



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMATICAS Y DE LA ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA
APLICADA**

**OPERADORES EQUIVARIANTES DE
EXTENSIÓN SIMULTÁNEA DE FUNCIONES
CONTINUAS**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TITULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

RICARDO RAMIREZ LUNA

DIRECTOR DEL TRABAJO:

DR. SERGEY ANTONYAN

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITE TUTOR:

DR. HUGO JUAREZ ANGUIANO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA, UAM

DR. JUAN MORALES RODRIGUEZ

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, CD. MX., MAYO 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado

Introducción

En topología, se estudian objetos como los espacios topológicos, los espacios lineales y los espacios de funciones, entre otros. La teoría de grupos de transformaciones se enfoca en el estudio de las simetrías de estos objetos, o más ampliamente, de subgrupos del grupo completo de simetrías.

El concepto de simetría fue desarrollado en detalle por el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) durante el período de 1874 a 1884, cuando publicó tres volúmenes describiendo su teoría. En estos trabajos se sentaron las bases de lo que, a principios del siglo XX, se conocería como grupos continuos y posteriormente como grupos topológicos de transformaciones.

Tras el surgimiento de diversas geometrías, especialmente las geometrías no euclidianas en el siglo XIX, los matemáticos se esforzaron por unificar los sistemas geométricos bajo un principio general. Aquí es donde el descubrimiento de la teoría de grupos resultó fundamental, ya que extendió su influencia más allá del álgebra y enriqueció otras ramas de las matemáticas, como la geometría.

Antes de la teoría de grupos, los matemáticos entendían la geometría en términos de objetos geométricos como puntos, líneas y triángulos. Es hasta 1892 que el matemático alemán Felix Klein, en su Plan Erlangen, propuso la siguiente definición de geometría:

geometría es la ciencia que estudia las propiedades de los objetos en una variedad que no son alteradas por las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones de la variedad. En otras palabras, geometría es la ciencia que estudia los invariantes de un grupo de transformaciones de una variedad.

Aunque lo anterior está formulado en términos de variedades, el Plan Erlangen esencialmente establece que un sistema geométrico consiste en un espacio geométrico X y un grupo G de transformaciones que preserva ciertas propiedades en las figuras de X . Diferentes grupos y diferentes acciones determinan diferentes geometrías. Por ejemplo, la geometría afín es el estudio de las propiedades geométricas que permanecen inmutables bajo las transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$. En este caso, G es el grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$. Análoga-

mente, la geometría euclídeana es el estudio de las propiedades geométricas de $\mathbb{R}^n$ que permanecen invariantes bajo sus isometrías. En este caso, G es el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$. De manera similar, si X es un G -espacio topológico, en la teoría de grupos de transformaciones estudiaremos las propiedades topológicas que permanecen invariantes bajo la acción de G en X . Así, surge la topología geométrica.

Este trabajo está centrado en la topología geométrica y se enfoca principalmente en estudiar extensores y retractos absolutos equivariantes.

La tesis consta de 3 capítulos.

1. En el primer capítulo se desarrollan conceptos y resultados básicos que serán utilizados en los siguientes dos capítulos.
2. El segundo capítulo está dedicado al estudio de extensores y retractos absolutos equivariantes, y toma como punto de partida la siguiente pregunta:

Supongamos que X es un ANE metrizable. ¿Bajo qué condiciones adicionales X también sería un ANE para cada una de las siguientes clases de espacios: espacios paracompactos, espacios normales, espacios perfectamente normales y espacios completamente regulares?

Recordemos que un espacio topológico X es un ANE para una clase de espacios topológicos $\mathcal{K}$ si, para todo espacio Y en $\mathcal{K}$, cualquier subespacio cerrado $A \subset Y$, toda función continua $f : A \rightarrow X$ se puede extender a una función continua $F : U \rightarrow X$ donde U es una vecindad abierta de A .

Esta cuestión ha sido abordada por E. Michael, R. Arens, O. Hanner y S. T. Hu. En mi anteproyecto de doctorado, uno de los objetivos fue extender esta pregunta a la clase de G -espacios. En este capítulo, presentamos los resultados obtenidos bajo la dirección de S. Antonyan.

3. En [14] y [26], E. Michael y J. Dugundji probaron el siguiente teorema:

Teorema 0.0.1. *Para todo subconjunto cerrado A de un espacio métrizable Z y todo espacio lineal localmente convexo V , existe un operador lineal $L : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ tal que para cada $f \in C(A, V)$,*

3.1 $L(f)$ es una extensión de f ,

3.2 $L(f) \subset \text{Conv}(\text{Im}(f))$,

3.3 L es un encaje topológico lineal (considerando en $C(Z, V)$ y $C(A, V)$ la topología compacto abierta).

El operador del teorema anterior constituye un operador de extensión simultánea en la clase de espacios topológicos. En este capítulo, presentamos una generalización de este resultado a la clase de G -espacios. Cabe mencionar que este operador fue un trabajo en conjunto con S. Antonyan y constituye parte de mi trabajo de investigación. Los resultados obtenidos fueron publicados en la revista *Topology and its Applications* (ver [6]).

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mis padres, Alejandra y Salomón, especialmente a mi padre, quien desafortunadamente no pudo presenciar la culminación de este trabajo, pero cuyas enseñanzas siguen presentes en cada paso que doy. A mi querida abuela Amalia, quien siempre estuvo a mi lado, brindándome su apoyo incondicional y consintiéndome con su amor inigualable. Quiero dedicar un especial agradecimiento a mi sobrino, Héctor, quien, sin darse cuenta, ha sido una fuente de inspiración y crecimiento personal para mí. Su inocencia, curiosidad y energía contagiosa me han enseñado mucho sobre mí mismo y sobre lo que realmente importa en la vida. A través de su mirada fresca y sin prejuicios, he podido reflexionar sobre mis propias acciones y actitudes, y he encontrado áreas donde puedo mejorar y crecer. Su presencia en mi vida ha sido un recordatorio constante de la importancia de mantenernos conectados con nuestra esencia más pura y de buscar siempre la alegría en las pequeñas cosas. Sus contribuciones y afecto han sido fundamentales en este viaje, y les estaré eternamente agradecido por su invaluable presencia en mi vida.

Quiero extender mi más sincero agradecimiento a mi tutor principal, el Dr. Sergey Antonyan. No solo ha sido un excelente guía académico, sino que también ha contribuido de manera significativa a mi crecimiento personal. Sus orientaciones y enseñanzas han dejado una huella indeleble en mi formación, y estoy profundamente agradecido por su dedicación, apoyo y sabiduría a lo largo de este viaje académico. Su influencia ha sido fundamental para mi desarrollo, y estoy verdaderamente agradecido por su invaluable contribución a mi educación y formación integral.

Agradezco de manera muy especial al Dr. Hugo por haber formado parte de mi comité tutorial y por su acompañamiento y apoyo durante este proceso. Su compromiso y orientación fueron fundamentales en diversas etapas de mi formación.

Quiero expresar también mi agradecimiento a la Dra. Aura por su dedicación en la revisión de esta tesis. Sus observaciones detalladas y sugerencias han

contribuido de manera significativa a mejorar la claridad y calidad del trabajo.

Asimismo, quiero agradecer al Dr. Juan Morales, quien fue mi tutor durante la maestría y también formó parte de mi comité tutorial de doctorado. Su guía y apoyo en ambas etapas han sido fundamentales para mi desarrollo académico.

También agradezco al Dr. Gerardo y al Dr. Tkatchenko por su participación como sinodales y por haber leído cuidadosamente este trabajo.

Agradezco a CONACYT por haberme brindado una beca; a la Facultad de Ciencias por brindarme un lugar para estudiar; y al Departamento de Matemáticas por la cláusula 69.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a todos mis profesores de la Facultad de Ciencias, quienes desempeñaron un papel fundamental en mi formación académica y fueron la base sólida sobre la cual se construyó este trabajo. Su dedicación, conocimientos y pasión por la enseñanza han dejado una marca indeleble en mi desarrollo académico y personal. Cada uno de ustedes ha contribuido de manera invaluable a mi crecimiento como estudiante y como persona, y estoy sinceramente agradecido por su orientación, apoyo y compromiso a lo largo de mi trayectoria universitaria. Su influencia perdurará en mí más allá de estas aulas, y siempre recordaré con gratitud el impacto positivo que han tenido en mi vida.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mis amigos Zain, Alan, Gilberto, Martín, Fernando, Brenda, Juan, Luis, Francisco, Jose, Ananda, Erendira, Karen, Carlos, Edgar y Kuauhtemok por su inquebrantable compañía y apoyo a lo largo de este viaje. Sus risas, palabras de aliento y momentos compartidos han sido un faro de luz en los momentos difíciles y una fuente constante de alegría en los momentos felices. Su amistad ha sido un regalo invaluable que ha enriquecido mi vida de formas innumerables. Agradezco profundamente su presencia constante, su apoyo incondicional y su amistad sincera. Cada uno de ustedes ha dejado una marca imborrable en mi corazón, y estaré eternamente agradecido por tenerlos a mi lado.

Índice general

Introducción	2
1. Grupos de transformaciones	11
1.1. Grupos topológicos	11
1.2. G-espacios	14
1.3. Espacio de órbitas	20
1.4. Acciones de grupos compactos	23
1.5. Acciones lineales	25
1.6. Encajes en G-espacios lineales	28
1.7. Integral de Haar	36
1.8. Integral de Haar*	43
1.9. Rebanadas	45
2. Teoremas de extensión equivariante	55
2.1. Extensores y retracts absolutos	57
2.2. Extensores de espacios de Tychonoff.	67
2.3. Extensores de espacios perfectamente normales.	73
2.4. Extensores de espacios paracompactos.	75
2.5. Extensores de espacios normales.	78

2.6. Erizo equivariante	78
2.7. Teorema de Lisitsa.	83
3. Operadores de extensión simultánea	85

Capítulo 1

Grupos de transformaciones

En este capítulo desarrollaremos los conceptos y resultados básicos utilizados en los capítulos 2 y 3 de esta tesis.

1.1. Grupos topológicos

Sea $(G, *)$ un grupo. Para facilitar la escritura, se eliminará el símbolo de la operación $*$, sustituyéndolo por la yuxtaposición de los elementos del grupo. Es decir, si a y b son elementos de G , escribiremos ab en lugar de $a * b$. Al elemento neutro de G lo denotaremos por e .

Definición 1.1.1. *Un **grupo topológico** G es un grupo dotado de una topología que hace continua a la función producto:*

$$G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

y a la función inversión:

$$G \rightarrow G, \quad a \mapsto a^{-1}.$$

Es conocido que, en la clase de grupos topológicos, los axiomas de separación T_1 y de Tychonoff son equivalentes (ver [27, Teorema 4.14]). Así, si G es un grupo topológico T_1 , G es un grupo topológico de Tychonoff y, en particular, de Hausdorff. En este trabajo se considerarán únicamente grupos topológicos de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.2. *Sea G un grupo. Al dotar a G de la topología discreta, tenemos que G es un grupo topológico.*

Este ejemplo muestra que cualquier grupo pertenece a la clase de grupos topológicos. Por lo que la teoría de grupos topológicos extiende a la teoría de grupos.

En esta tesis algunos teoremas solo requieren la hipótesis de que el grupo sea Hausdorff, por lo que el ejemplo anterior muestra que esos teoremas son válidos considerando cualquier grupo con la topología discreta.

Ejemplo 1.1.3. Sea $(\mathbb{R}, +)$ dotado de la topología usual. Se sabe que la suma

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

y la función inversión:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x.$$

son funciones continuas. Así, $\mathbb{R}$ es un grupo topológico.

Los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3 muestran que a $(\mathbb{R}, +)$ se le pueden asignar al menos dos topologías que lo convierten en un grupo topológico. Sin embargo, $\mathbb{R}$ con la topología discreta es un grupo topológico desconexo, mientras $\mathbb{R}$ con la topología usual es un grupo topológico conexo. Lo anterior sugiere que estos dos grupos no son isomorfos dentro de la clase de grupos topológicos. Para precisar este concepto, enunciemos la definición de isomorfismo en la clase de grupos topológicos.

Definición 1.1.4. Sean G y G' dos grupos topológicos y $f : G \rightarrow G'$ una función biyectiva. Diremos que f es un **isomorfismo topológico** si tanto f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Dos grupos topológicos son **topológicamente isomorfos** si existe un isomorfismo topológico entre ellos.

Como se mencionó previamente en este escrito, la hipótesis de que el grupo sea Hausdorff será suficiente para la mayoría de los resultados. Sin embargo, en los resultados principales se requiere que el grupo sea compacto.

El siguiente ejemplo será útil para mostrar la necesidad de la compacidad en algunos resultados.

Ejemplo 1.1.5. Sea $G = (0, \infty)$. Consideremos en G el producto y la topología usual. Resultados conocidos establecen que las funciones producto e inversión son continuas.

Sea $\ln$ la función logaritmo. Si se consideran en $(0, \infty)$ y en $(\mathbb{R}, +)$ las topologías usuales, se tiene que $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función biyectiva, continua y con inversa continua. Además, para cualesquiera reales positivos x y z , se satisface que $\ln(xz) = \ln(x) + \ln(z)$. Por lo tanto, $\ln$ es un isomorfismo topológico entre los grupos topológicos de los ejemplos 1.1.5 y 1.1.3.

En esta tesis se utilizará una subclase muy conocida de grupos topológicos: los grupos de Lie. Un **grupo de Lie** es un grupo que posee una estructura de n -variedad tal que las funciones producto e inversión son suaves. Los siguientes dos grupos topológicos son ejemplos de grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.6. Sean $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de $n \times n$ con entradas reales, y

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

el conjunto de matrices invertibles.

A cada matriz (a_{ij}) en $GL(n, \mathbb{R})$, se puede representar como el vector

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})$$

en $\mathbb{R}^{n^2}$. Esto permite identificar a $GL(n, \mathbb{R})$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Dotemos a $GL(n, \mathbb{R})$ de la topología inducida por $\mathbb{R}^{n^2}$.

Sean A y B dos elementos de $GL(n, \mathbb{R})$. Cada entrada de AB se obtiene a partir de sumas y productos de las entradas de A y B . Así, si consideramos en $GL(n, \mathbb{R})$ la topología inducida por $\mathbb{R}^{n^2}$, la función producto

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad (A, B) \rightarrow AB$$

resulta continua. Un argumento similar muestra que la función inversión

$$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad A \rightarrow A^{-1}$$

también es continua.

A este grupo se le llama el **grupo general lineal**.

Definición 1.1.7. Sea G un grupo topológico. Un subconjunto H de G se llama **subgrupo topológico de G** si cumple que:

1. H es subgrupo de G ,
2. H es un subespacio topológico de G , es decir, posee la topología inducida de G .

El siguiente resultado puede consultarse en [27, Proposición 1.23].

Proposición 1.1.8. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo topológico de G . La topología inducida de G convierte a H en un grupo topológico.

Ejemplo 1.1.9. Consideremos $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I\}$. Dotemos a $O(n, \mathbb{R})$ de la topología inducida como subespacio de $GL(n, \mathbb{R})$. La proposición anterior garantiza que $O(n)$ es un grupo topológico. A $O(n, \mathbb{R})$ se le denominará el **grupo ortogonal**.

Otro concepto importante en este trabajo es el de espacio vectorial topológico. Por un **espacio vectorial topológico** (o simplemente, **espacio lineal**) entenderemos un espacio vectorial real provisto de una topología Hausdorff que hace

continúa la suma de vectores y la multiplicación por escalar. A los espacios vectoriales topológicos que posean una base local de conjuntos convexos para el vector 0 se les denominará **espacios localmente convexos**.

Observemos que un espacio lineal es un grupo topológico.

Ejemplo 1.1.10. Sea V un espacio vectorial topológico. $(V, +)$ es un grupo topológico. Esto se sigue de que la función $+: V \times V \rightarrow V$ es continua, y que al restringir la función multiplicación por escalar al conjunto $\{-1\} \times V$, obtenemos la función que asigna a cada elemento de V su inverso.

En [20] y [27] se encuentran los resultados sobre grupos topológicos utilizados a lo largo de esta tesis.

1.2. G-espacios

Este trabajo está centrado en la teoría de G -espacios.

Definición 1.2.1. Sean G un grupo y X un conjunto. Diremos que G **actúa** sobre X si existe una función $\alpha: G \times X \rightarrow X$ tal que:

$$\begin{aligned}\alpha(e, x) &= x \text{ para cada } x \in X, \\ \alpha(h, \alpha(g, x)) &= \alpha(hg, x) \text{ para todo } g, h \in G \text{ y } x \in X.\end{aligned}$$

En este caso, diremos que α es una **acción** y X un **G -conjunto**. Si G es un grupo topológico, X un espacio topológico y la acción α es continua, diremos que X es un **G -espacio**. Llamaremos **grupo de transformaciones** a la terna (G, X, α) .

Sea X un G -espacio con acción continua α . En la práctica, escribiremos gx para denotar a $\alpha(g, x)$ y diremos que X es un G -espacio con acción α . En otras palabras, las condiciones de la definición 1.2.1, se reescriben:

$$ex = x \qquad ghx = g(hx),$$

para cada $x \in X$ y $g, h \in G$.

Por otro lado, notemos que si fijamos cualquier elemento $g \in G$, tenemos la función

$$\alpha_g: X \rightarrow X, \qquad x \mapsto gx.$$

A la función α_g le llamaremos la **traslación** por g . La continuidad de α asegura la continuidad de las funciones α_g y de $\alpha_{g^{-1}}$. Más aún, α_g es un homeomorfismo debido a que $\alpha_{g^{-1}}$ es su inversa. Así, si tomamos U cualquier abierto (cerrado) en X , tenemos que $gU = \{gu \mid u \in U\}$ es abierto (cerrado) en X .

Los siguientes son ejemplos de G -espacios.

Ejemplo 1.2.2. Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. Definamos

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, \quad \alpha(g, x) = x.$$

A esta acción le llamaremos la **acción trivial**.

Es importante notar que el ejemplo anterior muestra que cualquier espacio topológico pertenece a la clase de G -espacios.

Ejemplo 1.2.3. Sea G un grupo topológico, es fácil verificar que

1. $g \cdot x = gx$
2. $g * x = xg^{-1}$
3. $g \cdot x = gxg^{-1}$

son acciones de G en G .

Supongamos que G es un grupo topológico. Los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 muestran que a G le podemos dar al menos 4 acciones, por lo que tentativamente tenemos un ejemplo de un objeto en la clase de espacios topológicos que al menos tiene 4 representaciones en la clase de G -espacios.

Más adelante definiremos qué significa que dos G -espacios sean equivalentes.

Ejemplo 1.2.4. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G . La aplicación

$$\begin{aligned} G \times G/H &\rightarrow G/H \\ (g, kH) &\mapsto gkH \end{aligned}$$

es una acción de G en el cociente G/H .

Ejemplo 1.2.5. Sean $G = (0, \infty)$ el grupo definido en 1.1.5 y $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual. Definamos la función

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (r, (x, y)) &\mapsto (rx, ry). \end{aligned}$$

La asociatividad de los reales asegura que lo anterior es una acción y la continuidad se sigue de que el producto de reales es una función continua.

Sea X un G -espacio con acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$. Consideremos los siguientes conjuntos:

1. Dados $H \subset G$ y $A \subset X$, al conjunto

$$H(A) = \{ ha \in X \mid h \in H, a \in A \}$$

le llamaremos **H -saturación** de A . Si $A = \{x\}$, escribiremos $H(\{x\}) = H(x)$, si además, se satisface que $H = G$, al conjunto $H(x)$ le llamaremos la **órbita** de x .

2. Al conjunto

$$G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$$

le llamaremos el **estabilizador** de A . En el caso de que $A = \{x\}$, denotaremos G_x al **estabilizador de x** .

3. Si H es un subgrupo de G , diremos que A es **H -invariante** si $H(A) = A$. Si $H = G$ y A es H -invariante, diremos que A es **invariante**.
4. Un elemento x de X se llama **punto G -fijo** si $G = G_x$.

Observación 1.2.6. Supongamos que A es un subconjunto H -invariante del G -espacio X donde H es subgrupo cerrado de G . Es claro que al restringir la acción de G en X al conjunto $H \times A$, tenemos una acción continua de H en A . Así, A es un H -espacio. En particular, si A es subconjunto invariante de X , obtenemos que A es un G -espacio.

Observación 1.2.7. Sea X un G -espacio. Mostremos que para cada $x \in X$ y $g \in G$, se cumple que

$$gG_xg^{-1} = G_{gx}.$$

Sea $h \in G_x$. Así,

$$ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}gx) = g(hx) = gx.$$

Así, $ghg^{-1} \in G_{gx}$.

Por otro lado, si $h \in G_{gx}$, tenemos que $h(gx) = gx$. Consecuentemente,

$$(g^{-1}hg)x = x.$$

Así, $g^{-1}hg \in G_x$ y por lo tanto, $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}$. Teniéndose la igualdad $gG_xg^{-1} = G_{gx}$.

En el capítulo 2 definiremos el erizo equivariante, este erizo se construye a partir de los tipos orbitales. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G . Denotaremos por $[H]$ a la familia de todos los subgrupos de G que son conjugados a H , esto es, $[H] = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. A la familia $[H]$ le llamaremos **tipo orbital**. Definamos un orden parcial en el conjunto de tipos orbitales. Sean $[H_1]$ y $[H_2]$ dos tipos orbitales. Diremos que $[H_1] \leq [H_2]$, si $H_1 \subset gH_2g^{-1}$ para

algún $g \in G$. Notemos que $\leq$ es un orden parcial, además, la observación anterior asegura que $[G_x] = \{G_{gx} | g \in G\}$.

Al igual que en topología se define la noción de función continua y esto permite analizar propiedades tanto de los espacios topológicos como de las mismas funciones, en la Teoría de los G -espacios disponemos de un concepto análogo, esto es, trabajaremos con funciones que respeten las acciones de los G -espacios. A continuación, procedemos a introducir este concepto de manera formal.

Sean X y Z dos G -espacios. Diremos que una función continua $f : X \rightarrow Z$ es **G -equivariante**, si $f(gx) = gf(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Además, si la acción en Z es trivial ($gz = z$ para todo $g \in G$, $z \in Z$) diremos que f es G -invariante. En otras palabras, $f : X \rightarrow Z$ es G -invariante, si $f(gx) = f(x)$ para cualesquiera $x \in X$ y $g \in G$.

En todo este trabajo se consideraran clases de G -espacios con G un grupo topológico fijo, por lo que, sin riesgo a confusión, a las funciones G -equivariantes (G -invariantes) les llamaremos simplemente equivariantes (invariantes).

Diremos que dos G -espacios son **equivalentes** si existe un homeomorfismo equivariante entre ellos.

Ejemplo 1.2.8. Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de G -espacios, y para cada $\lambda \in \Lambda$, sea α_λ la acción de G en X_λ . Definamos la **acción diagonal** de G en el producto $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ como la aplicación

$$\alpha : G \times X \rightarrow X,$$

dada por

$$\alpha(g, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (\alpha_\lambda(g, x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}.$$

La continuidad de α , se sigue de que α es el producto diagonal de las funciones continuas $\alpha_\lambda \circ (id \times p_\lambda) : G \times X \rightarrow X_\lambda$.

Ahora verifiquemos que α define una acción de G en X . Sean $g, h \in G$ y $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$, tenemos

$$\alpha(h, \alpha(g, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})) = \alpha(h, (\alpha_\lambda(g, x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}) = (\alpha_\lambda(h, \alpha_\lambda(g, x_\lambda)))_{\lambda \in \Lambda}.$$

Puesto que cada α_λ es una acción, se cumple que $\alpha_\lambda(h, \alpha_\lambda(g, x_\lambda)) = \alpha_\lambda(hg, x_\lambda)$, por lo que

$$\alpha(h, \alpha(g, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})) = (\alpha_\lambda(hg, x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = \alpha(hg, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}).$$

Asimismo, para la identidad $e \in G$, se tiene

$$\alpha(e, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (\alpha_\lambda(e, x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

Esto prueba que α satisface las condiciones de una acción de grupo, por lo que $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un G -espacio con la acción diagonal.

Observación 1.2.9. Sean X y Z dos G -espacios y $f : X \rightarrow Z$ una función equivariante. Afirmamos que $G_x \subset G_{f(x)}$, para cada $x \in X$. En efecto, sea $g \in G_x$. Dado que f es equivariante, tenemos que $gf(x) = f(gx)$. Luego, $g \in G_x$ implica que $gx = x$. Así, $gf(x) = f(x)$.

Si x es un punto G -fijo, tenemos que $G_x = G$. Así, la contención $G_x \subset G_{f(x)}$ asegura que $f(x)$ es un punto G -fijo de Z .

Proposición 1.2.10. Sea X un G -espacio. La acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$ es una función abierta.

Demostración. Sean X un G -espacio con acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$, U un abierto de G y V un abierto de X . Comenzamos probando la siguiente igualdad:

$$UV = \{uv \mid u \in U \text{ y } v \in V\} = \bigcup_{g \in U} gV.$$

Sea $x \in UV$. Existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $uv = x$. Luego, $uv \in uV$. Así, $uv \in \bigcup_{g \in U} gV$.

Sea $x \in \bigcup_{g \in U} gV$. Existe $g \in U$ tal que $x \in gV$. Así, hay $v \in V$ tal que $x = gv$. En consecuencia, $x \in UV$.

Dado que gV es un abierto de X para cada $g \in G$, $\bigcup_{g \in U} gV$ es abierto en X . Consecuentemente, la igualdad anterior asegura que UV es abierto en X . $\square$

Una observación respecto a la proposición anterior es que, en su demostración, solo se requirió la hipótesis de que el subconjunto V de X fuera abierto, por lo que, el conjunto UV es abierto en X para cualquier subconjunto U de G y V cualquier abierto de X .

La siguiente proposición será una herramienta clave para demostrar que cuando el grupo actuante es compacto, no solo la acción es abierta sino también cerrada.

Proposición 1.2.11. Sean X un G -espacio, K un subconjunto compacto de G y A un subconjunto cerrado de X . El conjunto KA es cerrado en X .

Demostración. Sean K un subconjunto compacto de G , A un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus KA$. Para cada $k \in K$, se cumple que kA es cerrado en X y $x \notin kA$. Por lo tanto, existe una vecindad U_k de x en X tal que $U_k \cap kA = \emptyset$. Luego, $\alpha_{k^{-1}}$ es una función biyectiva, consecuentemente, $k^{-1}(U_k \cap kA) = k^{-1}U_k \cap A$. Así, $\emptyset = k^{-1}U_k \cap A$.

Por otro lado, la continuidad de α asegura que existen vecindades V_k y W_k de k y x respectivamente tales que $V_k^{-1}W_k \subset k^{-1}U_k$. Así, $V_k^{-1}W_k \cap A = \emptyset$. Luego,

dado que K es compacto y $K \subset \bigcup_{k \in K} V_k$, tenemos que existen $k_1, \dots, k_n$ en K tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$. Definamos $W = \bigcap_{i=1}^n W_{k_i}$. Es evidente que W es una vecindad de x .

Afirmamos que $W \cap KA = \emptyset$. En efecto, si suponemos que $w \in W \cap KA$, tenemos que existen $k \in K$ y $a \in A$ tales que $w = ka$. Esto implica que $k^{-1}w = a$. Por otro lado, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $k \in V_{k_i}$. Así, obtenemos que $a = k^{-1}w \in V_{k_i}^{-1}W_{k_i} \subset k^{-1}U_{k_i}$, pero esto es una contradicción, ya que tenemos que $V_{k_i}^{-1}W_{k_i} \cap A = \emptyset$.

Por lo tanto, W es una vecindad abierta de x que se queda contenida en el complemento de KA . Teniéndose que KA es un conjunto abierto. $\square$

Mostremos la esencialidad de la compacidad de K en la proposición anterior. En este caso, consideremos G como el conjunto de los reales dotado de la topología usual. Definamos en $\mathbb{R}$ la acción:

$$G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g, x) \rightarrow g + x.$$

Es claro que $\mathbb{Z}$ y $A = \{\frac{1}{m} + z \mid m \in \mathbb{N} \text{ y } z \in \mathbb{Z}\}$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Comencemos mostrando que $\mathbb{Z} + A$ está contenido en el complemento de los enteros. En efecto, si suponemos que z es un entero que pertenece a $\mathbb{Z} + A$, tenemos que existen $r, p \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $z = r + (p + \frac{1}{m})$. Esto implica que $\frac{1}{m}$ es un entero, y esto es una evidente contradicción.

Por otro lado, $\mathbb{Z} + A$ contiene para cada $z \in \mathbb{Z}$, la sucesión $\{\frac{1}{m} + z\}_{m \in \mathbb{N}}$, la cual converge a z . Así, si $K = \mathbb{Z}$, tenemos que $K + A$ es conjunto que no contiene a sus puntos de acumulación y por lo tanto, $K + A$ no puede ser un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Corolario 1.2.12. *Para G un grupo topológico, H un subgrupo compacto de G , X un G -espacio y A un subconjunto H -invariante de X , $\overline{A}$ es un conjunto H -invariante. En particular, si A es invariante, $\overline{A}$ es invariante.*

Demostración. Sea A un subconjunto H -invariante del G -espacio X con H un subgrupo compacto de G . Procedamos a demostrar que $\overline{H(A)} = H(\overline{A})$.

En virtud de la proposición 1.2.11, $H(\overline{A})$ es cerrado y claramente contiene a $H(A)$, consecuentemente, $\overline{H(A)} \subset H(\overline{A})$.

Para mostrar la otra inclusión, tomemos $x \in H(\overline{A})$ y una vecindad abierta U de x en X . Dado que $x \in H(\overline{A})$, existen $h \in H$ y $a \in \overline{A}$ tales que $x = ha$. Luego, $ha = x \in U$ implica que $a \in h^{-1}U$. Ahora, como $a \in \overline{A}$, tenemos que existe $u \in U$ tal que $h^{-1}u \in A \cap h^{-1}U$. Así, $u \in hA \cap U \subset U \cap H(A)$ y por lo tanto, $U \cap H(A) \neq \emptyset$.

Finalmente, como A es H -invariante, $H(A) = A$ y así, $H(\overline{A}) = \overline{H(A)} = \overline{A}$. Por lo tanto, $\overline{A}$ es H -invariante. $\square$

1.3. Espacio de órbitas

Dado un G -espacio X , definamos en él la relación,

$$x \sim y \quad \text{si} \quad gx = y \quad \text{para algún} \quad g \in G.$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Para comenzar, tomemos un elemento arbitrario x de X . Es claro que $ex = x$. Luego, $x \sim x$.

Ahora consideremos dos elementos x y z en X tales que x está relacionado con z . Esto significa que existe $g \in G$ tal que $gx = z$. En consecuencia, $x = g^{-1}z$, y por lo tanto, $z \sim x$.

Finalmente, sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$. Existen g_1 y g_2 en G tales que $g_1x = y$ y $g_2y = z$. Consecuentemente, $g_2g_1x = z$ y por lo tanto, $x \sim z$. Así, hemos demostrado que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Es evidente que la clase de equivalencia de cada punto $x \in X$ bajo la relación dada corresponde a su órbita $G(x)$. Denotaremos el conjunto de todas las clases de equivalencia como X/G .

Consideremos la función proyección $p : X \rightarrow X/G$ y dotemos a X/G de la topología cociente inducida por p . Llamaremos a X/G el **espacio de órbitas** y a $p : X \rightarrow X/G$ la **proyección orbital**.

La proyección orbital será de gran utilidad a lo largo de este trabajo. Un ejemplo de esto es la siguiente observación, que proporciona una forma de encontrar subconjuntos invariantes.

Observación 1.3.1. Sean X un G -espacio, $p : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital y W un subconjunto arbitrario de X/G . Es fácil ver que para cada $x \in X$ y $g \in G$, se cumple que $G(x) = G(gx)$. Así, si $x \in p^{-1}(W)$, se tiene que $G(gx) = G(x) = p(x) \in W$. Luego, como $p(gx) = G(gx)$, obtenemos que $gx \in p^{-1}(W)$.

Por lo tanto, al tomar la imagen inversa bajo la proyección orbital de cualquier subconjunto del espacio de órbitas, obtenemos un conjunto invariante.

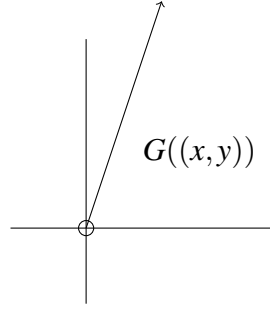
Sea X un G -espacio. Dado que hemos dotado al espacio de órbitas X/G de una topología, resulta natural preguntarse qué axiomas de separación hereda X/G de X . Para ilustrar este aspecto, aclararemos la notación que utilizaremos.

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $r > 0$, denotaremos $B_r(x)$ a la bola de radio r y centro x , es decir, $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. En el caso de que estemos considerando dos métricas en X , digamos d_1 y d_2 , denotaremos $B_r^{d_1}(x)$ y $B(x)^{d_2}(x)$ a las bolas de radio r con centro en x en la métrica d_1 y d_2 respectivamente.

Ejemplo 1.3.2. Sean $G = (0, \infty)$, $X = \mathbb{R}^2$ y consideremos la acción del ejemplo 1.2.5, esto es, para cada $r \in G$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$r(x, y) = (rx, ry).$$

Dados $r \in G$ y (x, y) distinto del vector cero, tenemos que la órbita de (x, y) es el conjunto $\{(rx, ry) \mid r \in (0, \infty)\}$.



Por otro lado, si $(x, y) = (0, 0)$, tenemos que $G((0, 0)) = \{(0, 0)\}$.

Veamos que X/G es un espacio topológico que no satisface el axioma de separación T_1 .

Sean U un abierto de X/G que tenga al punto $G(0, 0) = \{(0, 0)\}$ y $p : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital. Mostremos que $p^{-1}(U) = \mathbb{R}^2$.

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector distinto de $(0, 0)$. Dado que $p^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y tiene al vector $(0, 0)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon((0, 0)) \subset p^{-1}(U)$. Luego, el vector $\frac{\varepsilon}{2\|(x, y)\|}(x, y) = z$ tiene norma $\frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $z \in B_\varepsilon((0, 0))$. Así, por la observación 1.3.1, $p^{-1}(U)$ es un conjunto invariante. Ahora, dado que $z \in p^{-1}(U)$, tenemos que $(x, y) = \frac{2}{\varepsilon}z \in p^{-1}(U)$. Mostrando que $p^{-1}(U) = \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, la suprayectividad de p implica que $p(p^{-1}(U)) = U$. Consecuentemente, $U = X/G$. En otras palabras, mostramos que la única vecindad de $(0, 0)$ es X/G .

Lo anterior muestra que si consideramos X un G -espacio con G un grupo topológico arbitrario, no podemos asegurar que el espacio de órbitas satisfaga algún axioma de separación. Pero no todo está perdido, el siguiente lema muestra que sí podremos asegurar que el espacio de órbitas sea metrizable bajo condiciones adicionales en el espacio de órbitas y en la existencia de un tipo de métrica que genera la topología de X . Definamos este tipo de métrica.

Sea (X, d) un G -espacio metrizable. Diremos que d es una métrica **invariante** si $d(gx, gy) = d(x, y)$, para todo $x, y \in X$ y $g \in G$. Ahora, diremos que X **admite una métrica** invariante si existe métrica invariante que genera la topología de X .

Lema 1.3.3. Sean G un grupo topológico y X un G -espacio métrico que admite una métrica invariante. Si X/G es un espacio T_1 , X/G es un espacio metrizable.

Demostración. Sea X un G -espacio métrico que admite una métrica invariante y supongamos que su espacio de orbitas X/G es T_1 . Consideremos $p : X \rightarrow X/G$ la proyección canónica y d una métrica invariante en X . Sean R y S dos elementos de X/G . Afirmamos que para cualesquiera $y \in p^{-1}(S)$ y $x \in p^{-1}(R)$, se tiene que

$$\{d(z, w) | z \in p^{-1}(R), w \in p^{-1}(S)\} = \{d(x, gy) | g \in G\}.$$

En efecto, sean $z \in p^{-1}(R)$ y $w \in p^{-1}(S)$. Claramente, $G(x) = p^{-1}(R)$ y $G(y) = p^{-1}(S)$, así, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1x = z$ y $g_2y = w$. La invarianza de d asegura que $d(z, w) = d(g_1x, g_2y) = d(x, g_1^{-1}g_2y) \in \{d(x, gy) | g \in G\}$. Así, tenemos la contención de izquierda a derecha.

Por otro lado, para $g \in G$, tenemos que $g = g^{-1}g^2$ y $gx \in G(x) = p^{-1}(R)$, $g^2y \in G(y) = p^{-1}(S)$. Luego, la invarianza de d asegura que $d(gx, g^2y) = d(x, gy)$. Terminando nuestra afirmación.

Para $R, S \in X/G$, definamos:

$$d'(R, S) = \inf\{d(x, y) | x \in p^{-1}(R), y \in p^{-1}(S)\}.$$

Por la igualdad anterior, tenemos que para cualesquiera $y \in p^{-1}(S)$ y $x \in p^{-1}(R)$,

$$d'(R, S) = \inf\{d(x, gy) | g \in G\} = d(x, G(y)).$$

Procedamos a probar que d' es una métrica en X/G .

Sean $R, S \in X/G$. Tenemos $0 \leq \inf\{d(x, y) | x \in p^{-1}(R), y \in p^{-1}(S)\} = d'(R, S)$.

La simetría de d' se sigue de la simetría de d .

Sean R y S dos órbitas distintas. Afirmamos que $d'(R, S) > 0$. En efecto, si $y \in p^{-1}(S)$ y $x \in p^{-1}(R)$, tenemos que $d'(R, S) = d(x, G(y))$. Así, dado que X/G es un espacio T_1 , S es cerrado en X/G y consecuentemente, $G(y) = p^{-1}(S)$ es cerrado en X . Ahora, como $R \neq S$, tenemos que $x \notin G(y)$, así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus G(y)$. Por lo que, $d'(R, S) = d(x, G(y)) > 0$.

Mostremos que d' cumple la desigualdad del triángulo. Sean $R, S, T \in X/G$ y consideremos $x \in p^{-1}(R)$, $y \in p^{-1}(S)$ y $r \in p^{-1}(T)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d'(R, S) &= \inf\{d(x, gy) | g \in G\} \\ &\leq \inf\{d(x, g_1r) + d(g_1r, gy) | g_1, g \in G\} \\ &\leq \inf\{d(x, g_1r) | g_1 \in G\} + \inf\{d(g_1r, gy) | g_1, g \in G\} \\ &= d'(R, T) + d'(T, S). \end{aligned}$$

Para finalizar, probemos que la topología inducida por d' es compatible con la topología de X/G . Para esto, es suficiente probar que la función $p : X \rightarrow X/G$ es abierta considerando en X/G la topología inducida por d' .

Sean $x \in X$ y $r > 0$. Afirmamos que $p(B_r^X(x)) = B_r^{X/G}(p(x))$. Donde $B_r^{X/G}(p(x))$ denota la bola de radio r y centro $p(x) \in X/G$ en la métrica d' , similarmente $B_r^X(x)$ denota la bola de radio r con centro en x en la métrica d . Dado que $d'(p(y), p(x)) \leq d(x, y)$, tenemos la contención de izquierda a derecha. Ahora, sea $R \in X/G$ tal que $d'(R, p(x)) < r$. Por lo anterior, $d(x, p^{-1}(R)) = d'(p(x), R)$. Así, existe $y \in p^{-1}(R)$ tal que $d(x, y) < r$. Dado que $p(y) = R$ y $y \in B_r^X(x)$, obtenemos $B_r^{X/G}(p(x)) \subset p(B_r^X(x))$. En consecuencia, $p : (X, d) \rightarrow (X/G, d')$ es una función continua y abierta. Así, d' induce la topología cociente. $\square$

1.4. Acciones de grupos compactos

En esta sección, estudiaremos propiedades que surgen cuando el grupo actuante es compacto.

Lema 1.4.1. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio. Si α es la acción de G en X y $p : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital. Se cumple:*

1. $\alpha : G \times X \rightarrow X$ es una función perfecta, esto es, es una función continua, cerrada con fibras compactas.
2. $p : X \rightarrow X/G$ es una función perfecta.

Demostración. Sean G un grupo compacto y X un G -espacio con acción α .

1. Definamos

$$\begin{aligned} \theta : G \times G \times X &\rightarrow G \times X \\ (g, h, x) &\mapsto (hg^{-1}, gx). \end{aligned}$$

Mostremos que θ es una acción continua.

θ es una función continua ya que es continua entrada a entrada, por lo que solo resta probar que es una acción.

Sean $g, h \in G$ y $(k, x) \in G \times X$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \theta(g, \theta(h, k, x)) &= \theta(g, kh^{-1}, hx) \\ &= (kh^{-1}g^{-1}, ghx) \\ &= \theta(gh, k, x) \\ \theta(e, k, x) &= (k, x). \end{aligned}$$

Ahora mostremos que para cualquier subconjunto A de $G \times X$, se tiene que $\alpha^{-1}(\alpha(A)) = \theta(G \times A)$.

En efecto, sea $(g, x) \in \alpha^{-1}(\alpha(A))$. Existe $(h, y) \in A$ tal que $gx = hy$, de donde, $x = g^{-1}hy$ y consecuentemente, $(g^{-1}h, (h, y)) \in G \times A$. Así,

$$\begin{aligned}\theta(g^{-1}h, (h, y)) &= (h(g^{-1}h)^{-1}, g^{-1}hy) \\ &= (g, x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g, x) \in \theta(G \times A)$.

Sea $(g, x) \in \theta(G \times A)$. Existe

$(k, (h, y)) \in G \times A$ tal que $(hk^{-1}, ky) = (g, x)$. Así, $g = hk^{-1}$ y $x = ky$.

Por lo tanto, $gx = hk^{-1}ky = hy \in \alpha(A)$. Luego, $(g, x) \in \alpha^{-1}(\alpha(A))$.

Supongamos que A es un subconjunto cerrado de $G \times X$ y mostremos que $\alpha(A)$ es cerrado en X .

Dado que G es compacto, A cerrado y θ acción, por la proposición 1.2.11, tenemos que $\theta(G \times A)$ es cerrado en $G \times X$. Una cuenta sencilla muestra que $\alpha^{-1}(X \setminus \alpha(A)) = G \times X \setminus \alpha^{-1}(\alpha(A))$, y como $\theta(G \times A) = \alpha^{-1}(\alpha(A))$, obtenemos que $\alpha^{-1}(X \setminus \alpha(A))$ es abierto en $G \times X$. La suprayectividad de α , implica que $\alpha(G \times X \setminus \alpha(A)) = X \setminus \alpha(A)$. Así, $\alpha(A)$ es un subconjunto cerrado de X .

Finalmente, mostremos que las fibras son compactas. Sea $x \in X$. Definamos

$$\begin{aligned}f_x : G &\rightarrow G \times X \\ g &\rightarrow (g, g^{-1}x).\end{aligned}$$

Es evidente que f_x es una función continua. Mostremos que

$f_x(G) = \alpha^{-1}(x)$. En efecto, sea $(g, g^{-1}x) \in f_x(G)$. Tenemos que, $gg^{-1}x = x$.

Por lo tanto, $(g, g^{-1}x) \in \alpha^{-1}(x)$. Por otro lado, sea $(g, y) \in \alpha^{-1}(x)$. Entonces, $gy = x$. Así, $y = g^{-1}x$. En consecuencia, $f_x(g) = (g, g^{-1}x) = (g, y)$. Obteniéndose la igualdad.

Por lo tanto, como G es compacto y f_x es una función continua, tenemos que $\alpha^{-1}(x)$ es un subconjunto compacto de $G \times X$.

2. Demostremos que $p : X \rightarrow X/G$ es una función perfecta.

Sea A un subconjunto cerrado de X . Claramente, $G \times A$ es cerrado en $G \times X$. Luego, en virtud del inciso anterior, $\alpha(G \times A)$ es cerrado en X . Así, dado que $G(A) = \alpha(G \times A)$, tenemos que $G(A)$ es cerrado en X . Como $G(A) = p^{-1}(p(A))$, tenemos que $p(A)$ es cerrado en X/G .

□

En el lema 1.3.3, se demostró que si X es un G -espacio métrico equipado con una métrica invariante bajo la acción del grupo G , y el espacio de órbitas X/G es

un espacio T_1 , el espacio X/G es metrizable. Más adelante, utilizando la integral de Haar, se demostrará que cualquier G -espacio admite una métrica invariante si G es un grupo compacto. Sería deseable poder asegurar que cualquier G -espacio metrizable tiene espacio de orbitas T_1 ; desafortunadamente, en el ejemplo 1.3.2 vimos que no podemos garantizar esto. Sin embargo, si G es un grupo compacto, tenemos este resultado, como se muestra a continuación.

Corolario 1.4.2. *Sea X un G -espacio con G compacto. Si X es T_1 , también lo es X/G .*

Demostración. Sea X un G -espacio T_1 . Dado que G es compacto, el lema 1.4.1 afirma que $p : X \rightarrow X/G$ es una función cerrada con fibras compactas. Por lo tanto, para cualquier punto $Q \in X/G$, la preimagen $p^{-1}(Q)$ es compacta. Así, $p^{-1}(Q)$ es un conjunto cerrado de X y consecuentemente tenemos que Q es cerrado en X/G . $\square$

Corolario 1.4.3. *Para G un grupo compacto, X un G -espacio, A un subconjunto cerrado invariante de X y V una vecindad abierta de A , existe una vecindad invariante U de A tal que $A \subset U \subset V$.*

Demostración. Sean A un subconjunto cerrado invariante de un G -espacio X , y V un abierto de X tal que $A \subset V$. Consideremos $p : X \rightarrow X/G$ la proyección orbital. En virtud del lema 1.4.1, p es una función cerrada. Por lo tanto, el conjunto $p(X \setminus V)$ es un conjunto cerrado de X/G . Así,

$$U = X/G \setminus p(X \setminus V)$$

es un abierto de X/G . En virtud de la observación 1.3.1, $p^{-1}(U)$ es un conjunto abierto invariante.

Afirmamos que $p^{-1}(U)$ es la vecindad deseada. Primero probemos que $p(A) \subset U$. Dado que $p(A) = p(X \setminus X \setminus A)$, tenemos la contención

$$p(A) \subset p(X) \setminus p(X \setminus A).$$

Así, la suprayectividad de p implica que $p(A) \subset p(X) \setminus p(X \setminus A) \subset X/G \setminus p(X \setminus A)$. Por lo tanto, $p(A) \subset U$.

Finalmente, demostremos que $p^{-1}(U) \subset V$. En efecto, si $u \in U$, para cada $y \in X \setminus V$, tenemos que $p(y) \neq u$. Por lo tanto, $p^{-1}(u) \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Así, $p^{-1}(U) \subset V$. Luego, $A \subset p^{-1}(p(A)) \subset p^{-1}(U)$ y así, $A \subset p^{-1}(U)$. $\square$

1.5. Acciones lineales

Como dijimos en la introducción, este trabajo se enfoca en el estudio de las simetrías de los espacios topológicos. Un concepto importante dentro de la clase

de espacios topológicos es el de espacio vectorial topológico. En esta sección, estudiaremos las simetrías de estos, esto es, daremos el concepto de G -espacio lineal y demostraremos algunas propiedades.

Definición 1.5.1. Sean G un grupo topológico y V un espacio lineal. Diremos que V es un G -espacio lineal si G actúa linealmente en él, es decir, la acción de G en V satisface

$$g(\lambda x + y) = \lambda gx + gy,$$

para cualesquiera $x, y \in V$, $g \in G$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Los espacios de funciones serán una herramienta importante en este trabajo. Dado que trabajaremos con la topología compacto abierta en los espacios de funciones, recordamos su definición. Sean X, Z dos espacios topológicos y $C(X, Z)$ el conjunto de funciones continuas de X en Z . Para cada par de subconjuntos $K \subset X$ y $U \subset Z$, definamos:

$$\Gamma_{K,U} = \{f \in C(X, Z) \mid f(K) \subset U\}.$$

Denotaremos τ_C a la topología generada por la sub-base

$$\{\Gamma_{K,U} \mid K \text{ es compacto de } X \text{ y } U \text{ es abierto de } Z\}.$$

τ_C recibe el nombre de topología compacto abierta.

Sea V un espacio vectorial y X un espacio métrico. Definamos en el espacio de funciones continuas $C(X, V)$ las siguientes operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para toda $f, g \in C(X, V)$, $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Con estas operaciones, $C(X, V)$ forma un espacio vectorial.

En este trabajo, asignaremos acciones a los espacios de funciones con el propósito de construir G -espacios lineales. Para ello, lo primero que debemos hacer es demostrar que los espacios de funciones son, en efecto, espacios vectoriales topológicos.

Proposición 1.5.2. Para X un espacio regular y V un espacio lineal. El espacio $C(X, V)$ es un espacio lineal con la topología compacto abierta.

Demostración. Sean X un espacio regular y V un espacio lineal. Mostremos que

$$\begin{aligned} + : C(X, V) \times C(X, V) &\rightarrow C(X, V), & (f, g) &\rightarrow f + g \\ \cdot : \mathbb{R} \times C(X, V) &\rightarrow C(X, V), & (\lambda, f) &\rightarrow \lambda f \end{aligned}$$

son funciones continuas. Primero veamos que la suma es una función continua. Sean $f, g \in C(X, V)$ y $\Gamma_{K, U}$ un sub-básico de $C(X, V)$ tales que $f + g \in \Gamma_{K, U}$. Para cada $x \in K$, tenemos $f(x) + g(x) \in U$. Luego, dado que V es un espacio lineal, su función suma es una función continua. Así, existen W'_x y Q'_x vecindades de $f(x)$ y $g(x)$ tales que

$$W'_x + Q'_x \subset U. \quad (1.5.1)$$

La regularidad de V asegura que existen vecindades abiertas W_x y Q_x de $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\overline{W_x} \subset W'_x$ y $\overline{Q_x} \subset Q'_x$. Luego, como f y g son funciones continuas, existe una vecindad abierta A_x de x que satisface $f(A_x) \subset W_x$ y $g(A_x) \subset Q_x$. Como K es compacto y $K \subset \bigcup_{x \in K} A_x$, existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Definamos $K_i = \overline{K} \cap A_{x_i}$. Claramente, K_i es un conjunto compacto y

$$f(K_i) \subset \overline{f(K \cap A_{x_i})} \subset \overline{f(A_{x_i})} \subset \overline{W_{x_i}} \subset W'_{x_i}.$$

Así, $f \in \Gamma_{K_i, W'_{x_i}}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Análogamente, $g \in \Gamma_{K_i, Q'_{x_i}}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $M = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_{K_i, W'_{x_i}}$ es una vecindad de f y $N = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_{K_i, Q'_{x_i}}$ es una vecindad de g .

Afirmamos que $M + N \subset \Gamma_{K, U}$. En efecto, sean $\phi \in M$, $\psi \in N$ y $x \in K$. Dado que $x \in K$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in K_i$. Entonces $\phi(x) \in W'_{x_i}$ y $\psi(x) \in Q'_{x_i}$. Luego, por (1.5.1), tenemos $\phi(x) + \psi(x) \in U$. Consecuentemente, $\phi + \psi \in \Gamma_{K, U}$.

Ahora veamos que la multiplicación por escalares es una función continua. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C(X, V)$ y $\Gamma_{K, U}$ un sub-básico de $C(X, V)$ tales que $\lambda f \in \Gamma_{K, U}$. Para cada $x \in K$, tenemos que $\lambda f(x) \in U$. Luego, dado que V un espacio lineal, existen W_x y Q_x vecindades de λ y $f(x)$ respectivamente tales que $W_x Q_x \subset U$. La continuidad de f garantiza la existencia de una vecindad abierta A_x de x que satisface $f(A_x) \subset Q_x$. Como $K \subset \bigcup_{x \in K} A_x$ y K es compacto, tenemos que existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Entonces,

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i) \subset \bigcup_{i=1}^n Q_{x_i}.$$

Definamos $M = \Gamma_{K, \bigcup_{i=1}^n Q_{x_i}}$ y $N = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$. Claramente $\lambda \in N$ y $f \in M$. Afirmamos que $NM \subset \Gamma_{K, U}$. En efecto, sean $\mu \in N$ y $g \in M$. Si $x \in K$, tenemos $g(x) \in Q_{x_j}$ para algún $1 \leq j \leq n$. Así, $\mu g(x) \in W_{x_j} Q_{x_j} \subset U$. Por lo tanto, $\mu g \in \Gamma_{K, U}$ y consecuentemente, la multiplicación por escalares es una función continua.

Por lo tanto, $C(X, V)$ con la topología compacto abierta es un espacio lineal.

□

Para finalizar esta sección daremos la definición de espacio normado en la clase de G -espacios.

Definición 1.5.3. Sean G un grupo topológico y V un G -espacio lineal. Si V es un espacio normado y la acción satisface

$$\|gx\| = \|x\|$$

para cada $x \in V$ y $g \in G$, diremos que V es un **G -espacio normado**. En este caso, se dice que la acción es **ortogonal**.

1.6. Encajes en G -espacios lineales

El teorema de Kuratowski-Wojdislawski dice que cualquier espacio (X, d) metrizable puede ser encajado isometricamente en un espacio normado (ver [16, Theorem 4.3.14]). Más aún, se puede asegurar que la imagen de X bajo esta isometría es cerrada en su envoltura convexa. En esta sección presentamos el teorema de Kuratowski-Wojdislawski en la Teoría de Grupos de Transformaciones y un teorema sobre encajes en G -espacios lineales que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Comenzamos definiendo las acciones con las que dotaremos los espacios de funciones a lo largo de este trabajo. Dado que recurriremos a las funciones asociadas para mostrar la continuidad de estas acciones, hacemos un breve recordatorio.

Sean Y un espacio topológico arbitrario y G un grupo localmente compacto. Consideremos $C(G, Y)$ el espacio de funciones continuas de G en Y dotado de la topología compacto abierta. En [16, Theorem 3.4.3], se prueba que la función de evaluación

$$\begin{aligned} \varepsilon : C(G, Y) \times G &\rightarrow Y \\ (f, g) &\rightarrow f(g) \end{aligned}$$

es una función continua, y una función $\phi : X \rightarrow C(G, Y)$ es continua si, y solo si, $\phi^* : X \times G \rightarrow Y$ es continua, donde $\phi^*(x, g) = [\phi(x)](g)$ y X es un espacio topológico arbitrario. Claramente, $\phi^* = \varepsilon(\phi \times 1_G)$. En este caso, decimos que ϕ y ϕ^* son funciones **asociadas**.

Teorema 1.6.1. Sean G un grupo localmente compacto y X un espacio topológico. La función

$$\begin{aligned} \alpha : G \times C(G, X) &\rightarrow C(G, X) \\ (g, f) &\rightarrow g \cdot f \end{aligned}$$

donde $(g \cdot f)(x) = f(xg)$, es una acción continua de G en el espacio de funciones $C(G, X)$.

Demostración. Sean $f \in C(G, X)$ y $g \in G$. Primero debemos de mostrar es que α está bien definida, es decir, veamos que $g \cdot f$ es una función continua. Sean $h \in G$ y U un abierto de X tales que $g \cdot f(h) = f(hg) \in U$. Dado que f es continua, existe un abierto V' de G tal que $hg \in V'$ y $f(V') \subset U$. Definamos $V = V'g^{-1}$. Claramente, V es abierto y $h \in V$. Ahora, si $xg^{-1} \in V$, con $x \in V'$, tenemos que $g \cdot f(xg^{-1}) = f(x) \in U$. Luego, $(g \cdot f)(V) \subset U$ que es lo que queríamos demostrar.

Ahora procedamos a demostrar que α es una función continua. Para esto, mostremos que la función

$$\begin{aligned} \alpha^* : (G \times C(G, X)) \times G &\rightarrow X \\ (g, f, h) &\rightarrow f(hg) \end{aligned}$$

es continua. En efecto, sean $g, h \in G$, $f \in C(G, X)$ y U un abierto de X tal que $f(hg) \in U$. Como f es continua, existe una vecindad abierta V' de hg en G tal que $f(V') \subset U$. Luego, dado que G es localmente compacto, existe una vecindad abierta V de hg tal que $hg \in V \subset \bar{V} \subset V'$ y $\bar{V}$ compacto. Ahora, como G es un grupo topológico, existen vecindades V_1 y V_2 de h y g respectivamente tales que $V_1V_2 \subset V$. Definamos $W = V_2 \times \Gamma_{\bar{V}, U} \times V_1$. Es evidente que $(g, f, h) \in W$. Ahora, si $(g', f', h') \in W$, $h'g' \in V$ y así $f'(h'g') \in U$. Por lo tanto, α^* es una función continua. Así, obtenemos que α es una función continua.

Para finalizar, veamos que α es una acción. Sean $g, h, x \in G$ y $f \in C(G, X)$. Entonces

$$h \cdot (g \cdot f)(x) = (g \cdot f(xh)) = f((xh)g) = f(x(hg)) = hg \cdot f(x)$$

y

$$e \cdot f(x) = f(x).$$

Luego, α es una acción. □

Teorema 1.6.2. Sean G un grupo localmente compacto y X un espacio topológico. La función

$$\begin{aligned} \alpha' : G \times C(G, X) &\rightarrow C(G, X) \\ (g, f) &\rightarrow g * f \end{aligned}$$

donde $(g * f)(x) = f(g^{-1}x)$, es una acción continua de G en el espacio de funciones $C(G, X)$.

Demostración. Es análoga a la demostración del teorema anterior. □

Teorema 1.6.3. Sean G un grupo localmente compacto, Y un espacio topológico, X un G -espacio y $\eta : X \hookrightarrow Y$ un encaje. La función η induce un encaje equivariante

$$\eta_{\#} : X \hookrightarrow C(G, Y), \quad \eta_{\#}(x)(g) = \eta(gx).$$

Además, si η es cerrada, G compacto y Y Hausdorff, $\eta_{\#}$ es un encaje cerrado.

Demostración. Sean $\phi : G \times X \rightarrow X$ la acción continua de G en X y $x \in X$. Tenemos que $\eta_{\#}(x) : G \rightarrow Y$ es la función continua $\eta \circ \phi|_{G \times \{x\}} \circ i$, donde $i : G \rightarrow G \times \{x\}$ es la inclusión. Consecuentemente, $\eta_{\#}$ está bien definida.

La continuidad de $\eta_{\#}$ se sigue de que su función asociada $\eta_{\#}^*$

$$\eta_{\#}^* : X \times G \rightarrow Y, \quad \eta_{\#}^*((x, g)) = \eta(gx)$$

es la función continua $\eta_{\#}^* = \eta \circ \phi \circ h$, donde $h : X \times G \rightarrow G \times X$ es el homeomorfismo $h(x, g) = (g, x)$.

Veamos que $\eta_{\#}$ es inyectiva, para esto, sean $x, y \in X$ tales que $\eta_{\#}(x) = \eta_{\#}(y)$. Así, para e , tenemos que $\eta_{\#}(x)(e) = \eta(ex) = \eta(ey) = \eta_{\#}(y)(e)$. Ahora, dado que η es inyectiva, obtenemos que $x = y$.

Mostremos que $\eta_{\#}$ es una función abierta en su imagen. Sea A un abierto de X . Como η es un encaje, $\eta(A)$ es abierto en $\eta(X)$ y así, existe un abierto U de Y tal que $U \cap \eta(X) = \eta(A)$. Sea $a \in A$. Entonces, $\eta_{\#}(a)(e) = \eta(a) \in U \cap \eta(X)$ y por lo tanto, $\eta_{\#}(a) \in \Gamma_{\{e\}, U}$. Afirmamos que

$$\Gamma_{\{e\}, U} \cap \eta_{\#}(X) \subset \eta_{\#}(A).$$

En efecto, sea $\varphi \in \Gamma_{\{e\}, U} \cap \eta_{\#}(X)$. Por un lado $\varphi = \eta_{\#}(x)$, para algún $x \in X$, y por el otro lado $\eta(x) = \eta_{\#}(x)(e) = \varphi(e) \in U$. Ahora, dado que $\eta(x) \in U \cap \eta(X) = \eta(A)$, existe $a' \in A$ tal que $\eta(x) = \eta(a')$. La inyectividad de η asegura que $a' = x$ y por lo tanto, $\varphi = \eta_{\#}(x) \in \eta_{\#}(A)$.

Para finalizar, veamos que $\eta_{\#}$ respeta la acción. Sean $g, h \in G$ y $x \in X$. Así,

$$h \cdot \eta_{\#}(x)(g) = \eta_{\#}(x)(gh) = \eta(ghx) = \eta_{\#}(hx)(g).$$

Para la segunda parte, supongamos que G es compacto, Y de Hausdorff, η cerrada y que $\eta_{\#} : X \hookrightarrow C(G, Y)$ no es una función cerrada.

Dado que $\eta_{\#}$ no es cerrada, existe $\varphi \in \overline{\eta_{\#}(X)}$ tal que $\varphi \notin \eta_{\#}(X)$. Consideremos una red (x_{λ}) en X tal que $\eta_{\#}(x_{\lambda})$ converge a φ en $C(G, Y)$. Como $\varphi \notin \eta_{\#}(X)$, para cada λ existe $g_{\lambda} \in G$ tal que $\varphi(g_{\lambda}) \neq \eta_{\#}(x_{\lambda})(g_{\lambda})$. Así, g_{λ} es una red en G . La compacidad de G garantiza la existencia de una subred $g_{\lambda_{\mu}}$ convergente a algún g en G . La continuidad de φ implica que $\varphi(g_{\lambda_{\mu}})$ converge a $\varphi(g)$. Luego, como $\eta_{\#}(x_{\lambda})$ converge a φ en $C(G, Y)$, $\eta_{\#}(x_{\lambda_{\mu}})(g)$ converge a $\varphi(g)$. Así, $\eta_{\#}(x_{\lambda_{\mu}})(g) = \eta(gx_{\lambda_{\mu}})$ es una red en $\eta(X)$. Luego, η cerrada implica que $\eta_{\#}(X)$ es cerrado en Y , por lo que existe $x \in X$ tal que $\eta(gx_{\lambda_{\mu}})$ converge a $\eta(x)$. La continuidad de η , garantiza que $gx_{\lambda_{\mu}}$ converge a x . Así, como G es un grupo topológico, tenemos que $x_{\lambda_{\mu}}$ converge a $g^{-1}x$. En consecuencia, $\eta_{\#}(x_{\lambda_{\mu}})$ converge a $\eta_{\#}(g^{-1}x)$. Por otro lado, Y Hausdorff implica que $C(G, Y)$ sea Hausdorff. Así,

el punto de convergencia es único, consecuentemente $\eta_{\#}(g^{-1}x) = \varphi$. Lo cual es una contradicción y esta surgió de suponer que $\eta_{\#}$ no es una función cerrada. $\square$

Sean S un conjunto no vacío y $V = (V, \|\cdot\|)$ un espacio métrico normado. Consideremos el conjunto

$$B(S, V) = \{f : S \rightarrow V \mid f \text{ es acotada} \}$$

dotado de la métrica $\|f\|_{\infty} = \sup_{s \in S} \|f(s)\|$.

Un resultado conocido es que $(B(S, V), \|\cdot\|_{\infty})$ es de Banach si V es de Banach (ver [13, Teorema 5.21]). Si $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, denotaremos $B(S)$ al espacio de Banach $B(S, V)$ donde $|\cdot|$ es el valor absoluto usual.

En esta teoría seguiremos un enfoque similar al del teorema de Kuratowski-Wojdislawski, donde se establece una isometría entre un espacio métrico y un espacio de funciones, solo que aquí trabajaremos con funciones G -uniformes acotadas.

Definición 1.6.4. Sea Z un G -conjunto. Una función $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **G -uniforme**, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de e en G tal que

$$|f(gz) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } g \in U \text{ y } z \in Z.$$

Dado un G -conjunto Z , denotaremos por $A(Z)$ al subespacio de $B(Z)$ que consta de todas las funciones G -uniformes.

Proposición 1.6.5. Sea Z un G -conjunto. Se cumple:

1. $A(Z)$ es un subespacio lineal cerrado de $B(Z)$.
2. La función $\alpha' : G \times A(Z) \rightarrow A(Z)$

$$(g, f)(z) = f(g^{-1}z) \quad \text{con } z \in Z$$

es una acción lineal isométrica de G en $A(Z)$.

Demostración.

1. Sean $f, h \in A(Z)$ y $\xi > 0$. Demostremos que $A(Z)$ es subespacio de $B(Z)$.
Dado que $f, h \in A(Z)$, existen dos vecindades U_1 y U_2 de e en G tales que

$$\begin{aligned} |f(gz) - f(z)| &< \frac{\xi}{2} && \text{para todo } g \in U_1 \text{ y } z \in Z \\ |h(gz) - h(z)| &< \frac{\xi}{2} && \text{para todo } g \in U_2 \text{ y } z \in Z. \end{aligned}$$

Definamos $U = U_1 \cap U_2$. Claramente, $e \in U$. Ahora, si $g \in U$ y $z \in Z$, tenemos

$$\begin{aligned} |(f+h)(gz) - (f+h)(z)| &\leq |f(gz) - f(z)| + |h(gz) - h(z)| \\ &< \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi. \end{aligned}$$

Luego, $f+h \in A(Z)$.

Sean $f \in A(Z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi > 0$, y supongamos que $|\lambda| > 0$. Sea $r = \frac{\xi}{|\lambda|}$. Como $r > 0$, existe una vecindad U de e en G tal que

$$|f(gz) - f(z)| < r \quad \text{para todo } g \in U \text{ y } z \in Z.$$

Dado que $r = \frac{\xi}{|\lambda|}$, obtenemos que

$$|\lambda| |f(gz) - f(z)| < \xi.$$

Luego, $|\lambda| |f(gz) - f(z)| = |(\lambda f)(gz) - (\lambda f)(z)|$ así,

$$|(\lambda f)(gz) - (\lambda f)(z)| < \xi \text{ para todo } g \in U \text{ y } z \in Z.$$

En consecuencia, $\lambda f \in A(Z)$.

Concluimos que $A(Z)$ es un subespacio de $B(Z)$.

Mostremos ahora que $A(Z)$ es un cerrado en $B(Z)$. Sean $f \in \overline{A(Z)}$ y f_n una sucesión de funciones de $A(Z)$ que converge a f . Veamos que f es G -uniforme.

Sea $\xi > 0$. Dado que f_n converge a f , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\xi}{3} \quad \text{para todo } n \geq k \text{ y } x \in Z.$$

Por otro lado, como f_k es una función G -uniforme, para $\frac{\xi}{3}$, existe una vecindad U de e en G tal que

$$|f_k(gz) - f_k(z)| < \frac{\xi}{3} \quad \text{para todo } g \in U \text{ y } z \in Z.$$

Obtenemos que para todo $g \in U$ y $z \in Z$,

$$\begin{aligned} |f(gz) - f(z)| &\leq |f(gz) - f_k(gz)| + |f_k(gz) - f_k(z)| \\ &\quad + |f_k(z) - f(z)| \\ &< \frac{\xi}{3} + \frac{\xi}{3} + \frac{\xi}{3}. \end{aligned}$$

Luego, f es G -uniforme.

2. Mostremos que la función $G \times A(Z) \rightarrow A(Z)$, $(g, f)(z) = f(g^{-1}z)$ es una acción continua.

Veamos primero que está bien definida.

Sean $g \in G$ y $f \in A(Z)$. Demostremos que $gf \in A(Z)$. Sea $\xi > 0$. Como f es una función G -uniforme, existe una vecindad V de e en G tal que

$$|f(gz) - f(z)| < \xi \text{ para todo } g \in V \text{ y } z \in Z. \quad (1.6.1)$$

Definamos $U = gV^{-1}g^{-1}$. Claramente, U es una vecindad abierta de e en G . Afirmamos que, si $t \in U$ y $z \in Z$, entonces $|(gf)(tz) - (gf)(z)| < \xi$. En efecto, si $t \in U$ y $z \in Z$, tenemos que

$$|f(g^{-1}tz) - f(g^{-1}z)| = |f(x) - f(hx)|,$$

donde $x = g^{-1}tz$, $h = g^{-1}t^{-1}g \in V$. Luego, por (1.6.1),

$$|f(x) - f(hx)| < \xi.$$

En consecuencia,

$$|(gf)(tz) - (gf)(z)| = |f(g^{-1}tz) - f(g^{-1}z)| < \xi.$$

Luego, $gf \in A(Z)$.

Se sigue del teorema 1.6.2 que α' es una acción.

Probemos la continuidad de α' .

Sean $(g_0, f_0) \in G \times A(Z)$ y $\xi > 0$. Dado que f_0 es G -uniforme, para ξ , existe una vecindad V de e en G tal que

$$|f_0(gz) - f_0(z)| < \frac{\xi}{2} \text{ para todo } g \in V \text{ y } z \in Z. \quad (1.6.2)$$

Definamos $U = g_0V^{-1}$. Mostremos que $\alpha'(U \times B_{\frac{\xi}{2}}(f_0)) \subset B_{\xi}(g_0f_0)$. En efecto, sean $g \in U$ y $f \in B_{\frac{\xi}{2}}(f_0)$. Para $z \in Z$, definamos $h = g^{-1}g_0$ y $y = g_0^{-1}z$. Obtenemos que $hy = g^{-1}z$. Luego, $g \in U = g_0V^{-1}$ implica que $g = g_0v^{-1}$, para algún $v \in V$. Entonces $h = (vg_0^{-1})(g_0) = v \in V$. Así, por (1.6.2),

$$|f_0(g^{-1}z) - f_0(g_0^{-1}z)| = |f_0(hy) - f_0(y)| < \frac{\xi}{2},$$

para $z \in Z$. Luego, como

$$\|gf_0 - g_0f_0\| = \sup_{z \in Z} |f_0(g^{-1}z) - f_0(g_0^{-1}z)|,$$

obtenemos que $\|gf_0 - g_0f_0\| \leq \frac{\xi}{2}$.

Ahora, dado que la función $g^{-1} : Z \rightarrow Z$, $g^{-1}(z) \mapsto g^{-1}(z)$ es biyectiva y $f \in B_{\frac{\xi}{2}}(f_0)$, tenemos

$$\sup_{z \in Z} |gf(z) - gf_0(z)| < \frac{\xi}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|gf - g_0f_0\| &\leq \|gf - gf_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| \\ &< \xi/2 + \xi/2. \end{aligned}$$

Así, α' es una función continua.

La ortogonalidad es inmediata de definición de la métrica en $A(Z)$.

□

La proposición anterior proporciona una herramienta para construir G -espacios lineales de Banach. Por ejemplo, se sabe que cualquier subespacio cerrado de un espacio de Banach es completo (ver [13, Proposición 5.9]). Así, en virtud de la proposición anterior, para cada G -conjunto Z , el G -espacio lineal $A(Z)$ es un G -espacio lineal de Banach ya que $B(Z)$ es un espacio de Banach. Este hecho, junto con el siguiente lema, será utilizado para asegurar que el contradominio del encaje isométrico de Kuratowski-Wojdislawski es un espacio de Banach.

Lema 1.6.6. *Para X un G -espacio y el conjunto de funciones continuas G -uniformes $C'(X)$, el espacio $C'(X)$ es un subespacio cerrado e invariante de $A(X)$ (invariante bajo la acción de la proposición 1.6.5).*

Demostración. Sean X un G -espacio y $C'(X)$ el subconjunto de funciones continuas de $A(X)$. Sabemos que la suma de funciones continuas es continua, y que el producto de una función continua por un escalar es una función continua. Así, $C'(X)$ es un subespacio de $A(X)$.

Veamos que $C'(X)$ es un subconjunto invariante de $A(X)$.

Sean $g \in G$ y $f \in C'(X)$. Como X es un G -espacio, la función $\phi_{g^{-1}} : X \rightarrow X$, $\phi_{g^{-1}}(x) = g^{-1}x$ es un homeomorfismo. Así, al tomar la composición de f con $\phi_{g^{-1}}$, tenemos una función continua y consecuentemente, $gf \in C'(X)$. Mostrando así que $C'(X)$ es un subconjunto invariante de $A(X)$, y por lo tanto, un G -espacio.

Ahora, sabemos que $C(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$ y $C'(X) = A(X) \cap C(X)$. Así, $C'(X)$ es un subespacio cerrado de $A(X)$. □

Sea X un G -espacio. El lema anterior garantiza que el G -espacio $C'(X)$ es un subespacio lineal cerrado de $A(X)$, así, dado que $A(X)$ es de Banach, obtenemos que $C'(X)$ es un G -espacio lineal de Banach.

Presentamos el teorema de Kuratowski-Wojdislawski en la clase de G -espacios.

Teorema 1.6.7. *Sea (X, d) un G -espacio métrico con d una métrica invariante acotada. La función*

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow C'(X) \\ i(x)(y) &\rightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

es una isometría equivariante. Más aún, $i(X)$ es cerrado en su envoltura convexa.

Demostración. Sea (X, d) un G -espacio con d una métrica acotada invariante. Por el teorema de Kuratowski, i es una isometría e $i(X)$ es cerrado en su envoltura convexa. Basta probar que para cada $x \in X$, $f_x(y) = i(x)(y)$ es una función G -uniforme e i es equivariante.

Primero veamos que para cada $x \in X$, f_x es una función G -uniforme.

Sean $x \in X$ y $\xi > 0$. Dado que G actúa continuamente en X , para $B_\xi(x)$, existen vecindades U y V de e y x respectivamente tales que $UV \subset B_\xi(x)$. Para cada $g \in U$, tenemos que

$$d(gx, x) < \xi.$$

La invarianza de d implica

$$d(gz, y) = d(z, g^{-1}y) \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } z, y \in X.$$

Así, para $g \in U$ y $y \in X$ arbitrarios,

$$\begin{aligned} |f_x(gy) - f_x(y)| &= |d(x, gy) - d(y, x)| \\ &= |d(g^{-1}x, y) - d(y, x)| \\ &\leq d(g^{-1}x, x) \\ &= d(x, gx) < \xi. \end{aligned}$$

Consecuentemente, f_x es una función G -uniforme.

Sean $x \in X$ y $g \in G$. Para mostrar que i es equivariante, es suficiente mostrar que $f_{gx} = gf_x$. Sea $z \in X$. Ocupando nuevamente la invarianza de d , obtenemos

$$\begin{aligned} f_{gx}(z) &= d(gx, z) \\ &= d(x, g^{-1}z) \\ &= f_x(g^{-1}z) \\ &= gf_x(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, i es una isometría equivariante. □

1.7. Integral de Haar

En esta sección presentamos la integral de Haar en el espacio de funciones $C(G, \mathbb{R})$ donde G es un grupo compacto, mediante un teorema de existencia y unicidad. En este texto no incluimos la demostración, pero puede ser consultada en [25, Theorem 5.14.]. Como es de imaginarse, supondremos en toda la sección que el grupo G es un grupo compacto.

Consideremos el espacio de funciones $C(G, \mathbb{R})$ dotado de la topología compacto-abierta y de las acciones α y α' de los teoremas 1.6.1 y 1.6.2 respectivamente. Para $f \in C(G, \mathbb{R})$ y $g \in G$, ocuparemos la notación:

$$\alpha(g, f) = R_g = f_g \qquad \alpha'(g, f) = L_g = {}_g f.$$

Teorema 1.7.1. *Existe una única función continua $\int : C(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

1. $\int f + h = \int f + \int h$ para todo $f, h \in C(G, \mathbb{R})$ y $\int c = c$ para toda función constante.
2. $\int f_g = \int_g f = \int f$ para todo $f \in C(G, \mathbb{R})$ y $g \in G$.
3. Si $f \in C(G, \mathbb{R})$ y $f \geq 0$ entonces $\int f \geq 0$.

Dado un grupo compacto G , el teorema anterior garantiza que existe una única función continua $\int : C(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface (1), (2) y (3). A $\int$ le llamaremos la **integral de Haar**.

Comenzaremos mostrando que la integral de Haar satisface propiedades similares a la integral de Riemann.

Lema 1.7.2. *Sean $f, h \in C(G, \mathbb{R})$. Se cumple que:*

1. si $f(g) \geq h(g)$ para todo $g \in G$, entonces $\int f(g)dg \geq \int h(g)dg$.
2. $|\int f(g)dg| \leq \sup\{|f(g)| : g \in G\}$.
3. si $f(g) \geq 0$ para toda $g \in G$ y $f \neq 0$, entonces $\int f(g)dg > 0$.

Demostración.

1. Sean $f, h \in C(G, \mathbb{R})$ tales que $f(g) \geq h(g)$ para todo $g \in G$. Tenemos que $f(g) - h(g) \geq 0$ para toda $g \in G$. Así, por (1) y (3) del teorema 1.7.1, obtenemos que $\int f(g)dg - \int h(g)dg \geq 0$. Consecuentemente, $\int f(g)dg \geq \int h(g)dg$.

2. Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$ y consideremos $\beta = \sup\{|f(g)| : g \in G\}$. Por definición, obtenemos

$$-\beta \leq f(g) \leq \beta \quad \text{para todo } g \in G.$$

Luego, por el teorema 1.7.1 y (1) de este lema, obtenemos:

$$-\beta \leq \int f(g)dg \leq \beta.$$

Así, $|\int f(g)dg| \leq \beta$.

3. Sea $f \in C(G, \mathbb{R})$ una función no negativa distinta de la constante cero. Dado que $f \neq 0$ y es continua, existen $g_0 \in G$ tal que $f(g_0) > 0$, y una vecindad abierta U de g_0 tal que

$$f(U) \subset (f(g_0) - f(g_0)/2, f(g_0) + f(g_0)/2).$$

Así, existe $c > 0$ tal que $f(u) \geq c$ para todo $u \in U$.

Por otro lado, dado que G es compacto y $\bigcup_{g \in G} U g_0^{-1} g$ es una cubierta abierta de G , existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $G = \bigcup_{i=1}^n U g_0^{-1} g_i$.

Para $i = 1, \dots, n$, definamos $h_i = g_i^{-1} g_0$. Así, si $g \in G$, tenemos que $g \in U h_i^{-1}$ para algún $1 \leq i \leq n$. Consecuentemente, $g h_i \in U$. Luego, $R_{h_i} f(g) = f(g h_i) \geq c$ y así, $\sum_{i=1}^n R_{h_i} f \geq c$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} n \int f(g)dg - c &= \int \sum_{i=1}^n R_{h_i} f(g)dg - \int c \\ &= \int \sum_{i=1}^n R_{h_i} f - c \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int f(g)dg \geq \frac{c}{n} > 0$.

□

El siguiente teorema se utilizará para construir funciones invariantes, al terminar la demostración, daremos un ejemplo.

Teorema 1.7.3.

1. Sean Z un espacio topológico y $\varphi : G \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi' : Z &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \int \varphi(g, z)dg \end{aligned}$$

es una función continua.

2. Sean X un G -espacio y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi' : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \int \varphi(gx)dg\end{aligned}$$

es una función continua invariante. Más aún, si A es un subconjunto invariante de X que satisface $\varphi(A) \subset [a, b]$, $\varphi'(A) \subset [a, b]$.

Demostración.

1. Afirmamos que φ' está bien definida. En efecto, sean $z \in Z$ e $i : G \hookrightarrow G \times \{z\}$ la inclusión de G en $G \times \{z\}$. Claramente, $\varphi|_{G \times \{z\}} \circ i$ pertenece al espacio de funciones $C(G, \mathbb{R})$. Ahora, en virtud del teorema 1.7.1, $\varphi'(z) = \int \varphi|_{G \times \{z\}} \circ i(g, z)dg$ existe.

Mostremos la continuidad de φ' .

Sean $z \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $g \in G$, existen vecindades abiertas U_g y V_g de g y z respectivamente tales que

$$\varphi(U_g \times V_g) \subset (\varphi(g, z) - \varepsilon/2, \varphi(g, z) + \varepsilon/2).$$

Dado que $G = \bigcup_{g \in G} U_g$ y G es compacto, existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $G = \bigcup_{i=1}^n U_{g_i}$. Definamos $W = \bigcap_{i=1}^n V_{g_i}$. Claramente W es una vecindad abierta de z . Ahora, si $z' \in W$ y $g \in G$, tenemos que $g \in U_{g_i}$ para algún $0 \leq i \leq n$, así

$$\begin{aligned}|\varphi(g, z') - \varphi(g_i, z)| &< \varepsilon/2 \\ |\varphi(g_i, z) - \varphi(g, z)| &< \varepsilon/2.\end{aligned}$$

En consecuencia, $|\varphi(g, z') - \varphi(g, z)| < \varepsilon$. Luego,

$$|\varphi'(z') - \varphi'(z)| = \left| \int \varphi(g, z') - \varphi(g, z)dg \right| < \int \varepsilon = \varepsilon.$$

2. Sean $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y α la acción continua de G en X que hace a X un G -espacio. Consideremos

$$\chi = \varphi \circ \alpha : G \times X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por el inciso (1) de este lema, χ induce una función continua $\varphi' : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos

$$\varphi_x(g) : G \rightarrow \mathbb{R} \quad g \rightarrow \varphi(gx).$$

Así, $\varphi'(x) = \int \varphi_x(g)dg$. Luego, por el inciso (2) del teorema 1.7.1, si $h \in G$

$$\varphi'(hx) = \int \varphi(ghx)dg = \int \varphi_x(gh)dg = \int \varphi_x(g)dg = \varphi'(x).$$

Por lo tanto, φ' es una función continua e invariante.

Para finalizar, supongamos que A es un subconjunto invariante de X que cumple que $\varphi(A) \subset [a, b]$. Para cada $g \in G$ y $x \in A$, tenemos que $a \leq \varphi(gx) \leq b$, así, $a \leq \varphi'(x) \leq b$.

□

Como dijimos arriba, este resultado servirá para construir funciones invariantes a partir de funciones continuas. Procedamos a dar un ejemplo.

Sean X un G -espacio normal, A y B subconjuntos cerrados invariantes ajenos de X . El lema de Uryson (ver [12, Teorema 6.17]) asegura que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ que cumple $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$. Así, por el inciso (2) del teorema anterior, tenemos que f induce una función invariante $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora, dado cualquier $x \in X$ fijo, tenemos que $0 \leq f(gx) \leq 1$ para todo $g \in G$, así, por (1) del lema 1.7.2 tenemos que $0 \leq \int f(gx)dg \leq 1$. Consecuentemente, podemos restringir el contradominio de f' al conjunto $[0, 1]$ y la función $f' : X \rightarrow [0, 1]$ está bien definida.

Por otro lado, dado que A es invariante, para cada $g \in G$, tenemos que $f(gx) = 0$ si $x \in A$. Así, $f'(x) = \int f(gx)dg = 0$. Concluyendo que $f'(x) = 0$ para cada $x \in A$. Un argumento similar asegura que $f'(x) = 1$ para $x \in B$.

Hemos obtenido una versión del lema de Uryson en la clase de G -espacios. Este resultado será utilizado en el teorema 3.0.9.

Por otro lado, como dijimos anteriormente, si el grupo actuante G es compacto, cualquier espacio metrizable X admite una métrica invariante, hecho que se utilizará activamente en resultados de esta tesis. En este momento tenemos las herramientas para demostrar este hecho.

Lema 1.7.4. *Para (X, ρ) un G -espacio metrizable, existe una métrica invariante d en X tal que d y ρ son métricas equivalentes. Más aún, d se puede definir de manera que si (X, ρ) es completo también lo sea (X, d) .*

Demostración. Sea (X, ρ) un G -espacio metrizable. Es claro que las siguientes funciones son continuas

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x, y) &\mapsto (gx, gy) \\ \rho : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \rho(x, y). \end{aligned}$$

En virtud del teorema 1.7.3, tenemos que $\rho \circ \alpha$ induce la función continua

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \int \rho(gx, gy)dg. \end{aligned}$$

Afirmamos que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica invariante equivalente a ρ .

Comencemos demostrando que d es una métrica.

1. Sean $x, y \in X$ y $g \in G$. Dado que ρ es una métrica, obtenemos que $\rho(gx, gy) \geq 0$. Así, por el teorema 1.7.1, tenemos

$$d(x, y) = \int \rho(gx, gy) dg \geq 0.$$

Ahora, sean y y x dos elementos de X tales que $d(x, y) = \int \rho(gx, gy) dg = 0$. Afirmamos que $\rho(gx, gy) = 0$ para todo $g \in G$. En efecto, de manera contraria, existiría $g \in G$ tal que $\rho(gx, gy) > 0$, así, dado que $\rho(gx, gy) \geq 0$, por el lema 1.7.2, tendríamos que $\int \rho(gx, gy) dg > 0$ y esto es una contradicción. Así, $\rho(gx, gy) = 0$ para todo $g \in G$. Como ρ es una métrica, obtenemos que $x = y$.

2. Sean $x, y \in X$. Dado que ρ es simétrica, $\rho(gx, gy) = \rho(gy, gx)$ para todo $g \in G$. Así,

$$d(x, y) = \int \rho(gx, gy) dg = \int \rho(gy, gx) dg = d(y, x).$$

3. Sean $x, y, z \in X$. Como ρ satisface la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\rho(gx, gy) \leq \rho(gx, gz) + \rho(gz, gy) \quad \text{para todo } g \in G.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \int \rho(gx, gy) dg \\ &\leq \int \rho(gx, gz) dg + \int \rho(gz, gy) dg \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

De la definición de d se sigue inmediatamente su invarianza.

Finalmente, probemos que ρ y d generan la misma topología, esto es, mostremos que la función $Id : (X, d) \rightarrow (X, \rho)$ es un homeomorfismo.

La continuidad de $Id : (X, \rho) \rightarrow (X, d)$ se sigue directamente de que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con la topología que genera ρ .

Para demostrar que $Id : (X, d) \rightarrow (X, \rho)$ es una función continua, procederemos por contradicción. Supongamos que existe un punto $x \in X$ en el cual Id no es continua. Esto significa que hay un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$,

el conjunto $B_\delta^d(x)$ no está completamente contenido en $B_\varepsilon^\rho(x)$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \rho(x_n, x) \geq \varepsilon. \quad (1.7.1)$$

Esto implica que

$$0 < \int \frac{1}{n} - \rho(gx_n, gx) dg \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

por lo que debe existir $g_n \in G$ tal que $\rho(g_n x_n, g_n x) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La compacidad de G asegura que existe una subsucesión g_{n_k} de g_n que converge a algún punto $g \in G$. Ahora, la continuidad de la acción garantiza que la sucesión $g_{n_k} x$ converge a gx en la métrica ρ , consecuentemente $\rho(g_{n_k} x, gx)$ converge a cero. Por lo tanto,

$$\rho(g_{n_k} x_{n_k}, gx) \leq \rho(g_{n_k} x_{n_k}, g_{n_k} x) + \rho(g_{n_k} x, gx) \leq (1/n_k) + \rho(g_{n_k} x, gx),$$

asegura que $\rho(g_{n_k} x_{n_k}, gx)$ converge a cero. En consecuencia, $g_{n_k} x_{n_k}$ converge a gx en (X, ρ) .

Ahora, la continuidad de la acción de G en X , garantiza que existen vecindades U de e y V de x en G y X respectivamente, tales que $UV \subset B_{\varepsilon/2}^\rho(x)$. En otras palabras, para cada $h \in U$ y $y \in V$, tenemos que $\rho(hy, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Las sucesiones $g_{n_k}^{-1}g$, $g^{-1}g_{n_k}x_{n_k}$ convergen a e y x respectivamente. Por lo que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_{k_0}}^{-1}g \in U$ y $g^{-1}g_{n_{k_0}}x_{n_{k_0}} \in V$. En consecuencia, $\rho(x_{n_{k_0}}, x) = \rho(g_{n_{k_0}}^{-1}gg^{-1}g_{n_{k_0}}x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y esto contradice (1.7.1).

Esta contradicción surgió de suponer que la función $Id : (X, d) \rightarrow (X, \rho)$ no es continua.

□

El lema anterior garantiza que cualquier G -espacio metrizable X admite una métrica invariante si G es un grupo compacto. Este resultado asegura que el espacio de órbitas es metrizable. Este hecho se establecerá en el siguiente corolario.

Corolario 1.7.5. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio. Si X es metrizable, también lo es X/G .*

Demostración. Dado que X es un G -espacio metrizable por el lema 1.7.4, tenemos que X admite una métrica invariante. Luego, por el corolario 1.4.2, tenemos que X/G es un G -espacio T_1 . Así, por el lema 1.3.3, X/G es un espacio metrizable. □

Es importante notar que en el lema 1.3.3 no se requiere que G sea un grupo compacto, sino que solamente se necesita que X admita una métrica invariante

y que el espacio de órbitas X/G sea T_1 . Por lo tanto, este corolario es válido sin la restricción de que G sea compacto. Sin embargo, es relevante señalar que la pregunta sobre si cada G -espacio admite una métrica invariante cuando G no es compacto sigue siendo una cuestión abierta.

Por otro lado, en esta sección, se introducirán y se discutirán algunas propiedades de los espacios paracompactos. Las particiones de la unidad son herramientas en la teoría de espacios topológicos, y son especialmente útiles en el estudio de los espacios paracompactos.

Definición 1.7.6. Sean X un espacio topológico y $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de funciones continuas $\varphi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- La familia $\{sop(\varphi_\alpha)\}$ es una familia localmente finita, donde $sop(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha^{-1}((0, 1])$.
- $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Diremos que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es **una partición de la unidad localmente finita**. Además, si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de X y $sop(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, diremos que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es **una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta $\mathcal{U}$** .

Utilizaremos la siguiente caracterización de los espacios paracompactos (ver [16, Theorem 5.1.9]): Un espacio Hausdorff X es **paracompacto** si, y solo si, para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una partición de la unidad localmente finita de X subordinada a la cubierta abierta $\mathcal{U}$.

Como era de esperar, la integral de Haar servirá para construir particiones de la unidad pero de funciones invariantes, resultado que será utilizado en el teorema central del capítulo 3.

Lema 1.7.7. Sean X un G -espacio, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de conjuntos invariantes de X y $\{\varphi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces, existe $\{\Phi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$, tal que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, tenemos que Φ_α es una función invariante.

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, definamos $\Phi_\alpha(x) = \int \varphi_\alpha(gx) dg$. Así, en virtud del teorema 1.7.3, tenemos que Φ_α es una función invariante para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

Veamos que $\{\Phi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una partición de la unidad.

Sea $x \in X$. Para cada $g \in G$, existen un subconjunto finito $\mathcal{F}_g$ de $\mathcal{A}$ y una vecindad abierta V_{gx} de gx tal que $\varphi_\alpha(V_{gx}) = \{0\}$ para cada $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_g$. Luego,

dado que G actúa en X , existen vecindades O_g y W_g de g y x respectivamente tales que $O_g W_g \subset V_{gx}$. Ahora, la compacidad de G asegura que existen $g_1, \dots, g_n$ elementos de G tales que $G \subset \bigcup_{i=1}^n O_{g_i}$. Definamos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n$ y $W = \bigcap_{i=1}^n W_{g_i}$. Afirmamos que $\varphi_\alpha(GW) = \{0\}$ para cada $\alpha \in \mathcal{F}$.

En efecto, sea $g \in G$. Existe g_i tal que $g \in O_{g_i}$. Dado que $O_{g_i} W_{g_i} \subset V_{g_i x}$ y $\varphi_\alpha(V_{g_i x}) = \{0\}$ para $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_{g_i}$, tenemos que $\varphi_\alpha(V_{g_i x}) = \{0\}$ para $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$. Así, dado que $gW \subset O_{g_i} W_{g_i} \subset V_{g_i x}$, obtenemos $\varphi_\alpha(gW_{g_i}) = \{0\}$ para $\alpha \in \mathcal{F}$. Obteniendo que $\Phi_\alpha(GW) = \{0\}$ para $\alpha \in \mathcal{F}$. Así,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \Phi_\alpha(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{F}} \Phi_\beta(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{F}} \int \varphi_\beta(gx) dg = \int \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \varphi_\alpha(gx) \right) dg = \int dg = 1.$$

Por lo tanto, $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una partición de la unidad.

Finalmente, demostremos que $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ está subordinada a $\mathcal{U}$.

En efecto, si $\text{sop}(\varphi_\alpha) \subset U$ con $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $U \setminus \text{sop}(\varphi_\alpha)$ es una vecindad del conjunto invariante $X \setminus U$. Así, en virtud del corolario 1.4.3, tenemos que $X \setminus \text{sop}(\varphi_\alpha)$ admite una vecindad invariante V de $X \setminus U$. En consecuencia, $\varphi_\alpha(V) = \{0\}$ y así, $\Phi_\alpha(V) = \{0\}$. Por lo tanto, $V \cap \text{sop}(\Phi_\alpha) = \emptyset$ y en consecuencia, $\text{sop}(\Phi_\alpha) \subset X \setminus V \subset U$. Teniéndose el resultado. $\square$

En general, sabemos que las funciones perfectas preservan la paracompacidad (ver [16, Theorem 5.1.33]). Así, si X es un G -espacio con G un grupo compacto, el lema 1.4.1 asegura que la proyección orbital $p : X \rightarrow X/G$ es una función perfecta. Por lo tanto, si tomamos X paracompacto, el espacio de órbitas X/G es paracompacto.

Lema 1.7.8. *Sea X un G -espacio paracompacto con G un grupo compacto. El espacio de orbitas X/G también es un espacio paracompacto.*

1.8. Integral de Haar*

En esta sección presentamos una versión más general de la integral de Haar. Así como la integral de Haar definida en la sección anterior es invariante bajo las acciones de los teoremas 1.6.1 y 1.6.2, esta integral también es invariante bajo una acción. El siguiente lema dice cuál es la acción mencionada.

Lema 1.8.1. *Sean G un grupo localmente compacto, Y un espacio topológico arbitrario y X un G -espacio. Para cada $g \in G$ y $f \in C(Y, X)$, definamos $(g * f)(x) = gf(x)$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \xi : G \times C(Y, X) &\rightarrow C(Y, X) \\ (g, f) &\rightarrow g * f, \end{aligned}$$

es una acción continua de G en $C(Y, X)$. Más aún, si X es un G -espacio lineal ξ es una acción lineal en $C(Y, X)$.

Demostración. Sean $(g_0, f_0) \in G \times C(Y, X)$ y $\Gamma_{K, V}$ un subbásico de $C(Y, X)$ tal que $g_0 * f_0 \in \Gamma_{K, V}$. Veamos que ξ es una función continua en (g_0, f_0) .

Para cada $k \in K$, existen vecindades abiertas U_k y V_k de g_0 y $f_0(k)$ respectivamente tales que $U_k V_k \subset V$. Luego, como $f_0(K) \subset \bigcup_{k \in K} V_k$ y $f_0(K)$ es compacto, existen $k_1, \dots, k_n \in K$ tales que

$$f_0(K) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}.$$

Definamos

$$W = \bigcup_{i=1}^n V_{k_i} \quad \text{y} \quad U = \bigcap_{i=1}^n U_{k_i}.$$

De la definición de U y $\Gamma_{K, W}$, se sigue que $g_0 \in U$ y $f_0 \in \Gamma_{K, W}$.

Mostremos que $\xi(U \times \Gamma_{K, W}) \subset \Gamma_{K, V}$. En efecto, sea $(g, f) \in U \times \Gamma_{K, W}$. Si $x \in K$, tenemos que $f(x) \in V_{k_i}$ para algún $1 \leq i \leq n$. Luego, $g \in U$ implica que $g \in U_{k_i}$ y por lo tanto, $gf(x) \in V$. Así, $gf \in \Gamma_{K, V}$. Teniéndose la continuidad de ξ .

Ahora, mostremos que $*$ es una acción.

Sean $f \in C(Y, X)$, $g, h \in G$ y $x \in Y$. Entonces

$$\begin{aligned} (g * (h * f))(x) &= g((h * f)(x)) \\ &= g(hf(x)) \\ &= (gh)f(x) \\ &= (gh * f)(x) \\ (e * f)(x) &= ef(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que X es un G -espacio lineal.

En virtud de la proposición 1.5.2, $C(Y, X)$ es un espacio lineal, por lo que solo resta probar que ξ es una transformación lineal.

Sean $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, h \in C(Y, X)$ y $x \in Y$. Entonces,

$$\begin{aligned} g * (\lambda f + h)(x) &= g((\lambda f + h)(x)) \\ &= g\lambda f(x) + gh(x) \quad X \text{ es un } G\text{-espacio lineal} \\ &= \lambda gf(x) + gh(x) \quad X \text{ es un } G\text{-espacio lineal} \\ &= \lambda((g * f)(x)) + (g * h)(x). \end{aligned}$$

□

Dado que ya hemos definido la acción que permanece invariante en esta versión más general de la integral de Haar, presentamos a continuación dicha integral. La prueba puede consultarse en [5, Lemma 2].

Teorema 1.8.2. *Para V un subespacio completo, convexo e invariante de un espacio localmente convexo Z , donde G actúa linealmente, existe una función continua $\int C(G, V) \rightarrow V$ que satisface lo siguiente:*

1. $\int_g f = \int f_g = \int f$ para todo $f \in C(G, V)$ y $g \in G$.
2. $\int g * f = g \int f$ para todo $f \in C(G, V)$ y $g \in G$, donde $g * f$ es la acción definida en el lema 1.8.1.
3. Si $f \in C(G, V)$ y $f(G) = \{v_0\}$, entonces $\int f = v_0$.

1.9. Rebanadas

Esta sección tiene como objetivo mostrar la existencia de las cubiertas G -canónicas. Para definir este concepto requerimos la noción de rebanada. La rebanada es de las nociones más importantes en la Teoría de Grupos de Transformaciones. En esta sección supondremos que G es un grupo compacto.

Definición 1.9.1. *Sean X un G -espacio y H un subgrupo cerrado de G . Un subconjunto $S \subset X$ es llamado **H -kernel** de X si:*

1. S es H -invariante;
2. si $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces $g \in H$;
3. S es cerrado en $G(S)$.

Si S es un H -kernel y $G(S)$ es abierto en X , diremos que S es una **H -rebanada**. A la saturación $G(S)$ de una H -rebanada S se le llamará **conjunto tubular**. Si $G(S) = X$, diremos que S es una **H -rebanada global**.

Observación 1.9.2. *Sea S es una H -rebanada de un G -espacio X . Para cada $h \in H$ y cualquier subconjunto abierto U de S el conjunto hU es un subconjunto abierto de S . Esto se sigue de que S es un H -espacio pues S es H -invariante.*

Supongamos que X es un G -espacio con acción α . En la proposición 1.2.10, vimos que α es una función abierta. Si restringimos α a algún subconjunto abierto de $G \times X$, tendremos una función abierta, pero en general, si restringimos α a algún subconjunto del producto, nada asegura que esta restricción sea abierta. El siguiente resultado muestra el potencial que pueden tener las rebanadas, pues si S es una H -rebanada global, al restringir la acción a $G \times S$, tendremos una función abierta.

Teorema 1.9.3. *Sea S una H -rebanada global de un G -espacio X . Si $\alpha : G \times X \rightarrow X$ es la acción de G en X , la restricción de α al conjunto $G \times S$ es una función abierta.*

Demostración. Sean S una H -rebanada global de un G -espacio X y $\alpha : G \times X \rightarrow X$ la acción de G en X . Veamos que α restringida a $G \times S$ es una función abierta.

En efecto, sean O y U subconjuntos abiertos de G y S respectivamente. Probemos que OU es abierto en X . Dado que S es H -invariante, S es un H -espacio, y así, la translación de U por cualquier elemento de $h \in H$ es un abierto de S . Un argumento similar muestra que Oh es un abierto de G . Consecuentemente,

$$W = \bigcup_{h \in H} Oh^{-1} \times hU$$

es un conjunto abierto del producto $G \times S$ y $\alpha(W) = OU$.

Procedamos a mostrar la siguiente igualdad

$$X \setminus OU = \alpha(G \times S \setminus W).$$

Dado que $OU = \alpha(W)$ y $X = \alpha(G \times S)$, se tiene que

$$X \setminus OU = \alpha(G \times S) \setminus \alpha(W) \subset \alpha(G \times S \setminus W).$$

Para la otra inclusión, supongamos que existe $(g, s) \in G \times S \setminus W$ tal que $gs \in OU$. Dado que $gs \in OU$, existen $t \in O$ y $u \in U$ tales que $tu = gs$. Así, $g^{-1}tu = s$. Definamos $h = g^{-1}t$ y mostremos que $h \in H$. En efecto, dado $u \in U \subset S$, tenemos $hu \in hS$. Luego, como $hu = s \in S$, $hu \in S \cap hS$ y S es una H -rebanada, obtenemos que $h \in H$. Consecuentemente,

$$(g, s) = (tt^{-1}g, g^{-1}tu) = (th^{-1}, hu) \in W.$$

Lo cual es una contradicción que surge de suponer que $gs \in OU$. Teniéndose la igualdad.

Finalmente, dado que S es una H -rebanada global, S es un subconjunto cerrado de X . Así, $G \times S$ es cerrado en $G \times X$. Luego, W abierto en $G \times S$, implica que $G \times S \setminus W$ es cerrado en $G \times S$. Por lo tanto, $G \times X \setminus W$ es cerrado en $G \times X$. Luego, por el lema 1.4.1, tenemos que la acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$ es una función cerrada, por lo que $\alpha(G \times S \setminus W) = X \setminus OU$ es cerrado de X . Consecuentemente, OU es abierto en X . $\square$

Observación 1.9.4. *El teorema anterior brinda una herramienta muy útil; supongamos que S es un H -rebanada en un G -espacio X (no necesariamente global). Es claro que S es una H -rebanada global del G -espacio $G(S)$. El teorema*

anterior garantiza que OU es abierto en $G(S)$ si O y U son subconjuntos abiertos de G y S respectivamente. Ahora, dado que S es una H -rebanada, tenemos que $G(S)$ es abierto en X . Así, OU es abierto en X . Por lo tanto, la restricción de la acción de G en X a $G \times S$ es una función abierta.

El siguiente teorema es central en la teoría de grupos de transformaciones, la demostración puede ser consultada en el capítulo II, theorem 5.4 de [11].

Teorema 1.9.5. *Para G un grupo compacto de Lie y X un G -espacio de Tychonoff. Para cada $x \in X$, existe una G_x -rebanada S tal que $x \in S$.*

En el teorema anterior se piden las hipótesis de que X sea un G -espacio de Tychonoff y G un grupo compacto de Lie. Es importante destacar que no se pide una propiedad específica para la acción. Resulta que si G es un grupo de Lie (no necesariamente compacto), también se puede asegurar la existencia de la rebanada en los G -espacios de Tychonoff si la acción cumple una propiedad específica, pero dado que en este trabajo en los resultados principales supondremos que el grupo actuante es compacto, no daremos esta versión más general. Este resultado puede consultarse en [22, Theorem 2.3.2].

Esta sección está enfocada en mostrar la existencia de las cubiertas G -canónicas. Más adelante se dará la definición. Pero antes iremos mostrando las propiedades que deben de cumplir los abiertos que las conforman. Una de estas propiedades es la siguiente.

Proposición 1.9.6. *Sean S una H -rebanada de un G -espacio X y V un subconjunto abierto invariante de $G(S)$ que satisface $\bar{V} \subset G(S)$. Se tiene que $Q = S \cap V$ es una H -rebanada que cumple $G(Q) = V$, $S \cap \bar{V}$ es un H -kernel que coincide con la cerradura de Q en X y $G(\bar{Q}) = \bar{G(Q)}$.*

Demostración. Sean S una H -rebanada de un G -espacio X , V un subconjunto abierto invariante de $G(S)$ que satisface $\bar{V} \subset X$ y $Q = S \cap V$.

Comencemos demostrando que $S \cap \bar{V}$ coincide con la cerradura de Q en X .

En efecto, S cerrado en $G(S)$ y $\bar{V} \subset G(S)$, implican que $S \cap \bar{V}$ es cerrado en $\bar{V}$. Luego, dado que $\bar{V}$ es cerrado en X , tenemos que $S \cap \bar{V}$ es cerrado en X y contiene a $S \cap V$. Por lo tanto, $\bar{Q} = \bar{S \cap V} \subset S \cap \bar{V}$.

Ahora mostremos la otra contención.

Sean $x \in S \cap \bar{V}$ y U una vecindad abierta de x en X . Dado que G actúa en X , existen vecindades abiertas O de e en G y T de x en X que satisfacen $O(T) \subset U$. Así, el conjunto $R = S \cap T$ es una vecindad abierta de x en la H -rebanada S que cumple $O(R) \subset U$. Luego, como R es abierto en S y O es abierto en G , por la observación 1.9.4, $O(R)$ es abierto en X y $x \in O(R)$. Como $x \in \bar{V}$, tenemos que

$V \cap O(R) \neq \emptyset$. Así, existen $g \in O$ y $s \in R = S \cap T$ tales que $gs \in V$. Luego, V invariante implica que $s \in V$. En consecuencia, $s \in R \cap V \subset U \cap S \cap V = U \cap Q$. Entonces, $U \cap Q \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \overline{Q}$.

Mostremos que $G(S \cap V) = V$. Claramente, $G(S \cap V) \subset G(V)$ y como V es invariante, obtenemos $G(S \cap V) \subset V$.

Veamos la otra contención. Sea $x \in V$. Tenemos que $V \subset G(S)$ por lo que existen $g \in G$ y $s \in S$ tales que $gs = x$. Luego, la invarianza de V implica que $s \in V$. Así, $s \in S \cap V$. Por lo tanto, $gs \in G(S \cap V)$.

En virtud de la observación 1.2.6, tenemos que $\overline{V}$ es un conjunto invariante. Ocupando que $\overline{V}$ es invariante y los mismos argumentos que en la igualdad anterior, obtenemos que $G(S \cap \overline{V}) = \overline{V}$.

Probemos ahora que $\overline{Q} = S \cap \overline{V}$ es un H -kernel, esto es, verifiquemos que se satisfacen las tres propiedades de la definición 1.9.1.

1. Dado que V es invariante, por el corolario 1.2.12, $\overline{V}$ es H -invariante. Luego, S es H -invariante por S ser una H -rebanada. Como la intersección de conjuntos H -invariantes es H -invariante, obtenemos que $S \cap \overline{V}$ es H -invariante.
2. Supongamos que $\emptyset \neq (gS \cap \overline{V}) \cap (S \cap \overline{V})$ para algún $g \in G$. Dado que

$$(gS \cap \overline{V}) \cap (S \cap \overline{V}) \subset gS \cap S$$

y S es una H -rebanada, obtenemos que $g \in H$.

3. Sabemos que $G(S \cap \overline{V}) = \overline{V}$. Así, $S \cap G(S \cap \overline{V}) = S \cap \overline{V}$. Luego, dado que $G(S \cap \overline{V}) \subset G(S)$ y S es cerrado en $G(S)$, tenemos que $S \cap \overline{V}$ es cerrado en $G(S \cap \overline{V})$.

De manera análoga, se demuestra que $S \cap V$ satisface las primeras tres condiciones de la definición 1.9.1. Por lo tanto, dado que $S \cap V$ es abierto en S y conforme a la observación 1.9.2, tenemos que $G(S \cap V)$ es abierto en X . En consecuencia, $Q = S \cap V$ es una H -rebanada.

Para concluir, demostremos que $\overline{G(Q)} = G(\overline{Q})$. Por la proposición 1.2.11, $G(\overline{Q})$ es cerrado en X y contiene $G(Q)$. Así, $\overline{G(Q)} \subset G(\overline{Q})$. La contención $G(\overline{Q}) \subset \overline{G(Q)}$ se sigue directamente de la continuidad de la acción. $\square$

Sea (X, d) un G -espacio metrizable con G un grupo compacto y $x \in X$ un punto arbitrario. Mostremos que para cada $r > 0$ y $x \in X$, existe una H -rebanada S de diámetro $2r$ tal que $x \in S$. En efecto, en virtud del teorema 1.9.5, existe una G_x -rebanada S' tal que $x \in S'$. Dado que G es compacto, por el lema 1.7.4, podemos suponer que d es una métrica invariante. Sea $S = B_r(x) \cap S'$. Mostremos que S es

una G_x -rebanada. En efecto, veamos primero que S' satisface las 3 condiciones de la definición 1.9.1.

1. Probemos que $B_r(x) \cap S'$ es G_x -invariante. Sea $z \in G_x(B_r(x) \cap S')$. Existen $g \in G_x$ y $s \in B_r(x) \cap S'$ tales que $gs = z$. Dado que $s \in B_r(x) \cap S'$, tenemos que $d(s, x) < r$. Luego, de la invarianza de d , se sigue que $d(gs, x) = d(gs, gx) = d(s, x) < r$. Así, $gs \in B_r(x)$. Por otro lado, dado que S' es una G_x -rebanada, tenemos que S' es G_x -invariante. Consecuentemente, $gs \in S'$. Por lo tanto, $z = gs \in B_r(x) \cap S'$.
2. Supongamos que $g(B_r(x) \cap S') \cap B_r(x) \cap S' \neq \emptyset$ para algún $g \in G$. Entonces, $\emptyset \neq g(B_r(x) \cap S') \cap B_r(x) \cap S' \subset gS' \cap S'$. Luego, como S' es una G_x -rebanada, obtenemos que $g \in G_x$.
3. Dado que S' es una G_x -rebanada, S' es cerrado en su saturación $G(S')$. Luego, como $G(B_r(x) \cap S') \subset G(S')$ y $S' \cap G(B_r(x) \cap S') = B_r(x) \cap S'$, tenemos que $B_r(x) \cap S'$ es cerrado en $G(B_r(x) \cap S')$.

Para finalizar, veamos que $G(B_r(x) \cap S')$ es abierto en X . En efecto, dado que S' es una G_x -rebanada, por la observación 1.9.4, la función

$$\begin{aligned} G \times S' &\rightarrow G(S') \\ (g, s) &\rightarrow gs \end{aligned}$$

es abierta. Luego, como $B_r(x) \cap S'$ es abierto en S' , obtenemos que $G(B_r(x) \cap S')$ es abierto en $G(S')$. Así, dado que $G(S')$ es abierto en X , tenemos que $G(B_r(x) \cap S')$ es abierto en X . Por lo tanto, S es una G_x -rebanada de diámetro $2r$ que satisface que $x \in S$.

Esta observación será ocupada en varios enunciados.

Corolario 1.9.7. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G -espacio. Para cada $x \in X$, existe una G_x -rebanada Q tal que $x \in Q$ y $\overline{Q}$ es un G_x -kernel.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por el teorema 1.9.5, tenemos que existe una G_x -rebanada S tal que $x \in S$. Consideremos la proyección orbital $p : X \rightarrow X/G$. Dado que S es una G_x -rebanada, $G(S)$ es abierto en X y en virtud de la proposición 1.2.10, tenemos que $p(G(S))$ es un conjunto abierto de X/G . Luego, X de Tychonoff implica que X/G es de Tychonoff (ver [20, Proposición 5.4]). Así, existe un abierto U de X/G tal que $p(x) = G(x) \in U \subset \overline{U} \subset p(G(S))$. Luego, si definimos $V = p^{-1}(U)$, por la observación 1.3.1, tenemos que V es un abierto invariante de X . Claramente, $x \in V \subset \overline{V} \subset G(S)$. Así, V satisface las hipótesis de la proposición 1.9.6. Por lo tanto, $Q = S \cap V$ es una G_x -rebanada que satisface lo deseado. $\square$

Sean X un G -espacio y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X . Si U_α es un subconjunto invariante de X para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una **cubierta invariante** de X . Análogamente, si U_α es un subconjunto tubular de X para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ **es una cubierta tubular** de X .

Proposición 1.9.8. *Sea $\{G(Q_\mu)\}$ una cubierta tubular de un G -espacio para-compacto X , donde cada Q_μ es una H_μ -rebanada. Entonces, existe una cubierta tubular localmente finita $\{G(R_\mu)\}$ tal que cada $\overline{R_\mu}$ es un H_μ -kernel.*

Demostración. Consideremos la proyección orbital $p : X \rightarrow X/G$. Dado que G es compacto, por el lema 1.4.1, tenemos que p es una función perfecta. Luego, como es X paracompacto, por la proposición 1.7.8, tenemos que X/G es paracompacto.

Supongamos que $\{G(Q_\mu)\}$ es una cubierta tubular de X donde cada Q_μ es una H_μ -rebanada. Dado que p es una función abierta y $\{G(Q_\mu)\}$ es una cubierta abierta de X , tenemos que $\{p(G(Q_\mu))\}$ es una cubierta abierta de X/G . Así, existe una cubierta localmente finita $\{V_\mu\}$ de X/G que satisface $\overline{V_\mu} \subset p(G(Q_\mu))$ para cada μ . Definamos $T_\mu = p^{-1}(V_\mu)$ para cada μ . Es evidente que para cada elemento T_μ , se satisface que $\overline{T_\mu} \subset G(Q_\mu)$ y que $\{T_\mu\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X .

Por otro lado, en virtud de la proposición 1.9.6, tenemos que $G(R_\mu)$ es un conjunto tubular y $\overline{R_\mu}$ es un H_μ -kernel, si definimos $R_\mu = Q_\mu \cap T_\mu$. Así, $\{G(R_\mu)\}$ es una cubierta tubular localmente finita de X y $\overline{R_\mu}$ es un H_μ -kernel. $\square$

El siguiente lema proporciona la última herramienta que necesitamos para mostrar la existencia de las cubiertas G -canónicas.

Lema 1.9.9. *Sean G un grupo compacto de Lie, X un G -espacio de Tychonoff y U una vecindad abierta de e en G . Para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que para cualquier $y \in V$ existe $u \in U$ que cumple $u^{-1}G_y u \subset G_x$.*

Demostración. Sean U vecindad abierta de e en G y $x \in X$. Dado que X es de Tychonoff y G es compacto de Lie, por el teorema 1.9.5, existe una G_x -rebanada S . Definamos $V = US$. En virtud de la observación 1.9.2, se tiene que V es una vecindad abierta de x . Ahora, el teorema 4.2 del capítulo de bre:72 asegura que existe G -retracción $f : G(S) \rightarrow G(x)$ que cumple $f^{-1}(x) = S$. Si $y \in V = U(S)$, tenemos que existen $u \in U$ y $s \in S$ tales que $us = y$. Así, $G_y = uG_s u^{-1}$. Luego, por la observación 1.2.9, tenemos que $G_s \subseteq G_{f(s)} = G_x$ pues f es equivariante. Así $u^{-1}G_y u \subseteq G_x$. $\square$

Definición 1.9.10. *Sean G un grupo topológico, Z un G -espacio, U un abierto invariante de Z y $\{G(S_\mu)\}$ una cubierta tubular de U donde cada S_μ es un H_μ -rebanada. Diremos que $\{G(S_\mu)\}$ **es una cubierta G -canónica** con respecto de Z si:*

1. cada $\overline{S_\mu}$ es un H_μ -kernel,
2. la familia $\{G(S_\mu)\}$ es localmente finita,
3. para todo μ , existe un punto x en U tal que $H_\mu = G_x$,
4. para cada $x \in Z \setminus U$ y cualquier vecindad V_x en Z existe una vecindad $W_x \subset V_x$ de x tal que si $g \in G$ y $gS_\mu \cap W_x \neq \emptyset$, se satisface lo siguiente:
 - 4.1 $gS_\mu \subset V_x$,
 - 4.2 existe un elemento $h \in G$ tal que $hx \in V_x$ y $H_\mu \subset g^{-1}G_{hx}g$.

Dada la definición y construidas las herramientas mostraremos la existencia de las cubiertas G -canónicas.

Teorema 1.9.11. *Sea X un G -espacio metrizable y U un abierto invariante de X . Entonces, existe una cubierta G -canónica con respecto de X .*

Demostración. Sea U un abierto invariante de un G -espacio metrizable X . Si $U = X$, cualquier cubierta tubular localmente finita de U que cumpla los primeros tres incisos de la definición 1.9.10 es una cubierta G -canónica con respecto de X , y esta existe por el corolario 1.9.7, y la proposición 1.9.8 pues X es en particular un espacio paracompacto.

Supongamos que U es un subconjunto abierto invariante propio de X . Dado que G es compacto, por el lema 1.7.4, podemos suponer que ρ es una métrica invariante en X que genera su topología. Para $x \in U$, definamos $r_x = \frac{1}{4}\rho(x, X \setminus U)$. Luego, en cada órbita $G(x)$ contenida en U , tomemos un representante, digamos x . Por el teorema 1.9.5, para x , existe una G_x -rebanada Q_x . Ahora, recordando que después del teorema 1.9.5 se demostró que $R_x = Q_x \cap B_{r_x}(x)$ es una G_x -rebanada y que $\text{diam } R_x \leq 2r_x$. Por lo tanto, $G(R_x)$ constituye una cubierta tubular de U , donde cada R_x es una G_x -rebanada con $\text{diam } R_x \leq 2r_x$. Así, por la proposición 1.9.8, existe una cubierta tubular localmente finita $\{G(S_\mu)\}$ de U con $\overline{S_\mu}$ un H_μ -kernel. Más aún, para cada μ , tenemos que existe $x \in X$ tal que $S_\mu \subset R_x$, $\overline{G(S_\mu)} \subset G(R_x)$ y H_μ es el estabilizador G_x . Así, la cubierta $\{G(S_\mu)\}$ satisface las primeras tres condiciones de la definición 1.9.10.

Mostremos que $\{G(S_\mu)\}$ satisface el último inciso de la definición 1.9.10. Sean $a \in X \setminus U$ y V_a una vecindad de a . Dado que G actúa en X , existe una vecindad $E \subset G$ de e tales que para cada $g \in E$, se cumple $ga \in V_a$. Luego, por el lema 1.9.9, existe una vecindad $B_\varepsilon(a) \subset V_a$ tal que para cada $x \in B_\varepsilon(a)$, existe $h \in E$ que satisface $G_x \subset hG_a h^{-1} = G_{ha}$. Definamos $W_a = B_{\varepsilon/4}(a)$. Afirmamos que W_a es la vecindad deseada. En efecto, supongamos que $gS_\mu \cap W_a \neq \emptyset$ para algún $g \in G$. Sean $y \in gS_\mu \cap W_a$ y $x \in U$ tales que $S_\mu \subset R_x$. Se tiene que

$$\rho(a, gx) \leq \rho(a, y) + \rho(y, gx) < \varepsilon/4 + \rho(y, gx). \quad (1.9.1)$$

La invarianza de la métrica y una cuenta sencilla muestra que $\text{diam } gR_x = \text{diam } R_x$, $\rho(gx, X \setminus U) = \rho(x, X \setminus U)$ y claramente $gS_\mu \subset gR_x$. Así, como $y \in R_x$, tenemos

$$\rho(y, gx) \leq \text{diam } gR_x \leq 2r_x = \frac{1}{2}\rho(gx, X \setminus U).$$

Luego, dado que $a \in X \setminus U$, se tiene $\rho(gx, X \setminus U) \leq \rho(gx, a)$. En consecuencia, $\rho(y, gx) \leq (1/2)\rho(gx, X \setminus U) \leq (1/2)\rho(gx, a)$. Así, por (1.9.1), $\rho(a, gx) < (1/2)\rho(gx, a) + \varepsilon/4$. Teniéndose que $\rho(a, gx) < (1/2)\varepsilon$, y consecuentemente

$$\text{diam } gR_x \leq (1/2)\rho(gx, X \setminus U) \leq (1/2)\rho(gx, a) < (\varepsilon/4).$$

Por otro lado, dado que $gS_\mu \subseteq gR_x$, si probamos que $gR_x \subseteq B_\varepsilon(a)$, tendremos que $gS_\mu \subseteq V_a$, pues $B_\varepsilon(a) \subseteq V_a$.

Sea $z \in gR_x$. Tenemos

$$\rho(z, a) \leq \rho(z, y) + \rho(y, a) < \text{diam } gR_x + (\varepsilon/4) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Así, $z \in B_\varepsilon(a)$.

Mostremos la condición 4.2 de la definición 1.9.10. En efecto, dado que $gR_x \subseteq B_\varepsilon(a)$, para $gx \in gR_x$, se tiene que existe $h \in E$ tal que

$$\begin{aligned} h^{-1}G_{gx}h &\subseteq G_a \\ G_{gx} &\subseteq hG_a h^{-1} \\ gG_x g^{-1} &\subseteq G_{ha} \\ G_x &\subseteq g^{-1}G_{ha}g. \end{aligned}$$

Además, de la elección de E , se tiene que $ha \in V_a$ y como $H_\mu = G_x$, obtenemos que $H_\mu \subseteq g^{-1}G_{ha}g$. $\square$

Aunque la finalidad de esta sección es mostrar la existencia de las cubiertas G -canónicas, finalizamos la sección con los siguientes dos resultados que están relacionados con las rebanadas y serán utilizados en el teorema principal del último capítulo de este trabajo.

Proposición 1.9.12. *Para S una H -rebanada global de un G -espacio X , existe una única función equivariante $\tilde{g}: X \rightarrow G/H$ tal que $x \in gS$ para cada $g \in \tilde{g}(x)$.*

Demostración. Sean X un G -espacio y S una H -rebanada global. Dado que $G(S) = X$, para cada $x \in X$ existe $g_x \in G$ tal que $x \in g_x S$. Afirmamos que g_x es único determinado por el subgrupo rebanador H , esto es, si $x \in g_x S$ y $x \in k_x S$, $g_x H = k_x H$. En efecto, sean $k_x, g_x \in G$ tales que $x \in g_x S \cap k_x S$. Así,

$$k_x^{-1}x \in k_x^{-1}g_x S \cap S \neq \emptyset.$$

Luego, dado que S una H -rebanada, tenemos que $k_x^{-1}g_x \in H$. Por lo tanto, $k_xH = g_xH$.

Definamos $\tilde{g}: X \rightarrow G/H$ de la siguiente manera; para cada $x \in X$, asignamos $\tilde{g}(x) = g_xH$ donde $g_x \in G$ es único determinado por el subgrupo rebanador H y $x \in g_xS$. Por lo anterior, $\tilde{g}$ está bien definida y es única con la propiedad $x \in gS$ para cada $g \in \tilde{g}(x)$. Por lo que resta probar que $\tilde{g}$ es equivariante.

Comenzamos mostrando que $\tilde{g}$ es una función continua. Sean $x_0 \in G(S)$ y U una vecindad de $\tilde{g}(x_0)$ en G/H . Consideremos la proyección canónica $p: G \rightarrow G/H$. Claramente, $p^{-1}(U) = E$ es un abierto de G . Luego, en virtud de la observación 1.9.4, $G \times S \rightarrow G(S) = X$ es una función abierta. Así, ES es abierto en X y $x_0 \in ES$. Veamos que $\tilde{g}(ES) \subseteq U$. Sea $es \in ES$ con $e \in E$ y $s \in S$. Entonces $\tilde{g}(es) = eH \in U$. Por lo tanto, $\tilde{g}$ es una función continua.

Sean $x \in X$ y $g \in G$. Dado que $G(S) = X$, tenemos que $x \in kS$ para algún $k \in G$. Luego, $\tilde{g}(x) = kH$ y como $gx \in gkS$, tenemos $\tilde{g}(gx) = gkH$. Además, $g(\tilde{g}(x)) = g(kH) = gkH$. Entonces, $g(\tilde{g}(x)) = \tilde{g}(gx)$. Así, $\tilde{g}$ es una función equivariante. $\square$

Teorema 1.9.13. Sean $H \subseteq G$ un subgrupo cerrado y $p: G \rightarrow G/H$ la proyección canónica. Consideremos el conjunto de puntos H -fijos de X , esto es, $X[H] = \{x \in X \mid hx = x \text{ para todo } h \in H\}$. Entonces, la función

$$\begin{aligned} f: G/H \times X[H] &\rightarrow X \\ (gH, x) &\rightarrow gx \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Sean H un subgrupo cerrado de G un grupo topológico y $p: G \rightarrow G/H$ la proyección canónica. Demostremos primero que f está bien definida. Sean $(gH, x), (kH, y) \in G/H \times X[H]$ tales que $(gH, x) = (kH, y)$. Entonces, $y = x$ y $g^{-1}k \in H$. Así, dado que $x \in X[H]$, tenemos $g^{-1}k(x) = x = y$. En consecuencia, $k(x) = g(x) = g(y)$. Por lo tanto, $f((gH, x)) = f((kH, y))$.

Demostremos que f es una función continua. Para esto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G/H \times X[H] & \xrightarrow{f} & X \\ p \times i \uparrow & \nearrow gx & \\ G \times X[H] & & \end{array}$$

donde gx es la restricción de la acción de X a $G \times X[H]$. Ahora, tenemos que $p \times i$ es una función cociente, pues G es compacto. Entonces, dado que la restricción de la acción de G en X es una función continua, se tiene la continuidad de la función f . $\square$

Capítulo 2

Teoremas de extensión equivariante

Como se mencionó en la introducción, el objetivo de este capítulo es generalizar teoremas conocidos en espacios topológicos a la clase de G -espacios. En este capítulo, se presentarán los teoremas 3.1 y 3.2 del artículo [26] en la clase de G -espacios.

Dado que trabajaremos con algunas clases importantes de espacios topológicos, necesitamos definir lo que será para nosotros una clase $\mathcal{K}^G$ de G -espacios dada una clase $\mathcal{K}$ de espacios topológicos. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios topológicos. Definamos $\mathcal{K}^G$ como la clase de todos los G -espacios X con $X \in \mathcal{K}$. Es evidente que $\mathcal{K}^G$ forma una categoría si consideramos las funciones equivariantes como morfismos entre G -espacios.

Con esta aclaración, tenemos las bases para dar las definiciones de extensor y retracts absoluto equivariante.

Diremos que un G -espacio X es un **G -extensor absoluto** (**G -extensor absoluto de vecindad**) para una clase de G -espacios $\mathcal{K}^G$, si para cualesquiera $Y \in \mathcal{K}^G$, A un subconjunto cerrado invariante de Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante, existe una función equivariante $F : Y \rightarrow X$ (respectivamente, $F : O \rightarrow X$ donde O es una vecindad invariante abierta de A en Y) que coincide con f en A .

Sean X y A dos G -espacios. Diremos que A es un **G -retracto** (**G -retracto de vecindad**) de X si existen un encaje equivariante $i : A \hookrightarrow X$ y una retracción equivariante $r : X \rightarrow i(A)$ ($r : U \rightarrow i(A)$ donde U es vecindad abierta invariante de $i(A)$ en X) de $i(A)$ (i.e., $r(i(a)) = i(a)$ para todo $a \in A$).

Un G -espacio X es llamado **G -retracto absoluto** (**G -retracto absoluto de vecindad**) de una clase $\mathcal{K}^G$ de G -espacios si $X \in \mathcal{K}^G$, y para cualquier encaje equivariante cerrado $i : X \hookrightarrow Y$ con $Y \in \mathcal{K}^G$, $i(X)$ es un G -retracto de Y (respectivamente, un G -retracto de vecindad).

Notemos que si G es un grupo que consta de un solo punto entonces, las definiciones de $G\text{-}AE(\mathcal{K}^G)$ y de $G\text{-}AR(\mathcal{K}^G)$ coinciden con las definiciones de $AE(\mathcal{K})$ y de $AR(\mathcal{K})$ en la clase de espacios de topológicos.

Denotaremos:

- $\mathcal{M}$ a la clase de todos los espacios metrizables.
- $\mathcal{P}$ a la clase de todos los espacios paracompactos.
- $\mathcal{N}$ a la clase de todos los espacios normales.
- $\mathcal{T}$ a la clase de todos los espacios de Tychonoff.
- $\mathcal{PN}$ a la clase de todos los espacios perfectamente normales.

Enunciamos los teoremas que inspiran este capítulo (véanse los teoremas 3.1 y 3.2 de [26]).

Teorema 2.0.1.

Sea X un espacio metrizable que es un $AE(\mathcal{M})$ (o $ANE(\mathcal{M})$). Entonces:

1. $X \in AE(\mathcal{P})$ (o $X \in ANE(\mathcal{P})$) si, y solo si, X es topológicamente completo.
2. $X \in AE(\mathcal{PN})$ (o $X \in ANE(\mathcal{PN})$) si, y solo si, X es separable.
3. $X \in AE(\mathcal{N})$ (o $X \in ANE(\mathcal{N})$) si, y solo si, X es separable y topológicamente completo.
4. $X \in AE(\mathcal{T})$ (o $X \in ANE(\mathcal{T})$) si, y solo si, X es unipuntual.

Teorema 2.0.2.

Sea X un espacio metrizable que es un $AR(\mathcal{M})$ (o $ANR(\mathcal{M})$). Entonces:

1. $X \in AR(\mathcal{P})$ (o $X \in ANR(\mathcal{P})$) si, y solo si, X es topológicamente completo.
2. $X \in AR(\mathcal{PN})$ (o $X \in ANR(\mathcal{PN})$) si, y solo si, X es separable.
3. $X \in AR(\mathcal{N})$ (o $X \in ANR(\mathcal{N})$) si, y solo si, X es separable y topológicamente completo.
4. $X \in AR(\mathcal{T})$ (o $X \in ANR(\mathcal{T})$) si, y solo si, X es compacto (o localmente compacto y separable).

La finalidad de este capítulo es presentar los teoremas anteriores en la clase de G -espacios.

2.1. Extensores y retracts absolutos

En la clase de espacios metrizables, los conceptos de $AE(\mathcal{K})$ y de $AR(\mathcal{K})$ coinciden si $\mathcal{K}$ es alguna de las clases: $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ o $\mathcal{PN}$ (ver [26, Proposition 2.4]). El propósito de esta sección será trabajar el caso equivariante de estos resultados. En otras palabras, vamos a demostrar que en la clase de G -espacios metrizables, las definiciones de $G-AE(\mathcal{K}^G)$ y $G-AR(\mathcal{K}^G)$ son equivalentes cuando G es localmente compacto y $\mathcal{K}^G$ es alguna de las de las clases $\mathcal{M}^G$, $\mathcal{N}^G$, $\mathcal{PN}^G$ o $\mathcal{P}^G$. Para este fin, trabajaremos con el espacio de adjunción equivariante. Primero, hagamos un breve recordatorio del espacio de adjunción en la clase de espacios topológicos.

Definición 2.1.1. Sean Y y X dos espacios topológicos, A un subconjunto cerrado de Y y $f : A \rightarrow X$ una función continua. Consideremos la unión ajena $Y \sqcup X$ de Y y X . Dotemos a $Y \sqcup X$ de la topología débil, esto es, U es abierto en $Y \sqcup X$ si, y solo si, $U \cap Y$ y $U \cap X$ son abiertos en Y y X respectivamente. Definamos en $Y \sqcup X$ la relación de equivalencia: dados $w, z \in Y \sqcup X$

$$w \sim z = \begin{cases} z = w & o \\ z, w \in A \text{ y } f(z) = f(w) & o \\ z \in A, w \in X \text{ y } f(z) = w & o \\ w \in A, z \in X \text{ y } f(w) = z. & o \end{cases}$$

Sea $X \cup Y / \sim$ el conjunto de clases de equivalencia. Dotemos a $X \cup Y / \sim$ de la topología cociente. A este espacio le llamaremos **espacio de adjunción** y lo denotaremos $X \cup_f Y$.

Definamos el G -espacio de adjunción en la clase de G -espacios.

Sean Y y X dos G -espacios con acciones α y β respectivamente, A un subconjunto cerrado invariante de Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Consideremos $Y \sqcup X$ la unión ajena de Y y X con la topología débil. Definamos

$$\begin{aligned} \theta : G \times Y \sqcup X &\rightarrow Y \sqcup X \\ \theta(g, x) &= \begin{cases} \alpha(g, x) & \text{si } x \in Y \\ \beta(g, x) & \text{si } x \in X. \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente, θ es una acción continua. Sean $Y \cup_f X$ el espacio de adjunción y $p : Y \sqcup X \rightarrow Y \cup_f X$ la función cociente. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : G \times Y \cup_f X &\rightarrow Y \cup_f X \\ (g, p(x)) &\mapsto p(gx). \end{aligned}$$

Afirmamos que φ está bien definida. En efecto, sean $y, x \in Y \sqcup X$ tales que $y \sim x$ y $g \in G$. Procedamos por casos (en el orden de la definición 2.1.1):

1. Si $x = y$, entonces $gx = gy$.
2. Si $x, y \in A$ y $f(x) = f(y)$. Tenemos que $gf(x) = gf(y)$. Luego, f equivariante implica $gf(x) = f(gx)$ y $gf(y) = f(gy)$. En consecuencia, $gx \sim gy$.
3. Si $y \in A$, $x \in X$ y $f(y) = x$. Entonces $gf(y) = gx$. Dado que f es equivariante, obtenemos $f(gy) = gx$. Así, $gx \sim gy$.
4. Es análogo a lo anterior.

Por lo tanto, φ está bien definida. Veamos que φ es una acción de G en $Y \cup_f X$. Sean $g, h \in G$ y $p(x) \in Y \cup_f X$. Entonces

$$\begin{aligned} (gh)p(x) &= p((gh)x) \\ &= p(g(hx)) \\ &= gp(hx) \\ &= g(hp(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y ep(x) &= p(ex) \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Para mostrar la continuidad de φ , necesitamos el siguiente resultado. Puede ser consultado en [16, Theorem 3.3.17].

Lema 2.1.2. *Sean G un espacio localmente compacto y $p : Y \rightarrow X$ una función cociente. Entonces la función producto*

$$\begin{aligned} 1_G \times p : G \times Y &\rightarrow G \times X \\ (g, x) &\rightarrow (g, p(x)) \end{aligned}$$

es una función cociente.

Para construir nuestro G -espacio de adjunción, supondremos que G es un grupo localmente compacto.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times Y \cup_f X & \xrightarrow{\varphi} & Y \cup_f X \\ 1_G \times p \uparrow & & \uparrow p \\ G \times Y \sqcup X & \xrightarrow{\theta} & Y \sqcup X. \end{array}$$

Dado que $p \circ \theta$ es continua y $1_G \times p$ es una función cociente por el lema 2.1.2, tenemos que φ es una función continua. Así, φ es una acción continua y por lo tanto, $Y \cup_f X$ es un G -espacio. Al G -espacio $Y \cup_f X$ le llamaremos el **G -espacio de adjunción**. Esto será muy útil ya que con esta herramienta podremos encontrar una relación entre los extensores absolutos y retractos absolutos.

Lema 2.1.3. Sean G un grupo localmente compacto, Y y X dos G -espacios, A un subconjunto cerrado invariante de Y , $f : A \rightarrow X$ una función equivariante y $p : Y \sqcup X \rightarrow Y \cup_f X$ la función cociente. Entonces

1. La restricción $p|_X : X \hookrightarrow Y \cup_f X$ es un encaje cerrado equivariante.
2. La restricción $p|_{Y \setminus A} : Y \setminus A \hookrightarrow Y \cup_f X$ es un encaje abierto equivariante.

Demostración.

1. Sea $i = p|_X$. Dado que X es un conjunto cerrado invariante de $Y \sqcup X$, i está bien definida.

i es equivariante porque es restricción de una función equivariante.

La inyectividad de i se sigue de que si $x, y \in X$ son tales que $x \sim y$, la única posibilidad es que $x = y$.

Para mostrar que i es cerrada, notemos que para cualquier subconjunto C de X , se cumple:

$$p^{-1}(i(C)) = C \cup f^{-1}(C).$$

Si C es cerrado en X , entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en Y , así, $C \cup f^{-1}(C)$ es cerrado en $Y \sqcup X$. Por lo tanto, la igualdad anterior asegura que $p^{-1}(i(C))$ es cerrado en $Y \sqcup X$. Consecuentemente, $i(C)$ es cerrado en $Y \cup_f X$.

2. Denotemos $h = p|_{Y \setminus A}$. Análogamente al caso anterior, se muestra que h es equivariante e inyectiva. Ahora, para demostrar que h es abierta, notemos que para cualquier subconjunto $B \subset Y \setminus A$, se cumple:

$$p^{-1}(h(B)) = B.$$

Si $B \subset Y \setminus A$ es abierto, obtenemos que $p^{-1}(h(B))$ es abierto en $Y \sqcup X$. Por lo tanto, $h(B)$ es abierto en $Y \cup_f X$.

□

A partir del lema 2.1.3, podemos concluir que el espacio de adjunción $Y \cup_f X$ es la unión de los conjuntos $p(Y \setminus A)$ y $p(X)$.

Ahora, presentamos el lema que nos ayudará a relacionar los extensores con los retracts absolutos equivariantes.

Lema 2.1.4. Sean G un grupo localmente compacto, Y y X dos G -espacios, A cerrado invariante de Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Entonces, f admite una extensión a alguna vecindad invariante de A si, y solo si, $p(X)$ es un retracto de vecindad de $Y \cup_f X$.

Demostración. Supongamos que $F : U \rightarrow X$ es una extensión equivariante de f y consideremos la proyección $p : Y \sqcup X \rightarrow Y \cup_f X$.

Probemos la siguiente igualdad

$$p^{-1}(p(U \cup X)) = U \cup X.$$

Sea $y \in p^{-1}(p(U \cup X))$. Entonces, existe $x \in U \cup X$ tal que $x \sim y$. Analicemos los casos posibles

1. Si $x \in X$, entonces $y = x$, o $y \in A$ y $f(y) = x$. Así, $y \in X$ o $y \in A \subset U$.
2. Si $x \in U$, entonces $x \in A$ o $x \notin A$.

Si $x \in A$, las posibilidades son: $f(x) = y$, o $y \in A$ y $f(x) = f(y)$, en ambos casos $y \in U \cup X$.

Si $x \notin A$, la única opción es que $x = y$, así, $y \in U$.

Dado que $U \cup X$ es un abierto invariante de $Y \sqcup X$, se sigue de la igualdad anterior y de la equivarianza de p que $p(U \cup X) = V$ es un abierto invariante de $Y \cup_f X$.

Ahora, definamos $r : V \rightarrow p(X)$ dada por:

$$r(x) = \begin{cases} p(F(u)) & \text{si } p(u) = x \quad u \in U \\ p(y) & \text{si } x = p(y) \quad y \in X. \end{cases}$$

Veamos que r está bien definida.

Dado que $V = p(U \cup X) = p(U) \cup p(X)$, procedemos por casos.

1. Sean v y $w \in U$ tales que $v \sim w$. Entonces, $v, w \notin A$ y $v = w$ o $v, w \in A$ y $f(v) = f(w)$. Ahora, dado que F es una extensión de f , obtenemos de ambos casos que $F(v) = F(w)$. Así, $p(F(v)) = p(F(w))$.
2. Sean $u \in U$ y $x \in X$ tales que $u \sim x$. La única posibilidad es que $u \in A$ y $f(u) = x$. Entonces, como F es una extensión de f , tenemos que $f(u) = F(u)$ y consecuentemente, $r(p(u)) = p(F(u)) = p(x)$.

Por lo tanto, r está bien definida.

Para mostrar la continuidad de r , consideremos un abierto Z de $p(X)$. Dado que $p|_X : X \rightarrow Y \cup_f X$ es un encaje, para algún abierto W de X , tenemos que $Z = p(W)$. Una cuenta sencilla muestra las siguientes igualdades:

$$r^{-1}(p(W)) = p(W) \cup p(F^{-1}(W)) \quad (2.1.1)$$

$$p^{-1}(p(W \cup F^{-1}(W))) = W \cup F^{-1}(W). \quad (2.1.2)$$

La continuidad de F implica que $W \cup F^{-1}(W)$ es un abierto de $Y \sqcup X$. Así, por (2.1.2), tenemos que $p(W \cup F^{-1}(W))$ es abierto en $Y \cup_f X$. Luego, $F^{-1}(W) \subset U$ y $W \subset X$, implica que $W \cup F^{-1}(W) \subset X \cup U$. Así,

$$p(W \cup F^{-1}(W)) \subset p(U \cup X) = V.$$

Entonces, como $p(W \cup F^{-1}(W))$ es abierto en $Y \cup_f X$, tenemos que $p(W \cup F^{-1}(W))$ es abierto en V . Así, la continuidad de r se sigue de (2.1.1).

Sean $p(x) \in V$ y $g \in G$. Veamos que $gr(p(x)) = r(gp(x))$.

Procedamos por casos.

1. Supongamos que $x \in X$. Dado que X es invariante en $Y \sqcup X$, tenemos que $gx \in X$. Así, $r(p(x)) = p(x)$ y $r(p(gx)) = p(gx)$. Entonces,

$$\begin{aligned} r(gp(x)) &= r(p(gx)) \\ &= p(gx) \\ &= gp(x) \\ &= gr(p(x)). \end{aligned}$$

2. Ahora, sea $x \in U$. Entonces, como U es invariante y F equivariante, tenemos que $gx \in U$ y $F(gx) = gF(x)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} r(gp(x)) &= r(p(gx)) \\ &= p(F(gx)) \\ &= p(gF(x)) \\ &= gp(F(x)) \\ &= gr(p(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, r es una función equivariante.

De la definición de r , se sigue que r deja fijos a los puntos de $p(X)$. Por lo tanto, $p(X)$ es un retracto de vecindad de $Y \cup_f X$.

Supongamos que $p(X)$ es una retracto de vecindad de $Y \cup_f X$, esto es, existe una vecindad V de $p(X)$ en $Y \cup_f X$ y una retracción equivariante $r : V \rightarrow p(X)$ de $p(X)$. Definamos:

$$U = p^{-1}(V) \cap Y \quad F = p^{-1}|_X \circ r \circ p|_U : U \rightarrow X.$$

Afirmamos que F es una extensión equivariante de f . En efecto, U es un conjunto abierto invariante de Y y contiene a A ya que $p(A) \subset p(X)$ y V una vecindad de $p(X)$. Además, F es equivariante pues es composición de funciones equivariantes. Solo queda demostrar que F es una extensión de f .

Sea $a \in A$. Entonces $p(a) = p(f(a))$ y $p(f(a)) \in p(X)$. Por lo tanto, $r(p(f(a))) = p(f(a))$, y en consecuencia, $p^{-1}|_X(p(f(a))) = f(a)$. Concluimos que

$$F(a) = p^{-1}|_X(r(p(a))) = f(a).$$

□

El resultado previo será utilizado para demostrar la equivalencia entre las definiciones de extensor absoluto equivariante y de retractor absoluto equivariante en las clases de G -espacios: $\mathcal{N}^G$, $\mathcal{P}^G$ y $\mathcal{PN}^G$. Sin embargo, antes de abordar dicha demostración, enunciaremos el siguiente resultado, el cual será de utilidad para establecer el hecho mencionado. En el caso de espacios normales, dicho resultado fue probado por O. Hanner [17, Lemma 3.3]; para espacios perfectamente normales, la demostración es análoga; mientras que, en el caso de espacios paracompactos, la prueba correspondiente forma parte de la demostración de la proposición 2.4 en [26].

Teorema 2.1.5. *Sean Y y X espacios topológicos, A un subconjunto cerrado de Y y $f : A \rightarrow X$ una función continua. Entonces:*

1. *Si Y y X son espacios normales, también lo es $Y \cup_f X$.*
2. *Si Y y X son espacios paracompactos, también lo es $Y \cup_f X$.*
3. *Si Y y X son espacios perfectamente normales, también lo es $Y \cup_f X$.*

Es importante recordar que la equivalencia entre las definiciones de extensores absolutos y retractos absolutos no es válida en cualquier clase de espacios topológicos (ver [26, Proposition 2.4]). Sin embargo, al igual que en la clase de espacios topológicos, siempre existe una implicación en la clase de G -espacios. Esto es lo que afirma el siguiente lema.

Lema 2.1.6. *Sea $\mathcal{K}^G$ una clase de G -espacios. Si $X \in G-AE(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G-ANE(\mathcal{K}^G)$) y $X \in \mathcal{K}^G$, entonces $X \in G-AR(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G-ANR(\mathcal{K}^G)$).*

Demostración. Sean $\mathcal{K}^G$ una clase de G -espacios, $X \in G-AE(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G-ANE(\mathcal{K}^G)$), e $i : X \hookrightarrow Y$ un encaje equivariante cerrado con $Y \in \mathcal{K}^G$.

Dado que i es un encaje equivariante, $i^{-1} : i(X) \rightarrow X$ es un homeomorfismo equivariante. Denotemos $h = i^{-1}$. Luego, como $i(X)$ es cerrado en Y , $Y \in \mathcal{K}^G$ y $X \in G-AE(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G-ANE(\mathcal{K}^G)$) tenemos que h admite una extensión equivariante $H : Y \rightarrow X$ ($H : U \rightarrow X$ donde U es una vecindad invariante de $i(X)$).

Sea $r = i \circ H$. Afirmamos que r es una retracción de $i(X)$. En efecto, la composición de funciones equivariantes es equivariante. Por lo tanto, $r : Y \rightarrow i(X)$ (respectivamente, $r : U \rightarrow i(X)$) es equivariante.

Veamos que r deja fijos a los elementos de $i(X)$. Sea $x \in X$. Entonces $i(x) \in i(X)$, así $H(i(x)) = h(i(x)) = x$. Consecuentemente, $r(i(x)) = i(H(i(x))) = i(x)$.

Por lo tanto, $X \in G\text{-AR}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANR}(\mathcal{K}^G)$). $\square$

Teorema 2.1.7. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G -espacio y $\mathcal{K}^G$ alguna de las clases $\mathcal{PN}^G$, $\mathcal{P}^G$ y $\mathcal{N}^G$. Si $X \in \mathcal{K}^G$, entonces, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$) si, y solo si, $X \in G\text{-AR}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANR}(\mathcal{K}^G)$).*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}^G$ es la clase de G -espacios paracompactos (la prueba es análoga para las otras dos clases). En virtud del lema 2.1.6, es suficiente probar una sola implicación.

Sean $X \in G\text{-AR}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANR}(\mathcal{K}^G)$), $Y \in \mathcal{K}^G$, A un subconjunto cerrado invariante de Y , y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Dado que Y y X son G -espacios paracompactos, por teorema 2.1.5, $Y \cup_f X \in \mathcal{K}$. Por lema 2.1.3 (1), $p|_X : X \hookrightarrow Y \cup_f X$ es un encaje equivariante cerrado y como $X \in G\text{-AR}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANR}(\mathcal{K}^G)$), existe una retracción equivariante $r : Y \cup_f X \rightarrow p(X)$ (o $r : U \rightarrow p(X)$ con U una vecindad invariante de $p(X)$). Entonces, $p(X)$ es un retracto de $Y \cup_f X$. Así, por el lema 2.1.4, existe una extensión equivariante $F : Y \rightarrow X$ de f ($F : V \rightarrow X$ con V una vecindad invariante de A en Y). Dado que f fue arbitraria, obtenemos que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$). $\square$

Para concluir este capítulo veremos que el teorema anterior es también válido para la clase de G -espacios metrizable. Pero antes necesitamos herramientas adicionales. Una de ellas es el siguiente lema.

Lema 2.1.8. *Sean G un grupo localmente compacto, Y un espacio topológico y X un G -espacio. Entonces:*

1. $X \times G$ es un G -espacio con la acción

$$g_1 \cdot (x, g_2) = (g_1 x, g_2 g_1^{-1}).$$

2. $\varphi : X \rightarrow C(G, Y)$ es equivariante (considerando en $C(G, Y)$ la acción del teorema 1.6.1) si, y solo si, su función asociada $\varphi^* : X \times G \rightarrow Y$ es invariante.

Demostración.

1. Primero veamos la continuidad.

Sean $g, h \in G$, $x \in X$, U un abierto en G y V un abierto en X tales que $(gx, hg^{-1}) \in V \times U$. La continuidad de la acción de G en X asegura que existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de g y x tales que $V_1 V_2 \subset V$. Dado que G es grupo topológico, tenemos que la función $f : G \times G \rightarrow G$,

$f(w, z) = wz^{-1}$ es continua. Así, existen vecindades abiertas U_1 y U_2 de h y g respectivamente tales que $f(U_1 \times U_2) \subset U$. Definamos $W = U_2 \cap V_1$ y $O = V_2 \times U_1$. Claramente $g \in W$ y $(x, h) \in O$. Veamos que $W \cdot O \subset V \times U$. En efecto, sean $g' \in W$ y $(x', h') \in O$. Tenemos que $g'x' \in V$ y $h'g'^{-1} \in U$. Así, $g' \cdot (x', h') = (g'x', h'g'^{-1}) \in V \times U$.

Veamos que $\cdot$ es una acción.

Sean $g, h \in G$ y $(x, g') \in X \times G$. Entonces, $gh \cdot (x, g') = ((gh)x, g'(gh)^{-1}) = (g(hx), (g'h^{-1})g^{-1}) = g \cdot (hx, g'h^{-1}) = g \cdot (h \cdot (x, g))$ y $e \cdot (x, g) = (x, g)$.

2. Dado que G es localmente compacto, la continuidad de φ implica la continuidad de φ^* y viceversa, por lo que es suficiente mostrar la equivarianza e invarianza de φ y φ^* respectivamente.

Supongamos que $\varphi : X \rightarrow C(G, Y)$ es una función equivariante.

Sean $g \in G$ y $(x, h) \in X \times G$. Entonces, por definición $\varphi^*(gx, hg^{-1}) = \varphi(gx)(hg^{-1})$. Luego, φ equivariante implica que

$$\varphi(gx)(hg^{-1}) = g\varphi(x)(hg^{-1}).$$

Así, $g^{-1}g\varphi(x)(h) = \varphi^*(x, h)$.

Supongamos que $\varphi^* : X \times G \rightarrow Y$ es una función invariante.

Sean $g \in G$ y $(x, h) \in X \times G$. Entonces, $\varphi(gx)(h) = \varphi^*(gx, h) = \varphi^*(g^{-1} \cdot (gx, h)) = \varphi^*(x, hg) = \varphi(x)(hg) = g\varphi(x)(h)$.

□

El siguiente teorema servirá para probar la equivalencia de las definiciones de extensor y retracto absoluto equivariantes en la clase de G -espacios metrizables. Además, será útil para encontrar extensores absolutos equivariantes a partir de extensores absolutos en la clase de espacios topológicos.

Teorema 2.1.9. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si Y es un $AE(\mathcal{K})$ ($Y \in ANE(\mathcal{K})$ y G compacto), entonces $C(G, Y)$ con la acción del teorema 1.6.1 es un G - $AE(\mathcal{K}^G)$ (es un G - $ANE(\mathcal{K}^G)$).*

Demostración. Sean $Y \in AE(\mathcal{K})$, $X \in \mathcal{K}$, A un subconjunto cerrado invariante de X y $f : A \rightarrow C(G, Y)$ una función equivariante.

Dado que G es localmente compacto y f es continua, por el lema 2.1.8, tenemos que $f^* : A \times G \rightarrow Y$ es una función continua e invariante, donde f^* es la función asociada a f , y $A \times G$ está dotado de la acción del lema 2.1.8.

Por otro lado, como $A \times \{e\}$ es un cerrado de $X \times \{e\}$, entonces, $f^*|_{A \times \{e\}} : A \times \{e\} \rightarrow Y$ admite una extensión $f' : X \times \{e\} \rightarrow Y$, ya que $Y \in AE(\mathcal{K})$. En el

caso de que $Y \in ANE(\mathcal{K})$, se tiene que f admite una extensión $f' : U \times \{e\} \rightarrow Y$, donde U es una vecindad invariante de A ya que es compacto G .

Definamos $\Gamma : X \times G \rightarrow Y$, $(\Gamma : U \times G \rightarrow Y)$ $\Gamma(x, g) = f'(gx, e)$. Si α es la acción de G en X , la continuidad de Γ se sigue de la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\Gamma} & Y \\ \alpha \circ h \downarrow & \nearrow f' & \\ X & & \\ i \downarrow & & \\ X \times \{e\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\Gamma} & Y \\ \alpha \circ h|_{U \times G} \downarrow & \nearrow f' & \\ U & & \\ i|_U \downarrow & & \\ U \times \{e\} & & \end{array}$$

donde $h : X \times G, h(g, x) = (x, g)$ e $i : X \rightarrow X \times \{e\}$ es la inclusión.

Veamos que Γ es invariante bajo la acción definida en el lema 2.1.8.

Sean $g \in G$ y $(x, h) \in X \times G$. Entonces,

$$\Gamma(g \cdot (x, h)) = \Gamma(gx, hg^{-1}) = f'((hg^{-1})gx, e) = f'(hx, e) = \Gamma(x, h).$$

Así, por el lema 2.1.8, la función asociada $\Gamma^* : X \rightarrow C(G, Y)$ ($\Gamma^* : U \rightarrow C(G, Y)$) a Γ es una función equivariante.

Finalmente, mostremos que Γ^* es extensión de f .

Sean $a \in A$ y $g \in G$. Entonces, dado que f^* es una función invariante, tenemos que $f^*(a, g) = f^*(g'a, gg'^{-1})$ para todo $g' \in G$. En particular, para $g = g'$, tenemos que $f^*(a, g) = f^*(ga, e)$. Consecuentemente, $\Gamma^*(a)(g) = \Gamma(a, g) = f'(ga, e) = f^*(ga, e) = f^*(a, e) = f(a)(g)$. Por lo tanto, $\Gamma^*(a) = f(a)$. $\square$

El teorema anterior da una amplia gama de extensores absolutos equivariantes. Por ejemplo, el teorema de Dugundji 3.0.1, asegura que cualquier espacio lineal localmente convexo V es un extensor absoluto de la clase de espacios metrizables. Por lo tanto, si G es un grupo localmente compacto, el espacio de funciones $C(G, V)$ es un G -extensor absoluto para la clase de G -espacios metrizables.

El teorema de Tietze garantiza que el intervalo $[0, 1]$ es un extensor absoluto para la clase de espacios normales. Por lo tanto, si G es localmente compacto, el G -espacio de funciones $C(G, [0, 1])$ es un G -extensor absoluto para la clase de G -espacios normales.

Ahora, retomando nuestro propósito, procedamos a demostrar el siguiente lema.

Lema 2.1.10. *Sean X y Z dos G -espacios y Z un G -retracto de X . Si $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$), entonces $Z \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ ($Z \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$).*

Demostración. Sean X, Y, Z tres G -espacios, donde Z es un G -retracto de X , $Y \in \mathcal{K}^G$, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$) y $f : A \rightarrow Z$ una función equivariante donde A es un subconjunto cerrado invariante de Y .

Dado que Z es un G -retracto de X , existe un encaje equivariante cerrado $i : Z \hookrightarrow X$. Así, $i \circ f : A \rightarrow X$ es una función equivariante que admite extensión $F' : Y \rightarrow X$ ($F' : U \rightarrow X$ con U una vecindad invariante de A en Y), ya que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$). Sea $r : X \rightarrow i(Z)$ una retracción de Z ($r : U \rightarrow i(Z)$, donde U es una vecindad invariante de $i(Z)$ en X).

Afirmamos que $F = i^{-1} \circ r \circ F'$ es una extensión equivariante de f .

La composición de funciones equivariantes es equivariante. Por lo que basta ver que F coincide con f en A .

Sea $a \in A$. Como F' es extensión de $i \circ f$, tenemos $F'(a) = i(f(a))$. Así,

$$\begin{aligned} F(a) &= i^{-1}r(F'(a)) \\ &= i^{-1}r(i(f(a))). \end{aligned}$$

Luego, $i(f(a)) \in i(Z)$ implica $r(i(f(a))) = i(f(a))$. Consecuentemente, $F(a) = f(a)$. $\square$

El propósito de esta sección es demostrar los teoremas 2.1.7 y 2.1.11. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta sección no solo serán útiles en la demostración de dichos teoremas, sino que también serán aplicados en la demostración del teorema 2.2.4 en la clase de G -espacios.

Terminamos esta sección mostrando que en la clase de espacios metrizables, los conceptos de extensor absoluto equivariante y de retractor absoluto equivariante son equivalentes.

Teorema 2.1.11. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio metrizable. Entonces, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$) si, y solo si, $X \in G\text{-AR}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{M}^G)$).*

Demostración. Supongamos que $X \in G\text{-AR}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{M}^G)$). Por el teorema de Arens-Eells (ver [8]), existe un encaje cerrado $\eta : X \hookrightarrow V$, donde V es un espacio vectorial topológico normado. Entonces, por el teorema 1.6.3, η induce un encaje cerrado equivariante $\eta_{\sharp} : X \hookrightarrow C(G, V)$.

Ahora, por el teorema de Dugundji 3.0.1, V es un extensor absoluto de la clase de espacios metrizables. Así, por el teorema 2.1.9, $C(G, V)$ es un $G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$.

Además, dado que G es compacto y V es un espacio normado, $C(G, V)$ es un espacio normado con la norma del supremo. Ahora, la topología generada por esta métrica coincide la con topología compacto-abierta (ver [20, Proposición B.9]). Así, $C(G, V)$ es un G -espacio metrizable.

Por lo tanto, dado que $\eta_{\sharp}$ es un encaje equivariante cerrado y $X \in G\text{-AR}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{M}^G)$), tenemos que X es un G -retracto de $C(G, V)$ (G -retracto de vecindad). Así, por el lema 2.1.10, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$). $\square$

2.2. Extensores de espacios de Tychonoff.

Supongamos que X es un G -espacio metrizable que además es un extensor absoluto para la clase de espacios de G -espacios metrizables.

¿Bajo qué condiciones adicionales X es un extensor absoluto (retracto absoluto) de la clase de G -espacios de Tychonoff?

Responderemos esta pregunta en esta sección.

Sean Y un espacio topológico y G un grupo topológico. Consideremos en $G \times Y$ la topología producto. Definamos la función

$$\begin{aligned} \alpha : G \times G \times Y &\rightarrow G \times Y \\ (g, h, x) &\rightarrow (gh, x). \end{aligned}$$

Es evidente que α es una acción continua. Además, si A es un subconjunto cerrado de Y , entonces $G \times A$ es un subconjunto cerrado invariante del G -espacio $G \times Y$ con la acción α . Este G -espacio será utilizado en los siguientes resultados.

Lema 2.2.1. Sean G un grupo topológico (compacto), $\mathcal{K}^G$ una clase de G -espacios y $X \in G\text{-AE}(\mathcal{K}^G)$ (o $X \in G\text{-ANE}(\mathcal{K}^G)$). Entonces, si $G \times Y \in \mathcal{K}$ para todo $Y \in \mathcal{K}$, se tiene que $X \in \text{AE}(\mathcal{K})$ (o $X \in \text{ANE}(\mathcal{K})$).

Demostración. Sean $Y \in \mathcal{K}$, $A \subset Y$ cerrado y $f : A \rightarrow X$ una función continua, donde X un G -espacio topológico arbitrario. Consideremos el G -espacio $G \times Y$

construido previamente a este lema. Definamos

$$\begin{aligned} f' : G \times A &\rightarrow X \\ (g, a) &\rightarrow gf(a). \end{aligned}$$

Afirmamos que f' es una función equivariante.

Sea β la acción continua de G en X . La continuidad de f' , se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \xrightarrow{f'} & X \\ 1_G \times f \downarrow & \nearrow \beta & \\ G \times X & & \end{array}$$

Sean $g \in G$ y $(h, a) \in G \times A$, veamos que $f'(g(h, a)) = gf'(h, a)$. En efecto,

$$\begin{aligned} gf'(h, a) &= g(hf(a)) \\ &= (gh)f(a) \\ &= f'(gh, a) \\ &= f'(g(h, a)). \end{aligned}$$

Así, f' es una función equivariante.

Supongamos que $X \in G\text{-}AE(\mathcal{K}^G)$. Entonces, f' admite una extensión equivariante $F' : G \times Y \rightarrow X$, ya que por hipótesis $G \times Y \in \mathcal{K}$. Consideremos $F'' = F'|_{\{e\} \times X}$ e $i : X \hookrightarrow \{e\} \times X$ la inclusión $i(x) = (e, x)$. Definamos $F = i \circ F''$. Veamos que F es una extensión continua de f .

Como la composición de funciones continuas es continua, F es una función continua. Sea $a \in A$, entonces $(e, a) \in G \times A$ y así,

$$\begin{aligned} (F'' \circ i)(a) &= F''(e, a) \\ &= F'(e, a) \\ &= ef(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Así, F extiende a f . En consecuencia, $X \in AE(\mathcal{K})$.

Supongamos que G es compacto y $X \in G\text{-}ANE(\mathcal{K}^G)$. Tenemos por hipótesis que $G \times Y \in \mathcal{K}$, así, $f' : G \times A \rightarrow X$ admite una extensión equivariante $F' : U \rightarrow X$, donde U es una vecindad invariante de $G \times A$ en $G \times Y$. Luego, como G es compacto, por el lema del tubo (ver [16, Lemma 3.1.15]), para cada $x \in A$, existe un abierto $G \times U_x$ de $G \times Y$ tal que $G \times \{x\} \subseteq G \times U_x \subset U$. Definamos $W = \bigcup_{x \in A} U_x$. Así, por construcción $A \subset W$, W es abierto en Y y $G \times A \subset G \times W \subset U$. Entonces, análogamente a lo anterior, considerando $i : W \rightarrow \{e\} \times W$ la inclusión y $F'' = F'|_{\{e\} \times W}$, la función deseada es $F = F'' \circ i$. $\square$

En la sección anterior se demostró que en la clase de G -espacios metrizables, las definiciones de extensor y retracto absoluto son equivalentes para las clases $\mathcal{M}^G$, $\mathcal{P}^G$, $\mathcal{PN}^G$ y $\mathcal{N}^G$. En esta sección, mostraremos que este resultado no es válido para la clase de G -espacios de Tychonoff. Parte de nuestro argumento se basa en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea G un grupo topológico (compacto). Entonces, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{T}^G)$) si, y solo si, X es un G -espacio unipuntual.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico (compacto) y que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{T}^G)$). Sabemos que G es un espacio de Tychonoff, así, si Y es de Tychonoff, $G \times Y$ es un espacio de Tychonoff. Luego, en virtud del lema anterior, $X \in \text{AE}(\mathcal{T}^G)$ (o $X \in \text{ANE}(\mathcal{T}^G)$). Ahora, dado que los extensores absolutos (de vecindad) de la clase de espacios de Tychonoff son únicamente los espacios unipuntuales, obtenemos que X es un G -espacio unipuntual.

El regreso es inmediato, ya que un punto es G -extensor de cualquier G -espacio. $\square$

Notemos que el teorema anterior asegura que si encontramos un G -espacio metrizable X no G -homeomorfo a un G -espacio unipuntual que además satisfaga que $X \in G\text{-AR}(\mathcal{T}^G)$, habremos demostrado que las clases $G\text{-AR}(\mathcal{T}^G)$ y $G\text{-AE}(\mathcal{T}^G)$ no coinciden como subclase de la clase de G -espacios metrizables. Para mostrar la existencia de este G -espacio, necesitamos más herramientas que iremos desarrollando en esta sección. Por ahora, supondremos los siguientes resultados (ver [16, Theorem 3.3.9] y [16, Corollary 3.3.10]).

Teorema 2.2.3. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. X es localmente compacto.
2. Si X es un subconjunto denso de un espacio Hausdorff Y , entonces X es abierto en Y .
3. Si X es subconjunto de un espacio Hausdorff Y , entonces $X = U \cap C$ donde U es abierto en Y y C cerrado en Y .

Teorema 2.2.4. *Sean X un espacio localmente compacto y A un subespacio σ -compacto de X . Entonces existe un abierto σ -compacto Z de X que contiene a A .*

En esta tesis constantemente trabajamos en trasladar resultados de la clase de espacios topológicos a la clase de G -espacios. El siguiente resultado no es la excepción. En [26, Lemma 4.6], podemos encontrar el siguiente lema pero en la clase de espacios topológicos.

Lema 2.2.5. Sean G un grupo compacto, X un G -espacio de Tychonoff, A un subconjunto localmente compacto, σ -compacto e invariante de X . Entonces, existen una vecindad invariante V de A en X , un G -espacio localmente compacto σ -compacto Z , y un encaje equivariante $h : V \rightarrow Z$ tal que $h(A)$ es cerrado en Z .

Demostración. Sean X un G -espacio de Tychonoff, A un subconjunto localmente compacto, σ -compacto e invariante de X . Por [23, Theorem 1.5.4], existe un encaje equivariante $i : X \hookrightarrow Y$ donde Y es un G -espacio compacto de Hausdorff. Claramente, $i(A)$ es un subespacio localmente compacto y σ -compacto de Y . Así, por el teorema 2.2.3, existen un abierto U' de Y y un cerrado C en Y tales que $i(A) = U' \cap C$. Dado que $i(A)$ es un subconjunto invariante de Y , $i(A) \subset U'$ y G es compacto, por el corolario 1.4.3, existe un abierto invariante U de Y tal que

$$i(A) \subset U \subset U'.$$

Es evidente que $i(A) = U \cap C$. U abierto de Y implica que U es localmente compacto, así, por el teorema 2.2.4, existe abierto σ -compacto Z' de U tal que

$$i(A) \subset Z' \subset U.$$

Ahora, dado que U es abierto en Y , Z' es abierto en Y . Definamos $Z = G(Z')$. En virtud de la proposición 1.2.10, Z es un abierto invariante de Y . Además, tenemos que $i(A) \subset Z$, $i(A) = Z \cap C$ y Z es σ -compacto. Así, dado que Z es abierto en Y , obtenemos que Z es localmente compacto e $i^{-1}(Z)$ es un abierto invariante de X . Definamos $V = i^{-1}(Z)$ y $h = i|_{i^{-1}(Z)} : i^{-1}(Z) \hookrightarrow Z$. Claramente, h es encaje, V es un abierto invariante de X que cumple $A \subset V$, $h(A)$ es cerrado en Z y Z es σ -compacto. $\square$

El lema 2.2.1 asegura que si $\mathcal{K}$ es una clase de espacios topológicos, X un espacio metrizable, $X \in G\text{-}AE(\mathcal{K}^G)$ y $G \times Y \in \mathcal{K}$ para todo $Y \in \mathcal{K}$, entonces $X \in AE(\mathcal{K})$. Este resultado es relevante, ya que en la clase de espacios metrizables ya están determinados los extensores de algunas clases de espacios topológicos. Ahora, presentamos este resultado pero con los retracts absolutos equivariantes. Esto ayudará porque en la clase de espacios topológicos ya se sabe quienes son los espacios metrizables que son retracts absolutos de la clase de espacios de Tychonoff.

Lema 2.2.6. Sea G un grupo compacto. Si $X \in G\text{-}AR(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-}ANR(\mathcal{T}^G)$), entonces $X \in AR(\mathcal{T})$ ($X \in ANR(\mathcal{T})$).

Demostración. Sean X un G -espacio e $i : X \hookrightarrow Y$ un encaje cerrado con Y un G -espacio de Tychonoff. Los encajes cerrados $1_Y : Y \hookrightarrow Y$ e $i : X \hookrightarrow Y$ inducen encajes equivariantes cerrados $(i)_\# : X \hookrightarrow C(G, Y)$ y $(1_Y)_\# : Y \hookrightarrow C(G, Y)$ (véase 1.6.3). Denotemos $h = (i)_\#$ y $f = (1_Y)_\#$. Consideremos el siguiente diagrama

conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & C(G, Y) \\ i \uparrow & \nearrow h & \\ X & & \end{array}$$

Supongamos que $X \in G\text{-AR}(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{T}^G)$). Entonces, como Y es un espacio de Tychonoff, $C(G, Y)$ es un espacio Tychonoff (ver [16, Theorem 3.4.15]). Así, dado que h es un encaje cerrado, existe una retracción equivariante $r : C(G, Y) \rightarrow h(X)$ ($r : U \rightarrow h(X)$, donde U es una vecindad invariante de $h(X)$). El homeomorfismo $f^{-1} : f(Y) \rightarrow Y$ induce un homeomorfismo $f^{-1}|_{h(X)} : h(X) \rightarrow i(X)$.

Afirmamos que $f^{-1}|_{h(X)} \circ r \circ f : Y \rightarrow i(X)$ es una retracción de $i(X)$ ($f^{-1}|_{h(X)} \circ r \circ f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow i(X)$).

La composición de funciones continuas da una función continua. Por lo que resta mostrar que $f^{-1}|_{h(X)} \circ r \circ f$ deja fijos los puntos de $i(X)$.

Sea $i(x) \in i(X)$. Entonces, $f(i(x)) \in h(X)$, así, $r(f(i(x))) = f(i(x))$. Luego,

$$f^{-1}|_{h(X)}(f(i(x))) = i(x)$$

(análogamente se prueba para $f^{-1}|_{h(X)} \circ r \circ f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow i(X)$). $\square$

Para continuar, necesitamos demostrar algunas propiedades que serán utilizadas en el último teorema de esta sección.

Lema 2.2.7. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y segundo numerable. Entonces, X admite una base numerable de abiertos cuya cerradura es compacta.*

Demostración. Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto segundo numerable y $\mathcal{U}$ una base numerable de X . Afirmamos que

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} \mid \bar{U} \text{ es compacto}\}$$

es una base de X .

Tomemos un punto $x \in X$ y W una vecindad abierta de x . Dado que X es localmente compacto, según [16, 3.3.2], existe una vecindad V de x con cerradura compacta que satisface la inclusión $V \subset \bar{V} \subset W$. Ahora bien, como $\mathcal{U}$ es una base, existe un conjunto abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset V$. Por lo tanto, $\bar{U} \subset \bar{V}$ y, en consecuencia, $\bar{U}$ es compacto y $x \in \bar{U} \subset W$. Esto demuestra que $\mathcal{V}$ es una base de X .

Por otro lado, dado que $\mathcal{U}$ es numerable, se concluye que $\mathcal{V}$ es también numerable, cumpliendo con lo requerido. $\square$

Lema 2.2.8. *Sea X un espacio Hausdorff y segundo numerable. Si X es localmente compacto, entonces X es paracompacto.*

Demostración. Sean $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de X y $\{U_i\}_{i \in A}$ una cubierta abierta de X .

Comenzaremos haciendo algunas observaciones para simplificar la prueba. Para cada $x \in X$, existe $i \in A$ tal que $x \in U_i$. Siguiendo el procedimiento del lema anterior, podemos encontrar $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{n(x)} \subset \overline{V_{n(x)}} \subset U_i$ y $\overline{V_{n(x)}}$ es compacto. De este modo, el conjunto formado por estos $\overline{V_{n(x)}}$, constituye un refinamiento de $\{U_i\}_{i \in A}$.

Por otro lado, dado que ser refinamiento es una propiedad transitiva, lo anterior garantiza que es suficiente encontrar el refinamiento de un conjunto numerable. Más aún, podemos suponer que cada elemento es un abierto con cerradura compacta. Así, sin pérdida de la generalidad, supongamos que $\mathbb{N} = A$ y cada elemento de $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene cerradura compacta.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $W_n = \bigcup_{j \leq n} U_j$. Es claro que cada W_n tiene cerradura compacta y $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de abiertos crecientes.

Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{W_n}$ es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{W_n} \subset W_N$. Reenumeremos a W_N como W_{n+1} . Entonces, tenemos que $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos que satisface $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{W_n}$ es un conjunto compacto.

Definamos $V_0 = W_0$, $V_n = W_n \setminus \overline{W_{n-1}} = W_n \cap (X \setminus \overline{W_{n-1}})$ para $n \geq 1$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $K_n = \overline{V_n}$ es un conjunto compacto. Es evidente que para cada $N \in \mathbb{N}$, K_N es disjunto a K_n para $n > N + 1$. Por otro lado, es importante notar que $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta de X que consta de conjuntos compactos, por lo que tenemos que X es un espacio σ -compacto.

Notemos que para cada $n \geq 2$, $K_n \subset Z_n = W_{n+1} \setminus \overline{W_{n-2}}$ y Z_n es un abierto de X . Así, para cada $x \in K_n$, existe O_n una vecindad de x tal que $O_n \subset Z_n$. Entonces, dado que K_n es compacto, podemos cubrir con una cantidad finita de estos O_n a K_n . Ahora, dado que Z_n es ajeno a Z_m si $|n - m| \geq 2$, tenemos que estos O_n forman una cubierta de X que además es un refinamiento localmente finito de $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sean G un grupo compacto, X un G -espacio metrizable tal que $X \in G\text{-AR}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{M}^G)$). Entonces, $X \in G\text{-AR}(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{M}^G)$) si, y solo si, X es compacto (X es localmente compacto y separable).*

Demostración. Supongamos que $X \in G\text{-AR}(\mathcal{T}^G)$ ($X \in G\text{-ANR}(\mathcal{T}^G)$). Por el teorema anterior, $X \in \text{AR}(\mathcal{T})$ ($X \in \text{ANR}(\mathcal{T})$). Entonces, en virtud de [26, Theorem 3.2], X es compacto (X localmente compacto y separable).

En este caso solo haremos la implicación cuando X es localmente compacto y separable, el caso cuando X es compacto es trivial.

Sean X un G -espacio localmente compacto separable, e $i : X \hookrightarrow Y$ un encaje equivariante cerrado con Y un G -espacio de Tychonoff. Tenemos que mostrar que existen U una vecindad abierta invariante de $i(X)$ en Y y $r : U \rightarrow i(X)$ una retracción equivariante. En efecto, dado que X es un G -espacio separable y localmente compacto, tenemos que X es σ -compacto; así, $i(X)$ es σ -compacto.

Luego, como Y es un G -espacio de Tychonoff, por el lema 2.2.5, existe una vecindad abierta invariante V de $i(X)$ en Y , Z un G -espacio localmente compacto σ -compacto, y un encaje equivariante $h : V \hookrightarrow Z$ tal que $h(i(X))$ es cerrado de Z . Definamos $i' = h|_{i(X)}$. Así, tenemos que $i' : i(X) \hookrightarrow Z$ es un encaje equivariante cerrado.

Por otro lado, dado que X es un G -espacio metrizable localmente compacto, tenemos que X es completo. Z σ -compacto y localmente compacto implica que Z es paracompacto (ver lema 2.2.8).

Dado que X es completo, Z paracompacto y $X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$, en virtud del teorema 2.4.2, existe una vecindad abierta invariante W de $i'(i(X))$ en Z y una retracción equivariante $r' : W \rightarrow i'(i(X))$. Evidentemente, $h^{-1}(W)$ es un abierto invariante de V y por lo tanto de Y y contiene a $i(X)$.

Definamos $U = h^{-1}(W)$ y $h|_U = f$ y mostremos que la retracción deseada es $r = (i')^{-1} \circ r' \circ f$. Composición de funciones equivariantes es equivariante, por lo que r es equivariante. Veamos que r deja fijo a cada elemento de $i(X)$. Sea $x \in X$. Entonces, $i'(i(x)) \in i'(i(X))$. En consecuencia, $r'(i'(i(x))) = i'(i(x))$. Así, $r(i(x)) = ((i')^{-1} \circ r' \circ f)(i(x)) = i(x)$. $\square$

2.3. Extensores de espacios perfectamente normales.

Supongamos X es un G -espacio metrizable y que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$.

¿Bajo qué condiciones adicionales en X se tiene que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{PN}^G)$?

En esta sección contestaremos esta pregunta. Pero antes de proceder a dar las condiciones adicionales, necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sean G un grupo compacto, X un G -espacio normal y A subconjunto cerrado invariante G_δ de X . Entonces, existe una función invariante $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi^{-1}(0) = A$.*

Demostración. Sean X un G -espacio normal y A un subconjunto cerrado invariante G_δ de X . Sabemos que existe $\phi' : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi'^{-1}(A) = 0$ (ver [16, Corolario 1.5.12]). Definamos

$$\begin{aligned}\phi : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \int \phi'(gx)dg,\end{aligned}$$

donde $\int$ denota la integral de Haar. Por el teorema 1.7.3, tenemos que ϕ es una función invariante. Afirmamos que $\phi^{-1}(0) = A$. En efecto, sea $x \in \phi^{-1}(0)$. Dado que $\phi'(x) \geq 0$ y $\phi(x) = \int \phi'(gx)dg = 0$, por el lema 1.7.2, $\phi'(gx) = 0$ para todo $g \in G$, así, en particular, para e , tenemos $\phi'(x) = 0$. Entonces, como $\phi'^{-1}(A) = 0$, obtenemos que $x \in A$.

Veamos la otra inclusión. Sea $x \in A$. Dado que A es invariante y $\phi'^{-1}(A) = 0$, obtenemos que $gx \in A$ para todo $g \in G$. Así, $\phi'(gx) = 0$ para toda $g \in G$. Por lo tanto, $\phi(x) = \int \phi'(gx)dg = 0$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G -espacio metrizable tal que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$). Entonces, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{PN}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{PN}^G)$) si, y solo si, X es separable.*

Demostración. Sea X un G -espacio metrizable tal que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$. Supongamos que X es separable, Y un espacio perfectamente normal, A un subconjunto cerrado invariante de Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Dado que X es separable, existe un encaje $\eta : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{\aleph_0}$ (ver [26, Lemma 4.1]). Así, en virtud del teorema 1.6.3, η induce un encaje equivariante

$$\eta_\# : X \hookrightarrow C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}).$$

Por otro lado, sabemos que $R^{\aleph_0} \in \text{AE}(\mathcal{N})$. Así, por el teorema 2.1.9, $C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}) \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$. Entonces, como Y es normal, la función equivariante $\eta_\# \circ f : A \rightarrow C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0})$, admite una extensión equivariante $F' : Y \rightarrow C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0})$. Sean I el intervalo $[0, 1]$ con la acción trivial y $K = C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}) \times I$ con la acción diagonal. Claramente, K es un G -espacio metrizable. Definamos

$$M = K \setminus (C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}) \times \{0\} \setminus F'(A) \times \{0\}).$$

Una cuenta sencilla muestra que M es invariante en K . Así, M es un G -espacio metrizable. De la definición de M , se sigue que $F'(A) \times \{0\}$ es un subconjunto cerrado invariante de M . Sea

$$\begin{aligned}i : f(A) &\hookrightarrow F'(A) \times \{0\} \\ f(a) &\hookrightarrow (\eta_\#(f(a)), 0).\end{aligned}$$

Entonces, i es un encaje equivariante, sea $i^{-1} : F'(A) \times \{0\} \rightarrow f(A)$ su inversa. Dado que $f(A) \subset X$, y $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$), tenemos que existe una extensión equivariante $H : M \rightarrow X$ de i^{-1} ($H : U \rightarrow X$ donde U es una vecindad invariante de $F'(A)$ en M).

Por otro lado, dado que Y es perfectamente normal, A es G_δ . Entonces, por el teorema 2.3.1, existe una función invariante $\phi : Y \rightarrow [0, 1]$ que satisface $\phi^{-1}(\{0\}) = A$. Definamos

$$\begin{aligned} h : Y &\rightarrow M \\ y &\rightarrow (F'(y), \phi(y)). \end{aligned}$$

Claramente h es equivariante, y está bien definida pues $\phi^{-1}(\{0\}) = A$. Definamos $F = H \circ h : Y \rightarrow X$. Afirmamos que F es la función deseada. La composición de funciones equivariantes es equivariante. Solo falta mostrar que F es una extensión de f . En efecto, sea $a \in A$, entonces $F(a) = H \circ h(a) = H(F'(a), 0) = f(a)$.

Supongamos $X \in G-AE(\mathcal{P}\mathcal{N}^G)$ (o $X \in G-ANE(\mathcal{P}\mathcal{N}^G)$). Sea Y un G -espacio perfectamente normal. Dado que G es un grupo de Lie, G es metrizable y por lo tanto, $G \times Y$ es un espacio perfectamente normal. Ahora, por el lema 2.2.1, si $X \in G-AE(\mathcal{P}\mathcal{N}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$), tenemos que $X \in AE(\mathcal{P}\mathcal{N})$ ($X \in ANE(\mathcal{P}\mathcal{N})$) y por [26, Theorem 3.1], tenemos que X es separable. $\square$

2.4. Extensores de espacios paracompactos.

En esta sección mostraremos que si G es compacto, X es topológicamente completo y $X \in G-AR(\mathcal{M}^G)$, entonces $X \in G-AE(\mathcal{P}^G)$. Lo que contesta una parte de la pregunta que originó este capítulo.

En esta sección supondremos que G es un grupo compacto y utilizaremos el siguiente lema que puede ser consultado en [16, 5.1.36].

Lema 2.4.1. *Sean X un espacio paracompacto y Z un espacio compacto. Entonces, $Z \times X$ es paracompacto.*

Teorema 2.4.2. *Sea X un G -espacio metrizable tal que $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$). Entonces, $X \in G-AE(\mathcal{P}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{P}^G)$) si, y solo si, X es un G -espacio topológicamente completo.*

Demostración. Sea X un G -espacio metrizable tal que $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$ (o, $X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$).

Primero supongamos que X pertenece a la clase $G-AE(\mathcal{P}^G)$ (X pertenece $G-ANE(\mathcal{P}^G)$). Por el lema 2.4.1, tenemos que dado cualquier G -espacio paracompacto Y , $G \times Y$ es un G -espacio paracompacto. Así, por el lema 2.2.1, tenemos $X \in AE(\mathcal{P})$ (o $X \in ANE(\mathcal{P})$). Luego, por [26, Theorem 3.1], obtenemos que X es topológicamente completo.

Sea (X, d) un G -espacio topológicamente completo. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que X es completo con respecto de la métrica d . Veamos que $X \in G-AE(\mathcal{P}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{P}^G)$).

Sean Y un G -espacio paracompacto, A un subconjunto cerrado invariante de Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Como G es un grupo compacto, por el lema 1.7.4, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que d es invariante y completa. Sea $i : X \hookrightarrow C'(X)$ el encaje isométrico equivariante de Kurawtoski (ver teorema 1.6.7). Dado que $C'(X)$ es un espacio de Banach, por [7, Theorem 4.1], $i \circ f : A \rightarrow C'(X)$, admite una extensión continua $f' : Y \rightarrow C'(X)$. Definamos

$$\begin{aligned} F : Y &\rightarrow C'(X) \\ x &\rightarrow \int g^{-1} f'(gx) dg, \end{aligned}$$

donde $\int$ denota la integral del teorema 1.8.2. Para mostrar la continuidad de F , primero veamos que la función

$$\begin{aligned} \phi : G \times Y &\rightarrow C'(X) \\ (g, x) &\rightarrow g^{-1} f'(gx) \end{aligned}$$

es continua. En efecto, sean $(g, x) \in G \times Y$ y U un abierto de $C'(X)$ tales que $g^{-1} f'(gx) \in U$. Como $C'(X)$ es un G -espacio, existen vecindades U'_1 y U_2 de g^{-1} y $f'(gx)$ tales que $U'_1 U_2 \subset U$. Luego, como G es un grupo topológico, existe un abierto U_1 de g tal que para todo $h \in U_1$, tenemos que $h^{-1} \in U'_1$. Luego, la continuidad de f' asegura que existe una vecindad U_3 de gx tal que $f'(U_3) \subset U_2$. Además, la continuidad de la acción de G en X asegura que existen vecindades U_4 y U_5 de g y x tales que $U_4 U_5 \subset U_3$. Definamos $V = (U_4 \cap U_1) \times U_5$. Claramente $(g, x) \in V$. Ahora, sea $(h, y) \in V$. Entonces $hy \in U_3$. Luego, $f'(hy) \in U_2$. Además, $h \in U_1$ implica que $h^{-1} \in U'_1$. Así, $h^{-1} f'(hy) \in U$. Consecuentemente, ϕ es una función continua.

Por otro lado, dado que G es compacto, G es localmente compacto y por lo tanto la función inducida

$$\begin{aligned} \phi^* : Y &\rightarrow C(G, C'(X)) \\ x &\rightarrow h_x \end{aligned}$$

es continua, donde $h_x : G \rightarrow C'(X)$, $h_x(g) = g^{-1} f'(gx)$. La continuidad de F se sigue de que $\int$ y ϕ^* son continuas y de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi^*} & C(G, C'(X)) \\ \downarrow F & \swarrow \int & \\ C'(X) & & \end{array}$$

Sean $h \in G$ y $x \in Y$, veamos que F es equivariante. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 F(hx) &= \int g^{-1} f'(g(hx)) dg \\
 &= \int h(gh)^{-1} f'((gh)x) dg \\
 &= h \int (gh)^{-1} f'((gh)x) dg \\
 &= h \int \phi^*(x)(gh) dg \\
 &= h \int \phi_h^*(x)(g) dg \\
 &= h \int \phi^*(x)(g) dg \\
 &= hF(x).
 \end{aligned}$$

Por lo que solo resta probar que F es extensión de f . Sea $a \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int g^{-1} f'(ga) \\
 &= \int g^{-1} g f'(a) \\
 &= \int f'(a) \\
 &= \int i \circ f(a) \\
 &= i \circ f(a).
 \end{aligned}$$

Dado que X es completo, $i : X \rightarrow C'(X)$ es un encaje cerrado. Así, en virtud del teorema 1.6.3, tenemos que $i_{\sharp} : X \rightarrow C(G, C'(X))$ es un encaje equivariante cerrado. Luego, por el teorema 2.1.11, existe una retracción $r : C(G, C'(X)) \rightarrow i_{\sharp}(X)$ ($r : U \rightarrow i_{\sharp}(X)$ donde U es una vecindad invariante de $i_{\sharp}(X)$) pues $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$).

Definamos $F' = i^{-1} \circ r \circ F$ (o $F' = i^{-1} \circ r \circ F|_{F^{-1}(U)}$) y veamos que F' es la extensión deseada. En efecto, por lo anterior, F' es una función equivariante. Solo falta ver que F' coincide con f en A . Sea $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
 F'(a) &= i^{-1} \circ r \circ F(a) \\
 &= i^{-1}(r(i(f(a)))) \\
 &= i^{-1}(i(f(a))) \\
 &= f(a).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \in G-AE(\mathcal{P}^G)$ ($X \in G-ANE(\mathcal{P}^G)$).

□

2.5. Extensores de espacios normales.

En esta sección, presentamos las condiciones adicionales necesarias para que un espacio metrizable, que es un extensor de la clase de espacios metrizables, también sea un extensor de la clase de espacios normales.

Teorema 2.5.1. *Sean G un grupo compacto y X un G -espacio metrizable tal que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$). Entonces, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{N}^G)$) si, y solo si, X es un G -espacio topológicamente completo separable.*

Demostración. Sea X un G -espacio metrizable tal que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$). Primero demostremos que si (X, d) es completo y separable, entonces $X \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$.

Sea (X, d) es un G -espacio topológicamente completo separable. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que X es completo y separable con respecto de la métrica d . Así, (X, d) separable y completo implica que existe un encaje cerrado $\eta : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{\aleph_0}$. Luego, por el teorema 1.6.3, η induce un encaje equivariante cerrado $\eta_{\#} : X \hookrightarrow C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0})$.

Ahora, dado que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$), por el teorema 2.1.11, existe una G -retracción $r : C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}) \rightarrow \eta_{\#}(X)$ ($r : U \rightarrow \eta_{\#}(X)$ con U vecindad invariante de $\eta_{\#}(X)$) pues $X \in G\text{-AE}(\mathcal{M}^G)$ (o $X \in G\text{-ANE}(\mathcal{M}^G)$).

Por otro lado, dado que X es un G -retracto de $C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0})$ (retracto de vecindad) y $C(G, \mathbb{R}^{\aleph_0}) \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$, por el lema 2.1.10, tenemos que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{N}^G)$).

Supongamos que $X \in G\text{-AE}(\mathcal{N}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{N}^G)$). Claramente, $X \in G\text{-AE}(\mathcal{P}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{P}^G)$) y $X \in G\text{-AE}(\mathcal{PN}^G)$ ($X \in G\text{-ANE}(\mathcal{PN}^G)$). Así, los teoremas 2.4.2 y 2.3.2, aseguran que X es un G -espacio topológicamente completo separable. $\square$

2.6. Erizo equivariante

En esta sección presentamos el erizo equivariante. Para este fin, primero recordaremos el erizo en la clase de espacios topológicos.

Sea M un conjunto con cardinalidad mayor o igual a $\aleph_0$. Para cada $\mu \in M$, consideremos el producto cartesiano $\{\mu\} \times I$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unitario cerrado. En el conjunto $\bigcup_{\mu \in M} I \times \{\mu\}$, definamos la relación de equivalencia $(x, s_1) \sim (y, s_2)$ si, y solo si, $x = 0 = y$, o $y = x$ y $s_1 = s_2$.

Denotemos $J(M)$ al conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación

dotado de la siguiente métrica:

$$p([(x, s_1)], [(y, s_2)]) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } s_1 = s_2 \\ x + y & \text{si } s_1 \neq s_2. \end{cases}$$

A $J(M)$ le llamaremos **erizo** de M espinas.

Se dice que un espacio topológico Z es **universal** para una clase de espacios topológicos $\mathcal{K}$, si $Z \in \mathcal{K}$ y para cualquier espacio $X \in \mathcal{K}$, existe un encaje $X \hookrightarrow Z$. El siguiente resultado puede ser consultado en [16, Example 4.1.5].

Proposición 2.6.1. *Sea X un espacio topológico de peso ω . Si $\aleph_0 \leq \omega$, entonces existe un encaje $i : X \hookrightarrow J(\omega)^{\aleph_0}$.*

Dado un cardinal infinito τ , denotemos $\mathcal{K}(\tau)$ a la clase de espacios topológicos que tienen peso menor o igual a τ . Si consideramos X un espacio topológico de peso μ con $\aleph_0 \leq \mu \leq \tau$, tenemos por la proposición 2.6.1 que existe un encaje $i : X \hookrightarrow J(\mu)^{\aleph_0}$. Luego, dado que $\mu \leq \tau$, se tiene $h : [J(\mu)]^{\aleph_0} \hookrightarrow [J(\tau)]^{\aleph_0}$ un encaje. Así, al tomar la composición $h \circ i$, obtenemos un encaje de X en $[J(\tau)]^{\aleph_0}$. Por lo tanto, $J(\tau)^{\aleph_0}$ es universal para la clase $\mathcal{K}(\tau)$.

Como hemos observado previamente, nociones que tenemos en la clase de espacios topológicos las extendemos a la clase de G -espacios. En lo que resta de este capítulo describiremos brevemente el erizo en la clase de G -espacios. Este erizo también satisface propiedades similares a las que satisface el erizo en la clase de espacios topológicos. Los resultados que mencionaremos en esta sección pueden ser consultados en [1].

Sean G un grupo localmente compacto y X un G -espacio. Se dice que un subconjunto S de X es **pequeño**, si para cualquier $y \in X$, existe una vecindad U_y de y con la propiedad de que el conjunto $\langle S, U_y \rangle = \{g \in G \mid gS \cap U_y \neq \emptyset\}$ tenga cerradura compacta. Diremos que X es un G -espacio **propio en sentido de Palais** si para cualquier punto $x \in X$, existe una vecindad pequeña V_x de x . Es claro que si G es compacto, cualquier G -espacio es un G -espacio propio. Así, esta definición extiende las acciones de grupos compactos a grupos localmente compactos.

A partir de este momento y hasta que finalice la sección, solo consideraremos G -espacios propios en el sentido de Palais.

Si G es un grupo compacto, en virtud del lema 1.7.4, tenemos que cualquier G -espacio metrizable X admite una métrica invariante que genera su topología. En el caso de que G sea un grupo localmente compacto el saber si cualquier G -espacio metrizable admite una métrica invariante es una pregunta abierta.

Por otro lado, si G es compacto y X es un G -espacio paracompacto, tenemos que X/G es paracompacto por la proposición 1.7.8. En el caso de que G sea

un grupo localmente compacto, existen G -espacios paracompactos donde sus espacios de órbitas no son espacios paracompactos.

Diremos que un G -espacio Z es **universal** para una clase $\mathcal{K}^G$ de G -espacios, si $Z \in \mathcal{K}^G$ y para cada $X \in \mathcal{K}^G$, existe un encaje equivariante $X \hookrightarrow Z$.

Para τ un cardinal infinito, denotaremos:

$\mathcal{M}^G$ a la clase de todos los espacios G -espacios propios metrizables que admiten una métrica invariante.

$\mathcal{P}^G$ a la clase de todos los G -espacios propios paracompactos con espacio de órbitas X/G paracompacto.

$\mathcal{M}^G(\tau)$ a la subclase de G -espacios metrizables que admiten una métrica invariante de peso menor o igual a τ .

Es importante notar que, aunque parece que estamos introduciendo una nueva notación, esta en realidad coincide con la utilizada en la sección anterior y con la que se empleará en la siguiente. Esto se debe a que, si G es un grupo compacto, todo G -espacio metrizable admite una métrica invariante, y si tenemos un G -espacio paracompacto, su espacio de órbitas también será un espacio paracompacto.

Recordamos el cono de un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico. Consideremos en $[0, 1] \times X$ la relación de equivalencia $(t_1, x_1) \sim (t_2, x_2)$ si, y solo si, $t_1 = 0 = t_2$ o, $t_1 = t_2$ y $x_1 = x_2$. Denotaremos $Cono(X)$ al conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación dotado de la topología débil, esto es, un subconjunto $U \subset Cono(X)$ que contiene al vértice θ es abierto si, y solo si, existe $\varepsilon > 0$ con $[0, \varepsilon] \times X \subset p^{-1}(U)$ donde p es la proyección canónica $p : [0, 1] \times X \rightarrow Cono(X)$. Ahora, si U no contiene al vértice, entonces U es abierto en $Cono(X)$ si, y solo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0, 1] \times X$. Dado cualquier punto $(t, x) \in [0, 1] \times X$, denotaremos $tx \in Cono(X)$ la imagen de (t, x) bajo p . A los puntos $0x$, los denotaremos simplemente con θ . Es importante notar que la topología del $Cono(X)$ coincide con la topología cociente inducida por p cuando X es compacto.

Dado que construiremos el erizo equivariante a partir de conos, primero vamos a mencionar los resultados que muestran que el cono es un espacio metrizable.

Proposición 2.6.2. *Sea d una métrica compatible con la topología de X que satisface $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. Entonces,*

1. la fórmula

$$d^*(t_1x_1, t_2x_2) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos(d(x_1, x_2))}$$

define una métrica en $\text{Cono}(X)$,

2. para cualesquiera $t_1x_1, t_2x_2 \in \text{Cono}(X)$ las siguientes condiciones se satisfacen:

$$|t_1 - t_2|^2 + \frac{t_1t_2}{2}(d(x_1, x_2))^2 \leq (d^*(t_1x_1, t_2x_2))^2 \leq |t_1 - t_2|^2 + t_1t_2(d(x_1, x_2))^2,$$

3. d^* genera la topología del $\text{Cono}(X)$,
4. d^* es completa si, y solo si, d lo es.

La proposición anterior es útil, ya que proporciona una manera de construir conos en la clase de G -espacios. Supongamos que X es un G -espacio metrizable. Definamos en $\text{Cono}(X)$ la acción $g(tx) = t(gx)$, donde $g \in G$ y $tx \in \text{Cono}(X)$. Así, si X es un G -espacio metrizable que admite una métrica invariante d con $d \leq 1$, es fácil ver que la métrica inducida d^* en la proposición 2.6.2 convierte a $\text{Cono}(X)$ en un G -espacio con una métrica invariante d^* que genera su topología, y donde $d^* \leq \sqrt{2}$.

Entonces, ya hemos encontrado una forma de construir conos equivariantes. Buscamos construir el erizo equivariante con la propiedad de que sea universal para la clase $\mathcal{M}^G(\tau)$ para τ un cardinal infinito. La siguiente definición menciona cual será el G -espacio del que tomaremos el cono.

Definición 2.6.3. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G . Diremos que H es un **subgrupo grande** de G , si se satisface alguna de las tres condiciones equivalentes:

1. G/H es localmente conexo y de dimensión finita,
2. G/H es una variedad suave,
3. G/H es un metrizable G -ANE($\mathcal{P}^G$).

Proposición 2.6.4. Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo grande de G . Entonces, $\text{Cono}(G/H)$ es un G -AE($\mathcal{P}^G$).

Procedamos a construir el erizo equivariante. Denotemos por $\mathcal{H}$ al conjunto de representantes de cada tipo de órbita de subgrupos grandes. En [2, Theorem 3.1], se prueba que el número de tipo de órbitas de subgrupos grandes no excede el peso del grupo G .

Ahora, en cada espacio cociente G/H_α , donde $H_\alpha \in \mathcal{H}$, seleccionemos una métrica invariante ρ_α tal que $\rho \leq 1$ (esta existe por [19]). Luego, consideremos la métrica invariante ρ_α^* de la proposición 2.6.2 en $\text{Cono}(G/H_\alpha)$.

Por otro lado, para cada $H \in \mathcal{H}$, escojamos A_H un conjunto de cardinalidad τ tal que $A_H \cap A_{H'} = \emptyset$ si $H \neq H'$. Denotemos $A(\mathcal{H}) = \cup_{H \in \mathcal{H}} A_H$.

Para cada $\alpha \in A_H$, definamos $H_\alpha = H$ y consideremos el correspondiente $\text{Cono}(G/H_\alpha)$. Luego, tomemos la unión ajena de los conos:

$$\bigcup_{\alpha \in A(\mathcal{H})} \text{Cono}(G/H_\alpha).$$

Identifiquemos el vertice de cada cono y formemos el conjunto

$$\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau) = \bigvee_{\alpha \in A(\mathcal{H})} \text{Cono}(G/H_\alpha).$$

Ahora, definamos en $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$ la métrica; para cualesquiera dos punto tx y $t'y$ en $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$

$$p(tx, t'y) = \begin{cases} p_\alpha^*(tx, t'y), & \text{si } tx \text{ y } t'y \text{ pertenecen al mismo } \text{Cono}(G/H_\alpha) \\ t + t', & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, es claro que ρ es una métrica invariante. Dotamos a $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$ de esta métrica ρ y de la única acción que hace invariante a cada $\text{Cono}(G/H_\alpha)$ en $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$. Llamaremos a $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$ **el erizo métrico equivariante** de tipo $\mathcal{H}$ y τ espinas.

En la parte 5 de [1], se demuestra que este erizo no depende del conjunto de representantes H , esto es, si H' es otro conjunto de representantes de subgrupos largos, los erizos $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$ y $\mathcal{J}(\mathcal{H}', \tau)$ son G -homeomorfos. Claramente, cuando G es un grupo trivial, el erizo $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$ coincide con el erizo no equivariante.

Sea $*$ el vertice del producto numerable del erizo $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)$. Denotemos por $\mathcal{J}_\infty(G, \tau)$ al conjunto $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)^{\aleph_0} \setminus \{*\}$. En la sección 5 de [1], se muestra que este espacio es un G -espacio propio y que la métrica

$$d((t_i, x_i), (s_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(t_i x_i, s_i y_i) / 2^i, \quad (t_i x_i, s_i y_i) \in \mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)^{\aleph_0}$$

es una métrica invariante que coincide con la topología producto de $\mathcal{J}(\mathcal{H}, \tau)^{\aleph_0}$. Así, $\mathcal{J}_\infty(G, \tau)$ pertenece a la clase $\mathcal{M}^G$ y tiene peso τ (ver sección 5 [1]). Por lo que, $\mathcal{J}_\infty(G, \tau)$ pertenece a la clase $\mathcal{M}^G(\tau)$.

Presentamos el resultado que será utilizado en la siguiente sección (ver [1, Theorem 5.1]).

Teorema 2.6.5. *Sea τ un cardinal infinito mayor o igual al peso de G . Entonces*

1. $\mathcal{J}_\infty(G, \tau)$ es un G -AR($\mathcal{M}^G$)
2. $\mathcal{J}_\infty(G, \tau)$ es universal en la clase $\mathcal{M}^G(\tau)$.

2.7. Teorema de Lisitsa.

Recordemos que un espacio topológico X se dice que es p -**paracompacto**, si existen M un espacio metrizable, C un espacio compacto e $i : X \hookrightarrow M \times C$ un encaje cerrado. Denotaremos $\mathcal{P}'$ a la clase de todos los espacios p -paracompactos.

La finalidad de esta sección es presentar el siguiente resultado (ver [21, Fact 6]), en la clase de G -espacios.

Teorema 2.7.1 (Lisitsa). *Sea X un espacio metrizable. Si $X \in AE(\mathcal{M})$ (o $X \in ANR(\mathcal{M})$), entonces $X \in AE(\mathcal{P}')$ (o $X \in ANE(\mathcal{P}')$).*

Notemos que si X es un espacio metrizable y $\{x_0\}$ es algún espacio topológico unipuntual, el encaje $i : X \hookrightarrow X \times \{x_0\}$ definido por $i(x) = (x, x_0)$ resulta ser un encaje cerrado. Así, cualquier espacio metrizable es un espacio p -paracompacto. En consecuencia, $AE(\mathcal{P}') \subset AE(\mathcal{M})$. El resultado de Lisitsa implica que, si un espacio metrizable es un extensor absoluto para la clase de espacios metrizables, entonces también lo será para la clase de espacios p -paracompactos. Esto significa que para los espacios metrizables, ser un extensor absoluto para la clase de los espacios metrizables es equivalente a serlo para la clase de los espacios p -paracompactos.

En esta sección, demostraremos el teorema de Lisitsa en la clase de G -espacios si G es un grupo compacto con peso $\aleph_0$. Por lo tanto, si G cumple con estas condiciones, tendremos que para los G -espacios metrizables, ser extensor absoluto equivariante para la clase de espacios metrizables es equivalente a serlo para la clase de G -espacios p -paracompactos.

Teorema 2.7.2. *Sea G un grupo compacto de peso $\aleph_0$ y X un G -espacio metrizable. Si $X \in G\text{-}AE(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-}ANE(\mathcal{M}^G)$), entonces $X \in G\text{-}AE(\mathcal{P}'^G)$ ($X \in G\text{-}ANE(\mathcal{P}'^G)$).*

Demostración. Supongamos que G es un grupo compacto de peso $\aleph_0$.

Sean $X \in \mathcal{M}^G$, $P \in \mathcal{P}'^G$, A un subconjunto cerrado invariante de P y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Supongamos que X tiene peso mayor o igual a $\aleph_0$ (en el caso que X tenga peso finito, X es un espacio discreto y esto hace inmediato el enunciado).

Por el teorema 2.6.5, existe un encaje equivariante

$$i' : X \rightarrow \mathcal{J}_\infty(G, \omega(X))$$

. Ahora, como $\mathcal{J}_\infty(G, \omega(X))$ es un subespacio de $\mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$, obtenemos un encaje $i : X \rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$.

Por otro lado, dado que $\mathcal{J}(G, \omega(X))$ es un G - $AE(\mathcal{P}^G)$ (ver [1, Proposition 4.2]), obtenemos que $\mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$ es un G - $AE(\mathcal{P}^G)$.

Consideremos la función equivariante $i \circ f : A \rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$. Dado que P es paracompacto y A es un subconjunto cerrado de P , existe una extensión equivariante $f' : P \rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$ de $i \circ f$.

Por otro lado, la compacidad de G asegura que la proyección orbital $p : P \rightarrow P/G$ es una función perfecta, y dado que la paracompacidad se preserva bajo funciones perfectas, obtenemos que P/G es paracompacto. Así, existe una función perfecta $h : P/G \rightarrow M$ con M algún espacio métrico. Como la composición de funciones perfectas es perfecta, obtenemos que $h \circ p$ es una función perfecta. Claramente, $h \circ p$ es una función invariante, por lo que si dotamos a M de la acción trivial, la función $h \circ p$ es equivariante. Sea $g = h \circ p$. Ahora, como g es perfecta, tenemos que la función diagonal

$$\begin{aligned} f' \triangle g : P &\rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M \\ x &\rightarrow (f'(x), g(x)) \end{aligned}$$

es una función equivariante perfecta (considerando en $\mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M$ la acción diagonal). Por lo tanto, $(f' \triangle g)(A)$ es un subconjunto cerrado invariante de $\mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M$.

Por otro lado, consideremos la proyección $\pi' : \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M \rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$ y $K = (f' \triangle g)(A)$. Dado que $f'(A) = (i \circ f)(A) \subset i(X)$, la restricción $\pi'|_K : K \rightarrow \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0}$, induce una función equivariante $\pi : K \rightarrow X$ (a saber $\pi = (i^{-1} \circ \pi'|_{i(X) \times M})|_K$).

Sea $X \in G\text{-}ANE(\mathcal{M}^G)$ ($X \in G\text{-}AE(\mathcal{M}^G)$). Entonces, π admite una extensión equivariante $\Pi : V \rightarrow X$ ($\Pi : \mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M \rightarrow X$), donde V es una vecindad abierta invariante de K en el G -espacio metrizable $\mathcal{J}(G, \omega(X))^{\aleph_0} \times M$. Tenemos,

$$A \subset (f' \triangle g)^{-1}(K) \subset (f' \triangle g)^{-1}(V).$$

Así, $(f' \triangle g)^{-1}(V)$ es una vecindad invariante de A en P . Sea $H = (f' \triangle g)|_{(f' \triangle g)^{-1}(V)}$ y definamos $F = \Pi \circ H$ ($F = \Pi \circ (f' \triangle g)$).

Afirmamos que F es una extensión equivariante de f . En efecto, la composición de funciones equivariantes es equivariante, por lo que basta checar que F es una extensión de f . Sea $a \in A$. Entonces, $F(a) = \Pi \circ H(a) = (f'(a), g(a)) = (i \circ f(a), h \circ p(a)) \in K$. Así, $\Pi(i \circ f(a), g(a)) = f(a)$.

Concluyendo que $X \in G\text{-}ANE(\mathcal{P}^G)$ ($X \in G\text{-}AE(\mathcal{P}^G)$). □

Capítulo 3

Operadores de extensión simultánea

J. Dugundji y E. Michael desarrollaron un operador de extensión simultánea en la clase espacios topológicos. Este capítulo tiene como objetivo presentar un análogo de dicho operador en la clase de G -espacios, donde G es un grupo compacto de Lie.

Primero enunciemos los resultados de Dugundji y Michael.

Teorema 3.0.1. *Sean Z un espacio metrizable, A un subconjunto cerrado de Z , W un subconjunto convexo de un espacio lineal localmente convexo V y $f : A \rightarrow W$ una función continua. Entonces, existe $F : Z \rightarrow W$ una extensión continua de f que satisface $Im(F) \subset Conv(Im(f))$.*

Aquí, $Im(f)$ denota la imagen de f y $Conv(Im(f))$ denota la envoltura convexa de $Im(f)$. En [26, Theorem 7.1], E. Michael mostró que si A es un subconjunto cerrado de un espacio metrizable Z y V es un espacio lineal localmente convexo, la asignación de mandar una función continua $f \in C(A, V)$ a su extensión $F \in C(Z, V)$ construida por J. Dugundji, es un encaje lineal topológico si consideramos en $C(A, V)$ y $C(Z, V)$ la topología compacto abierta. Al juntar ambos resultados, obtenemos:

Teorema 3.0.2. *Sean A un subconjunto cerrado de un espacio métrico Z y V un espacio lineal localmente convexo. Entonces, existe $L : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ un operador lineal tal que para cada $f \in C(A, V)$,*

1. $L(f)$ es una extensión de f ,
2. $L(f) \subset Conv(Im(f))$,
3. L es un encaje topológico lineal (considerando en $C(Z, V)$ y $C(A, V)$ la topología compacto abierta).

Este capítulo surge al preguntarnos si estos resultados de Michael y Dugundji pueden ser generalizados a la clase de G -espacios. Desafortunadamente, en este caso, la respuesta es negativa. Esto se debe a que en la clase de los G -espacios podemos construir una función equivariante $f : A \rightarrow V$ que no puede ser extendida a una función equivariante $F : Z \rightarrow V$ que cumpla con la propiedad $\text{Im}(F) \subset \text{Conv}(\text{Im}(f))$.

Antes de presentar un ejemplo de una función que cumpla lo anterior, definamos el siguiente G -espacio.

Sea X un G -espacio. Denotaremos por $X' = X \cup \{*\}$ a la unión ajena de X y un punto $*$, equipado de la topología débil. Claramente G actúa de manera continua en X' de la siguiente forma: $g \cdot x = gx$ para todo $g \in G, x \in X$ y $g \cdot * = *$ para todo $g \in G$. Es evidente que X es un subconjunto cerrado invariante del G -espacio X' y $*$ es un punto G -fijo. Ahora, si (X, d) es un G -espacio metrizable, es claro que X' resulta un G -espacio metrizable con la métrica

1. $d'(x, y) = d(x, y)$ si $x, y \in X$,
2. $d'(x, *) = d'(*, x) = 1$ si $x \in X$,
3. $d'(*, *) = 0$.

Este espacio servirá para dar el ejemplo de por qué los teoremas de Michael y Dugundji no son válidos en la clase de G -espacios.

Ejemplo 3.0.3. Sea $G = \mathbb{S}^1$. Consideremos $C(G, \mathbb{C})$ el espacio de Banach de funciones continuas de G en $\mathbb{C}$. Dotemos a $C(G, \mathbb{C})$ de la acción definida en el teorema 1.6.1. Esta acción se define como $g \cdot f(x) = f(xg)$, para cada $f \in C(G, \mathbb{C})$ y $g, x \in G$.

Afirmamos que el conjunto de puntos G -fijos bajo esta acción es el conjunto de las funciones constantes. Para mostrar esto, sea f un punto G -fijo de $C(G, \mathbb{C})$. Esto implica que $g \cdot f(x) = f(xg) = f(x)$ para toda $g, x \in G$. Al tomar $g = x^{-1}$, para cualquier $x \in G$, obtenemos $f(1) = f(x)$. Por lo tanto, f es una función constante.

Ahora, sea $f(z) = e^z$ la función exponencial compleja. Definamos

$$W = \text{Conv}(G(f)).$$

Vamos a demostrar que W no tiene puntos G -fijos. Como consecuencia de lo anterior, bastará probar que W no contiene funciones constantes. Procedamos por contradicción, esto es, supongamos que existe una función constante h que pertenece al conjunto W . Dado que $h \in W = \text{Conv}(G(f))$, podemos expresar a h como

$$h(z) = \sum_{i=1}^n t_i e^{zg_i},$$

donde $g_i \in G$, $0 \leq t_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Es claro que $g_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, y sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $g_i \neq g_j$, si $1 \leq i < j \leq n$.

Por otro lado, dado que h es una función constante, todas sus derivadas son la función constante cero. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} t_1 g_1 e^{zg_1} + t_2 g_2 e^{zg_2} + \cdots + t_n g_n e^{zg_n} &= 0 \\ t_1 g_1^2 e^{zg_1} + t_2 g_2^2 e^{zg_2} + \cdots + t_n g_n^2 e^{zg_n} &= 0 \\ \vdots & \\ t_1 g_1^n e^{zg_1} + t_2 g_2^n e^{zg_2} + \cdots + t_n g_n^n e^{zg_n} &= 0. \end{aligned}$$

Así, dado que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, podemos concluir que el vector $(t_1 e^{zg_1}, t_2 e^{zg_2}, \dots, t_n e^{zg_n})$ es una solución no trivial del sistema:

$$\begin{cases} g_1 x_1 + g_2 x_2 + \cdots + g_n x_n = 0 \\ g_1^2 x_1 + g_2^2 x_2 + \cdots + g_n^2 x_n = 0 \\ \vdots \\ g_1^n x_1 + g_2^n x_2 + \cdots + g_n^n x_n = 0. \end{cases}$$

Dado que la solución $(t_1 e^{zg_1}, t_2 e^{zg_2}, \dots, t_n e^{zg_n})$ es no trivial, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} g_1 & g_1^2 & \cdots & g_1^n \\ g_2 & g_2^2 & \cdots & g_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & g_n^2 & \cdots & g_n^n \end{pmatrix}$$

debe tener determinante cero.

Por otro lado, es claro que la matriz A tiene el mismo determinante que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & g_1 & g_1^2 & \cdots & g_1^n \\ 1 & g_2 & g_2^2 & \cdots & g_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & g_n & g_n^2 & \cdots & g_n^n \end{pmatrix}.$$

Pero B es una matriz de Vandermonde (ver [18, Ch. 0, 0.9.11]), y se sabe que el determinante de una matriz de Vandermonde es:

$$\det B = \left(\prod_{i=1}^n g_i \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (g_j - g_i) \right).$$

Dado que $g_i \neq g_j$, para $1 \leq i < j \leq n$, tenemos que $\det B \neq 0$ y esto es una contradicción ya que $0 = \det A = \det B$. Esta contradicción surge de suponer que W contiene funciones constantes.

Mostremos que W es un subconjunto invariante de $C(G, \mathbb{C})$. Sean $g \in G$ y $h \in W$. Dado que $h \in W = \text{Conv}(G(f))$, tenemos que $h(z) = \sum_{i=1}^n t_i e^{zg_i}$, donde $g_i \in G$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Entonces,

$$g \cdot h(z) = h(zg) = \sum_{i=1}^n t_i e^{(zg_i)g} = \sum_{i=1}^n t_i e^{z(g_i g)}.$$

Como $g_i g \in G$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, tenemos que $g \cdot h \in \text{Conv}(G(f)) = W$. Por lo tanto, W es un subconjunto invariante de $C(G, \mathbb{C})$ y esto implica que W es un G -espacio.

Sea W' el G -espacio definido antes de este ejemplo. Recordemos que W' es un G -espacio que contiene a W como un subconjunto cerrado invariante, y $*$ es un punto G -fijo de W' . Sea $i : W \rightarrow W$ la función identidad. Afirmamos que i es una función equivariante que no puede ser extendida a una función equivariante $i' : W' \rightarrow W$. En efecto, si suponemos que i' es una extensión equivariante de i , por la observación 1.2.9, tenemos que $i'(*)$ es un punto G -fijo de W y esto no puede pasar ya que mostramos que W no tiene puntos G -fijos.

En términos de extensores, mostramos que W es un conjunto convexo de un espacio lineal localmente convexo que no es un G -AE($\mathcal{M}^G$).

El ejemplo anterior muestra que el teorema de Dugundji no es válido en la clase de G -espacios. Sin embargo, existe una aproximación que fue dada por S. Antonyan [3].

Teorema 3.0.4. Sean G un grupo compacto de Lie, A un subconjunto cerrado invariante del G -espacio metrizable Z , W un subconjunto convexo invariante del G -espacio lineal localmente convexo V y $f : A \rightarrow W$ una función equivariante. Entonces, existen U una vecindad invariante de A en Z y $F : U \rightarrow W$ una extensión equivariante de f que cumple $\text{Im}(F) \subset \text{Conv}(\text{Im}(f))$.

En el ejemplo 3.0.3, se mostró que la identidad $i : W \rightarrow W$ es una función equivariante que no puede ser extendida a una función equivariante $i' : W' \rightarrow W$. Observemos que el teorema anterior asegura que i puede extenderse a una función $i' : U \rightarrow W$, donde U es una vecindad invariante de W en W' . En este caso, W es la vecindad invariante garantizada por el teorema anterior.

Dado que en la clase de G -espacios no podemos garantizar la condición (2) del teorema 3.0.2, en este capítulo desarrollaremos aproximaciones a estos resultados de Michael y Dugundji.

Notemos que en la clase de G -espacios ya no podemos asegurar la condición de que los subconjuntos convexos invariantes de los G -espacios lineales localmente convexos sean G -extensores absolutos para la clase de espacios metrizables. Sin embargo, mostraremos que los G -espacios localmente convexos sí son G -extensores absolutos para la clase de G -espacios metrizables. Para este propósito, presentaremos algunos resultados y su versión equivariante.

Proposición 3.0.5. Sea X un espacio metrizable. $X \in AE(\mathcal{M})$ si, y solo si, X es contraible y $X \in ANE(\mathcal{M})$.

Definición 3.0.6. Sean X, Y dos espacios topológicos, y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos funciones equivariantes. Diremos que f_1 y f_2 son **G -homotópicas** si existe $H : X \times I \rightarrow Y$ una función equivariante (considerando en $I = [0, 1]$ la acción trivial) que cumple $H(x, 0) = f_1(x)$ y $H(x, 1) = f_2(x)$ para toda $x \in X$. En este caso, diremos que H es una **G -homotopía** entre f_1 y f_2 .

Definición 3.0.7. Se dice que un G -espacio X es **G -contraible** si la función identidad es homotópica a alguna función constante de X en X .

Es claro que si G es trivial, la definición de G -contraibilidad coincide con la de contraibilidad en la clase de espacios topológicos. Por lo tanto, el teorema 3.0.9 generaliza al teorema 3.0.5. A continuación, procedemos a demostrar este resultado.

Proposición 3.0.8. Sea X un G -espacio metrizable. Si $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$, entonces X es un G -espacio G -contraible.

Demostración. Sea X un G -espacio metrizable tal que $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$. Dado que $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$, por el teorema 2.1.11, tenemos que $X \in G-AR(\mathcal{M}^G)$. Luego, consideremos X' el G -espacio definido antes del ejemplo 3.0.3. Recordemos que X es un subconjunto cerrado invariante del G -espacio metrizable X' y $*$ es un punto G -fijo de X' . Como $X \in G-AR(\mathcal{M}^G)$, tenemos que existe una retracción equivariante $r : X' \rightarrow X$. Ahora, por la observación 1.2.9, $r(*) = x_0$ es un punto G -fijo de X .

Por otro lado, dado X es un G -espacio metrizable, $X \times [0, 1]$ es un G -espacio metrizable considerando en $[0, 1]$ la acción trivial. Sea $A = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$. Es fácil ver que A es un subconjunto cerrado invariante de $X \times [0, 1]$. Definamos $H' : A \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$H'(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 1 \\ x_0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Dado que $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ son cerrados ajenos y la restricción de H' a cada uno de estos cerrados es continua, tenemos que H' es una función continua.

Veamos que H' es una función equivariante. Sean $(x, t) \in A$ y $g \in G$. Si $t = 1$, tenemos que $H'(gx, 1) = gx = gH'(x, 1)$. Luego, si $t = 0$, obtenemos que $H'(gx, 0) = gx_0 = x_0 = gH'(x, 0)$. Así, H' es una función equivariante.

Dado que X es $G-AE(\mathcal{M}^G)$ y A es un subconjunto cerrado invariante del G -espacio metrizable $X \times [0, 1]$, existe una extensión equivariante $H : X \times I \rightarrow X$ de H' . De la definición de H' , se sigue que H es una homotopía entre la función constante x_0 y la identidad. Así, X es G -contraible. $\square$

Es importante notar que la proposición anterior se puede generalizar a clases más generales de G -espacios, esto es, la proposición anterior es válida para clases de G -espacios $\mathcal{K}^G$ que satisfagan; $X \times [0, 1] \in \mathcal{K}$ y $X' \in \mathcal{K}$ siempre que $X \in \mathcal{K}^G$.

Presentamos la versión equivariante de la proposición 3.0.5.

Teorema 3.0.9. *Sea X un G -espacio metrizable. $X \in G-AE(\mathcal{M}^G)$ si, y solo si, $X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$ y X es un G -espacio G -contraible.*

Demostración. En la proposición 3.0.8, se demostró que si X es un G -extensor absoluto para la clase de G -espacios metrizables, X es un G -espacio contraible. Por lo tanto, para tener el teorema completo, basta con mostrar que si X es un G -espacio contraible que, además, es un extensor absoluto de vecindad para la clase de G -espacios metrizables, entonces X es un G -extensor absoluto para dicha clase.

Sean X un G -espacio G -contraible tal que $X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$, A un subconjunto cerrado invariante de un G -espacio metrizable Y y $f : A \rightarrow X$ una función equivariante. Dado que $X \in G-ANE(\mathcal{M}^G)$, tenemos que existe una vecindad invariante O de A en Y y una extensión equivariante $f' : O \rightarrow X$ de f . Luego, la G -contraibilidad de X implica que existe una homotopía equivariante $H : X \times I \rightarrow X$ que satisface $H(x, 0) = x_0$, $H(x, 1) = x$ para cada $x \in X$.

Por otro lado, la normalidad de Y implica que existe un abierto U' de Y tal que $A \subset U' \subset \overline{U'} \subset O$. Luego, dado que G es compacto, por el corolario 1.4.3, tenemos que existe un abierto invariante U de Y que contiene a A y cumple que $U \subset U'$. Así, por el corolario 1.2.12, tenemos que $\overline{U}$ es invariante.

Ahora, dado que G es compacto, X es normal y los conjuntos A y $X \setminus U$ son ajenos, tenemos que existe una función invariante $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ que satisface $\varphi(x) = 1$ para $x \in A$ y $\varphi(x) = 0$ para $x \in X \setminus U$. Definamos $F : Y \rightarrow X$

$$F(x) = \begin{cases} H(f'(x), \varphi(x)) & \text{si } x \in \overline{U} \\ x_0 & \text{si } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Claramente, F está bien definida y es continua restringida a los conjuntos $\overline{U}$ y $X \setminus U$, por lo que solo hay que analizar su comportamiento en la intersección de estos conjuntos. Sea $x \in \overline{U} \cap X \setminus U$. Por un lado tenemos $F|_{X \setminus U}(x) = x_0$. Ahora, por el otro lado, $x \in X \setminus U$ implica que $\varphi(x) = 0$, y así, $H(f'(x), 0) = x_0$. Por lo que el lema del pegado asegura que F es una función continua.

La equivarianza de F se sigue de que H es equivariante y x_0 es un punto G -fijo de X .

Solo resta probar que F es una extensión de f . En efecto, sea $a \in A$, entonces $\varphi(a) = 1$ y $f'(a) = f(a)$, así, $F(a) = H(f(a), 1) = f(a)$. Por lo tanto, F es una

extensión equivariante de f y como f fue arbitraria, concluimos que X es un $G\text{-}AE(\mathcal{M}^G)$. $\square$

Supongamos que W es un subconjunto convexo invariante de un G -espacio lineal localmente convexo V , A un subconjunto cerrado invariante de un G -espacio metrizable Z , y $f : A \rightarrow W$ una función equivariante. Como ya vimos antes, no podemos garantizar que exista una extensión equivariante $F : Z \rightarrow W$ de $f : A \rightarrow W$ que satisfaga $Im(F) \subset Conv(Im(f))$ (ver ejemplo 3.0.3). Pero no todo está perdido, hagamos un análisis desde otra perspectiva. El teorema 3.0.4, asegura que $V \in G\text{-}ANE(\mathcal{M}^G)$ y claramente, cualquier G -espacio lineal es G -contraíble, entonces por el teorema 3.0.9, tenemos que V es un $G\text{-}AE(\mathcal{M}^G)$. Así, si consideramos a $f : A \rightarrow W$ definida en V como contradominio, f admite una extensión equivariante $F : Z \rightarrow V$.

Notemos que en el ejemplo 3.0.3, si definimos $i' : W' \rightarrow V$, $i(x) = x$ si $x \in W$ y $i'(*) = 0$ con 0 el punto G -fijo de V , obtenemos una extensión equivariante de i . Notemos que no se cumple que $Im(i') \subset Conv(Im(i))$ pero sí que $Im(i') \subset Conv(Im(i) \cup \{0\})$.

En el proceso de desarrollar nuestro análogo equivariante de los resultados de J. Dugundji y E. Michael, veremos que la condición $Im(i') \subset Conv(Im(i) \cup 0)$ no fue una coincidencia, esto es, demostraremos que para cualquier función $f \in C(A, V)$, existirá $F \in C(A, V)$ una extensión de f que satisfaga $Im(F) \subset Conv(Im(f) \cup \{0\})$. Encontrando un operador de extensión simultanea

$$\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V).$$

Dado que estamos trabajando en la clase de G -espacios, dotaremos a los espacios de funciones $C(A, V)$ y $C(Z, V)$ de una acción. A continuación presentamos dicha acción.

Proposición 3.0.10. *Sean X un G -espacio y V un G -espacio lineal. Entonces*

$$\alpha : G \times C(X, V) \rightarrow C(X, V)$$

$$\alpha(g, f) = gf; \quad (gf)(x) = gf(g^{-1}x) \quad \forall x \in X$$

es una acción lineal de G en $C(X, V)$.

Demostración. Primero veamos que α es una función continua. En efecto, sean $g_0 \in G$, $f_0 \in C(X, V)$ y $\Gamma_{K,U}$ un subbásico de $C(X, V)$ tal que $g_0 f_0 \in \Gamma_{K,U}$. Para cada $k \in K$, tenemos que $g_0 f_0(k) = g_0 f_0(g_0^{-1}k) \in U$. Luego, dado que V es un G -espacio y G es localmente compacto, existen una vecindad compacta $O_k \subset G$ de g_0 y una vecindad abierta $W_k \subset V$ de $f_0(g_0^{-1}k)$ tales que $O_k W_k \subset U$. La continuidad de f_0 , la compacidad local de G y la continuidad de la acción de G en

X asegura que podemos escoger una vecindad abierta $S_k \subset X$ de k y una vecindad compacta $P_k \subset G$ de g_0 tales que $f_0(P_k^{-1}S_k) \subset W_k$. Definamos $Q_k = O_k \cap P_k$. Claramente, Q_k es una vecindad compacta de g_0 . Por construcción, obtenemos

$$Q_k W_k \subset U \quad f_0(Q_k^{-1}S_k) \subset W_k. \quad (3.0.1)$$

Dado que K es compacto y $\{S_k\}_{k \in K}$ es una cubierta abierta de K , tenemos que existen $S_{k_1}, \dots, S_{k_n}$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n S_{k_i}$. Definamos $W = \bigcup_{i=1}^n W_{k_i}$ y $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_{k_i}$. Claramente, Q^{-1} es compacto, y como K es compacto en X , obtenemos que $Q^{-1}K$ es un subconjunto compacto de X .

Afirmamos que $\Gamma_{Q^{-1}K, W}$ es una vecindad subbásica de f_0 en $C(X, V)$. En efecto, sea $q^{-1}k \in Q^{-1}K$. Existe S_{k_i} tal que $k \in S_{k_i}$. Luego, dado que $q^{-1} \in Q_{k_i}^{-1}$, por (3.0.1), $f_0(q^{-1}k) \in W_{k_i} \subset W$. Así, $f_0 \in \Gamma_{Q^{-1}K, W}$. Por lo tanto, se tiene que $(g_0, f_0) \in Q \times \Gamma_{Q^{-1}K, W}$.

Procedamos a mostrar que $\alpha(Q \times \Gamma_{Q^{-1}K, W}) \subset \Gamma_{K, U}$. Sean $g \in Q$ y $f \in \Gamma_{Q^{-1}K, W}$. Para cada $k \in K$, tenemos que $g^{-1}k \in Q^{-1}K$ y $f(g^{-1}k) \in W = \bigcup_{i=1}^n W_{k_i}$. Así, existe k_i tal que $f(g^{-1}k) \in W_{k_i}$. Luego, como $g \in Q_{k_i}$, por (3.0.1), tenemos $gf(g^{-1}k) \in Q_{k_i}W_{k_i} \subset U$. Por lo tanto, $(gf)(k) = gf(g^{-1}k) \in U$ y consecuentemente, $gf \in \Gamma_{K, U}$.

Veamos que α es una acción. Sean $g_1, g_2 \in G$, $f \in C(X, V)$ y $x \in X$. Para facilitar la escritura, escribiremos $\cdot$ para denotar a la acción α . Tenemos

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot f)(x) &= g_1((g_2 \cdot f)(g_1^{-1}x)) \\ &= g_1(g_2 f(g_2^{-1}g_1^{-1}x)) \\ &= g_1 g_2 \cdot f(x). \end{aligned}$$

Finalizamos la demostración mostrando que α es lineal. Sean $g \in G$, $h, f \in C(X, L)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} g \cdot (\lambda f + h)(x) &= g((\lambda f + h)(g^{-1}x)) \\ &= g(\lambda f(g^{-1}x) + h(g^{-1}x)) \\ &= g\lambda f(g^{-1}x) + gh(g^{-1}x) \quad V \text{ es } G\text{-espacio lineal.} \\ &= \lambda gf(g^{-1}x) + gh(g^{-1}x) \quad V \text{ es } G\text{-espacio lineal.} \\ &= \lambda g \cdot f(x) + g \cdot h(x). \end{aligned}$$

Así, α es una acción lineal y como consecuencia, $C(X, V)$ es un G -espacio lineal. $\square$

Teorema 3.0.11. *Sean G un grupo compacto de Lie, Z un G -espacio metrizable, A un subconjunto cerrado invariante de Z , y V un G -espacio lineal localmente convexo. Entonces, existen una vecindad X de A en Z y un operador lineal equivariante*

$$\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$$

tal que para cada $f \in C(A, V)$,

1. $\Lambda(f)$ es una extensión de f ,
2. $\text{Im}\Lambda(f) \subset \text{Conv}(\text{Im}f \cup \{0\})$ y $\text{Im}(\Lambda(f)|_X) \subset \text{Conv}(\text{Im}f)$,
3. Λ es un encaje topológico lineal equivariante considerando en $C(A, V)$ y $C(Z, V)$ la topología compacto abierta y la acción de la proposición anterior.

Demostración. Supongamos que Z es un G -espacio metrizable y A es un subconjunto cerrado invariante de Z . La compacidad de G garantiza la existencia de una métrica invariante ρ que genera la topología de Z (ver lema 1.7.4). Definamos $U = Z \setminus A$. Consideremos dos casos.

Caso 1. Supongamos que A es un subconjunto abierto de Z , esto es, U es abierto y cerrado en Z . Dada cualquier función $f \in C(A, V)$, definamos $F : Z \rightarrow V$ de la siguiente manera: $F|_A = f$ y $F(z) = 0$ para todo $z \in U$. Claramente, F es una función continua ya que su dominio es unión de conjuntos cerrados ajenos y es continua al restringirla a cada uno de estos. Definamos $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$, $\Lambda(f) = F$ y $X = A$. Es evidente que Λ satisface las condiciones 1, 2, y 3 del teorema.

Caso 2. Supongamos que A no es un subconjunto abierto de Z , esto es, A tiene al menos un punto frontera.

Dado que A es un conjunto cerrado invariante, $U = Z/A$ es un conjunto abierto invariante. Luego, por teorema 1.9.11, existe una cubierta G -canónica $\{G(S_\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ de U con respecto de Z . Ahora, para cada índice $\mu \in \mathcal{M}$, definamos

$$A_\mu = \{a \in A \mid ha = a \text{ para todo } h \in H_\mu\}.$$

En virtud de [[20], Proposición 2.8], tenemos que cada A_μ es un subconjunto cerrado de Z .

Sean

$$\mathcal{M}_1 = \{\mu \in \mathcal{M} \mid A_\mu \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1.$$

Veamos que $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$. En efecto, dado que A no es abierto, existe $a \in A$ tal que a es un punto frontera. Por lo tanto, para $V_a = Z$, existe W_a una vecindad abierta de a que satisface (4) de la definición 1.9.10. Dado que a es un punto frontera y cada $G(S_\mu)$ es abierto en Z , podemos elegir $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $W_a \cap gS_\mu \neq \emptyset$. Así, por la propiedad 4 de la definición 1.9.10, existe $h \in G$ tal que $ha \in V_a$ y $H_\mu \subset g^{-1}G_{ha}g$. Luego, dado que A es invariante, tenemos que $g^{-1}ha \in A$. Ahora, como $g^{-1}G_{ha}g = G_{g^{-1}ha}$ (ver observación 1.2.7), tenemos que $H_\mu \subset G_{g^{-1}ha}$ y

esto implica que $g^{-1}ha \in A_\mu$. Consecuentemente, $\mu \in \mathcal{M}_1$ y por lo tanto, $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$.

Definamos

$$W = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_1} G(\overline{S_\mu}) \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_2} G(S_\mu).$$

De la definición de B , se sigue que B es un conjunto invariante (posiblemente vacío). Definamos $X = Z/B$. Evidentemente, X es un subconjunto cerrado invariante de Z que contiene a A .

Veamos que X es una vecindad de A . Sea $a \in A$. Tenemos que a es un punto interior o un punto frontera. Supongamos que a un punto interior. Entonces, $a \in \text{int}(A) \subset A \subset X$. Ahora, si a es un punto frontera de A , tomemos W_a la vecindad mencionada anteriormente. Afirmamos que $W_a \subset X$. En efecto, sea $x \in W_a$. Si $x \in A$, es inmediato. Ahora, si $x \notin A$, existen $g \in G$ y $\mu \in \mathcal{M}$ tales que $x \in gS_\mu$. Así, $x \in gS_\mu \cap W_a \neq \emptyset$ y procediendo como arriba, tenemos que $\mu \in \mathcal{M}_1$. Por lo tanto, $x \in G(S_\mu)$ para cada $\mu \in \mathcal{M}_2$, en otras palabras, $x \in B$.

Denotemos $E = A \cup W$. De la definición de E , se sigue que $X \subset E$ y consecuentemente, E es una vecindad de A .

Afirmamos que E es cerrado en Z . En efecto, se tiene que $\{G(\overline{S_\mu}) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ es una cubierta localmente finita de U . La unión de cualquier subcolección de $\{G(S_\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ es cerrado en U . Así, W es cerrado en U , por lo que existe C cerrado de Z tal que $C \cap U = C \cap (Z/A) = W$. Una cuenta sencilla muestra que que $A \cup W = A \cup (C \cap (Z \setminus A)) = A \cup C$. Por lo tanto, E es un subconjunto cerrado invariante de Z .

Por otro lado, la proposición 1.9.12, garantiza que para cada índice μ , existe una única función equivariante $\tilde{g}_\mu : G(S_\mu) \rightarrow G/H_\mu$ tal que si $z \in gS_\mu$, entonces $g \in \tilde{g}_\mu(z)$. Consideremos la función $\phi_\mu : G/H_\mu \times A_\mu \rightarrow A$ del teorema 1.9.13. Esta función, ϕ_μ , asocia a cada par $(gH_\mu, a) \in G/H_\mu \times A$, el punto $ga \in A$.

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_1$, seleccionemos un punto $x_\mu \in S_\mu$ y asociémoslo con un punto $a_\mu \in A_\mu$ que satisfaga la condición:

$$\rho(x_\mu, a_\mu) < 2\rho(x_\mu, A_\mu). \quad (3.0.2)$$

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de construir, a partir de una función continua $f : A \rightarrow V$, su extensión continua $F : Z \rightarrow V$. Sea $f : A \rightarrow V$ una función continua.

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_1$, definamos $\zeta_\mu(x) = f(\tilde{g}_\mu(x)a_\mu)$, para cada $x \in G(S_\mu)$. La continuidad de ζ_μ se sigue de que f y $\tilde{g}_\mu$ son funciones continuas. Ahora, si $\mu \in \mathcal{M}_2$, definamos $\zeta_\mu(x) = 0$ para cada $x \in G(S_\mu)$, donde $0 \in V$ es el origen de V y es un punto G -fijo. La función ζ_μ es continua debido a que es una función constante.

Por otro lado, en virtud del lema 1.7.7, existe una partición de la unidad $\{\varphi_\mu | \mu \in \mathcal{M}\}$ que consiste de funciones invariantes $\varphi_\mu : U \rightarrow [0, 1]$, $\mu \in \mathcal{M}$, que esta subordinada a la cubierta $\{G(S_\mu) | \mu \in \mathcal{M}\}$. En otras palabras, $\varphi_\mu^{-1}((0, 1]) \subset G(S_\mu)$ para cada $\mu \in \mathcal{M}$.

Sea $x \in U = Z \setminus A$. Dado que $\{G(S_\mu)\}$ es una familia localmente finita, x pertenece solamente a una cantidad finita de elementos de $\{G(S_\mu)\}$, digamos $G(S_{\mu_1}), \dots, G(S_{\mu_n})$. Entonces, $\varphi_\mu(x) = 0$ para todo $\mu \notin \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Por lo tanto,

$$\sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(x) \zeta_\mu(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{\mu_i}(x) \zeta_{\mu_i}(x)$$

esta bien definida para cualquier $x \in U$. Definamos $F : Z \rightarrow V$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(x) f(\tilde{g}_\mu(x) a_\mu), & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

De la definición de F , obtenemos que $F|_A = f$. Así, F extiende a f . Por otro lado, si $z \in U$, tenemos que $\zeta(z) = 0$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_2$. Así,

$$\text{Im } F \subset \text{Conv}(\text{Im } f \cup \{0\}).$$

Notemos que si $x \in X \setminus A$, existen $\mu_1, \dots, \mu_k$ índices tales que $x \in \bigcap_{i=1}^k G(S_{\mu_i})$. Entonces,

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_{\mu_i}(x) f(\tilde{g}_{\mu_i}(x) a_{\mu_i}), \quad \text{así,} \quad \text{Im}(F|_{X \setminus A}) \subset \text{Conv}(\text{Im } f).$$

Consecuentemente, $\text{Im}(F|_X) \subset \text{Conv}(\text{Im } f)$.

Mostremos que F es una función continua. Procederemos primero a demostrar que F es continua en A y luego finalizaremos demostrando que F es continua en U .

Sean $a \in A$ y O una vecindad arbitraria de $F(a) = f(a)$. Dado que V es un espacio vectorial topológico localmente convexo, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que O es una vecindad convexa de $f(a)$. La continuidad de f asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(A \cap B_\varepsilon(a)) \subset O$. Como $\{G(S_\mu) | \mu \in \mathcal{M}\}$ es una cubierta G -canónica de U , para $V_a = B_\varepsilon(a)$, existe una vecindad W_a que satisface la condición (4) de la definición 1.9.10. Afirmamos que $F(W_a) \subset O$. En efecto, si $x \in A \cap W_a \subset A \cap B_\varepsilon(a)$, tenemos $F(x) = f(x) \in O$. Ahora, si $x \in U \cap W_a$, existen $\mu_1, \dots, \mu_n$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n G(S_{\mu_i})$ y $\varphi_\mu(x) = 0$ para todo $\mu \notin \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Así,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{\mu_i}(x) f(\tilde{g}_{\mu_i}(x) a_{\mu_i}).$$

Sean $\mu \in \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ y $g_\mu \in \tilde{g}_\mu(x)$. Dado que $\{G(S_\mu) | \mu \in \mathcal{M}\}$ es una cubierta G -canónica y $x \in W_a \cap g_\mu S_\mu \neq \emptyset$, tenemos que $g_\mu S_\mu \subset V_a$. Así, $g_\mu x_\mu \in V_a = B_\varepsilon(a)$. De la invarianza de ρ , se sigue que $\rho(g_\mu x_\mu, g_\mu a_\mu) = \rho(x_\mu, a_\mu)$. Entonces,

$$\rho(a, g_\mu a_\mu) \leq \rho(a, g_\mu x_\mu) + \rho(g_\mu x_\mu, g_\mu a_\mu) < \frac{\varepsilon}{6} + \rho(x_\mu, a_\mu).$$

Ahora, como $g_\mu S_\mu \cap W_a \neq \emptyset$, la condición (4) de la definición 1.9.10, asegura que existe $h \in G$ tal que $ha \in V_a$ y $H_\mu \subset g_\mu^{-1} G_{ha} g_\mu$. Sabemos que $G_{g_\mu^{-1} ha} = g_\mu^{-1} G_{ha} g_\mu$. Así, $g_\mu^{-1} ha \in A_\mu$. Dado que $g_\mu x_\mu, ha \in V_a = B_\varepsilon(a)$, por (3.0.2), tenemos

$$\rho(x_\mu, a_\mu) < 2\rho(x_\mu, A_\mu) \leq 2\rho(x_\mu, g_\mu^{-1} ha) = 2\rho(g_\mu x_\mu, ha) < 2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Así, $\rho(x_\mu, a_\mu) < 2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Consecuentemente,

$$\rho(a, g_\mu a_\mu) < \frac{\varepsilon}{6} + 2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $g_\mu a_\mu \in B_\varepsilon(x) \cap A$. Así, $f(g_\mu a_\mu) \in O$. Luego, la convexidad de O asegura que $F(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{\mu_i}(x) f(\tilde{g}_{\mu_i}(x) a_{\mu_i}) \in O$. Mostrando así la continuidad de F en A .

Veamos ahora que F es continua en $U = Z \setminus A$. Sea $x \in U$. Existe una vecindad T de x tal que T solo interseca a un número finito de $G(S_{\mu_1}), \dots, G(S_{\mu_n})$. Notemos que para cada $t \in T$, $F(t) = \sum_{i=1}^n h_{\mu_i}(t)$, donde $h_\mu : U \rightarrow V$ esta definida de la siguiente manera:

$$h_\mu(x) = \begin{cases} \varphi_\mu(x) \zeta_\mu(x), & \text{si } x \in G(S_\mu), \\ 0, & \text{si } x \notin G(S_\mu), \end{cases}$$

para cada $\mu \in \mathcal{M}$.

Afirmamos que cada h_μ es una función continua.

Se sigue de la continuidad de φ_μ y ζ_μ que h_μ es continua en $G(S_\mu)$, por lo que basta mostrar la continuidad de h_μ en $U \setminus G(S_\mu)$.

Sean $x_0 \in U \setminus G(S_\mu)$ y P un abierto de V tal que $h_\mu(x_0) = 0 \in P$. Dada la convexidad local de V , podemos suponer sin pérdida de la generalidad que P es una vecindad convexa de 0. Se sigue de la proposición 1.9.12, del teorema 1.9.13, la continuidad de f y la compacidad de G que la imagen de $G(S_\mu)$ bajo ζ_μ es un conjunto acotado de V . Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \zeta(x) \in P$ para todo $x \in G(S_\mu)$. Como $\varphi_\mu(x_0) = 0$, existe una vecindad B de x_0 en U tal que $\varphi_\mu(x) < \varepsilon$ para todo $x \in B$.

Afirmamos que $h_\mu(B) \subset P$. En efecto, si $x \in B \setminus G(S_\mu)$, tenemos que $h_\mu(x) = 0 \in P$. Luego, si $x \in B \cap G(S_\mu)$, tenemos que $\varphi_\mu(x) < \varepsilon$ y $\varepsilon \cdot \zeta(x) \in P$. Entonces, $\varphi_\mu(x) \zeta(x) < 1$. Así, dado que P es convexo y contiene al 0, si $p \in P$, $r \cdot p \in P$ para

todo $r \in [0, 1]$. Consecuentemente, $(\frac{1}{\varepsilon}) \cdot \varphi_\mu(x) \varepsilon \cdot \zeta_\mu(x) = \varphi_\mu(x) \zeta_\mu(x) \in P$. Por lo tanto, h_μ es una función continua en x_0 para cada $\mu \in \mathcal{M}$. Así, la continuidad de F en x_0 se sigue de la continuidad de las funciones $h_{\mu_1}, \dots, h_{\mu_n}$.

Definamos $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$, asignado a cada $f \in C(A, V)$ su extensión F que acabamos de construir. De lo anterior, obtenemos:

$$\Lambda(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(x) f(\tilde{g}_\mu(x) a_\mu), & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Por definición de Λ , se sigue directamente que Λ es una función inyectiva.

Procedamos a mostrar que Λ es un operador lineal.

Sean $f, h \in C(A, V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z \in Z$. Como $z \in Z$, tenemos que $z \in A$ o $z \in U$. Supongamos que $z \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda f + h)(z) &= (\lambda f + h)(z) \\ &= (\lambda f)(z) + h(z) \\ &= \lambda f(z) + h(z) \\ &= \lambda \Lambda(f)(z) + \Lambda(h)(z). \end{aligned}$$

Ahora, si $z \in U$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda f + h)(z) &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) (\lambda f + h)(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu) \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) [\lambda f(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu) + h(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu)] \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) [\lambda f(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu)] + \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) h(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu) \\ &= \lambda \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) f(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu) + \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) h(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu) \\ &= \lambda \Lambda(f)(z) + \Lambda(h)(z). \end{aligned}$$

Así, Λ es un operador lineal.

Probemos que Λ es equivariante. Procederemos en dos casos. Supongamos que $z \in A$ y $g \in G$. Tenemos que $g^{-1}z \in A$ y así, $[\Delta(gf)(z)] = gf(z) = gf(g^{-1}z)$.

Por otro lado, $[g\Delta f](z) = g(\Delta f)(g^{-1}z) = gf(g^{-1}z)$. Por lo tanto, $[\Delta(gf)(z)] = [g\Delta f](z)$.

Ahora, sean $z \in U$ y $t \in G$. Por definición, tenemos que

$$[\Lambda(tf)(z)] = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z) (tf)(\tilde{g}_\mu(z) a_\mu).$$

Ocupando la invarianza de las funciones φ_μ , la equivarianza de g_μ y la linealidad de la acción de G en V , obtenemos

$$\begin{aligned}
 (t\Lambda(f))(z) &= t\Lambda(f)(t^{-1}z) \\
 &= t\left(\sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(t^{-1}z)f(\tilde{g}_\mu(t^{-1}z)a_\mu)\right) \\
 &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} t\varphi_\mu(z)f(t^{-1}(\tilde{g}_\mu(z)a_\mu)) \\
 &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z)tf(t^{-1}(\tilde{g}_\mu(z)a_\mu)) \\
 &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi_\mu(z)(tf)(\tilde{g}_\mu(z)a_\mu) \\
 &= [\Lambda(tf)](z).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Λ es una función equivariante.

Para mostrar la continuidad de Λ ocuparemos el siguiente lema, en el ocuparemos la misma notación que hemos usado a lo largo de esta prueba. Recordemos que $E = A \cup (\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_1} G(\bar{S}_\mu))$ es un subconjunto cerrado de Z .

Lema 3.0.12. *Para $K \subset E$ un subconjunto compacto, existe $\tilde{K}$ un subconjunto compacto de A tal que para cada $f \in C(A, V)$, tenemos que $\Lambda(f(K)) \subset \text{Conv}(f(\tilde{K}))$.*

Demostración. Obtendremos a $\tilde{K}$ como la imagen de K bajo $u : E \rightarrow F(A)$, una función semicontinua superiormente, donde $F(A)$ denota el conjunto de los subconjuntos finitos de A .

Recordemos que una función $u : E \rightarrow F(A)$ es semicontinua superiormente, si para cada $x \in E$ y cualquier vecindad $N \subset A$ de $u(x)$, existe una vecindad O de x tal que $u(z) \subset N$ para todo $z \in O$.

Procedamos a definir $u : E \rightarrow F(A)$. Si $x \in A$, $u(x) = \{x\}$. Ahora, si $x \in E \setminus A$, existen una cantidad finita de $G(\bar{S}_{\mu_1}), \dots, G(\bar{S}_{\mu_n})$ a los cuales pertenece x . Si consideramos la función $g_{\mu_i} : G(\bar{S}_{\mu_i}) \rightarrow G/H_{\mu_i}$ de la proposición 1.9.12 y la función $G/H_{\mu_i} \times A_{\mu_i} \rightarrow A$ del teorema 1.9.13, $(gH_{\mu_i}, x) \rightarrow gx$, tenemos que la asignación $\tilde{g}_{\mu_i}(x)a_{\mu_i} = g_{\mu_i}a_{\mu_i}$ está bien definida. Definamos

$$u(x) = \{g_{\mu_1}a_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_n}a_{\mu_n}\}.$$

Es claro que

$$\tilde{K} = u(K) = \bigcup_{x \in K} u(x).$$

Un resultado bien establecido es que la imagen de un conjunto compacto bajo una función semicontinua superiormente es compacta (ver [[9], Proposition

6.2.11]). Por lo tanto, para concluir la demostración de este lema, es suficiente demostrar que u es una función semicontinua superiormente.

Sea $x \in E \setminus A$. Dado que $\{\overline{G(S_\mu)} = G(\overline{S_\mu}) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ es una familia de subconjuntos de U localmente finita, la unión de cualquier subcolección de elementos de $\{\overline{G(S_\mu)} \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ es cerrada en U y por consiguiente en $E \setminus A$. Sea

$$C = \bigcup \{\overline{G(S_\mu)} \mid x \notin \overline{G(S_\mu)}\}.$$

Así, C es un subconjunto cerrado de $E \setminus A$. Definamos

$$D = (E \setminus A) \setminus C.$$

Por definición, D es un abierto de $E \setminus A$. Como $E \setminus A$ es abierto en E , obtenemos que D es abierto en E .

Sea $N \subset A$ una vecindad abierta de $u(x)$. Dado que $G(\overline{S_\mu})$ es cerrado en Z y $G/H_\mu \in G\text{-}ANE(\mathcal{M}^G)$ (ver [23], Corollary 1.6.7]), existe una vecindad invariante E'_μ de $G(\overline{S_\mu})$ en Z y una extensión equivariante $\tilde{g}_\mu : E'_\mu \rightarrow G/H_\mu$. Definamos $E_\mu = D \cap E'_\mu$. Entonces, E_μ es abierto en D y como D es abierto en E , tenemos que E_μ es abierto en E .

Ahora, por la continuidad de $\tilde{g}_\mu$ y de $G/H_\mu \times A_\mu \rightarrow A$, $(gH_\mu, a) \rightarrow ga$, existe una vecindad abierta O_μ de x tal que para cada $z \in O_\mu$, se cumple que $\tilde{g}_\mu(z)a_\mu \in N$. Definamos $\bigcap_{i=1}^n O_{\mu_i} = O$. Así, O es abierto en D y por lo tanto en E . Luego, para cada $z \in O$, tenemos que

$$u(z) \subset \{\tilde{g}_{\mu_1}(z)a_{\mu_1}, \dots, \tilde{g}_{\mu_n}(z)a_{\mu_n}\} \subset N.$$

Por lo tanto, u es semicontinua superiormente en $E \setminus A$.

Sean $a \in A$ y U un abierto que contenga $u(a) = \{a\} \subset U$. Tomamos $\varepsilon > 0$ de manera que $B_\varepsilon(a) \cap A \subset U$. Dado que $\{G(S_\mu)\}$ es una cubierta G -canónica, para $V_a = B_\varepsilon(a)$, existe W_a una vecindad que satisface (4) de la definición 1.9.10.

Afirmamos que $u(x) \subset U$ para cada $x \in W_a$. En efecto, si $x \in W_a \cap A$, entonces $U(x) = \{x\}$ y así, $u(x) \subset U$. Ahora, sea $x \in W_a \cap (E \setminus A)$. Tenemos que $u(x) = \{\tilde{g}_{\mu_1}(x)a_{\mu_1}, \dots, \tilde{g}_{\mu_n}(x)a_{\mu_n}\}$. Luego, como $x \in g_{\mu_i}\overline{S_{\mu_i}}$, tenemos que $g_{\mu_i}S_{\mu_i} \cap W_a \neq \emptyset$ y procediendo como arriba, obtenemos

$$p(a, g_{\mu_i}a_{\mu_i}) < \varepsilon \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Entonces, $g_{\mu_i}a_{\mu_i} \in B_\varepsilon(a) \cap A \subset U$ y dado que $\tilde{g}_{\mu_i}(x)a_{\mu_i} = g_{\mu_i}a_{\mu_i}$, tenemos que $\tilde{g}_{\mu_i}(x)a_{\mu_i} \in B_\varepsilon(a) \cap A \subset U$. Por lo tanto, $u(x) \subset U$. $\square$

Volviendo a nuestra prueba, dado que Λ es lineal y $C(A, V)$ es un espacio topológico vectorial (ver proposición 1.5.2), es suficiente probar que Λ es continua en la función constante 0 de $C(A, V)$.

Sabemos que $\Gamma_{K,S} = \{\varphi \in \Lambda(X, V) \mid \varphi(K) \subset S\}$ constituye una subbase de la topología compacto abierta de $C(X, V)$, donde $K \subset X$ es compacto y $S \subset V$ es abierto. Dado que V es un espacio localmente convexo, V posee una base de vecindades convexa, más aún, los conjuntos $\Gamma_{K,S}$, con $K \subset X$ compacto y $S \subset V$ convexo abierto, constituyen una subbase de $C(X, V)$ (ver [15] . XII, §5)).

Por lo tanto, para verificar la continuidad de Λ en el origen $C(A, V)$, es suficiente considerar un subbásico $\Gamma_{K,S}$ del origen $\Lambda(0) = 0$ en $C(Z, V)$, con $K \subset Z$ compacto y $S \subset V$ convexo abierto.

Sea $\Gamma_{K,S}$ un subbásico de la función constante 0, donde K es un conjunto compacto y S es una vecindad abierta convexa de 0 en V . Estamos buscando una vecindad M del origen en $C(A, V)$ tal que $\Lambda(M) \subset \Gamma_{K,S}$. Por el lema 3.0.12, existe un compacto $\tilde{K} \subset A$ tal que para cada $\psi \in C(A, V)$, su imagen $\Lambda(\psi) = \tilde{\psi}$, satisface la condición $\tilde{\psi}(K) \subset \text{Conv}(\psi(\tilde{K}))$. Entonces, el conjunto

$$\Gamma'_{\tilde{K},S} = \{\psi \in C(A, V) \mid \psi(\tilde{K}) \subset S\}$$

es un subbásico del origen de $C(A, V)$.

Veamos que $\Lambda(\Gamma'_{\tilde{K},S}) \subset \Gamma_{K,S}$. En efecto, si $\psi \in \Gamma'_{\tilde{K},S}$, entonces $\psi(\tilde{K}) \subset S$. Dado que S es un conjunto convexo, inferimos que $\text{Conv}(\psi(\tilde{K})) \subset S$. Por lo tanto, $\tilde{\psi}(K) \subset \text{Conv}(\psi(\tilde{K})) \subset S$, es decir, $\tilde{\psi} \in \Gamma_{K,S}$. Concluimos que $\Lambda(\Gamma'_{\tilde{K},S}) \subset \Gamma_{K,S}$. Por consiguiente, $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ es un operador continuo.

Para finalizar, mostremos que la función Λ es un encaje. En primer lugar, dado que $\Lambda : C(A, V) \rightarrow \text{Im } \Lambda$ es una función biyectiva, basta con probar que $\Gamma'_{K,S} = \{\psi \in C(A, V) \mid \psi(K) \subset S\}$ es abierto en $\text{Im } (\Lambda)$. Esto es evidente dado que $\Gamma'_{K,S} = \Gamma_{K,S} \cap \text{Im } (\Lambda)$, y $\Gamma_{K,S}$ es abierto en $C(Z, V)$. $\square$

Observemos que si G es un grupo trivial, el teorema anterior se reduce a los resultados obtenidos por E. Michael y J. Dugundji, ya que en este caso, $B = \emptyset$, lo que implica que $X = Z$. Por lo tanto, lo anterior generaliza los resultados mencionados.

Por otro lado, es importante destacar que el operador $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ está definido para todas las funciones continuas de A en Z . El siguiente corolario se enfoca en analizar los subespacios de funciones equivariantes $E(A, V)$ y $E(Z, V)$ de $C(A, V)$ y $C(Z, V)$ respectivamente.

Corolario 3.0.13. *Sean G un grupo compacto de Lie, Z un G -espacio metrizable, A un subconjunto invariante de Z y V un G -espacio lineal localmente convexo. Entonces, existen X una vecindad de A en Z y un operador lineal (no equivariante)*

$$L : E(A, V) \rightarrow E(Z, V)$$

tal que para cada $f \in E(A, V)$

1. $L(f)$ es una extensión de f ,
2. $Im(L(f)) \subset (Imf \cup \{0\})$ y $Im(L(f)|_X) \subset Conv(Imf)$,
3. L es un encaje lineal topológico.

Demostración. Sean Z, V, A como en las hipótesis y $f \in C(A, V)$ una función equivariante. Para cada $g \in G$ y $x \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(gx) = gf(x) &\iff g^{-1}f(gx) = f(x) \iff (g^{-1}f)(x) = f(x) \\ &\iff g^{-1}f = f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es equivariante si, y solo si, f es un punto G -fijo de $C(A, V)$ (bajo la acción de la proposición 3.0.10). Luego, si $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ es el encaje lineal topológico del teorema 3.0.11, tenemos que $\Lambda(f)$ es un punto G -fijo de $C(Z, V)$. Así, ocupando el argumento anterior, tenemos que $\Lambda(f)$ es una función equivariante. Por lo tanto, si restringimos $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ al conjunto $E(A, V)$ el operador L está bien definido y satisface (1), (2) y (3) del teorema 3.0.11. $\square$

Corolario 3.0.14. Sean G, Z, A y V como en el teorema 3.0.11. Entonces, existe una retracción $r : C(Z, V) \rightarrow Im(\Lambda)$.

Demostración. Consideremos $\Lambda : C(A, V) \rightarrow C(Z, V)$ el operador lineal equivariante del teorema 3.0.11. Definamos $R : C(Z, V) \rightarrow C(A, V)$, $R(f) = f|_A$. Claramente, R es una función equivariante.

Mostremos que $r = \Lambda \circ R : C(Z, V) \rightarrow Im(\Lambda)$ es una retracción equivariante de $Im(\Lambda)$. En efecto, composición de funciones equivariantes es equivariante, por lo que solo resta probar que r deja fijo cualquier punto $\Lambda(f) \in Im(\Lambda)$. Sea $f \in C(A, V)$. Dado que $R \circ \Lambda$ es la función identidad en $C(A, V)$, obtenemos $r(\Lambda(f)) = \Lambda \circ R(\Lambda(f)) = \Lambda(f)$. $\square$

Epílogo

1. Grupos de transformaciones

1.1 Grupos topológicos

En la primera sección de este capítulo, se definieron los conceptos de grupo topológico y grupo de Lie. Además, se presentaron ejemplos relevantes, como el grupo general lineal y el grupo ortogonal, así como los espacios vectoriales topológicos. También se citaron las fuentes donde se pueden consultar los resultados sobre grupos topológicos que fueron utilizados en esta tesis.

1.2 G -espacios

En esta sección, se introdujeron los conceptos de G -espacio, saturación, estabilizador e invariancia, los cuales son fundamentales para comprender las acciones de grupos. Además, se destacó la importancia de la compacidad del grupo en ciertos resultados, y se definieron las nociones de funciones G -equivariantes y G -invariantes, que fueron esenciales en esta tesis.

1.3 Espacio de órbitas

En esta sección se exploraron aspectos fundamentales de los espacios de órbitas. Se comenzó demostrando que el espacio de órbitas no siempre conserva los axiomas de separación del espacio original X . Además, se definió el concepto de métrica invariante, el cual resultó crucial para establecer las condiciones bajo las cuales el espacio de órbitas es un espacio metrizable.

1.4 Acciones de grupos compactos

En esta sección, se demostró que la acción de un grupo compacto en un espacio Hausdorff es perfecta, un resultado clave que sustenta numerosas pruebas a lo largo de esta tesis.

1.5 Acciones lineales

En esta sección, se establecieron las condiciones bajo las cuales los espacios de funciones son espacios vectoriales topológicos. Además,

se presentaron las acciones en los espacios de funciones que fueron utilizadas a lo largo de esta tesis.

1.6 Encajes en G -espacios lineales

En esta sección se extendió el teorema de Kuratowski-Wojdysławski al contexto de las acciones de grupos topológicos en espacios de funciones. Se definieron las funciones G -uniformes y se construyeron G -espacios lineales de Banach a partir de estos espacios de funciones G -uniformes. Adicionalmente, se introdujo el concepto de encaje equivariante inducido por funciones inyectivas y cerradas, y se demostraron propiedades que fueron de utilidad en las secciones posteriores.

1.7 Integral de Haar

La importancia de esta sección radicó en la introducción de la integral de Haar en espacios de funciones continuas sobre grupos compactos. Se comenzó mostrando su similitud con la integral de Riemann y se exploró cómo esta integral puede utilizarse para construir funciones invariantes. Además, se demostró que cualquier G -espacio metrizable admite una métrica invariante si G es un grupo compacto.

1.8 Integral de Haar*

En esta sección se presentó una generalización de la integral de Haar introducida en la sección anterior, la cual se empleó para caracterizar los extensores absolutos dentro de la clase de espacios paracompactos.

1.9 Rebanadas

En esta sección se definieron las nociones de H -rebanada y de cubierta G -canónica y se mostró la existencia de las cubiertas G -canónicas.

2. Teoremas de extensión equivariante

Este capítulo surgió a partir de la siguiente cuestión: dado un ANE metrizable X , ¿qué condiciones adicionales se requieren para que X sea también un ANE en cada una de las siguientes clases de espacios: espacios paracompactos, espacios normales, espacios perfectamente normales y espacios completamente regulares?

En la clase de espacios topológicos, esta pregunta tiene una respuesta bien conocida. En este capítulo, se desarrolló su análogo en la Teoría de Grupos de Transformaciones.

Para ello, se introdujeron las nociones de G -extensor absoluto y G -retracto absoluto equivariante, demostrando que estos conceptos son equivalentes en ciertas clases de G -espacios.

Asimismo, se presentó el Teorema de Lisitsa, para lo cual se definió el concepto de "erizo equivariante" y su construcción en la clase de G -espacios. Se demostró que los G -espacios metrizablees que son extensores dentro de

la clase de G -espacios metrizables también lo son en la clase de G -espacios p -paracompactos. Como conclusión, se obtuvo que la clase de G -espacios metrizables que son extensores para la clase de G -espacios metrizables coincide con la clase de G -espacios metrizables que son extensores de la clase de G -espacios p -paracompactos.

3. Operadores de extensión simultánea

En este capítulo se revisaron los resultados conocidos de Michael y Dugundji, y se explicó por qué estos resultados no pueden extenderse a la clase de G -espacios. Además, se presentaron teoremas alternativos que abordan estos resultados dentro de la clase de G -espacios.

Bibliografía

- [1] N. Antonyan, S. A. Antonyan, *Universal metric proper G -spaces*, Topology and its Applications, Volume 201, 15 March 2016, Pages 388-402.
- [2] N. Antonyan, S. A. Antonyan, R. D. Varela Velasco, *Universal G -spaces for proper actions of locally compact groups*, Topology and its Applications, Volume 159, Issue 4, March 2012, Pages 1159-1168.
- [3] S. A. Antonyan, *Equivariant generalization of Dugundji's Theorem*, Matematicheskie Zametki, Volume 38, 1985, Pages 608–616; English translation in: Mathematical Notes, Volume 38, 1985, Pages 844–848.
- [4] S. A. Antonyan, *Retracts in the category of G -spaces*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Volume 28, No. 11-12, 1980, Pages 613-618.
- [5] S. A. Antonyan, *Retracts in the category of G -spaces*, Izvestiya Akademii Nauk ArmSSR. Seriya Matematika, Volume 15, No. 5, 1980, Pages 365-378.
- [6] S. A. Antonyan, R. Ramírez-Luna, *Equivariant simultaneous extension operators for continuous maps*, Topology and its Applications, Volume 329, 2023, 108375.
- [7] R. Arens, *Extensions of functions on fully normal spaces*, Pacific Journal of Mathematics, Volume 2, 1952, Pages 11-22.
- [8] R. Arens, J. Eells, *On Embedding Uniform and Topological Spaces*, Pacific Journal of Mathematics, Volume 6, 1956, Pages 397-403.
- [9] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.
- [10] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Compositio Mathematica, Volume 3, 1936, Pages 427-430.

- [11] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 46, Academic Press, New York, 1972.
- [12] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, 2015.
- [13] M. Clapp, *Análisis Matemático*, Papirhos, 2017.
- [14] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics, Volume 1, 1951, Pages 353–367.
- [15] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston-London-Sydney-Toronto, 1966.
- [16] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [17] O. Hanner, *Solid spaces and absolute retracts*, Arkiv för Matematik, Volume 1, 1951, Pages 375-382.
- [18] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [19] L. Kristensen, *Invariant metrics in coset spaces*, Mathematica Scandinavica, Volume 6, 1958, Pages 33–36.
- [20] S. De Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [21] Yu. T. Lisica, *Extension of continuous maps and a factorization theorem*, Sibirskij Matematicheskij Zhurnal, Volume 14, No. 1, 1973, Pages 128-139.
- [22] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Annals of Mathematics, Volume 73, 1961, Pages 295-323.
- [23] R. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 36, 1960.
- [24] T. C. Przymusiński, *Collectionwise normality and absolute retracts*, Fundamenta Mathematicae, Volume 98, 1978, pages 61-73.
- [25] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [26] E. Michael, *Some extension theorems for continuous functions*, Pacific Journal of Mathematics, Volume 3, 1953, Pages 789-806.
- [27] M. Tkachenko, L. M. Villegas, C. Hernández, O. J. Rendón, *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, 1997.