frac{3}{6}}.
\end{aligned}$$

Se tiene que f es \leq_ω -libre, por lo que tiene una única $B \leq_\omega$ -rama, a saber, $B = \{\xi_1, \dots, \xi_6\}$.

Los \leq_ω -exponentes característicos de f son $(0, \frac{2}{6})$ y $(\frac{3}{6}, 0)$.

Por otro lado, los \leq_ω -exponentes asociados a ξ_1 son $\lambda_1 = \min_{\leq} \{Supp(\xi) \setminus \mathbb{Z}^2\} = (0, \frac{2}{6})$. Además, $(\frac{3}{6}, 0) \notin \mathbb{Z}^2 + (0, \frac{2}{6})\mathbb{Z}$. Por lo que, $\lambda_2 = \min_{\leq} \left\{ Supp(\xi) \setminus \left(\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \mathbb{Z}^2 \right) \right\} = \left(\frac{3}{6}, 0 \right)$.

En efecto, como el Teorema 5.2.5 garantiza, los \leq_ω -exponentes característicos de f son los \leq_ω -exponentes asociados a ξ_1 .

El discriminante de f es $\Delta(f) = 1166400x_1^{15} - 11897280x_1^{14}x_2 + 44509824x_1^{13}x_2^2 - 73063296x_1^{12}x_2^3 - 12130560x_1^{12}x_2^2 + 49128768x_1^{11}x_2^4 + 100357056x_1^{11}x_2^3 - 11337408x_1^{10}x_2^5 - 273357504x_1^{10}x_2^4 + 240604992x_1^9x_2^5 - 27013824x_1^9x_2^4 + 11337408x_1^8x_2^6 - 99937152x_1^8x_2^5 + 238085568x_1^7x_2^6 - 3779136a^6b^7 + 361164096x_1^6x_2^6 - 8118144x_1^5x_2^7 + 419904x_1^4x_2^8 + 746496x_1^3x_2^8$.

Por lo tanto, $\nu_{\leq_\omega}(\Delta(f)) = (3, 8)$.

Por otro lado, $N_{\lambda_1} = 2 \cdot \left| \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \xi_1 - \xi_5, \xi_1 - \xi_6, \xi_2 - \xi_3, \xi_2 - \xi_4, \xi_2 - \xi_6, \xi_3 - \xi_4, \xi_3 - \xi_5, \xi_4 - \xi_5, \xi_4 - \xi_6, \xi_5 - \xi_6 \right| = 24$ y $N_{\lambda_2} = 2 \cdot \left| \xi_1 - \xi_4, \xi_3 - \xi_6, \xi_2 - \xi_3 \right| = 6$.

De manera que

$$\begin{aligned}
(3, 8) &= \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) \\
&= N_{\lambda_1} \lambda_1 + N_{\lambda_2} \lambda_2 \\
&= 24 \left(0, \frac{2}{6}\right) + 6 \left(\frac{3}{6}, 0\right) \\
&= (3, 8)
\end{aligned}$$

Cumpléndose la igualdad tal como lo establece la Proposición 6.2.1.

Ejemplo 17. Sea $f(z) = z^4 + x^3yz^3 - 12x^2y^2z^2 + x^3yz - 5x^3y^5 \in K[[x, y]][z]$ y consideremos el orden $\omega = (1, \sqrt{11})$.

Las raíces de f son

$$\xi_1 = x^{-3}y^{-1} + 103680yx^{-13} - 3456yx^{-9} + 144yx^{-5} - 12yx^{-1} - x^3y + \dots$$

$$\xi_2 = -xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y - 4xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{9}x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y + (2+2i\sqrt{3})xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{18}(1+i\sqrt{3})x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}(2-2i\sqrt{3})x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})xy^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3y + (2-2i\sqrt{3})xy^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{18}(1-i\sqrt{3})x^5y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}(2+2i\sqrt{3})x^3y^{\frac{7}{3}} + \dots$$

Se tiene que f no es \leq_{ω} -libre, pues $\xi_1 \in K_{\leq \omega}((x, y))$.

Por otro lado, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in K_{\leq \omega}((x, y))_3$, por lo que los \leq_{ω} -exponentes característicos de f pertenecen a $\frac{1}{3}\mathbb{Z}^2$, los cuales se obtienen restando las raíces, $\xi_1 - \xi_i = X^{(-1, -3)}u_i$, con $i = 2, 3, 4$ y $\xi_j - \xi_m = X^{(1, \frac{1}{3})}u_{jm}$ con $j, k = 2, 3, 4$, de manera que $\lambda^{(1)} = (-3, -1)$ y $\lambda^{(2)} = (1, \frac{1}{3})$. Construyamos a M como en (4.4.1):

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.0.7)$$

Se tiene que los menores de orden 2 de la matriz M son: 9, 27, 0 y 3. Por lo que, $\text{mcd}(9, 27, 0, 3) = 3$.

De modo que $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] = \frac{3^2}{3} = 3$, con $i = 2, 3, 4$ y $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_1] : K_{\leq \omega}((x, y))] = 1$. Sin embargo, $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] \neq \text{deg}(f)$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo 18. Sea $f(z) = z^4 + 3xyz^3 + x^2y^6z^2 + xy^7z + x^6y^5 - x^2y^3 \in K[[x, y]][z]$. Sea $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y consideremos al orden \leq_{ω} .

Calculemos las raíces de f en $\mathcal{S}_{\leq \omega}$:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy - \frac{27}{32}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} - \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots \\ \xi_2 &= -ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy + \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} + \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots \\ \xi_3 &= ix^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy - \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} + \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots \\ \xi_4 &= x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}xy + \frac{27}{32}ix^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{4}} - \frac{27}{32}x^2y^{\frac{3}{2}} + \dots\end{aligned}$$

Se tiene que $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in K_{\leq \omega}((x, y))_4$. Además f es $\leq \omega$ -libre. Si calculamos la resta de las raíces de f se tiene que $\xi_i - \xi_l = X^{(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}u_{jl}$ con $j \neq l$ y $j, l = 1, 2, 3, 4$. Por lo que f tiene un único $\leq \omega$ -exponente característico, a saber, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}^2$. Calculemos a M como en (4.4.1):

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (7.0.8)$$

Se tiene que los menores de orden 2 de la matriz M es: 16, -8, 12. Por lo que, $\text{mcd}(16, -8, 12) = 4$. Por lo tanto, $[K_{\leq \omega}((x, y))[\xi_i] : K_{\leq \omega}((x, y))] = \frac{4^2}{4} = 4$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$. En efecto, como la Proposición 5.2.9 lo establece.

Ejemplo 19. Consideremos $f(z) = z^2 - (x + y)^2 \in K[[x, y]][z]$, a $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ y al orden $\leq \omega$. Las raíces de f son $\xi_1 = x + y$ y $\xi_2 = -x - y$, por lo que f no es $\leq \omega$ -libre. Por otro lado, el único $\leq \omega$ -exponente característico de f es $(1, 0)$. Se tiene que $N_\lambda = |\{\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_1\}| = 2$ y $\Delta(f) = x^2 + 2xy + y^2$, de manera que $\nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) = (2, 0)$.

En efecto, como la Proposición 6.2.1 lo establece

$$(2, 0) = \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) = N_\lambda \lambda = 2(1, 0) = (2, 0).$$

Sin embargo, dado que f no es $\leq \omega$ -libre y $\xi_1, \xi_2 \in K((x, y))$, entonces $\text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y)))$ tiene un único elemento, la identidad. Por lo que, $H_{\lambda, \xi_1} = \{\varphi \in \text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y))) \mid \varphi(\xi_1) - \xi_1 = X^\lambda u, \text{ unidad}\} = \emptyset$. Así,

$$(2, 0) = \nu_{\leq \omega}(\Delta(f)) \neq |\text{Gal}(K((x, y))_f : K((x, y)))| |H_{\lambda, \xi_1}| \lambda = 1 \cdot 0 \cdot (1, 0) = (0, 0).$$

En cuyo caso, el Corolario 6.2.2 no se cumple pues f no es $\leq \omega$ -libre.

Bibliografía

- [1] Abhyankar, S. *On the ramification of algebraic functions. II. Unaffected equations for characteristic two*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 310–324; MR0098749.
- [2] Abhyankar, S. *On the semigroup of a meromorphic curve*, Proc. Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto (1977), 249–414.
- [3] Abhyankar, S. *Expansion techniques in algebraic geometry*, Lecture Notes by B. Singh, T.I.F.R. (1977).
- [4] Abhyankar, S. S. and Moh, T., *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. I.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **260** (1973), 47–83.<http://eudml.org/doc/151312>.
- [5] Abhyankar, S., *On the ramification of algebraic functions*, Amer. J. Math. **77** (1995), 575–592.
- [6] Aroca, F., *Valuations Compatible with a Projection*. In: Brasselet, J.P., Ruas, M.A.S. (eds) Real and Complex Singularities. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Basel (2009). https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7776-2_2.
- [7] Aroca, F, Ayala A. and Ilardi G, *Abhyankar-Moh Semigroups for arbitrary hypersurfaces*, arXiv:2501.16552.
- [8] Aroca, F. and Ilardi, G., *A family of algebraically closed fields containing polynomials in several variables*, Communications in Algebra **37**:4 (2009), 1284–1296. <https://doi.org/10.1080/00927870802278750>.
- [9] Aroca, F. and Rond, G., *Support of Laurent series algebraic over the field of formal power series*, Proc. London Math. Soc. **118** (2019), 577–605. <https://doi.org/10.1112/plms.12188>.

- [10] Aparicio, M. and Kauers, M., *Formal Laurent series in several variables*, Expositiones Mathematicae **31**(4) (2013), 350–367.
- [11] Abbas, A. and Assi, A., *Semigroup associated with a free polynomial*, Journal of Algebra **582** (2021), 57–72.
- [12] Campillo, A. and Farrán, J., *Computing Weierstrass semigroups and the Feng–Rao distance from singular plane models*, Finite Fields Appl. **6** (2000), 71–92.
- [13] Casas-Alvero, E., *Singularities of plane curves*, Cambridge University Press, 2010.
- [14] Barrera, F., *Introducción a la Teoría de Grupos*, UAEH, 2004.
- [15] Buchacher, M., *The Newton–Puiseux algorithm and effective algebraic series*, arXiv:2209.00875 [math.CO], 2023.
- [16] Da Silva Lemes, E., *Semigrupo de uma Hipersuperfície Quase Ordinária*, Tesis de maestría, no publicada, diciembre 2010.
- [17] Dummit, D. and Foote, R., *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, 2003.
- [18] Galindo, C. and Francisco, M., *δ -sequences and evaluation codes defined by plane valuations at infinity*, Proc. London Math. Soc. **98**(3) (2009), 714–740.
- [19] García, E. and González, P., *Decomposition in terms of characteristic monomials for singularities of surfaces*, Revista Matemática Iberoamericana (2001).
- [20] García, E., González, P. and Popescu-Pampu, P., *Variations on inversion theorems for Newton–Puiseux series*, Mathematische Annalen **368** (2017).
- [21] Gau, Y.-N., *Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities*, Mem. Amer. Math. Soc. **388** (1988).
- [22] González, M., *Newton process and semigroups of irreducible quasi-ordinary power series*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **108**(1) (2014), 259–279.
- [23] González, P., *The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface*, J. Inst. Math. Jussieu **2**(3) (2003), 383–399.

- [24] Gunning, R. C. and Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables*, AMS Chelsea Publishing, 2009.
- [25] Halphen, M., *Sur une série de courbes analogues aux développées*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **2** (1876), 87–144. <http://eudml.org/doc/234624><http://eudml.org/doc/234624>.
- [26] Janusz, G.J., *Algebraic Number Fields*, Advances in the Mathematical Sciences, 1996, American Mathematical Society.
- [27] Judson Thomas W., *Abstract Algebra: Theory and Applications*, Universidad de Puget Sound, 9781944325022, 2016.
- [28] Jung, H., *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$* , Journal für die reine und angewandte Mathematik **133** (1908), 289–314. <http://eudml.org/doc/149280><http://eudml.org/doc/149280>.
- [29] Lang, S., *Algebra*, Springer, 3rd ed., 2012.
- [30] Kim H. , *Kaplansky-type theorems*, Kyungpook Math. J. 40 (2000), 9-16.
- [31] Kiyek, K. and Micus, M., *Semigroup of a quasiordinary singularity*, Topics in Algebra, Part 2 (Warsaw, 1988), Banach Center Publ. **26**, Part 2, PWN, Warsaw.
- [32] Kyungho, O., *Topological types of quasi-ordinary singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **117**(1) (1993), 53–59. <https://doi.org/10.2307/2159697><https://doi.org/10.2307/2159697>.
- [33] Lipman, J., *Introduction to resolution of singularities*, Proc. Symp. Pure Math. **29** (1975), 187–230.
- [34] Lipman, J., *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*, Mem. Amer. Math. Soc. **74**(388) (1988).
- [35] Luengo, I., *A new proof of the Jung–Abhyankar theorem*, J. Algebra **85** (1983), 399–409.
- [36] McDonald, J., *Fiber polytopes and fractional power series*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), 213–233.

- [37] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M. and Zelevinsky, A. V., *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1st ed., 1994.
- [38] Parusinski, A. and Rond, G., *The Abhyankar-Jung theorem*, Journal of Algebra **365** (2012), 29–41. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.05.003>.
- [39] Popescu-Pampu, P., *Approximate roots*, Valuation Theory and Its Applications, Vol. II, Fields Institute Communications **33** (2003), 285–321.
- [40] Popescu-Pampu, P., *On the invariance of the semigroup of a quasi-ordinary surface singularity*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334**(12) (2002), 1001–1106.
- [41] Puiseux, V., *Recherches sur les fonctions algébriques*, J. Math. Pures Appl. (1850), 365–418.
- [42] Robbiano, L., *On the theory of graded structures*, J. Symb. Comp. **2** (1986), 139–170.
- [43] Sathaye, A., *Generalized Newton-Puiseux expansion and Abhyankar-Moh semigroup theorem*, Invent. Math. **74** (1983), 149–157.
- [44] Smith, H., *On the higher singularities of plane curves*, Proc. London Math. Soc. **6**(1) (1874), 153–182. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-6.1.153><https://doi.org/10.1112/plms/s1-6.1.153>.
- [45] Tornero, J. M., *On Kummer extensions of the power series field*, Preprint, Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla, 2001.
- [46] Tornero, J. M., *Some geometric aspects of Puiseux surfaces*, Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities, Revista Matemática Iberoamericana **19**(2) (2003), 731–744.
- [47] Weierstrass, K., *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, Math. Werke **2**, 1860.
- [48] Zariski, O., *Le problème des modules pour les branches planes*, Hermann, Paris, 1965.
- [49] Zariski, O., *Collected Papers: Vol. II. Equisingularity on Algebraic Varieties*, MIT Press, 1986.

- [50] Zurro, M. A., *The Abhyankar-Jung theorem revisited*, Journal of Pure and Applied Algebra **90**(3) (1993), 275–282.

Índice alfabético

- \preceq orden σ -positivo, 17
- \preceq -exponentes
 - asociados a ζ , 51
 - característicos asociados a la
 - \preceq -rama B , 67
 - característicos de f , 48
- \preceq -monomios
 - característicos asociados a la
 - rama B , 67
 - característicos de f , 48
 - característicos de contacto de las
 - \preceq -ramas B y B' , 68
- \preceq -rama de f , 60
- σ -polígono de Newton, 76
- acción
 - de un grupo, 11
 - transitiva, 11
- anillo
 - de polinomios en una
 - determinada, 8
 - de polinomios en varias
 - indeterminadas, 12
- anillo de series de potencias con
 - exponentes en conos \preceq -no negativos con k -ramificación, 40
- anillo de series de potencias con
 - exponentes enteros en conos
 - \preceq -no negativos, 40
- anillo de valoración, 20
- campo
 - de factorización, 9
 - fijo, 10
- campo de las series de Puiseux, 35
- conjunto \preceq -no negativo, 17
- conjunto de automorfismos asociados a λ , 66
- conjunto de generadores de un cono, 36
- conjunto de generadores de un ideal, 8
- cono, 36
 - ω -positivo, 45
 - asociado al vértice v , 77
 - dual, 37
 - fuertemente convexo, 37
 - racional, 36
- cono generado por un conjunto, 36
- cono positivo, 38
- dependencia
 - racional, 8
- discriminante, 25

dominio Euclidiano, 8
 elemento
 algebraico, 9
 irreducible, 8
 separable, 9
 trascendente, 9
 unitario, 7
 elementos asociados, 7
 exponente característico, 29
 exponente dominante, 42
 extensión de campos, 9
 finita , 9
 algebraica, 9
 de Galois, 10
 de Kummer, 10
 normal, 9
 separable, 9

 forma inicial, 13
 función analítica, 14

 grado de f , 12
 Grupo de Galois, 10
 grupo de permutaciones, 11

 hipersuperficie casi ordinaria, 26
 hipersuperficie de Puiseux, 35

 monoide, 11
 monomio característico, 29
 morfismo ordenado, 16
 multiplicidad, 13

 orden compatible, 16
 orden continuo, 17
 orden de λ en f , 67
 orden positivo, 17
 orden total, 15

 polinomio
 \preceq -libre, 59
 σ -libre, 45
 casi ordinario, 26
 de Weierstrass, 22
 mínimo, 9

 raíces k -ésimas de la unidad, 10
 raíz k -ésima primitiva de la unidad,
 10
 regular, 14
 resultante, 24

 Semigrupo, 11
 series con exponentes en un cono, 38
 series de potencias formales, 12
 series de Puiseux con exponentes en
 conos \preceq -no negativos, 41
 soporte de una serie, 14

 término dominante, 42

 valoración, 19
 vértices del polígono de Newton, 76

 órbita de un elemento, 11

Glosario

$K[[\sigma]]$ anillo de series con exponentes en σ . 38

$K[[\sigma]]_k$ anillo de series con exponentes en σ y denominador k . 38

σ^\vee cono dual. 37

$(\mathbb{R}^n)_{\succeq 0}$ elementos no negativos para \preceq . 17

$(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ campo de factorización de f sobre K . 16

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ideal generado por los elementos a_1, \dots, a_n . 8

$A[x]$ anillo de polinomios en la indeterminada x y coeficientes en A . 8

A^* el grupo de unidades del anillo A . 7

C_k grupo de las raíces k -ésimas de la unidad. 10, 56

F/K extensión de campos. 9

$G_{\succeq \gamma}$ elementos en G que son mayor o igual que γ . 15

$\text{Gal}(F : K)$ grupo de Galois de la extensión F/K . 10

$H_{\lambda, \xi}$ conjunto de automorfismos asociados a λ . 66

$K((X))$ campo de fracciones del anillo de series de potencias en varias variables.
12

$K((X))_f$ campo de factorización de f sobre $K((X))$. 63, 66

$K((\sigma))$ campo de fracciones de $K[[\sigma]]$. 39

$K((\sigma))_k$ campo de fracciones de $K[[\sigma]]_k$. 39

$K((x))$ campo de fracciones de las series de potencias en la indeterminada x . 35

$K[X]$ anillo de polinomios en las indeterminadas x_1, \dots, x_n con coeficientes en K . 12

$K[[X]]$ anillo de series de potencias en las variables x_1, \dots, x_n . 12, 13

$K\left[[X^{\frac{1}{k}}]\right]$ anillo de series de potencias en las variables $x_1^{\frac{1}{k}}, \dots, x_n^{\frac{1}{k}}$. 27

K_f campo de factorización de f sobre K . 9

$K_{\preceq}((X))$ campo de fracciones de $K_{\preceq}[[X]]$. 40

$K_{\preceq}((X))_k$ campo de fracciones de $K_{\preceq}[[X]]_k$. 40

$K_{\preceq}[[X]]$ anillo de series de potencias con exponentes enteros en un cono \preceq -no negativo. 40

$K_{\preceq}[[X]]_k$ anillo de series de potencias con exponentes en conos \preceq -no negativos con k -ramificación. 40

N_{λ} número de veces que se obtienen el \preceq -exponente característico λ , con las diferencias de las raíces. 67

$R_y(f, h)$ resultante de f y h . 24

S_{Λ} grupo de las funciones biyectivas del conjunto Λ . 11

$Supp(\varphi)$ soporte de φ . 14, 39

X^{α} denota a la expresión $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. 13

$Z(f)$ raíces de f . 30

$[F : K]$ grado de la extensión F/K . 9

$\Delta_y f$ discriminante de f . 25

\leq_{ω} orden dado por ω . 16, 19

\leq_{lex} orden lexicográfico. 16

\mathcal{A}_{\preceq} series de Puiseux con exponentes en conos \preceq -no negativos. 41

\mathcal{C}_{\preceq} conjunto de conos en \mathbb{R}^n que son \preceq -no negativos. 37

$\mathcal{N}_{X, \sigma}(\eta)$ σ -polígono de Newton de η . 76

$\mathcal{N}_X(\eta)$ polígono de Newton de η . 76

\mathcal{S}_{\preceq} campo de fracciones de \mathcal{A}_{\preceq} . 41

ν_{\preceq} valoración dada por el orden \preceq . 41

$\bar{i} \overline{(i_1, \dots, i_n)} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^n$, \bar{i} es un representante de una clase del anillo $\left(\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^n$. 56

$\partial(f)$ grado de f . 12

$\preceq -\mathbf{char}(f)$ conjunto de \preceq -exponentes característicos de f . 48

σ_v cono asociado al vértice v . 77

$\underline{0}$ denota a $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. 14

$\zeta^{\prec\gamma}$ restringiendo al soporte de ζ a aquellos que $\preceq \gamma$. 42

f_y derivada del polinomio $f(y) = a_d y^d + a_{d-1} y^{d-1} + \dots + a_1 y + a_0$, esto es,

$$f_y(y) := d a_d y^{d-1} + (d-1) a_{d-1} y^{d-2} + \dots + a_1. \quad 25$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad 12$$

APÉNDICE A

Algunos resultados que se utilizan y que se encuentran en la literatura

Corolario A.0.1. [17, Corolario 34, página 460] *Todo polinomio irreducible sobre un campo de característica 0 es separable. Un polinomio sobre un campo de característica cero es separable si y sólo si es producto de polinomios irreducibles distintos.*

Lema A.0.2. [Lema de Gauss] *Sea R un dominio de factorización única y sea K su campo de fracciones. Si $f \in R[y]$ es un polinomio irreducible, entonces f es irreducible en $K[y]$.*

Proposición A.0.3. [29, Proposición 1.4, pag 225] *Sea F/K una extensión de campos. Sea $\alpha \in F$ algebraico sobre K . Entonces $K(\alpha) = K[\alpha]$. La extensión $K(\alpha)/K$ es finita y $[K(\alpha) : K]$ es igual al grado del polinomio irreducible de α en el anillo $K[x]$.*

Teorema A.0.4. [29, Teorema 1.10, pág. 265] *Sea F/K una extensión de Galois con grupo de Galois G . Sea E un subcampo tal que $K \subset E \subset F$ y $H = \text{Gal}(F/E)$. Entonces E/K es una extensión normal si y sólo si H es un subgrupo normal de G . Si E/K es una extensión normal, entonces el mapeo $\tau \mapsto \tau|_E$ es un homomorfismo suprayectivo de G al grupo de E/K , cuyo kernel es H .*

Proposición A.0.5. [17, Proposición 2, pág. 472] *Sean F/K una extensión de campos y $\alpha \in F$ algebraico sobre K . Para cualquier $\tau \in \text{Aut}(F/K)$, $\tau(\alpha)$ es raíz del polinomio mínimo de α sobre K , $\text{Aut}(F/K)$ permuta a las raíces de polinomios irreducibles sobre K . Equivalentemente, cualquier polinomio con coeficientes en K que tiene por raíz a α , $\tau(\alpha)$ también es raíz.*

Proposición A.0.6. [17, Proposición 5, pág. 475] Sea F el campo de factorización de un polinomio $f \in K[x]$. Entonces $|\text{Aut}(F/K)| \leq [F : K]$, con igualdad si f es separable sobre K .

Teorema A.0.7. [17, Teorema 13, pág. 486] La extensión F/K es de Galois si y sólo si es el campo de factorización de un polinomio irreducible separable sobre K . En cuyo caso, para todo polinomio irreducible en el anillo $K[y]$ que tenga una raíz en F es separable y todas sus raíces pertenecen en F .

APÉNDICE B

Preguntas

En este apéndice se presentan las interrogantes que han quedado sin una respuesta a lo largo del desarrollo y la discusión de la tesis. Estas preguntas abren la posibilidad de futuras investigaciones.

- Si una hipersuperficie es casi ordinaria irreducible, entonces tiene una única \preceq -rama para todo orden \preceq total positivo continuo sobre \mathbb{R}^n . ¿Cuál es la interpretación geométrica de las distintas \preceq -ramas para el caso no casi ordinario?
- Para cada orden \preceq existe un morfismo de grupos como en la Proposición 5.1.7. ¿Cuándo el subgrupo generado por las imágenes de ese morfismo para todos los órdenes es el grupo de Galois del campo de factorización del polinomio?
- Para hipersuperficies casi ordinarias el conjunto de exponentes característicos definen un semigrupo asociado a la hipersuperficie. Para una hipersuperficie arbitraria, dado un orden se puede definir un semigrupo, como lo explicamos en [7]. Para el caso casi ordinario el semigrupo se describe en términos de los exponentes característicos, ¿existe una manera de representar a los semigrupos que definimos en [7] usando los \preceq -exponentes característicos?
- En el caso casi ordinario los exponentes característicos determinan el tipo topológico de la singularidad. ¿En qué casos se podría determinar el tipo topológico, conocidos los \preceq -exponentes característicos, para singularidades generales?