



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESTRUCTURA MONOIDAL EN LA CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA Y LA
CONJETURA DE ACOPLAMIENTO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
EDGAR OMAR VELASQUEZ ESCAMILLA

DIRECTOR / TUTOR
HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DEPARTAMENTO DE GRAVITACIÓN Y TEORÍA DE CAMPOS
UNAM

CIUDAD DE MÉXICO MAYO 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
DR. JOSÉ LUIS CISNEROS-MOLINA
DRA. MELISA GUTIÉRREZ VIVANCO
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO

SITIO DONDE SE DESARROLLO EL TEMA:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DEPARTAMENTO DE GRAVITACIÓN Y TEORÍA DE CAMPOS

ASESOR DEL TEMA: HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
SUSTENTANTE: EDGAR OMAR VELASQUEZ ESCAMILLA

Dedicatoria
Para Snoby.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo financiero como estudiante de posgrado, esencial para la realización de este trabajo.

Glosario y lista de símbolos

CONJUNTOS

\mathbb{R} - números reales

\mathbb{Z} - números enteros

\mathbb{N} - números naturales.

FUNCIONES

$f : A \rightarrow B$ - una función entre estructuras algebraicas con elemento identidad e

$A \equiv \text{Dom } f$ y $B \equiv \text{Cod } f$

$\ker f = f^{-1}(e_B)$ - núcleo de f ;

$\text{Im } f = f(A)$ - imagen de f ;

$\text{Coker } f = \text{Cod}/\text{Im } f$ - conúcleo de f ;

$\text{Coim } f = \text{Dom } f/\ker f$ - coimagen de f ;

Diagrama conmutativo requiriendo $h = g \circ f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

DERIVACIONES

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ - derivada de f respecto a x ;

\dot{x} - derivada total de x respecto al tiempo;

$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ - derivada parcial respecto al tiempo;

$\partial_{x^i} \equiv \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ - derivada parcial coordenada;

d - derivada exterior;

d^n - operador cofrontera;

∂_n - operador frontera.

GRUPOS

G - denota usualmente un grupo de Lie;

$GL(n)$ - grupo general lineal con coeficientes reales en dimensión n ;

$SO(n)$ - grupo de rotaciones en dimensión n ;

$H_n(\mathcal{M}) = \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n-1}$ - n -ésimo grupo de homología de la variedad \mathcal{M} ;

$H^n(\mathcal{M}) = \ker d_n / \text{Im } d_{n-1}$ - n -ésimo grupo de cohomología de la variedad \mathcal{M} .

VARIETADES LISAS Y HACES FIBRADOS

Todas las variedades se asumen (a menos que se diga lo contrario) C^k -lisas, reales, finito-dimensionales, Hausdorff, conexas y sin frontera; las funciones se asumen C^k -lisas.

Se usan los símbolos \otimes , \wedge para productos tensoriales y productos exteriores (wedge de formas diferenciales) respectivamente.

$T\mathcal{M}$ - haz tangente de la variedad \mathcal{M} ;

$\pi_{\mathcal{M}} : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ - proyección natural;

(E, π, \mathcal{M}, V) - haz con espacio total E , base \mathcal{M} , proyección π y V fibra estándar.

$(P, \Sigma, h, SO(k))$ - haz principal con base una variedad Riemanniana Σ de dimensión k con métrica de Jacobi h y grupo de estructura $SO(k)$ difeomorfo a la fibra estándar.

CATEGORÍAS

Set - todos los conjuntos como objetos y todas las funciones entre ellos como morfismos;

Set_{\bullet} - todos los conjuntos con punto base como objetos y todas las funciones entre

ellos respetando punto base como morfismos;

Grp - todos los grupos como objetos y todos los homomorfismos entre ellos como morfismos;

Ab - todos los grupos Abelianos como objetos y todos los homomorfismos entre ellos como morfismos;

Top - todos los espacios topológicos como objetos y todas las funciones continuas entre ellos como morfismos;

$Vect$ - todos los espacios vectoriales como objetos y todas las transformaciones lineales como morfismos;

$Diff$ - todas las variedades lisas como objetos y todas las funciones lisas como morfismos

$Cob(n)$ - $n - 1$ -variedades como objetos y cobordismos orientados como morfismos;

$Conf_{\Sigma}$ - todos los espacios de configuración finitos representados por variedades de Jacobi-Maupertius Σ como objetos y mapeos lisos como morfismos.

OTROS SÍMBOLOS

$i \equiv \sqrt{-1}$ - unidad imaginaria;

\mathfrak{g} - álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G ;

H_* - funtor de homología;

H^* - funtor de cohomología;

$g \equiv g_{ij}$ - tensor métrico de Riemann;

$h = 2[E - V(q)]g$ - tensor métrico de Jacobi;

Γ_{jk}^i - símbolos de Christoffel.

Resumen

Se introduce una estructura monoidal en la categoría de variedades de Jacobi-Maupertius y se demuestra que el espectro topológico usado en la cuantización por fibras puede ser recuperado usando las propiedades aditivas de las clases características ante una estructura monoidal. Concluimos con un ejemplo generalizado para sistemas no acoplados comparando el resultado con el espectro de energía canónico y presentamos el primer borrador sobre la conjetura de acomplamiento.

Introducción

El proceso entre las ideas de Dirac sobre el monopolo y el surgimiento del uso de haces fibrados principales y conexiones para describir el electromagnetismo involucró varias etapas y contribuciones de varios físicos y matemáticos:

1. *Dirac (1931)*: Paul Dirac introduce la idea del monopolo magnético en su artículo "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field". Dirac muestra que la existencia de un monopolo magnético requeriría la cuantización del producto de la carga eléctrica y magnética [1].

2. *Ehresmann (1950)*: Charles Ehresmann, un matemático francés, desarrolla la teoría de haces fibrados principales y conexiones. Ehresmann introduce el concepto de una conexión en un haz fibrado, que describe la forma en que las fibras se conectan entre sí [2].

3. *Yang y Mills (1954)*: Chen Ning Yang y Robert Mills, dos físicos estadounidenses, aplican la teoría de haces fibrados principales y las conexiones para describir la interacción nuclear fuerte. Yang y Mills introducen el concepto de campo de gauge, que es una conexión en un haz fibrado [3].

4. *Utiyama (1956)*: Ryoyu Utiyama, un físico japonés, generaliza la teoría de Yang y Mills para incluir la interacción electromagnética. Utiyama muestra que la teoría de Maxwell puede ser descrita en términos de haces principales y una conexión [4].

5. *Wu y Yang (1975)*: Tai Tsun Wu y Chen Ning Yang, dos físicos, uno estadounidense y el otro chino, aplican la teoría de haces principales y las conexiones para describir la interacción electromagnética en presencia de un monopolo magnético. Wu y Yang muestran que la teoría de Maxwell puede ser descrita en términos de un haz

fibrado principal y una conexión, incluso en presencia de un monopolo magnético [5].

La primera parte de este trabajo explora cómo los haces fibrados principales pueden ser utilizados para describir espacios de configuración para sistemas conservativos, y cómo los invariantes topológicos como la clase de Euler pueden ser calculados para obtener una condición de cuantización para dichos sistemas. Esta es un área de investigación fascinante, que combina técnicas de geometría diferencial, topología y física para estudiar el comportamiento de sistemas conservativos. La clase de Euler, en particular, juega un papel crucial en este contexto, ya que puede ser utilizada para cuantizar.

Los haces fibrados principales proporcionan un marco poderoso para describir los espacios de configuración de sistemas conservativos. Al estudiar la topología de estos haces, podemos obtener información sobre el comportamiento del sistema, incluyendo:

- **Simetrías y leyes de conservación:** Los haces fibrados principales pueden ser utilizados para describir las simetrías y leyes de conservación del sistema.
- **Fases topológicas y transiciones:** La clase de Euler y otros invariantes topológicos pueden ser utilizados para estudiar las fases topológicas y transiciones en el sistema.

La segunda parte explora la cuantización topológica pero cambiamos el enfoque al aplicar teoría de categorías.

La teoría de categorías puede ser una herramienta poderosa para abstraer y generalizar estructuras matemáticas, pero también puede ser un desafío aplicarla con éxito, especialmente cuando se trata de áreas complejas y matizadas como la cuantización topológica.

Algunos desafíos potenciales al intentar aplicar la teoría de categorías a la cuantización topológica incluyen:

- Encontrar el marco categórico adecuado: La cuantización topológica implica una mezcla de estructuras geométricas, topológicas y algebraicas, lo que puede hacer que sea difícil identificar el marco categórico más adecuado.
- Abstractar detalles concretos: La teoría de categorías a menudo implica abstractar detalles concretos para enfocarse en patrones y estructuras generales. Sin embargo, en la cuantización topológica, los detalles concretos del sistema pueden ser cruciales para entender su comportamiento.
- Equilibrar abstracción y especificidad: Al aplicar la teoría de categorías, puede ser un desafío encontrar el equilibrio adecuado entre abstracción y especificidad. Queremos abstractar detalles innecesarios, pero aún capturar las características esenciales del sistema.

En esta sección se introduce una estructura monoidal en la categoría de espacios de configuración modelados por un tipo especial de variedades Riemannianas. Les llamamos variedades de Jacobi-Maupertius.

Al introducir una estructura monoidal en dicha categoría, estamos proporcionando esencialmente una manera de "combinar" espacios de configuración de manera compatible con la geometría subyacente.

Utilizamos variedades Riemannianas finitas como modelos para espacios de configuración ya que nos permite aprovechar la rica estructura geométrica de estos espacios.

El primer resultado es usando la propiedad aditiva de las clases características, como la clase de Euler, con respecto a la estructura monoidal (en este caso, la unión ajena). Esta propiedad nos permite reducir el cálculo de la cuantización topológica para espacios de configuración desacoplados a cálculos más simples ya que evita tener que hacer cálculos relacionados con la curvatura que tienden a ser bastante complicados.

Esto tiene potenciales aplicaciones:

- Teoría Cuántica de Campos Topológica: La teoría de categorías juega un papel crucial en las TQFT's, donde dichas teorías están descritas por funtores monoidales

- Fases topológicas de la materia: La clase de Euler y otros invariantes topológicos son importantes en el estudio de fases topológicas de la materia. Este trabajo podría ayudar a arrojar luz sobre las propiedades topológicas de estas fases.

Esta sección termina con el cálculo del espectro topológico para osciladores armónicos desacoplados y damos una generalización para n sistemas desacoplados. Le llamamos fórmula de desacoplamiento.

Concluimos el trabajo con una conjetura, la cual nos dice como usando el marco teórico de categorías podemos formalizar el proceso de acoplamiento, siguiendo el formalismo usado para el desacoplamiento. Las principales dificultades para lograr esto son el uso de cobordismo mediador de una transición suave del proceso de acoplamiento, la operación adecuada para formalizar el acoplamiento y como conectar ambas ideas en el lenguaje de la teoría de categorías donde un cobordismo puede ser representado por funtores que formalizan el proceso de acoplamiento o como transformaciones naturales entre funtores de acoplamiento/desacoplamiento. La principal propuesta de operación que formaliza el acoplamiento es la suma conexa, que preserva la dimensión de los espacios de configuración y nos permite hacer uso de cobordismos.

Con esta propuesta buscamos establecer un nuevo marco geométrico y categórico para comprender las interacciones entre sistemas físicos, utilizando conceptos provenientes de la teoría de haces, la topología diferencial y la teoría de categorías.

Índice general

Agradecimientos	III
Glosario y lista de símbolos	IV
Resumen	VII
Introducción	VIII
1. Teoría de Categorías parte 1	1
1.1. Categorías	1
1.2. Funtores	5
1.3. Transformaciones Naturales	8
1.4. Dualidad	9
1.4.1. Co/Límite	10
1.4.2. Límites	10
1.4.3. Colímites	11
1.4.4. Ejemplos	12
2. Elementos Básicos de Topología Diferencial	14
2.1. Variedades Diferenciables	14
2.2. Funciones entre Variedades	16
3. Teoría de Haces	19
3.1. Haces Fibrados	19
3.2. Haz co/tangente	20

3.2.1. Álgebra de formas	23
3.3. Haz Principal y Asociado	25
3.3.1. Haz Fibrado Principal	25
3.3.2. Haz Asociado	26
4. Elementos básicos de Geometría Riemanniana	28
4.1. Métrica Riemanniana	28
4.2. Conexión	29
4.3. Curvatura	31
4.4. Forma de conexión y Curvatura	33
4.4.1. Representación adjunta	33
4.4.2. Forma de conexión	34
4.4.3. Forma de curvatura	34
5. Una Introducción a la Topología Algebraica	35
5.1. Homotopía	35
5.2. Categorías Abelianas e Introducción a los Objetos (Co)Homológicos	37
5.3. Homología y Cohomología	40
5.4. Clases Características	43
5.5. Clase de Euler	44
5.5.1. Clase de Euler como elemento de cohomología	45
5.6. Las clase de Chern	45
5.6.1. Construcción vía la Teoría de Chern-Weil	46
5.6.2. Construcción vía la clase de Euler	47
6. Fundamentos físicos de la Cuantización Topológica	49
6.1. Acciones y Cuantización	49
6.2. Cuantización Canónica	50
6.3. Formalismo de Maupertius	51
6.4. Cuantización Topológica	52

7. Teoría de categorías parte 2	56
7.1. Composición de Transformaciones Naturales	56
7.2. La categoría Cat	58
7.3. Adjunción	59
7.3.1. Hom-Sets	59
7.3.2. Ejemplo: Adjunción entre el espacio de lazos y la suspensión topológica	60
7.3.3. Unidad/Counidad	62
7.4. Mónadas	63
7.5. Categorías Monoidales	64
7.5.1. Funtores monoidales	67
7.5.2. La categoría $Vect$	68
7.5.3. La categoría $Cob(n)$	69
8. Teoría Cuántica de Campos Topológica o TQFT	72
8.1. $TQFT$ de dimensión 2	74
9. Estructura monoidal para sistemas no acoplados	80
9.1. La categoría $Conf_{\Sigma}$	80
9.2. Axiomas de categoría monoidal para $Conf_{\Sigma}$	81
9.3. Formula de Desacoplamiento	82
9.4. Acoplamiento	88
9.5. La conjetura de Acoplamiento	89
9.5.1. Enunciado Formal de la Conjetura	90
10. Conclusiones	92
Appendices	93
A. Tensor Métrico	94
B. Grupos de Lie	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	xv
C. Axiomas de Eilenberg-Steenrod	99
D. Diagramas de Cuerdas	101
D.0.1. Adjunciones	105
D.0.2. Mónadas	106

Capítulo 1

Teoría de Categorías parte 1

1.1. Categorías

En la ciencia matemática moderna en el momento en que alguien define una nueva clase de objeto matemático, uno procede casi en el siguiente respiro a decir qué clase de funciones entre los objetos van a ser consideradas. Un marco de referencia general para lidiar con situaciones donde tengamos ciertos *objetos* y ciertas *funciones entre objetos*, como conjuntos y funciones, espacios vectoriales y operadores lineales, puntos en el espacio y caminos entre ellos, etc., da el metalenguaje moderno de categorías y funtores. Las categorías son universos matemáticos y los funtores son “proyecciones” de un universo a otro [7].

Una categoría es una estructura matemática genérica que consiste de una colección de *objetos* (conjuntos posiblemente con una estructura adicional), con una correspondiente colección de *flechas*, o *morfismos*, entre los objetos (en congruencia con la estructura adicional). Una categoría \mathcal{K} está definida como un par $(Ob(\mathcal{K}), Mor(\mathcal{K}))$ de objetos $A, B, \dots \in Ob(\mathcal{K})$ y morfismos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, \dots \in Mor(\mathcal{K})$ entre objetos, con la composición asociativa:

$$\hookrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C = A \xrightarrow{f \circ g} C,$$

y un morfismo ciclo-identidad. Cabe destacar que en la literatura de topología, se usa

diferente notación para $Mor(\mathcal{K})$, a saber, $Hom(\mathcal{K})$.

Una categoría \mathcal{K} es usualmente representada por un diagrama conmutativo (i.e., un diagrama con un *objeto inicial* A y *final* D común):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Para hacer esto más preciso, decimos que una categoría \mathcal{K} está definida si tenemos:

- (1) Una *clase de objetos* $\{A, B, C, \dots\}$ de \mathcal{K} denotado por $Ob(\mathcal{K})$;
- (2) Un *conjunto de morfismos* o *flechas* $Mor_{\mathcal{K}(A,B)}$ con elementos $f : A \rightarrow B$, definidos para cualquier par ordenado $(A, B) \in \mathcal{K}$, tal que para dos pares distintos $(A, B) \neq (C, D)$ en \mathcal{K} , tenemos $Mor_{\mathcal{K}(A, B)} \cap Mor_{\mathcal{K}(C, D)} = \emptyset$;
- (3) Para cualquier tripleta $(A, B, C) \in \mathcal{K}$ con $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, existe una composición de morfismos

$$Mor_{\mathcal{K}(B, C)} \times Mor_{\mathcal{K}(A, B)} \ni (g, f) \rightarrow g \circ f \in Mor_{\mathcal{K}(A, C)} \quad (1.1)$$

Si tenemos un morfismo $f \in Mor_{\mathcal{K}(A, B)}$, (escrito de otra forma como $f : A \rightarrow B$), o

$$A \xrightarrow{f} B$$

entonces $A = Dom(f)$ es el *dominio* de f , y $B=Cod(f)$ es el *codominio* de f (del cual el *rango* de f es una subclase) y denotado por $B = ran(f)$.

Para hacer a \mathcal{K} una categoría, ésta debe de cumplir además las siguientes propiedades:

1. *Asociatividad de morfismos*: para toda $f \in Mor_{\mathcal{K}(A, B)}$, $g \in Mor_{\mathcal{K}(B, C)}$, y $h \in Mor_{\mathcal{K}(C, D)}$, tenemos $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} & D \\ f \downarrow & & \uparrow h \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

2. *Existencia de morfismo identidad*: para cada objeto $A \in Ob(\mathcal{K})$ existe un único morfismo identidad $1_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A, A)$; para cualquiera dos morfismos $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$, composiciones con el morfismo identidad $1_B \in Mor_{\mathcal{K}}(B, B)$ da como resultado $1_B \circ f = f$ y $g \circ 1_B = g$, i.e., el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow f & \downarrow 1_B & \nearrow g & \\ & & B & & \end{array}$$

La clase de todos los morfismos de la categoría \mathcal{K} es denotado por

$$Mor(\mathcal{K}) = \bigcup_{A, B \in Ob(\mathcal{K})} Mor_{\mathcal{K}}(A, B). \quad (1.2)$$

Si para dos morfismos $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, A)$ la igualdad $g \circ f = 1_A$ es válida, entonces el morfismo g se dice que es *inversa izquierda* (o *retracción*) de f , y f *inversa derecha* (o *sección*) de g . Un morfismo que es ambos, inversa izquierda y derecha de f se dice inversa por los dos lados de f .

Un morfismo $m : A \rightarrow B$ es llamado *monomorfismo* en \mathcal{K} (i.e., *1-1*, o función *inyectiva*), si para dos morfismos paralelos $f_1, f_2 : C \rightarrow A$ en \mathcal{K} la igualdad $m \circ f_1 = m \circ f_2$ implica $f_1 = f_2$; en otras palabras, m es monomorfismo si es *cancelable por la izquierda*. Cualquier morfismo con inversa izquierda es monomorfismo.

Un morfismo $e : A \rightarrow B$ es llamado *epimorfismo* en \mathcal{K} (i.e., *sobre*, o función *sobreyectiva*), si para dos morfismos paralelos $g_1, g_2 : B \rightarrow C$ en \mathcal{K} la igualdad $g_1 \circ e = g_2 \circ e$ implica $g_1 = g_2$; en otras palabras, e es epimorfismo si es *cancelable por la derecha*. Cualquier morfismo con inversa derecha es epimorfismo.

Un morfismo $f : A \rightarrow B$ es llamado isomorfismo en \mathcal{K} (denotado como $f : A \cong B$) si existe un morfismo $f^{-1} : B \rightarrow A$ que es inversa por los dos lados de f en \mathcal{K} . La relación de isomorfismo es reflexiva, simétrica y transitiva, i.e., es una relación de equivalencia.

Por ejemplo, un isomorfismo en la categoría de conjuntos es llamado *biyección*, en la categoría de espacios topológicos es llamado *homeomorfismo*, en la categoría de

variedades diferenciales es llamado *difeomorfismo*.

Un morfismo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ es *regular* si existe un morfismo $g : B \rightarrow A$ en \mathcal{K} tal que $f \circ g \circ f = f$. Cualquier morfismo con o inversa izquierda o inversa derecha es regular.

Un objeto T es un *objeto terminal* en \mathcal{K} si para cada objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ existe una única flecha $A \rightarrow T$. Un objeto S es un *objeto inicial* en \mathcal{K} si para cada objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ existe una única flecha $S \rightarrow A$. Un *objeto nulo* $Z \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ es un objeto que es tanto inicial y terminal; éste es único bajo isomorfismos. Para cualesquiera dos objetos $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ existe un único morfismo $A \rightarrow Z \rightarrow B$ (la composición a través de Z), llamado el *morfismo cero* de A a B .

La noción de subcategoría es análoga a la noción de subconjunto. Una subcategoría \mathcal{L} de una categoría \mathcal{K} se dice que es una completa subcategoría si y sólo si para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathcal{L}$, cada morfismo $A \rightarrow B$ de \mathcal{L} está en \mathcal{K} .

Un *grupoide* es una categoría en la cual cada morfismo es invertible. Un grupoide típico es el grupoide fundamental $\Pi_1(X)$ de un espacio topológico X . Un objeto de $\Pi_1(X)$ es un punto $x \in X$, y un morfismo $x \rightarrow x'$ de $\Pi_1(X)$ es la clase de homotopía de caminos f de x a x' . La composición de caminos $g : x' \rightarrow x''$ y $f : x \rightarrow x'$ es el camino h que es 'f seguida de g'. La composición también se aplica a clases de homotopía, y hace a $\Pi_1(X)$ una categoría y un grupoide (la inversa de cualquier camino es el mismo camino recorrido en dirección contraria).

Un *grupo* es un grupoide con sólo un objeto, i.e., una categoría con un *objeto* en la cual todos los *morfismos* son *isomorfismos*. Por lo tanto, si queremos generalizar el concepto de grupo, manteniendo la asociatividad como una propiedad esencial, obtenemos la noción de categoría [7].

Una categoría es *discreta* si cada morfismo es una identidad. Un *monoide* es una categoría con un objeto. Un *grupo* es un monoide en el cual sus morfismos tienen inversa por los dos lados bajo la composición.

El *álgebra homológica* fue la progenitora de la teoría de categorías. Generalizando la fórmula de Euler $f + v = e + 2$ para las caras, vértices y aristas de un poliedro convexo, E.Betti definió *invariantes numéricos* de espacios por adición y substracción

formal de caras de varias dimensiones [17]; H.Poincaré formalizó esto e introdujo la homología [18]. E.Noether extrajo el hecho que estos cálculos continúan en grupos abelianos [19], y que la operación ∂_n tomando una cara de dimensión n a la suma alternada de caras de dimensión $n - 1$ que forman su frontera es un homomorfismo, y también satisface $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Hay muchas maneras de aproximar un espacio dado por poliedros, pero el cociente $H_n = Ker\partial_n/Im\partial_{n+1}$ es un invariante, el *grupo* de homología. Desde Noether, los grupos de homología han sido el objeto de estudio en lugar de sus dimensiones, que son los *números de Betti*.

1.2. Funtores

En topología algebraica, se intenta asignar a cada espacio topológico X algún objeto $\mathcal{F}(X)$ de tal manera que para toda C^0 -función $f : X \rightarrow Y$ existe una asignación de homomorfismos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$. Una ventaja de este procedimiento es, e.g., que si uno está tratando de probar la no existencia de una C^0 -función $f : X \rightarrow Y$ con ciertas propiedades, se puede demostrar de forma relativamente sencilla la no existencia de la correspondiente función algebraica $\mathcal{F}(f)$ y por tanto deducir que f podría no existir. En otras palabras, \mathcal{F} se convierte en un homomorfismo de una categoría (e.g., la categoría de espacios topológicos, \mathcal{T}) a otra (e.g. la categoría de grupos, \mathcal{G} o la categoría de grupos Abelianos, \mathcal{A}). Formalizando esta noción obtenemos la idea de un *functor* [7].

Un functor es una *imagen* genérica que proyecta una categoría en otra.

Sea $\mathcal{K} = (Ob(\mathcal{K}), Mor(\mathcal{K}))$ una categoría *fuentes* (o dominio) y $\mathcal{L} = (Ob(\mathcal{L}), Mor(\mathcal{L}))$ la categoría *objetivo* (o codominio).

Un functor $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_M)$ está definido como un par de funciones, $\mathcal{F}_O : Ob(\mathcal{K}) \rightarrow Ob(\mathcal{L})$ y $\mathcal{F}_M : Mor(\mathcal{K}) \rightarrow Mor(\mathcal{L})$, preservando la simetría categórica (i.e., conmutatividad de todos los diagramas) de \mathcal{K} en \mathcal{L} .

Más precisamente, un *functor covariante*, o simplemente un *functor*, $\mathcal{F}_* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ es una *imagen* en la categoría objetivo (o final) \mathcal{L} de (todos los objetos y morfismos de) la categoría fuente (o inicial) \mathcal{K} :

$$\mathcal{F}_* : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array} \implies \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ \mathcal{F}(h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\mathcal{F}(k)} & \mathcal{F}(D) \end{array}$$

Similarmente, un *functor contravariante* o *cofunctor*, $\mathcal{F}^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ es una *imagen dual* con las flechas revertidas:

$$\mathcal{F}^* : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array} \implies \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xleftarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ \mathcal{F}(h) \uparrow & & \uparrow \mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}(C) & \xleftarrow{\mathcal{F}(k)} & \mathcal{F}(D) \end{array}$$

En otras palabras, un functor $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ de una categoría inicial \mathcal{K} a una categoría final \mathcal{L} es un par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_M)$ de funciones $\mathcal{F}_O : Ob(\mathcal{K}) \rightarrow Ob(\mathcal{L})$, $\mathcal{F}_M : Mor(\mathcal{K}) \rightarrow Mor(\mathcal{L})$, tal que:

1. Si $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, entonces $\mathcal{F}_M(f) \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_O(A), \mathcal{F}_O(B))$ en el caso de functor *covariante* \mathcal{F}_* , y $\mathcal{F}_M(f) \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_O(B), \mathcal{F}_O(A))$ en el caso de un functor *contravariante* \mathcal{F}^* ;
2. Para todo objeto $A \in Ob(\mathcal{K}) : \mathcal{F}_M(1_A) = 1_{\mathcal{F}_O(A)}$;
3. Para toda $f, g \in Mor(\mathcal{K}) : \text{si } cod(f) = dom(g)$, entonces

$$\mathcal{F}_M(g \circ f) = \mathcal{F}_M(g) \circ \mathcal{F}_M(f)$$
 en el caso de functor *covariante* \mathcal{F}_* , y

$$\mathcal{F}_M(g \circ f) = \mathcal{F}_M(f) \circ \mathcal{F}_M(g)$$
 en el caso de functor *contravariante* \mathcal{F}^* .

La teoría de categorías se origina en topología algebraica, que trata de asignar invariantes algebraicos a estructuras topológicas. La regla de oro en tales invariantes es que necesitan ser *funtores* [7]. Por ejemplo, el *grupo fundamental* π_1 es un functor. La topología algebraica construye un grupo llamado *grupo fundamental* $\pi_1(X)$ para cualquier espacio topológico X , que mantiene el rastro de cuántos hoyos el espacio X tiene. Pero también, cualquier función entre espacios topológicos determina un homomorfismo $\phi : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ de los grupos fundamentales. Entonces el grupo fundamental es realmente un functor $\pi_1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$. Esto nos permite traducir completa-

mente cualquier situación que involucre *espacios topológicos* y *funciones continuas* entre ellos a una situación paralela que involucre *grupos* y *homomorfismos*, y por tanto reducir algunos problemas topológicos a problemas algebraicos.

También, la homología singular en una dimensión dada n asigna a cada espacio topológico X un grupo abeliano $H_n(X)$, su n -ésimo grupo de homología, y además a cada función continua $f : X \rightarrow Y$ de espacios topológicos un homomorfismo correspondiente $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ de grupos, y esto de cierta forma que $H_n(X)$ se convierte en un funtor $H_n : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$.

La idea principal en el *uso de funtores en topología* es que H_n o π_n da una imagen algebraica no sólo de los espacios topológicos X, Y sino también de todas las funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ entre ellos.

Similarmente, existe un funtor $\Pi_1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$, llamado el funtor grupoide fundamental, que juega un papel muy básico en topología algebraica. Así es como obtenemos de cualquier espacio X su grupoide fundamental Π_1 . Para decir qué es el grupoide $\Pi_1(X)$, necesitamos decir cuáles son sus objetos y sus morfismos. Los objetos en $\Pi_1(X)$ son sólo los puntos de X y los morfismos son sólo una clase de equivalencia de caminos en X . Más precisamente, un morfismo $f : x \rightarrow y$ en $\Pi_1(X)$ es sólo una clase de equivalencia de caminos continuos de x a y , donde dos caminos de x a y son equivalentes si uno puede ser deformado continuamente en el otro sin mover los puntos finales. (Si esta relación de equivalencia se cumple decimos que los dos caminos son homotópicos y llamamos a las clases de equivalencia clases homotópicas de caminos).

Otros ejemplos de funtores covariantes que olvidan estructura:

1. De la categoría de espacios topológicos a la categoría de conjuntos; 'olvida' la estructura topológica.
2. De la categoría de espacios métricos a la categoría de espacios topológicos con la topología inducida por la métrica; 'olvida' la métrica.

Para cada categoría \mathcal{K} , el *functor identidad* $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ toma cada \mathcal{K} -objeto y cada \mathcal{K} -morfismo y lo lleva a el mismo.

Dada una categoría \mathcal{K} y una subcategoría \mathcal{L} , tenemos el *functor inclusión* $In : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$.

Dada una categoría \mathcal{K} , un *funtor diagonal* $\Delta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ toma cada objeto $A \in \mathcal{K}$ y lo lleva al objeto (A, A) en la categoría producto $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Dada una categoría \mathcal{K} y una categoría de conjuntos \mathcal{S} , cada objeto $A \in \mathcal{K}$ determina un *Hom-funtor covariante* $\mathcal{K}[A,] : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$, un *Hom-funtor contravariante* $\mathcal{K}[, A] : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$ y un *Hom-bifuntor* $\mathcal{K}[,] : \mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$.

Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ es un funtor fiel si para todo $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ y para toda $f, g \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ implica $f = g$; es un funtor total si para cada morfismo $h \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$, existe $g \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ tal que $h = \mathcal{F}(g)$; es un encaje completo si es ambos total y fiel.

1.3. Transformaciones Naturales

Si F y G son funtores entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , entonces una transformación natural η de F a G es una familia de morfismos que satisfacen lo siguiente:

Para cada objeto X de \mathcal{C} , η asocia un morfismo $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ entre objetos de \mathcal{D} . El morfismo η_X es llamado componente de η en X .

Las componentes deben ser tales que para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} tengamos $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 Y & & F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y)
 \end{array}$$

Usualmente se usa la notación $\eta : F \Rightarrow G$.

Si para todo objeto X , η_X es isomorfismo, entonces decimos que η es un isomorfismo natural.

Más adelante abordaremos uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría

de categorías, en este, haremos uso de las transformaciones naturales. Estamos hablando del concepto de adjunción. También veremos que a diferencia de los funtores que solo podemos componer de una sola manera, las transformaciones naturales pueden ser compuestas de manera horizontal y vertical, además de poder relacionarlas con funtores con una operación llamada "whiskering".

1.4. Dualidad

Terminamos esta sección con otro de los conceptos cruciales dentro de la teoría de categorías, el concepto de límite, que junto a los conceptos de propiedad universal y funtores adjuntos, existen en un nivel muy alto de abstracción.

En teoría de categorías uno obtiene dos conceptos al precio de uno: de un concepto uno puede obtener otro volteando morfismos. Por ejemplo, si tomamos la categoría \mathcal{C} obtenemos una nueva categoría solo con invertir las flechas; le llamamos \mathcal{C}^{op} .

Comenzamos con los conceptos de propiedad universal y dualmente una propiedad couniversal, pero antes de dar una definición precisa de esto, vamos a definir lo siguiente.

Decimos que un objeto I en una categoría es inicial si para todo objeto A existe un único morfismo de I a A . En Set el objeto inicial es el conjunto vacío, el morfismo único es la función vacía. En Grp el objeto inicial es el grupo que tiene solo un elemento $\{e\}$.

Un objeto T se dice terminal o final si para cada objeto en la categoría existe un único morfismo a T . En Set el objeto final es cualquier conjunto de un elemento.

Puede haber muchos objetos iniciales o finales en una categoría, pero todos los objetos iniciales deben de ser isomorfos y análogamente todos los objetos finales deben de ser isomorfos.

1.4.1. Co/Límite

En teoría de categorías, la noción de límite captura las propiedades esenciales de construcciones universales tales como productos, pullbacks y límites inversos. La noción dual colímite, generaliza construcciones tales como uniones ajenas, sumas directas, coproductos, pushouts y límites directos.

Límites y colímites en una categoría \mathcal{C} son definidos por medio de diagramas en \mathcal{C} .

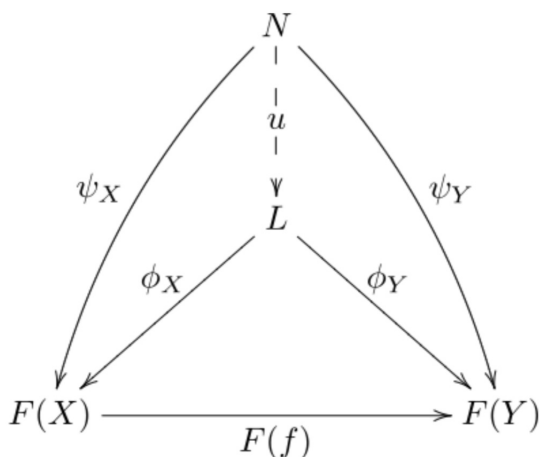
Formalmente, un diagrama de tipo J en \mathcal{C} es un funtor F de J a \mathcal{C} , $F : J \rightarrow \mathcal{C}$.

La categoría J es pensada como una categoría índice, y el diagrama F es pensado como indexar una colección de objetos y morfismos en \mathcal{C} .

1.4.2. Límites

Sea $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama de tipo J en una categoría \mathcal{C} . Un cono a F es un objeto N de \mathcal{C} junto con una familia de morfismos $\psi_X : N \rightarrow F(X)$ indexados por los objetos X de J , tal que para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en J , tenemos que $F(f) \circ \psi_X = \psi_Y$.

Un límite del diagrama $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un cono (L, ϕ) a F tal que para todo cono (N, ψ) a F existe un único morfismo $u : N \rightarrow L$ tal que $\phi_X \circ u = \psi_X$ para todo X en J .



Decimos que el cono (N, ψ) se factoriza a través del cono (L, ϕ) con la única

factorización u .

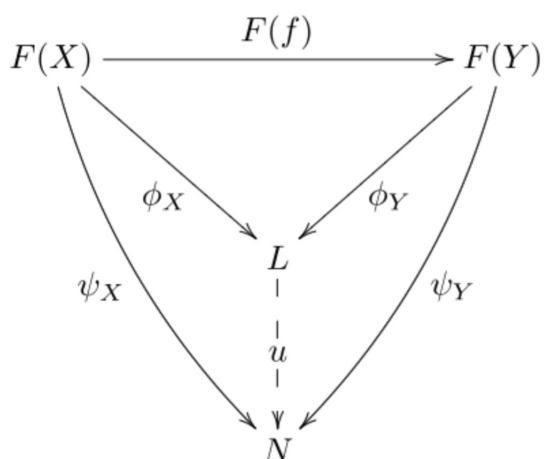
Es posible que un diagrama no tenga un límite en absoluto. Sin embargo, si un diagrama tiene límite entonces este es único hasta isomorfismo. Por esta razón uno usualmente habla del límite de F .

1.4.3. Colímites

Las nociones duales de límite y cono son colímite y co-cono respectivamente. <estas se obtienen de manera directa invirtiendo la dirección de las flechas en la definición de límite y cono anteriores.

Un co-cono a F es un objeto N de \mathcal{C} junto con una familia de morfismos $\psi_X : F(X) \rightarrow N$ indexados por los objetos X de J , tal que para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en J , tenemos que $\psi_Y \circ F(f) = \psi_X$.

Un colímite del diagrama $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un co-cono (L, ϕ) de F tal que para todo co-cono (N, ψ) de F existe un único morfismo $u : L \rightarrow N$ tal que $u \circ \phi_X = \psi_X$ para todo X en J .



1.4.4. Ejemplos

Límites

La definición de los límites es lo suficientemente general como para subsumir varias construcciones útiles en contextos prácticos. A continuación consideraremos el límite (L, ϕ) de un diagrama $F : J \longrightarrow \mathcal{C}$

Objetos Terminales: Si J es la categoría vacía, solo hay un diagrama de la forma J : el vacío (similar a la función vacía en la teoría de conjuntos). Un cono al diagrama vacío es esencialmente solo un objeto de \mathcal{C} . El límite de F es cualquier objeto que es factorizado de forma única por todos los demás objetos. Esta es justamente la definición de un objeto terminal

Productos: Si J es una categoría discreta, entonces un diagrama F es esencialmente una familia de objetos de \mathcal{C} , indexados por J . El límite L de F se llama el producto de estos objetos. El cono ϕ consiste en una familia de morfismos $\phi_X : L \longrightarrow F(X)$ llamados proyecciones del producto. En *Set* por ejemplo, los productos están dados por productos cartesianos y las proyecciones son solo las proyecciones naturales sobre los diversos factores.

Ecuales: Si J es una categoría con dos objetos y dos morfismos paralelos de un objeto a otro, entonces un diagrama de forma J es un par de morfismos paralelos en \mathcal{C} . El límite L de un diagrama de este tipo se denomina ecualizador de esos morfismos.

Núcleos: Un kernel es un caso especial de un ecualizador donde uno de los morfismos es un morfismo cero.

Pullback: Sea F un diagrama que selecciona tres objetos X, Y y Z en \mathcal{C} , donde los únicos morfismos no identidad son $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$. El límite L de F se denomina pullback o producto fibrado. Se puede visualizar muy bien como un cuadrado conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi_X} & X \\ \phi_Y \downarrow & \searrow \phi_Z & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Colímites

Ejemplos de colímites están dados por las versiones duales de los ejemplos anteriores:

Objetos iniciales: son colímites de diagramas vacíos.

Coproductos: son colímites de diagramas indexados por categorías discretas.

Pushout: son colímites de un par de morfismos con dominio común.

Capítulo 2

Elementos Básicos de Topología Diferencial

2.1. Variedades Diferenciables

Albert Einstein una vez dijo: "la naturaleza es simple sólo cuando es analizada localmente". ¿Por qué? Porque, localmente, cualquier sistema parece lineal, y por lo tanto completamente predecible y controlable [20]. La elaboración geométrica de esta idea fundamental produjo el concepto de variedad, un espacio topológico que localmente parece un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , pero globalmente puede ser totalmente diferente. Además, para poder hacer cálculo en las variedades, de la misma manera como lo hacemos en espacios ordinarios \mathbb{R}^n , las variedades necesitan ser lisas (i.e., diferenciables las veces que sean necesarias, técnicamente denotado por C^k).

Consideremos un ejemplo clásico. Comparemos la superficie de una naranja con el plano euclidiano. Una pequeña vecindad de cada punto en la superficie de la naranja (excluyendo la raíz) se parece a un plano euclidiano (denotado por \mathbb{R}^2), con sus geodésicas locales luciendo como líneas rectas. En otras palabras, una superficie lisa es, localmente, topológicamente equivalente al plano euclidiano. El mismo concepto de geometría no lineal se mantiene en cualquier dimensión. Si la dimensión es alta, estaríamos lidiando con sistemas complejos. Por tanto, mientras que sistemas linea-

los continuo-temporales viven en el espacio Euclidiano, sistemas continuo-temporales complejos viven en variedades lisas, usualmente denotados por \mathcal{M} .

Finalmente, notemos que hay dos paradigmas dinámicos de variedad lisa [7]:

- (i) La 4-variedad espacio-tiempo de Einstein, históricamente la primera y
- (ii) La n -variedad de configuración, que es el concepto geométrico moderno.

Una variedad topológica (lisa respectivamente) es un espacio separable \mathcal{M} tal que es localmente homeomorfo (difeomorfo respectivamente) al espacio euclidiano \mathbb{R}^n , teniendo las siguientes propiedades:

- (1) \mathcal{M} es un espacio de Hausdorff: para cada par de puntos $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$, hay dos subconjuntos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subset \mathcal{M}$ tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- (2) \mathcal{M} es un espacio segundo contable: Existe una base contable para la topología de \mathcal{M} .
- (3) \mathcal{M} es localmente euclidiano de dimensión n : Cada punto de \mathcal{M} tienen una vecindad que es homeomorfa (difeomorfa respectivamente) a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Esto implica que para cada punto $x \in \mathcal{M}$ existe un homeomorfismo (difeomorfismo respectivamente) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, donde U es una vecindad abierta de x en \mathcal{M} y $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n . El par (U, φ) es llamada carta coordenada en el punto $x \in \mathcal{M}$, etc.

Dada una carta (U, φ) , llamamos al conjunto U un dominio coordinado, o una vecindad coordinada de cada uno de sus puntos. Si además $\varphi(U)$ es una bola abierta en \mathbb{R}^n , entonces U es llamada bola coordinada. La función φ es llamada una función (local) coordinada, y las funciones componentes (x^1, \dots, x^n) de φ , definida por $\varphi(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m))$, son llamadas coordenadas locales en U .

Dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ son llamadas compatibles si $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_2(U_2 \cap U_1)$ son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n y las funciones $\varphi_{\alpha\beta} =$

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ llamadas de transición son k -diferenciables.

Una familia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cartas compatibles en \mathcal{M} tales que U_α formen una cubierta de \mathcal{M} es llamada un atlas. Para el atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, donde $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & U_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{M} & \\
 \phi_\alpha \swarrow & & \searrow \phi_\beta \\
 \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} & \phi_\beta(U_{\alpha\beta})
 \end{array}$$

Un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ para una variedad \mathcal{M} es llamado C^k -atlas, si todas las funciones de transición $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ son funciones de clase C^k . Dos C^k -atlas son llamados C^k -equivalentes, si su unión es otra vez un C^k -atlas para \mathcal{M} . Una clase de equivalencia de C^k -atlas es llamada C^k -estructura en \mathcal{M} . En otras palabras, una estructura lisa en \mathcal{M} es un atlas liso maximal en \mathcal{M} , i.e., un atlas que no está contenido estrictamente en otro atlas liso más grande. Por una C^k -variedad \mathcal{M} , queremos decir una variedad topológica junto con una C^k -estructura y una carta en \mathcal{M} será una carta perteneciendo a un atlas de la C^k -estructura. Variedades lisas las denotaremos por C^∞ -variedad, y la palabra lisa es usada como sinónimo de ser C^∞ . A veces los términos sistema local de coordenadas o parametrización son usados en vez de cartas. Que \mathcal{M} no esté definida con algún atlas particular, pero si con una clase de equivalencia de atlas, es una formulación matemática del principio general de covariancia. Todo sistema coordinado disponible es igualmente bueno. Una carta euclidiana puede ser suficiente para un subconjunto de \mathbb{R}^n , pero este sistema coordinado no es preferible entre otros, tales que tal vez necesiten más cartas, pero es más conveniente en otros aspectos.

2.2. Funciones entre Variedades

Una función $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} con $\mathcal{M} \ni m \mapsto \varphi(m) \in \mathcal{N}$, es llamada una función lisa, o C^k -función, si para cada $m \in \mathcal{M}$ y cada carta (V, ψ) en \mathcal{N} con $\varphi(m) \in V$ existe una carta (U, ϕ) en \mathcal{M} con $m \in U, \varphi(U) \subseteq V$, y $\Phi = \psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$ es C^k , esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} \supseteq U & \xrightarrow{\varphi} & V \subseteq \mathcal{N} \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \phi(U) & \xrightarrow{\Phi} & \psi(V)
 \end{array}$$

Una C^k -función $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es llamada difeomorfismo si φ es una biyección, $\varphi^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ existe y es C^k . Dos variedades son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas. Todas las variedades lisas y todas las funciones lisas entre ellas forman la categoría *Diff*.

Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado, una C^0 -función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ se dice diferenciable en a si existe una carta (U, ϕ) en $\gamma(a)$ tal que el siguiente límite existe y es finito

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(a) \equiv (\phi \circ \gamma)'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{(\phi \circ \gamma)(t) - (\phi \circ \gamma)(a)}{t - a} \quad (2.1)$$

Generalizando (1.2), tenemos la noción de curva en una variedad. Para una variedad lisa \mathcal{M} y un punto $m \in \mathcal{M}$ una curva en m es una C^0 -función $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a \mathcal{M} con $0 \in I$ y $\gamma(0) = m$.

Dos curvas γ_1 y γ_2 que pasan por un punto $m \in U$ son tangentes en m respecto a la carta (U, ϕ) si $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$. Por tanto, dos curvas son tangentes si tienen vectores tangentes idénticos (misma dirección y velocidad) en una carta local en una variedad.

Para una variedad lisa \mathcal{M} y un punto $m \in \mathcal{M}$, el espacio tangente $T_m\mathcal{M}$ a \mathcal{M} en m es el conjunto de clases de equivalencia de curvas que pasan en m , y donde la relación de equivalencia es que dos curvas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo vector tangente en m :

$$T_m\mathcal{M} = \{[\gamma]_m : \gamma \text{ es una curva en } m \in \mathcal{M}\} \quad (2.2)$$

Una C^k -función $\varphi : \mathcal{M} \ni m \mapsto \varphi(m) \in \mathcal{N}$ entre dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} induce una función lineal $T_m\varphi : T_m\mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(m)}\mathcal{N}$ para cada punto $m \in \mathcal{M}$, llamada función tangente, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 T_m \mathcal{M} & \xrightarrow{T_m \varphi} & T_{\varphi(m)} \mathcal{N} \\
 \pi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{N}} \\
 \mathcal{M} \ni m & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(m) \in \mathcal{N}
 \end{array}$$

con la proyección natural $\pi_{\mathcal{M}} : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, dada por $\pi_{\mathcal{M}}(T_m \mathcal{M}) = m$, que toma valores en un vector tangente v al punto $m \in \mathcal{M}$ al cual el vector está asociado i.e., $v \in T_m \mathcal{M}$.

Concluimos con esta sección con los preliminares del tema de formas diferenciales que veremos más adelante.

Dada una n -variedad, hemos visto como podemos definir el espacio tangente usando clase de equivalencia de curvas, ahora daremos una definición equivalente que necesitamos para introducir formas diferenciales más adelante: Sea un punto $p \in \mathcal{M}$, el espacio tangente $T_p \mathcal{M}$ es un espacio vectorial de dimensión n que puede ser interpretado como el conjunto de derivaciones lineales en p sobre funciones lisas: $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, donde v es lineal y tal que $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) alrededor de p , una base canónica del espacio $T_p \mathcal{M}$ está dada por: $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$.

Dualmente, denotamos al espacio cotangente $T_p^* \mathcal{M}$ definido por los funcionales lineales del espacio tangente: $T_p^* \mathcal{M} := \{ \lambda : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \}$. Los elementos de $T^* \mathcal{M}$ se llaman 1-formas diferenciales en p . En coordenadas locales, las base dual está dada por los diferenciales: $\{ dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p \}$.

Capítulo 3

Teoría de Haces

3.1. Haces Fibrados

Los haces fibrados son espacios que localmente parece un producto de dos espacios (de modo similar al que una variedad se parece a un espacio euclidiano), pero que puede poseer una estructura global diferente. Para tener una intuición visual detrás de este concepto geométrico fundamental, podemos decir que un haz fibrado E es una generalización homeomorfa de un espacio producto $B \times F$, donde B y F son variedades (las llamamos la base y la fibra, respectivamente). $\pi : E \rightarrow B$ es llamada proyección, y $E_x = \pi^{-1}(x)$ denota una fibra sobre un punto x de la base B .

Los haces fibrados juegan un papel crucial en teorías físicas, por ejemplo, los campos de gauge en teorías de Yang-Mills (es decir, en electromagnetismo, electrodinámica cuántica, cromodinámica cuántica y en general, en el modelo estándar) no son sólo 1-formas diferenciales (las definimos más adelante) A_μ^a locales sino globalmente son conexiones en haces fibrados principales.

Definición. Un haz fibrado es una cuádrupla (E, B, π, F) donde:

- E es el espacio total.
- B es la variedad base,

- $\pi : E \longrightarrow B$ es un función sobreyectiva continua llamada proyección,
- F es la fibra,

tal que para cada punto $b \in B$, existe un abierto $U \subset B$ y un homeomorfismo local: $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U \times F \\
 & \searrow \quad \quad \swarrow & \\
 & U &
 \end{array}$$

Sea (E, B, π, F) un haz fibrado. Una sección del haz es una aplicación lisa: $s : B \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_B$.

Un haz se dice trivial si $E \cong B \times F$.

Si F es un espacio vectorial entonces decimos que el haz fibrado es un haz vectorial.

3.2. Haz co/tangente

En mecánica, a cada n -variedad de configuración \mathcal{M} está asociado su $2n$ -variedad de fase-velocidad, denotado por $T\mathcal{M}$ llamado haz tangente de \mathcal{M} [7]. La variedad original \mathcal{M} es llamada variedad base de $T\mathcal{M}$. Hay también una función sobreyectiva $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, llamada proyección. Encima de cada punto $x \in \mathcal{M}$ hay un espacio tangente $T_x\mathcal{M} = \pi^{-1}(x)$ para \mathcal{M} en x , que es llamada fibra. La fibra $T_x\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$ es el subconjunto de $T\mathcal{M}$, tal que el total haz tangente, $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{m \in \mathcal{M}} T_m\mathcal{M}$, es la unión ajena de los espacios tangentes $T_x\mathcal{M}$ a \mathcal{M} para todos los puntos $x \in \mathcal{M}$. Desde la perspectiva dinámica, la cantidad más importante en el concepto de haz tagente es la función lisa $v : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ que es una inversa a la proyección π , i.e., $\pi \circ v = Id_{\mathcal{M}}$ $\pi(v(x)) = x$. Este es llamado el campo vectorial de velocidad. Su gráfica $(x, v(x))$ representa la sección cruzada del haz tangente $T\mathcal{M}$. Esto explica el término dinámico de fase-velocidad, dado al haz tangente $T\mathcal{M}$ de la variedad \mathcal{M} .

Para una n -variedad lisa \mathcal{M} , su $2n$ -haz tangente $T\mathcal{M}$ es la unión ajena de todos sus espacios tangentes $T_m\mathcal{M}$ en todos los puntos $m \in \mathcal{M}$, i.e., $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{m \in \mathcal{M}} T_m\mathcal{M}$. Para definir una estructura lisa en $T\mathcal{M}$, necesitamos especificar cómo construir coor-

denadas locales en $T\mathcal{M}$. Sean $(x^1(m), \dots, x^n(m))$ coordenadas locales de un punto $m \in \mathcal{M}$ y sean $(v^1(m), \dots, v^n(m))$ las componentes de un vector tangente en este sistema coordinado. Luego, los $2n$ números $(x^1(m), \dots, x^n(m), v^1(m), \dots, v^n(m))$ dan un sistema coordinado local en $T\mathcal{M}$.

$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{m \in \mathcal{M}} T_m\mathcal{M}$ define una familia de espacios vectoriales parametrizados por \mathcal{M} .

La imagen inversa $\pi_{\mathcal{M}}^{-1}(m)$ de un punto $m \in \mathcal{M}$ bajo la proyección natural $\pi_{\mathcal{M}}$ es el espacio tangente $T_m\mathcal{M}$. Este espacio es llamado la fibra del haz tangente sobre el punto $m \in \mathcal{M}$.

Una C^k -función $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} induce una función tangente lineal $T\varphi : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$ entre sus haces tangentes, i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{T\varphi} & T\mathcal{N} \\ \pi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{N}} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Todos los haces tangentes y sus funciones tangentes forman la categoría **TM** que es el marco natural de la dinámica *Lagrangiana* [7].

Ahora podemos formular la versión global de la regla de la cadena. Si $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ son dos funciones lisas, entonces tenemos $T_{(\psi \circ \varphi)} = T_\psi \circ T_\varphi$. En otras palabras, tenemos el funtor $T : Diff \rightarrow \mathcal{TB}$ de la categoría *Diff* de variedades lisas a la categoría **TM** de haces tangentes.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \\ \varphi \swarrow & & \searrow (\psi \circ \varphi) \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & & \\ T_\varphi \swarrow & & \searrow T_{(\psi \circ \varphi)} \\ T\mathcal{N} & \xrightarrow{T_\psi} & T\mathcal{P} \end{array}$$

Una noción dual al espacio tangente $T_m\mathcal{M}$ a una variedad lisa \mathcal{M} en un punto m es su espacio cotangente $T_m^*\mathcal{M} := \{\lambda : T_m^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}\}$ en el mismo punto m . Similarmente al haz tangente, para una variedad \mathcal{M} de dimensión n , su haz cotangente $T^*\mathcal{M}$ es

la unión ajena de todos sus espacios cotangentes $T_m^*\mathcal{M}$ en todos los puntos $m \in \mathcal{M}$, i.e., $T^*\mathcal{M} = \bigsqcup_{m \in \mathcal{M}} T_m^*\mathcal{M}$. Luego, el haz cotangente de una n -variedad \mathcal{M} es el haz vectorial $T^*\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^*$, el haz (real) tangente dual de $T\mathcal{M}$.

Si \mathcal{M} es una n -variedad, entonces $T^*\mathcal{M}$ es una $2n$ -variedad. Para definir la estructura lisa en $T^*\mathcal{M}$, necesitamos especificar cómo construir las coordenadas locales en $T^*\mathcal{M}$. Para hacer esto, sean $(x^1(m), \dots, x^n(m))$ las coordenadas locales de un punto $m \in \mathcal{M}$ y sean $(p_1(m), \dots, p_n(m))$ las componentes de un covector en este sistema coordenado. Entonces los $2n$ números $(x^1(m), \dots, x^n(m), p_1(m), \dots, p_n(m))$ dan un sistema local de coordenadas en $T^*\mathcal{M}$. Esta es la idea básica que se usa para probar que de hecho $T^*\mathcal{M}$ es una $2n$ -variedad.

$T^*\mathcal{M} = \bigsqcup_{m \in \mathcal{M}} T_m^*\mathcal{M}$ define una familia de espacios vectoriales parametrizado por \mathcal{M} , con la proyección conatural, $\pi_{\mathcal{M}}^* : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, dada por $\pi_{\mathcal{M}}^*(T_m^*\mathcal{M}) = m$, que toma un covector p en el punto $m \in \mathcal{M}$ al que está asociado i.e., $p \in T_m^*\mathcal{M}$. La imagen inversa $\pi_{\mathcal{M}}^{-1}(m)$ de un punto $m \in \mathcal{M}$ bajo la proyección conatural $\pi_{\mathcal{M}}^*$ es el espacio cotangente $T_m^*\mathcal{M}$. Este espacio es llamado la fibra del haz cotangente sobre el punto $m \in \mathcal{M}$.

En forma similar, una C^k -función $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} induce una función cotangente lineal $T_\varphi^* : T^*\mathcal{N} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ entre sus haces cotangentes, i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{N} & \xrightarrow{T^*\varphi} & T^*\mathcal{M} \\ \pi_{\mathcal{N}}^* \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{M}}^* \\ \mathcal{N} & \xleftarrow{\varphi} & \mathcal{M} \end{array}$$

Todos los haces cotangentes y sus funciones cotangentes forman la categoría $\mathbf{T}^*\mathbf{M}$ que es el marco natural para la dinámica *Hamiltoniana* [7].

Ahora podemos formular la versión dual global de la regla de la cadena. Si $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ son dos funciones lisas, entonces tenemos que $T_{(\psi \circ \varphi)}^* = T_\psi^* \circ T_\varphi^*$. En otras palabras, tenemos un cofunctor $T^* : \text{diff} \rightarrow \mathbf{T}^*\mathbf{M}$ de la categoría \mathcal{M}_n de variedades lisas a la categoría $\mathbf{T}^*\mathbf{M}$ de sus haces cotangentes.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M} & \\
 \varphi \swarrow & & \searrow (\psi \circ \varphi) \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{ccc}
 & T^*\mathcal{M} & \\
 T_\varphi^* \swarrow & & \searrow T^*(\psi \circ \varphi) \\
 T^*\mathcal{N} & \xrightarrow{T_\psi^*} & T^*\mathcal{P}
 \end{array}$$

3.2.1. Álgebra de formas

Dados dos espacios vectoriales V y W , su producto tensorial $V \otimes W$ es un espacio vectorial caracterizado por la propiedad universal de extender bilinealmente cualquier función $V \times W \rightarrow Z$.

En el contexto del espacio tangente, dado $v, w \in T_p\mathcal{M}$, su producto tensorial es un tensor contravariante de tipo $(2, 0)$: $v \otimes w \in T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}$.

Dadas dos 1-formas $\alpha, \beta \in T_p^*\mathcal{M}$, su producto tensorial $\alpha \otimes \beta$ es un tensor covariante de tipo $(0, 2)$: $\alpha \otimes \beta(v_1, v_2) := \alpha(v_1) \cdot \beta(v_2)$

Podemos extender ambas operaciones y definir, dado un $l \in \mathbb{N}$, el espacio de tensores contravariantes de orden l en p como el producto tensorial:

$$T_p^{(l,0)}\mathcal{M} := (T_p\mathcal{M})^{\otimes l} = T_p\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p\mathcal{M}, \quad (l \text{ veces}). \quad (3.1)$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos el espacio de tensores covariantes de orden k en p como el producto tensorial:

$$T_p^{(0,k)}\mathcal{M} := (T_p^*\mathcal{M})^{\otimes k} = T_p^*\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p^*\mathcal{M}, \quad (k \text{ veces}). \quad (3.2)$$

Finalmente, dados $k, l \in \mathbb{N}$ definimos el espacio de tensores mixtos de orden $l + k$ como el producto tensorial:

$$T_p^{(l,k)}\mathcal{M} := T_p\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p^*\mathcal{M}, \quad (l + k \text{ veces}). \quad (3.3)$$

Un elemento $\omega \in T_p^{(0,k)}\mathcal{M}$ es una función multilinear: $\omega : T_p\mathcal{M} \times \dots \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$,

sin embargo, estos tensores no son necesariamente antisimétricos, Para definir las formas diferenciales, necesitamos imponer esa propiedad.

Dado un tensor $\omega \in T_p^{(0,k)}\mathcal{M}$ su alternación se define como:

$$\text{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad (3.4)$$

donde S_k es el grupo simétrico de orden k .

Definimos ahora el producto wedge de formas como sigue: Sean ω y η dos formas de grado k y l respectivamente, entonces:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta). \quad (3.5)$$

Propiedades:

- Bilinealidad: $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \eta = a(\omega_1 \wedge \eta) + b(\omega_2 \wedge \eta)$
- Antisimetría graduada: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
- Asociatividad graduada: $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

Sea \mathcal{M} una n -variedad lisa. En cada punto $p \in \mathcal{M}$ entonces podemos definir el haz fibrado vectorial de k -formas diferenciales por:

$$\bigwedge^k T^* \mathcal{M} := \prod_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge^k T_p^* \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

Notemos que para cada punto $p \in \mathcal{M}$ la fibra sobre p es justamente $\bigwedge^k T_p^* \mathcal{M}$. Así, una forma forma diferencial de grado k es una sección lisa de este haz:

$$\Omega^k(\mathcal{M}) := \Gamma \left(\bigwedge^k T^* \mathcal{M} \right). \quad (3.7)$$

La derivada exterior es un operador $d : \Omega^k(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ que asocia a cada k -forma diferencial una $k+1$ -forma, y generaliza las nociones de gradiente, rotacional

y divergencia del cálculo vectorial.

Sea \mathcal{M} una n -variedad lisa, sea (U, x^1, \dots, x^n) una carta local, y sea

$$\omega \in \Omega^k(\mathcal{M}), \text{ tal que } \omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.8)$$

entonces la derivada exterior $d\omega$ se define localmente como:

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.9)$$

La derivada exterior d es un operador lineal que satisface las siguientes propiedades:

- Linealidad: $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
- Regla de Leibniz: Si $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M}), \eta \in \Omega^l(\mathcal{M})$, entonces $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- Nilpotencia: $d^2 = 0$.

3.3. Haz Principal y Asociado

3.3.1. Haz Fibrado Principal

Un haz fibrado principal es una estructura geométrica fundamental que codifica simetrías en un sistema matemático.

Intuitivamente, consiste de un espacio que localmente parece un producto cartesiano, pero globalmente puede exhibir una estructura más complicada.

Definición. Un grupo de Lie G es un conjunto que es simultáneamente un grupo y una variedad lisa y tales que las operaciones de grupo son lisas. Formalmente, un grupo de Lie es un par (G, \cdot) donde G es una variedad lisa, $\cdot : G \times G \rightarrow G$, dada por $(g, h) \mapsto gh$ y $g \mapsto g^{-1}$ son aplicaciones lisas.

Ahora sean P y M variedades lisas. Un G -haz fibrado principal consiste en una tupla (P, M, π, G) donde:

1. P es el espacio total,

2. M es el espacio base,
3. $\pi : P \longrightarrow M$ es una submersion sobreyectiva
4. G actúa libre y transitivamente en las fibras de π , i.e., para cada $x \in M$, la fibra $\pi^{-1}(x) \cong_{\text{difeo}} G$. Equivalentemente, $P/G \cong_{\text{difeo}} M$.

Adicionalmente, P es localmente trivial: existe un cubierta abierta U_α de M tal que para cada U_α , existe una trivialización local $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times G$.

Ejemplo. Dada una variedad lisa M , consideramos el haz que consiste en bases ordenadas (marcos) para el espacio tangente de cada punto de M . Dicho haz es llamado haz de marcos y es un $GL(n)$ - haz fibrado principal. Usualmente se denota por FM :

$$FM := \bigsqcup_{x \in M} Iso(\mathbb{R}^n, T_x M) \quad (3.10)$$

Con el haz de marcos tenemos una forma de codificar la geometría de una variedad sin especificar un sistema coordenado. En lugar de describir un espacio vectorial en cada punto usando coordenadas dependientes de la base, el haz de marcos mantiene la información de todas las posibles bases, permitiendo una formulación más general libre de coordenadas. Juega un papel crucial para definir conexiones, curvatura y es fundamental en las teorías de Gauge.

3.3.2. Haz Asociado

Sea (P, M, π, G) un G -haz fibrado principal y sea F una variedad lisa equipada con una acción izquierda lisa de G ,

$$G \times F \longrightarrow F, \quad (g, f) \mapsto g \cdot f \quad (3.11)$$

El haz fibrado asociado E con fibra F es el cociente del producto $P \times F$

$$E = (P \times F)/G \quad (3.12)$$

con la acción derecha de G dada por $(p, f) \cdot g = (pg, g^{-1}f)$.

Estructura del haz asociado: La proyección $\pi_E : E \rightarrow M$ está dada por $\pi_E([p, f]) = \pi(p)$ y $E_x = (P_x \times F)/G$, donde si tenemos por la trivialización local del P que $\pi_E^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times G$ entonces $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times F$ con $[p, f] \mapsto (\pi(p), f')$.

Capítulo 4

Elementos básicos de Geometría Riemanniana

4.1. Métrica Riemanniana

Históricamente, la geometría Riemanniana fue un desarrollo natural de la geometría diferencial de superficies en \mathbb{R}^3 . Dada una superficie $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, tenemos una forma natural de medir longitudes de vectores tangentes a γ , a saber, el producto interno $\langle v, w \rangle$ de dos vectores tangentes a γ en un punto p de es simplemente el producto interno de estos vectores en \mathbb{R}^3 . La forma para calcular la longitud de curva es, por definición, integrar la longitud de su vector velocidad. La definición del producto interno nos permite medir no solo la longitud de curvas sino también el área de dominios. En general, estas nociones nos llevan a definir ciertas curvas especiales, llamadas geodésicas. Tales curvas se comportan, en muchos casos, como si fueran líneas rectas y juegan un papel importante en el desarrollo de la geometría.

Definición. Sea \mathcal{M} una n -variedad lisa. Una métrica Riemanniana en \mathcal{M} es una asignación lisa: $g : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto $p \in \mathcal{M}$, g_p es un producto interno en $T_p\mathcal{M}$. La asignación

$$g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \tag{4.1}$$

cumple:

- Bilinealidad: $\forall X, Y, Z \in T_p\mathcal{M}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos:
 $g_p(aX + bY, Z) = ag_p(X, Z) + bg_p(Y, Z)$ y lo mismo en la segunda variable.
- Simetría: $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$, $\forall X, Y \in T_p\mathcal{M}$
- Definida positiva: $g_p(X, X) > 0$, $\forall X \in T_p\mathcal{M} - \{0\}$

4.2. Conexión

Un evento fundamental en el desarrollo de la geometría diferencial fue la introducción de paralelismo. Para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 , una idea equivalente puede ser descrita como sigue. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie y sea $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S , con $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial a lo largo de c tangente a S . El vector $\frac{dV(t)}{dx}$, $t \in I$, no pertenece en general al plano tangente de S , $T_{c(t)}S$. El concepto de diferenciar un campo vectorial es por tanto una noción no intrínseca en S . Para remediar este estado de cosas consideramos, en lugar de la derivada usual $\frac{dV(t)}{dx}$, la proyección ortogonal de $\frac{dV(t)}{dx}$ en $T_{c(t)}S$. Este vector proyectado ortogonalmente lo llamamos derivada covariante. La derivada covariante de V es la derivada de V visto desde el punto de vista de S . En particular, la noción de derivada covariante nos permite tomar la derivada del vector velocidad de c , el cual nos da la aceleración de la curva c en S . Es posible demostrar que curvas con aceleración cero son precisamente las geodésicas de S y que la curvatura Gaussiana de S pueden ser expresada en términos de la noción de derivada covariante.

La noción de derivada covariante tiene muchas consecuencias importantes. Deja claro que las dos ideas de curvatura y geodésicas pueden ser definidas en situaciones más generales que en Variedades Riemannianas.

Definición. Denotamos al conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ en M por $\Gamma(TM)$ y por $C^\infty(M)$ al anillo de funciones reales de clase C^∞ definidas en M . Una

conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una función

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM) \quad (4.2)$$

que es denotado por $\nabla(X, Y) := \nabla_X Y$ y satisface las siguientes propiedades: Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y $f, g \in C^\infty(M)$ entonces:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

Además hay una correspondencia única que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c : I \longrightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c , llamada derivada covariante tal que si V es inducido por un campo vectorial $Y \in \Gamma(TM)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

Una conexión afín en una variedad diferenciable M se dice simétrica cuando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$.

En un sistema coordenado (U, x) , si ∇ es simétrica, esto implica que para toda $i, j = 1, \dots, n$, tenemos que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \quad (4.3)$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, lo cual justifica la terminología.

Concluimos esta parte escribiendo una propiedad importante, la cual se deriva de un teorema (Levi-Civita): Dada una variedad Riemanniana M , existe una conexión afín única ∇ en M que satisface ser simétrica y compatible con la métrica Riemanniana. Consideramos un sistema coordenado (U, x) . Es costumbre llamar a las funciones $\Gamma_{ij}^k =$ definidas en U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, los coeficientes de la conexión ∇ en U

o los símbolos de Christoffel de la conexión. Es fácil ver que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \quad (4.4)$$

y como la matriz (g_{ij}) admite inversa (g^{km}) , obtenemos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (4.5)$$

Esta ecuación es la expresión clásica para los símbolos de Christoffel de la conexión Riemanniana en términos de g_{ij} (dados por la métrica).

4.3. Curvatura

La noción de curvatura en una variedad Riemanniana la introdujo Riemann de una manera bastante geométrica. Como pasa frecuentemente en matemáticas, una formulación con la que se podía trabajar el concepto de curvatura requirió un largo tiempo para su desarrollo. Cuando tal formulación finalmente apareció tenía la ventaja de ser fácil de usar para probar teoremas pero tenía la desventaja de estar muy alejada de la idea intuitiva inicial, como si fuera un tipo de creación arbitraria. La siguiente definición de curvatura, intuitivamente mide la cantidad que una variedad Riemanniana se desvía de ser un espacio Euclidiano.

Definición. La curvatura R de una variedad de Riemann M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \Gamma(TM)$ una función $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dada por

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.6)$$

donde $Z \in \Gamma(TM)$ y ∇ es la conexión de Riemann de M .

Una propiedad importante que cumple es la siguiente (Identidad de Bianchi)

$$R(X, Y)(Z) + R(Y, Z)(X) + R(Z, X)(Y) = 0 \quad (4.7)$$

Además R es bilineal en $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ y para cualesquiera $X, Y \in \Gamma(TM)$ el operador de curvatura $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ es lineal.

Es conveniente expresar lo anterior y algunas consecuencias en un sistema coordinado (U, x) basado en un punto $p \in M$. Indiquemos como siempre $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Luego,

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l \quad (4.8)$$

Por tanto R_{ijk}^l son las componentes de la curvatura R en (U, x) . Si

$$X = \sum_i u^i X_i, Y = \sum_j v^j Y_j, Z = \sum_k w^k Z_k \quad (4.9)$$

obtenemos, de la linealidad de R ,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l \quad (4.10)$$

Para expresar R_{ijk}^l en términos de los coeficientes Γ_{ij}^k de la conexión Riemanniana, escribimos

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k = \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right) \quad (4.11)$$

el cual, con un cálculo directo implica

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \quad (4.12)$$

Escribiendo

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks} \quad (4.13)$$

tenemos que si $\langle R(X, Y)Z, T \rangle \equiv (X, Y, Z, T)$, y además se cumple (usando las identidades de Bianchi) lo siguiente:

$$(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$$

$$(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$$

$$(X, Y, Z, T) = -(Y, X, T, Z)$$

$$(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$$

podemos escribir lo anterior como

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jik s}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}.$$

4.4. Forma de conexión y Curvatura

La formulación geométrica de campos, conexiones y curvaturas en haces fibrados ha demostrado ser una herramienta esencial tanto en geometría diferencial como en física teórica, especialmente en teorías de gauge. En este capítulo, presentaremos en detalle la forma de conexión y la forma de curvatura, estructuras fundamentales que permiten definir transporte paralelo, medir la curvatura de un haz principal y construir invariantes topológicos como las clases características.

Vamos a definir antes algunas estructuras:

Una álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a un grupo de Lie G es el espacio tangente al grupo en la identidad: $\mathfrak{g} := T_e G$.

Este espacio vectorial está dotado de una operación bilineal llamada corchete de Lie:

$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

4.4.1. Representación adjunta

El grupo G actúa sobre su álgebra de Lie mediante la representación adjunta:

$$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g}), \quad Ad_g(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1}.$$

La derivada de esta representación da lugar a la representación adjunta infinitesimal:

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad ad_X(Y) = [X, Y].$$

4.4.2. Forma de conexión

Una forma de conexión en un haz principal P es una 1-forma: $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ que satisface:

- Representación de campos fundamentales [9] $\omega(X^*) = X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
- Equivarianza bajo la acción de G : $R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$.

Estas condiciones garantizan que ω define en cada punto $p \in P$, una proyección lineal: $\omega_p : T_p P \longrightarrow \mathfrak{g}$ cuyo núcleo $H_p P := \ker \omega_p$ define el espacio horizontal, complementario al espacio vertical $V_p P := \ker d\pi_p \subset T_p P$ que es el espacio vertical tangente a la fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$.

La interpretación geométrica de la forma de conexión ω es que permite levantar curvas en \mathcal{M} a curvas horizontales en P , lo que define el transporte paralelo en el haz. Esta es la noción fundamental de conexión en un haz principal.

4.4.3. Forma de curvatura

La forma de curvatura está dada por: 1ra. Ecuación de estructura de Cartan:
 $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$.

Las propiedades que cumple la 2-forma de conexión son las siguientes:

- Equivarianza: La 2-forma de curvatura Ω es equivariante bajo la acción del grupo G : $R_g^* \Omega = Ad_g \Omega, \quad \forall g \in G$
- Horizontalidad: Ω es horizontal, es decir, se anula si uno de sus argumentos es vertical (tangente a la fibra).

La interpretación geométrica es que Ω mide la no integrabilidad de la distribución horizontal definida por ω . En otras palabras, $\Omega = 0$ si y sólo si la conexión es plana.

Capítulo 5

Una Introducción a la Topología Algebraica

5.1. Homotopía

Así como los homeomorfismos dividen a los espacios topológicos en clases, el concepto de homotopía hace lo mismo pero en las funciones entre dichos espacios [7].

Sea I un intervalo compacto unitario $I = [0, 1]$. Una homotopía de X a Y es una función continua $F : X \times I \rightarrow Y$. Para cada $t \in I$ tenemos $F_t : X \rightarrow Y$ definido por $F_t(x) = F(x, t)$ para todo $x \in X$. Las funciones F_t son llamadas etapas de la homotopía. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son dos funciones continuas, decimos que f es homotópica a g , y escribimos $f \simeq g$ si existe una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F_0 = f$ y $F_1 = g$. En otras palabras f puede ser deformada en g a través de las etapas F_t . Si $A \subset X$ es un subespacio, entonces F es una homotopía relativa a A si $F(a, t) = F(a, 0)$, para toda $a \in A, t \in I$.

La relación de homotopía \simeq es una relación de equivalencia.

De este modo, el conjunto de todas las C^0 -funciones $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y , llamado el espacio de funciones y denotado por Y^X , está partido en clases de equivalencia bajo la relación \simeq . Las clases de equivalencia de f se denotan por $[f]$, y el conjunto de todas las clases de homotopía es denotado por $[X; Y]$.

Si α es una relación de equivalencia en un espacio topológico X y $F : X \times I \rightarrow Y$

es una homotopía tal que cada factor de etapa F_t a través de X/α , i.e., $x\alpha x'$ implica $F_t(x) = F_t(x')$, luego F induce una homotopía $F' : (X/\alpha) \times I \rightarrow Y$ tal que $F' \circ (p_\alpha \times 1) = F$.

La teoría de homotopía tiene un rango de aplicación por su cuenta fuera de la topología y geometría, por ejemplo, en probar el teorema de Cauchy en teoría de variable compleja, o en resolver ecuaciones no lineales de redes neuronales artificiales.

Un conjunto *basal* (S, s_0) es un conjunto S junto con un punto distinguido $s_0 \in S$. Similarmente, un espacio topológico basal (X, x_0) es un espacio X junto un punto distinguido $x_0 \in X$. Cuando estamos interesados con espacios basales (X, x_0) , (Y, y_0) , etc., siempre requerimos que todas las funciones $f : X \rightarrow Y$ preserven esos puntos base, i.e., $f(x_0) = y_0$, y todas las homotopías $F : X \times I \rightarrow Y$ sean relativas a los puntos base, i.e., $F(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I$. Denotamos las clases de homotopía de funciones que preservan puntos base por $[X, x_0; Y, y_0]$ (donde las homotopías son relativas a x_0). $[X, x_0; Y, y_0]$ es un conjunto basal con punto base f_0 , la función constante: $f_0(x) = y_0$, para toda $x \in X$.

Un camino $\gamma(t)$ de x_0 a x_1 en un espacio topológico X es una función continua $\gamma : I \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Por tanto X^I es el espacio de todos los caminos en X con la topología compacto-abierta. Introducimos una relación \sim en X diciendo que $x_0 \sim x_1$ si y sólo si existe un camino $\gamma : I \rightarrow X$ de x_0 a x_1 . \sim es claramente una relación de equivalencia, y el conjunto de clases de equivalencia es denotado por $\pi_0(X)$.

Los elementos de $\pi_0(X)$ son llamados componentes-camino, o *0-components* de X . Si $\pi_0(X)$ contiene sólo un elemento, entonces a X se le llama conexo por caminos, o 0-conexo. Un camino cerrado, o lazo en X en el punto x_0 es un camino $\gamma(t)$ para el cual $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. El lazo inverso $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, para $0 \leq t \leq 1$. La homotopía de lazos es el caso particular del definido anteriormente para funciones continuas.

Si (X, x_0) es un espacio basal, entonces podemos considerar $\pi_0(X)$ como un conjunto basal con la 0-componente de x_0 como punto base. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función entonces f manda 0-componentes de X a 0-componentes de Y y por tan-

to define una función $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Similarmente, una función que preserva puntos base $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce una función de conjuntos basales $\pi_0(f) : \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$. De esta manera definido π_0 representa un funtor de la categoría de espacios (con punto base) topológicos a la categoría de conjuntos (con punto base).

5.2. Categorías Abelianas e Introducción a los Objetos (Co)Homológicos

Una categoría *abeliana* [7] es cierto tipo de categoría en la cual morfismos y objetos pueden ser sumados y en las cuales, núcleos y co-núcleos existen y tienen las propiedades usuales. El ejemplo prototipo motivante de categoría abeliana es la categoría de grupos abelianos \mathcal{A} . Categorías abelianas son el marco para el álgebra homológica [5], [Apen. C].

Dado un morfismo $f : A \rightarrow B$ entre dos objetos $A \equiv \text{Dom } f$ y $B \equiv \text{Cod } f$ en una categoría abeliana \mathcal{A} , entonces su *kernel*, *imagen*, *cokernel* y *coimagen* en \mathcal{A} están definidas respectivamente como:

$$\ker f = f^{-1}(e_B), \quad \text{Coker } f = \text{Cod } f / \text{Im } f, \quad \text{Im } f = f(A), \quad \text{Coim } f = \text{Dom } f / \text{Ker } f,$$

donde e_B es una unidad de B .

En una categoría abeliana \mathcal{A} una composición de morfismos

$$\bullet \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \bullet$$

es exacta en B si y sólo si $\text{Im } f \equiv \text{Ker } g$ o, equivalentemente, si $\text{Coker } f \equiv \text{Coim } g$.

Para cada morfismo f en una categoría abeliana \mathcal{A} las identidades triangulares se leen:

$$\text{Ker}(\text{Coker}(\text{Ker } f)) = \text{Ker } f, \quad \text{Coker}(\text{Ker}(\text{Coker } f)) = \text{Coker } f.$$

El diagrama (con el objeto nulo 0)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (5.1)$$

es una *sucesión corta exacta* cuando es exacta en A , en B y en C .

Como $0 \rightarrow A$ es el morfismo cero, exactitud en A significa sólo que f es *monomorfismo* (i.e., *uno a uno*, o función inyectiva); dualmente, exactitud en C significa que g es *epimorfismo* (i.e., *supra*, o función sobreyectiva). Por lo tanto, es equivalente a

$$f = \text{Ker } g, \quad g = \text{Coker } f.$$

Similarmente, la afirmación $h = \text{Coker } f$ se convierte en la afirmación de que la sucesión siguiente

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta en B y en C . Clásicamente, tal sucesión fue llamada sucesión derecha corta exacta. Similarmente, $k = \text{Ker } f$ se expresa por una sucesión izquierda corta exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Si \mathcal{A} y \mathcal{A}' son categorías abelianas, un *funtor aditivo* $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ es un funtor de \mathcal{A} a \mathcal{A}' con

$$\mathcal{F}(f + f') = \mathcal{F}f + \mathcal{F}f'$$

para cualquier par de flechas paralelas $f, f' : b \rightarrow c$ en \mathcal{F} . Se sigue que $\mathcal{F}0 = 0$.

En particular, un funtor es *exacto* si preserva núcleos y co-núcleos, que significa que

$$\text{Ker}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\text{ker } f) \quad \text{y} \quad \text{Coker}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\text{Coker } f);$$

entonces además preserva imágenes, coimágenes y lleva sucesiones exactas a sucesiones exactas.

Un funtor \mathcal{F} es izquierdo exacto si y sólo si es aditivo y $\text{Ker}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\text{Ker } f)$ para

todo morfismo f : esta condición es equivalente al requerimiento de que \mathcal{F} preserve sucesiones izquierdas cortas exactas. Similarmente un funtor \mathcal{F} es derecho exacto si y sólo si es aditivo y $Coker(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(Coker f)$ para todo morfismo f : esta condición es equivalente al requerimiento de que \mathcal{F} preserve sucesiones derechas cortas exactas. En una categoría abeliana \mathcal{A} , un complejo de cadenas es una sucesión

$$\dots \longrightarrow c_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n-1} \longrightarrow \dots$$

de morfismos, con $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para toda n . Dicha sucesión no necesita ser exacta en c_n ; las desviación de la exactitud está medida por el n -ésimo *objeto homológico*

$$H_n c : Ker(\partial_n : c_n \rightarrow c_{n-1}) / Im(\partial_{n+1} : c_{n+1} \rightarrow c_n).$$

Similarmente, un complejo de cocadenas es una sucesión

$$\dots \longrightarrow w_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} w_n \xrightarrow{d_n} w_{n-1} \longrightarrow \dots$$

de morfismos, con $d_n d_{n+1} = 0$ para toda n . Dicha sucesión no necesita ser exacta en w_n ; las desviación de la exactitud está medida por el n -ésimo *objeto cohomológico*

$$H^n w : Ker(d_{n+1} : w_n \rightarrow w_{n+1}) / Im(d_n : w_{n-1} \rightarrow w_n).$$

Un *ciclo* es una cadena C tal que $\partial C = 0$. Una *frontera* es una cadena C tal que $C = \partial B$, para cualquier otra cadena B .

Un *cociclo* (una *forma cerrada*) es una cocadena w tal que $dw = 0$. Una *cofrontera* (una *forma exacta*) es una cocadena w tal que $w = d\theta$, para cualquier otra cocadena θ .

5.3. Homología y Cohomología

Hay varios tipos de grupos de homología (simpliciales, singulares, celulares, etc.), pero todos ellos surgen de la misma manera, de una (posiblemente infinita) sucesión llamada complejo de cadenas

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \xleftarrow{\quad} \dots,$$

en la cual los C_p son *espacios vectoriales*, o más en general *grupos abelianos* (típicamente libremente-generados), y las funciones $d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ son funciones lineales (homomorfismos de grupos abelianos) que satisfacen la condición:

$$d_p \circ d_{p+1} = 0 \text{ para toda } p \geq 0. \tag{5.2}$$

Los elementos de C_p son llamados p -cadenas y las funciones d_p son llamadas operadores frontera. La intuición detrás de la condición (3.2) es que los elementos de la forma $d_p(c) \in C_{p-1}$ con $c \in C_p$ son fronteras, y una frontera no tiene frontera.

Como $d_p \circ d_{p+1} = 0$, tenemos $B_p(C) = \text{Im } d_{p+1} \subseteq \text{Ker } d_p = Z_p(C)$, entonces el cociente $Z_p(C)/B_p(C) = \text{Ker } d_p/\text{Im } d_{p+1}$ tiene sentido. El módulo cociente

$$H_p(C) = Z_p(C)/B_p(C) = \text{Ker } d_p/\text{Im } d_{p+1}$$

es el p -ésimo módulo de homología del complejo de cadenas C . Elementos de Z_p son llamados p -ciclos y elementos de B_p son llamadas p -fronteras.

Al igual que en el capítulo anterior, podemos preguntarnos qué pasa si revertimos el sentido de las flechas de una cadena compleja. De manera abstracta, así es como se obtiene la cohomología.

Una complejo de cocadenas es una sucesión

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots \longrightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C^p \xrightarrow{d^p} C^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} C^{p+2} \longrightarrow \dots$$

Los elementos de C^p son llamados cocadenas y los morfismos d^p son llamadas funciones cofrontera. Esta vez, no es claro como funciones cofrontera surgen naturalmente. Como $d^{p+1} \circ d^p = 0$, tenemos $B^p = \text{Im } d^p \subseteq \text{Ker } d^{p+1} = Z^{p+1}$, entonces el cociente $Z^p/B^p = \text{Ker } d^{p+1}/\text{Im } d^p$ tiene sentido y el módulo cociente

$$H^p(C) = Z^p/B^p = \text{Ker } d^{p+1}/\text{Im } d^p$$

es el p -ésimo módulo de cohomología del complejo de cocadenas C . Elementos de Z^p son llamados p -cociclos y elementos de B^p son llamados p -cofronteras.

A primera vista cohomología parece muy abstracta, así que veremos un ejemplo. Una forma de obtener un complejo de cocadenas es aplicar el operador (functor) $\text{Hom}_Z(\cdot, G)$ a un complejo de cadenas C , donde G es cualquier grupo abeliano. Dado un grupo abeliano fijo A , para cualquier grupo abeliano B denotamos por $\text{Hom}_Z(B, A)$ el grupo abeliano de todos los homomorfismos de B a A . Dados cualesquiera dos grupos abelianos B y C , para cualquier homomorfismo $f : B \rightarrow C$, el homomorfismo $\text{Hom}_Z(f, A) : \text{Hom}_Z(C, A) \rightarrow \text{Hom}_Z(B, A)$ está definido por

$$\text{Hom}_Z(f, A)(\varphi) = \varphi \circ f \text{ para toda } \varphi \in \text{Hom}_Z(C, A)$$

La función $\text{Hom}_Z(f, A)$ es denotada también por $\text{Hom}_Z(f, \text{Id}_A)$ o incluso $\text{Hom}_Z(f, \text{Id})$.

Observemos que el efecto de $\text{Hom}_Z(f, \text{Id})$ en φ es precomponer φ con f .

Decimos que $\text{Hom}_Z(\cdot, \text{Id})$ es un *functor contravariante* (de la categoría de grupos abelianos en sí mismo). Luego dado un complejo de cadenas

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \xleftarrow{\dots} \dots,$$

podemos formar el complejo de cocadenas

$$0 \xrightarrow{\text{Hom}_Z(d_0, \text{Id})} \text{Hom}_Z(C_0, G) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_Z(C_p, G) \xrightarrow{\text{Hom}_Z(d_{p+1}, \text{Id})} \text{Hom}_Z(C_{p+1}, G) \longrightarrow \dots$$

Obtenida aplicando $\text{Hom}_Z(\cdot, G)$ y denotada por $\text{Hom}_Z(C, G)$. La función cofron-

tera d^p está dada por

$$d^p = \text{Hom}_Z(d_{p+1}, Id)$$

que significa que para cualquier $f \in \text{Hom}_Z(C_p, G)$, tenemos

$$d^p(f) = f \circ d_{p+1}$$

Por tanto, para cualquier $(p + 1)$ -cadena $c \in C_{p+1}$ tenemos

$$(d^p(f))(c) = f(d_{p+1}(c)).$$

Obtenemos así los grupos de cohomología $H^p(\text{Hom}_Z(C, G))$ asociado con el cocadena complejo de cocadenas $\text{Hom}_Z(C, G)$. Los grupos de cohomología $H^p(\text{Hom}_Z(C, G))$ también se denotan por $H^p(C; G)$.

Hay al menos otras cuatro formas de definir grupos de cohomología de un espacio X formado directamente por un complejo de cocadenas sin usar un complejo de cadenas y *dualizandola* aplicando $\text{Hom}_Z(\cdot, G)$:

1. Si X es una variedad lisa, entonces tenemos el *complejo de De Rham*, que usa los módulos de p -formas lisas $\Omega^p(X)$ y la derivada exterior $d^p : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)$. Los correspondientes grupos de cohomología son los grupos de cohomología de De Rham $H_{dR}^p(X)$. Estos son de hecho espacios vectoriales.
2. Si X es cualquier espacio y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ cualquier cubierta abierta de X , podemos definir los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^p(X, \mathcal{U})$ de una manera puramente combinatoria. Luego podemos definir la noción de refinamiento de una cubierta y definir los grupos de cohomología $\check{H}^p(X, G)$ con valores en un grupo Abelaino G usando un proceso de límite conocido como límite directo.
3. Si X es cualquier espacio, tenemos la cocadena compleja de Alexander-Spanier que nos lleva a los grupos de cohomología de Alexander-Spanier $A_{A-S}^p(X; G)$.
4. Cohomología de gavillas, basadas en funtores derivados y resoluciones inyectivas. Esta es la forma más general de cohomología de un espacio X donde los grupos

de cohomología $H^p(X, \mathcal{F})$ con valores en una gavilla \mathcal{F} sobre un espacio X son definidos. Intuitivamente, esto quiere decir que el módulo $\mathcal{F}(U)$ de coeficientes en los cuales estos grupos toman valores podría variar con el dominio abierto $U \subseteq X$.

5.4. Clases Características

Una clase característica es una forma de asociar a cada G -haz principal $\{P : E \xrightarrow{\pi} X\}$ en b_G (conjunto de clases de isomorfismo de G -haces principales sobre X) un elemento $c(P)$ de $H^*(X)$ (grupo de cohomología de X) tal que si tenemos un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X e Y $f : X \rightarrow Y$, entonces

$$c(f^*P) = f^*c(P).$$

Vamos a analizar la definición anterior. Primero, b_G es un funtor que va de la categoría de espacios topológicos Top a la categoría de conjuntos Set

$$b_G : Top \rightarrow Set.$$

Además, $H^*(X)$ es el grupo de cohomología asociado a X según una teoría de cohomología que como vimos anteriormente, puede ser distinta en construcción, es por eso que la denotamos simplemente por H^* y este es también un funtor que va de la categoría de espacios topológicos Top a la categoría de grupos abelianos Ab

$$H^* : Top \rightarrow Ab$$

c es una transformación natural entre dichos funtores, i.e., $c : b_G \Rightarrow H^*$.

Cabe mencionar que todo lo anterior tiene sentido si tenemos una *relación* entre dos espacios topológicos X e Y , i.e., el homeomorfismo f conecta la información dada

en b_G y en H^* . Recordemos que la desviación de la exactitud del complejo de cocadenas asociada a X es medida por el *objeto cohomológico* H^* por lo que la conexión entre dichos funtores expresada en c , conecta la exactitud del complejo de cocadenas con lo que se aleja $b_G(X)$ de un producto cartesiano, i.e., si es trivial o no, o equivalentemente, si el haz asociado a X posee o no secciones. Así, las clases características son *invariantes globales* que miden la desviación de una estructura de producto local de una estructura de producto global.

5.5. Clase de Euler

La clase de Euler es una clase característica fundamental asociada a haces vectoriales reales orientables de rango par, que proporciona información topológica profunda sobre la estructura del haz fibrado. En esta sección, definimos la clase de Euler de manera explícita a partir de la forma de curvatura asociada a una forma de conexión en un haz principal. Para ello, introducimos la noción de Pfaffiano, que permite construir formas diferenciales invariantes a partir de la curvatura, y culminamos con la construcción local y global de la clase de Euler como forma cerrada y representativa de una clase de cohomología de De Rham.

Comenzamos con un haz fibrado principal P con una 1-forma de conexión ω y una 2-forma de curvatura $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$.

Para definir la clase de Euler, necesitamos introducir el Pfaffiano, una construcción algebraica fundamental en el estudio de clases características de haces fibrados orientables de dimensión par.

En matemáticas, el determinante de una matriz antisimétrica siempre se puede escribir como el cuadrado de un polinomio que opera sobre los datos de la matriz, un polinomio con coeficientes enteros que solo dependen del tamaño de la matriz. El valor de este polinomio, cuando se aplica a los coeficientes de una matriz antisimétrica, se denomina Pfaffiano de la matriz. El término Pfaffiano fue introducido por Arthur Cayley (1852) [10] quien adoptó este nombre en memoria de Johann Friedrich Pfaff.

El Pfaffiano (considerado como un polinomio) no se desvanece solo para matrices antisimétricas de orden $2n \times 2n$, en cuyo caso es un polinomio de grado n

Sea $A \in \mathfrak{so}(2n)$, es decir, una matriz real antisimétrica de dimensión $2n$. Entonces existe un polinomio $Pf(A)$ llamado Pfaffiano, tal que: $\det(A) = (Pf(A))^2$.

El Pfaffiano es una forma alternada homogénea de grado n y se puede expresar explícitamente como

$$Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}. \quad (5.3)$$

Cuando A tiene entradas en $\Omega^2(\mathcal{M})$, es decir, cuando consideramos la matriz de curvatura Ω , el Pfaffiano de Ω se convierte en una $2n$ -forma sobre \mathcal{M} .

5.5.1. Clase de Euler como elemento de cohomología

La clase de Euler se define como la clase de cohomología representada por el Pfaffiano de la forma de curvatura. Más precisamente: Sea E un haz vectorial orientado real de dimensión par, $e(E) := \left[Pf\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \right] \in H_{dR}^{2n}(\mathcal{M})$.

Es importante notar que la forma $Pf\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$ es cerrada: $dPf(\Omega) = 0$ y que la clase de cohomología representa es independiente de la elección de conexión, diferentes conexiones compatibles dan formas cohomológicamente equivalentes.

La integración de la clase de Euler sobre la variedad \mathcal{M} nos da un invariante topológico entero, llamado el número de Euler de \mathcal{M} : $\int_{\mathcal{M}} e(E)$.

Este número coincide con la característica de Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{M})$ cuando \mathcal{M} es compacta y orientada y da lugar a uno de los resultados centrales de la topología diferencial: el teorema de Gauss-Bonnet-Chern.

5.6. Las clase de Chern

Vamos a analizar uno de los ejemplos de clases características más importantes, las clases de Chern.

En topología algebraica, geometría diferencial y geometría algebraica, las clases de Chern son clases características asociadas a haces vectoriales complejos [21]. Son importantes en la teoría de Chern-Simons, teoría de nudos, los invariantes de Gromov-Witten en topología simpléctica y en la teoría de cuerdas.

Las clases de Chern son invariantes topológicos asociados a haces vectoriales en variedades lisas. La pregunta si dos haces vectoriales son los mismos puede ser difícil de responder. Las clases de Chern nos dan una forma sencilla de resolver esto: si las clases de Chern de un par de haces vectoriales difieren entonces los haces son diferentes. El enunciado recíproco, sin embargo, no es verdad. También es importante contar cuántas secciones linealmente independientes un haz vectorial tiene. Las clases de Chern ofrecen alguna información sobre esto a través, por ejemplo, del Teorema de Riemann-Roch y el Teorema del Índice de Atiyah-Singer.

Las clases de Chern son también fáciles de calcular en práctica: en geometría diferencial, las clases de Chern pueden expresarse como polinomios en los coeficientes de la forma de curvatura.

Hay muchas formas de construir las clases de Chern, podemos por ejemplo hacerlo con Teoría de Homotopía vía espacios clasificantes, o con geometría diferencial vía el tensor de curvatura.

A pesar de los paradigmas particulares, el significado intuitivo de las clases de Chern se trata de requerir ceros de una sección de un haz vectorial.

5.6.1. Construcción vía la Teoría de Chern-Weil

Dado un haz vectorial hermitiano V de rango complejo n con una forma de conexión ω sobre una variedad lisa M , representantes de cada clase de Chern (también llamada forma de Chern) $c_k(V)$ de V están dados como los coeficientes del polinomio característico de la forma de curvatura Ω de V

$$\det \left(\frac{it\Omega}{2\pi} + I \right) = \sum_k c_k(V)t^k \quad (5.4)$$

El determinante es sobre el anillo de $n \times n$ matrices cuyas entradas son polinomios en el álgebra conmutativa de formas diferenciales pares en M . La forma de curvatura Ω de V está dada por

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega \quad (5.5)$$

con ω la forma de conexión y d la derivada exterior. El escalar t es usado aquí sólo como una indeterminada para generar la suma del determinante, y finalmente, I denota la matriz identidad de $n \times n$.

Decir que la expresión dada es un representante de la clase de Chern, indica que "clase" aquí significa hasta adición de una forma diferencial exacta. Esto es, las clases de Chern son clases de cohomología en el sentido de la Cohomología de De Rham. Se puede demostrar que las clases de cohomología de las formas de Chern no dependen de la elección de la conexión en V .

5.6.2. Construcción vía la clase de Euler

Uno puede definir la clase de Chern en términos de la clase de Euler y aquí es importante el rol de la orientación del haz vectorial. La observación básica es que un haz vectorial complejo viene con una orientación canónica, debido a que en última instancia, $GL_n(\mathbb{C})$ es conexo. "Por tanto, uno simplemente define la clase de Chern top del haz como la clase de Euler (la clase de Euler del haz subyacente real).

La construcción precisa es como sigue: La idea es hacer cambio de base para obtener un haz de un rango menor. Sea $\pi : E \rightarrow B$ un haz vectorial complejo sobre un espacio paracompacto B . Pensando en B como encajado en E como sección cero, sea $B^* = E \setminus B$ y definimos un nuevo haz vectorial $E^* \rightarrow B^*$ tal que cada fibra es el cociente de una fibra F de E por la línea generada por un vector no cero v en F (un punto de B^* es especificado por una fibra F de E y un vector no cero en F). Entonces E^* tiene un rango menos que E . Finalmente usando la sucesión de Gysin para el haz fibrado

$$\pi|_{B^*} : B^* \rightarrow B : \cdots \rightarrow H^k(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(B^*; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \quad (5.6)$$

vemos que el morfismo $\pi|_{B^*}^* : H^k(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(B^*; \mathbb{Z})$ es un isomorfismo para

$$k < 2n - 1.$$

Luego

$$c_k(E) = \pi|_{B^*}^{-1} c_k(E^*) \text{ para } k < n$$

$$c_k(E) = e(E_{\mathbb{R}}) \text{ para } k=n \text{ y}$$

$$c_k(E) = 0 \text{ para } k > n.$$

Toma algo de trabajo comprobar los axiomas de las clases de Chern se satisfacen para esta definición.

Capítulo 6

Fundamentos físicos de la Cuantización Topológica

En este capítulo se da la base teórica de la cuantización topológica, en ella, intervienen conceptos como el de cuantización, formalismo de Maupertius, entre otros, por lo que su discusión será de suma importancia en lo que sigue.

6.1. Acciones y Cuantización

Es bien conocido que el desarrollo contemporáneo de la física teórica progresa acorde al paradigma de acción, este es un concepto fundamental en física de tanta importancia como la simetría. En el siguiente capítulo explicaremos este principio.

El principio de acción dice:

Entre todas las trayectorias posibles que un sistema físico puede seguir entre dos estados, la trayectoria que realmente se realiza es aquella que extremiza (hace estacionaria) una cantidad llamada acción.

La acción S es un funcional:

$$S [\textit{trayectoria}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (6.1)$$

donde:

$q(t)$ son las coordenadas generalizadas,

$\dot{q}(t)$ son las velocidades generalizadas,

L es el Lagrangiano, usualmente $T - V$ (energía cinética menos potencial),

t_1, t_2 son los tiempos inicial y final.

La condición : $\delta S = 0$ significa que pequeñas variaciones de la trayectoria no cambian la acción en primer orden.

6.2. Cuantización Canónica

La cuantización canónica es un procedimiento para pasar de un sistema clásico a un sistema cuántico.

Consiste en tomar las variables clásicas del sistema (posición q y momento p) y promoverlas a operadores que actúan sobre funciones de onda, imponiendo una nueva regla fundamental: el conmutador.

Los pasos esenciales son:

1. Comenzamos con un sistema clásico en el cual tenemos un lagrangiano $L(q, \dot{q})$ o un hamiltoniano $H(q, p)$. las variables q y p describen el estado del sistema en cada instante
2. Definimos los momentos canónicos, es decir, se calcula el momento conjugado clásico $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$
3. Construimos el hamiltoniano clásico $H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ y se resuelve \dot{q} en términos de p .
4. Promovemos q y p a operadores:
 p y q se transforman en operadores en un espacio de Hilbert y se imponen las relaciones de conmutación canónicas: $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ que significa $\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$
5. Escribimos el hamiltoniano como operador: El H clásico se convierte en un operador \hat{H} construido a partir de los operadores \hat{q} y \hat{p}

6. Finalmente tenemos la evolución de los estados cuánticos: el estado del sistema ahora está descrito por una función de onda $\psi(q, t)$ y su evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = \hat{H} \psi(q, t) \quad (6.2)$$

Concluimos esta sección con el concepto de espectro de energía canónico, crucial para el resto de este trabajo:

El espectro canónico es el conjunto de valores posibles que puede tomar un observable (como la energía, el momento, la posición, etc.) después de hacer la cuantización siguiendo reglas canónicas. El espectro se obtiene como autovalores del operador Hamiltoniano.

En pocas palabras, el espectro canónico son los valores permitidos de un observable en mecánica cuántica, obtenidos aplicando el procedimiento de cuantización canónica.

6.3. Formalismo de Maupertius

El principio de Maupertius es una formulación variacional de la mecánica clásica que afirma que la trayectoria real que sigue un sistema mecánico entre dos puntos del espacio de configuraciones es aquella que extremiza (hace estacionaria) una cantidad llamada acción reducida, manteniendo constante la energía total del sistema.

- Acción reducida y formalismo de Maupertius: Dado un sistema con coordenadas generalizadas q^i , velocidades \dot{q}^i , energía cinética $T = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$ y energía total constante $E = T + V(q)$, se define la acción reducida como: $\int_{\gamma} p_i dq^i$, donde $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij}(q) \dot{q}^j$.

Aquí, γ es una trayectoria entre dos puntos fijos en el espacio de configuraciones. Lo importante es que no se fija un tiempo de evolución: el parámetro de la trayectoria es libre, y sólo se compara la "forma" de la trayectoria, no la rapidez con la que se recorre.

- Reescritura en términos de la energía: Usando que $T = E - V(q)$, entonces $g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j = 2(E - V(q))$.

Esto permite expresar la dinámica en términos puramente espaciales, sin tiempo explícito, y motiva la siguiente reinterpretación geométrica.

- Interpretación geométrica (movimiento geodésico): Se define una nueva métrica conforme al potencial, llamada métrica de Jacobi:

$$h_{ij}(q) = 2(E - V(q))g_{ij}(q) \quad (6.3)$$

Así, el principio de Maupertius equivale a que el sistema sigue una geodésica en el espacio de configuraciones dotado con la métrica de Jacobi.

En resumen, el principio físico detrás del formalismo de Maupertius es que la trayectoria minimiza la acción reducida, donde consideramos la energía total constante. El objeto geométrico es la métrica de Jacobi y la trayectoria del sistema está dado por la geodésica en la geometría inducida por la métrica de Jacobi. Finalmente, el tiempo no aparece explícitamente: el parámetro de la trayectoria es libre.

6.4. Cuantización Topológica

Concluimos este capítulo con una breve descripción de la cuantización topológica, un tipo de cuantización alternativa a la cuantización canónica. Para más detalle de este tipo de cuantización, ver [11].

La cuantización por Fibras o Cuantización Topológica FQ surge del intento de usar la topología algebraica para obtener información sobre sistemas clásicos haciendo un análisis de los invariantes topológicos subyacentes en las variedades asociadas a dichos sistemas. El método de cuantización por fibras se puede aplicar a cualquier *configuración de campo* cuya estructura geométrica permita la existencia de un *haz principal*. Esto se enuncia en el siguiente teorema (*)

Un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad para el cual el *Hamiltoniano*

es una cantidad conservada, puede ser representado por un haz fibrado principal $(P, \Sigma, SO(k))$ de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con una variedad Riemanniana de base (Σ, h) , donde h es la métrica de *Jacobi*, Σ representa el espacio de configuración y $SO(k)$ es el grupo de estructura del haz $(P, \Sigma, SO(k))$, (para una demostración del teorema ver [11]).

Veremos más adelante la importancia de la métrica para el método de *FQ*.

Daremos a continuación los pasos a seguir en dicho método:

1. Se considera un sistema físico clásico conservativo con k grados de libertad con base en su *Lagrangiano*

$$L = \frac{1}{2}h_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q) \quad (6.4)$$

Ahora, la evolución del sistema puede ser descrito variando la *acción* $S = \int L dt$ i.e., usamos el principio de mínima acción

$$\delta S = 0$$

2. En este paso introducimos el *formalismo de Maupertius* ya que en él se tiene información de la métrica que luego será clave a la hora de utilizar un tipo particular de invariante topológico, i.e., la clase característica de *Euler*.

Vamos a reformular el principio de mínima acción de (1) de la *cuantización canónica* cambiando la acción por una nueva, llamada *acción reducida* S_0 definida

$$S_0 = \int ds, \quad \text{donde} \quad ds^2 = 2(E - V)h_{ij}dq^i dq^j \quad (6.5)$$

donde q representan las coordenadas generalizadas, E la energía total del sistema, V la energía potencial y h la métrica de *Jacobi*; luego usaremos el principio de mínima acción para S_0 .

$V(q)$ será diferente para cada sistema, y esto hará la *FQ* distinta según sea el caso.

Localmente los sistemas con lagrangiano (6.4) son sistemas invariantes bajo rotaciones, i.e., para cada $p \in \Sigma$ se tiene que $\pi^{-1}(p) \cong SO(k)$. La investiga-

ción de los invariantes topológicos del haz $(P, \Sigma, SO(k))$ es el principio de la cuantización topológica.

3. Nos encontramos en momento de utilizar la herramienta algebraica a disposición introduciendo la clase de Euler $e(P)$, que está definida en términos de las componentes de la 2-forma de curvatura $\Omega(\Sigma)$: $e(P) := \left[Pf \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right) \right] \in H_{dR}^{2n}(\Sigma)$ y a esta la vamos a integrar

$$\int_{\Sigma} e(\mathcal{P}) = n.$$

A $\int_{\Sigma} e(P)$ se le llama *espectro topológico* y este es realmente el espíritu de la cuantización por fibras.

Vamos a considerar dos ejemplos para FQ , un caso trivial y otro no trivial.

Supongamos el caso de una partícula libre:

$$V(q) = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{2} h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

además, tenemos

$$ds^2 = 2E h_{ij} dq^i dq^j, \quad g_{ij} = 2E h_{ij}$$

esto implica que las *trayectorias son líneas rectas* luego g_{ij} es *plana* y esto nos dice que *existe un sistema coordenado* en el cual $h_{ij} = \delta_{ij}$ (i.e., métrica Euclidiana), finalmente esto implica que tenemos *curvatura cero* y esto a su vez nos da que $e(\mathcal{P}) = 0$ y esto se interpreta en CT como que la partícula libre no está cuantizada. Continuemos con el caso no trivial del *oscilador armónico*, aquí $h_{ij} = m\delta_{ij}$ (ya estamos considerando una métrica conforme donde al ser $V(q) \neq 0$ tenemos que $h_{ij} \neq \delta_{ij}$) y esto significa que

$$g_{ij} = 2m \left[E - \frac{1}{2} k_1 (q^1)^2 - \frac{1}{2} k_2 (q^2)^2 \right] \delta_{ij}$$

luego

$$e(P) = \frac{1}{4\pi} (\phi_{,11} + \phi_{,22}) dq^1 \wedge dq^2$$

(donde las comas representan derivación y $g_{ij} := e^\phi \delta_{ij}$).

Para simplificar, establezcamos $k_2 = 0$, $k_1 = k$, $q^1 = q$ y así tenemos

$$\int e(\mathcal{P}) = \frac{-kb}{4\pi} \int \frac{E + \frac{1}{2}kq^2}{(E - \frac{1}{2}kq^2)^2} dq$$

y ahora integrando sobre q en el intervalo $[-q_0, q_0]$ se obtiene

$$\frac{bq_0}{q_0^2 - a^2} = n, \quad a^2 = \frac{2E}{k}$$

finalmente el análisis de la relación de los parámetros que describen al *oscilador*, i.e., la energía E , la constante k , y q_0 más unos cálculos sencillos dan la forma del espectro de energía canónico

$$q_0 = \frac{1}{C} - \left[\frac{1}{C^2} + a^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad C = \frac{2}{b} \left[\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right]; \quad \omega = \left[\frac{k}{m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

de donde

$$si \quad n = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \Rightarrow E_n = \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega$$

es el espectro de energía del oscilador armónico usando cuantización canónica. Para un cálculo más detallado ver [11].

Capítulo 7

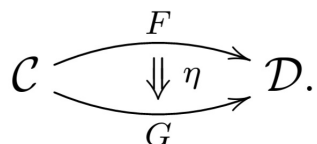
Teoría de categorías parte 2

En el capítulo anterior vimos como la cuantización topológica hace uso de la clase característica de Euler para dar una condición de cuantización, con ella logramos recuperar el espectro canónico. A este nuevo espectro le llamamos espectro topológico. Ahora, es bien sabido que el espectro canónico cumple con la propiedad aditiva para sistemas desacoplados, así que uno podría preguntarse si esta propiedad está presente en la cuantización topológica. La respuesta es afirmativa y la demostración es el corazón de este trabajo. Para ello, introdujimos el concepto de estructura monoidal, específicamente, el concepto de coproducto para formalizar la idea de desacoplamiento. Esto nos permite calcular el espectro topológico de tal manera que evitamos hacer uso de cálculos relacionados con geometría diferencial que pueden resultar bastante complejos.

Antes de presentar dicha demostración, debemos introducir algunos conceptos dentro de la teoría de categorías que son de suma importancia.

7.1. Composición de Transformaciones Naturales

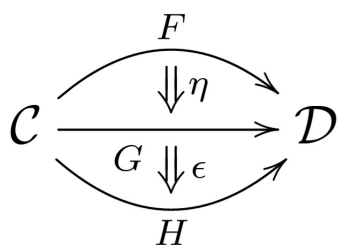
Dadas dos categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} y un par de funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, vamos a dibujar la transformación natural $\eta : F \Rightarrow G$ de la siguiente manera:



A este tipo de diagrama le llamamos diagrama globular o 2- celda.

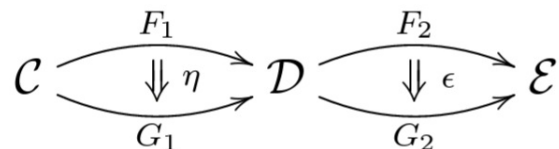
Hay dos maneras en las que podemos componer transformaciones naturales: horizontal y verticalmente.

Consideremos el siguiente diagrama



Esta es la composición vertical $F \implies H$ que tiene como componentes dadas por las composiciones $\epsilon_X \circ \eta_X : F(X) \rightarrow G(X) \rightarrow H(X)$ para todo X en \mathcal{C} .

Consideremos el siguiente diagrama



Esta es la composición horizontal, también llamado el producto Godement, $F_2 F_1 \implies G_2 G_1$ que tiene como componentes $\epsilon_{G_1(X)} \circ F_2(\eta_X) : F_2 F_1(X) \rightarrow F_2 G_1(X) \rightarrow G_2 G_1(X)$ para todo X en \mathcal{C} .

Cabe resaltar que podríamos haber usado la composición de ϵ y η en un orden distinto; ambas expresiones coinciden debido a la naturalidad de ϵ y η .

Finalmente, uno puede componer transformaciones naturales con funtores. Considerar el diagrama ("whiskering")

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_1 & & \\
 & \curvearrowright & \downarrow \eta & \longrightarrow & \\
 \mathcal{C} & & & & \mathcal{D} \xrightarrow{F_2} \mathcal{E} \\
 & \curvearrowleft & G_1 & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Entonces tenemos el "whiskering" de η y F_2 siendo la transformación natural $F_2 F_1 \implies F_2 G_1$ cuyas componentes son $F_2(\eta_X) : F_2 F_1(X) \longrightarrow F_2 G_1(X)$ para todo X en \mathcal{C} .

7.2. La categoría Cat

Cat es el nombre para la categoría de todas las categorías. Este también es el ejemplo arquetípico para una 2- categoría, la cual veremos más adelante.

Para evitar problemas teóricos relacionados con la paradoja de Russell (la cual nos habla de la imposibilidad de tener el conjunto de todos los conjuntos), es usual restringir Cat a categorías pequeñas. Para ser explícitos, definimos Cat la categoría con categorías pequeñas como objetos y funtores como morfismos. La composición de morfismos es la composición de funtores clásica.

Esta es probablemente la definición mas común de Cat en la literatura.

Nosotros vamos a usar Cat como una 2- categoría estricta con categorías pequeñas como objetos, funtores como morfismos y transformaciones naturales como 2- morfismos.

Aquí la composición vertical de 2- morfismos es la composición evidente de componentes de las transformaciones naturales mientras que la composición horizontal esta dada por su producto de Godement.

El concepto de 2- categoría estricta es la generalización mas simple de categorías a n - categorías en el área de teoría de categorías superiores. Es la categorificación de un nivel del concepto de una categoría.

Para nosotros las 2- categorías van a ser de suma importancia ya que estas proveen el contexto para discutir adjunciones y monadas, ademas de una de las piedras angulares de este trabajo: las categorías monoidales.

7.3. Adjunción

En teoría de categorías, una adjunción es una relación que pueden tener dos funtores correspondiendo intuitivamente a una forma débil de equivalencia entre dos categorías.

Hay varias definiciones equivalentes para los funtores adjuntos:

La definición a través de flechas universales es fácil de enunciar y requieren verificaciones mínimas cuando se construye un funtor adjunto o se demuestra que dos funtores son adjuntos.

La definición a través de *hom - sets* hace que la simetría sea más evidente, y es la razón para usar la palabra adjunto.

La definición a través de la unidad y counidad es conveniente para las demostraciones sobre funtores que se sabe que son adjuntos, porque proporcionan fórmulas que pueden ser manipuladas directamente.

Aquí solo enunciaremos la definición vía *hom - sets* y unidad/counidad, pero las tres son equivalentes

7.3.1. Hom-Sets

Una adjunción entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} consiste en dos funtores $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ y un isomorfismo natural $\Phi : \text{hom}_{\mathcal{C}}(L-, -) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{D}}(-, R-)$ que especifica una familia de biyecciones $\Phi : \text{hom}_{\mathcal{C}}(LY, X) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{D}}(Y, RX)$ para todos los objetos X en \mathcal{C} e Y en \mathcal{D} , i.e., $\text{hom}_{\mathcal{C}}(LY, X) \cong \text{hom}_{\mathcal{D}}(Y, RX)$. En este caso decimos que L es adjunto izquierdo de R y que R es adjunto derecho de L y usamos la notación $L \dashv R$.

7.3.2. Ejemplo: Adjunción entre el espacio de lazos y la suspensión topológica

Uno de los primeros ejemplos que nos encontramos en un curso de topología algebraica es la adjunción entre el funtor espacio de lazos y el funtor suspensión topológica $\langle \Sigma -, - \rangle \cong \langle -, \Omega - \rangle$. Vamos a discutirlo de manera breve: $\langle \Sigma X, Y \rangle \cong \langle X, \Omega Y \rangle$.

Esta notación codifica el isomorfismo en $Top2_{\bullet}$ hasta homotopía. Otra notación es $[Maps_*(\Sigma X, Y)] \cong [Maps_*(X, \Omega Y)]$ donde queda claro las clases de equivalencia bajo la relación de homotopía.

Recordemos que $Maps_*(X, Y)$ esta definido por

$$Maps_*(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\} \quad (7.1)$$

tal que si $*$ es punto base de X entonces $f(*)$ es punto base de Y .

ΣX es la suspensión reducida definido por

$$\Sigma X := (X \times I) / (X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$$

(7.2)

donde $*$ es punto base de X y $I = [0, 1]$.

Por otra parte el espacio de lazos ΩY esta dado por:

$$\Omega Y := \{\gamma : I \longrightarrow Y \mid \gamma \text{ es continua con } \gamma(0) = \gamma(1) = \text{pto base de } Y\} \quad (7.3)$$

El isomorfismo $[Maps_*(\Sigma X, Y)] \cong [Maps_*(X, \Omega Y)]$ proviene de lo siguiente: Consideremos conjuntos X, Y y Z y

$$hom(X \times Z, Y) := \{f : X \times Z \longrightarrow Y \mid f \text{ es función}\}$$

(7.4)

Definimos

$$\Phi : \text{hom}(X \times Z, Y) \longrightarrow \text{hom}(X, \text{hom}(Z, Y)) \quad (7.5)$$

por $\Phi(F)(x)(z) := F(x, z)$. Φ es biyección (Φ^{-1} se define igual).

De lo anterior se sigue que

$$\Phi : \text{Map}(X \times Z, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Z, Y)) \quad (7.6)$$

es biyección y más aún, es isomorfismo en $\text{Top}2_{\bullet}$, basta considera la topología compacto-abierta y usar que la función auxiliar *evaluación*

$$\text{ev} : \text{Map}(Z, Y) \times Z \longrightarrow Y \quad (7.7)$$

es continua.

Luego de lo anterior, se sigue que

$$\Phi : \text{Map}(X \times I, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(I, Y)) \quad (7.8)$$

es isomorfismo en $\text{Top}2_{\bullet}$. Finalmente si consideramos

$$\Phi : \text{Map}((\Sigma X, *), (Y, *)) \longrightarrow \text{Map}((X, *), (\Omega Y, C_0)) \quad (7.9)$$

con C_0 el lazo constante $= *$, punto base de Y , tenemos el isomorfismo

$$\text{Map}((\Sigma X, *), (Y, *)) \cong \text{Map}((X, *), (\Omega Y, C_0)) \quad (7.10)$$

que es equivalente a $\text{Map}_*(\Sigma X, Y) \cong \text{Map}_*(X, \Omega Y)$.

Esto último ya tiene la estructura de adjunción

$$\text{hom}(FX, Y) \cong \text{hom}(X, GY) \quad (7.11)$$

En resumen, la adjunción $\langle \Sigma X, Y \rangle \cong \langle X, \Omega Y \rangle$ proviene de los isomorfismos para cada X, Y en $Top2_\bullet$, $Map_*(\Sigma X, Y) \cong Map_*(X, \Omega Y)$ los cuales provienen de la biyección $\text{hom}(X \times Z, Y) \cong \text{hom}(X, \text{hom}(Z, Y))$.

Como nota interesante, esta última biyección nos lleva a una versión más general de adjunción, la adjunción *Tensor – Hom*

$$\text{hom}(X \otimes Z, Y) \cong \text{hom}(X, \text{hom}(Z, Y)) \quad (7.12)$$

Los funtores involucrados junto con sus versiones más generales *Ext* y *Tor* forman la base del álgebra homológica.

7.3.3. Unidad/Counidad

Una adjunción entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} consiste en dos funtores $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y dos transformaciones naturales

$$\varepsilon : FG \implies 1_{\mathcal{C}}$$

$$\eta : 1_{\mathcal{D}} \implies GF$$

llamadas counidad y unidad respectivamente, tales que

$$\begin{array}{ccccc} & F\eta & & \varepsilon F & \\ \mathbf{F} & \longrightarrow & \mathbf{FGF} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ & \eta G & & G\varepsilon & \\ \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{GFG} & \longrightarrow & \mathbf{G} \end{array}$$

son las transformaciones naturales identidad 1_F y 1_G respectivamente. I.e., se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 1_F &= \varepsilon F \circ F \eta \\ 1_G &= G \varepsilon \circ \eta G \end{aligned}$$

Las condiciones anteriores se les conocen comúnmente como identidades triangulares o identidades zigzag ya que en diagramas conmutativos forman triángulos y en diagramas de cuerdas (que veremos más adelante) forman justamente zigzags.

7.4. Mónadas

En general, una categoría involucra mucha información, tal como la clase de objetos, el conjunto de morfismos y la regla de composición. esto puede ser difícil de entender especialmente si la categoría es construida en alguna forma implícita tal como alguna construcción universal. Monadas y en particular los teoremas de Barr-Beck nos dan una manera de reducir la complejidad de ciertas categorías realizándolas como categorías de módulos; una vez que entendemos la categoría mas simple (como la categoría de conjuntos, espacios vectoriales, etc.) y el álgebra actuando en ella (llamada monada en este caso), entendemos de manera completa la categoría original[12]. Una monada actuando en una categoría \mathcal{C} es un endofunctor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ junto a dos transformaciones llamadas multiplicación y unidad respectivamente $\mu : T^2 \Rightarrow T$ y $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ tales que los siguientes diagramas, asociatividad y unidad respectivamente

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \\ T\eta \downarrow & \searrow & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

conmutan.

Una notación usual para una monada es la de tripleta (T, μ, η) . Existe una estrecha relación entre adjunciones y monadas, de hecho dada una adjunción, siempre podemos inducir una monada:

Sea $L : \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D} : R$ una adjunción $L \dashv R$. Entonces RL tiene estructura de monada en \mathcal{C} .

La demostración de esta afirmación se sigue de definir el endofunctor justamente por $T := RL$, la unidad de la monada es $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Longrightarrow RL$ y la multiplicación μ está inducida por la counidad de la adjunción $\epsilon : LR \Longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ como: $\mu : RLRL \Longrightarrow RL$. Los axiomas de monada se siguen de las identidades triangulares de la adjunción y la naturalidad de la unidad y counidad de η y ϵ de la misma. Esta importante relación también se puede probar fácilmente usando diagramas de cuerdas, estos son una forma de hacer cálculos en categorías monoidales y en general en 2- categorías.

7.5. Categorías Monoidales

Una buena manera de pensar sobre teoría de categorías es que la teoría de categorías es un refinamiento (o categorificación) del álgebra ordinaria. En otras palabras, existe un diccionario entre estas dos áreas tal que estructuras algebraicas son recuperadas de las correspondientes estructuras categóricas al pasar por el conjunto de clases de isomorfismo de objetos.

Por ejemplo, la noción de una categoría (pequeña) es la categorificación de la noción de conjunto. Similarmente categorías abelianas son la categorificación de grupos abelianos.

Este diccionario va sorprendentemente mas lejos, y muchas construcciones importantes vienen del intento de entrar en la traducción categórica de una noción algebraica. En particular, la noción de categoría monoidal es la categorificación de la noción de monoide. Cabe resaltar que una monada es una estructura que es similar a un monoide pero que vive en una bicategoría en lugar de en una categoría monoidal.

Recordemos que un monoide puede ser definido como un conjunto M con una operación de multiplicación asociativa $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ con un elemento 1 tal que $1^2 = 1$ y las funciones $1 \cdot, \cdot 1 : M \longrightarrow M$ son biyecciones (esto es equivalente al axioma usual $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$).

Como es costumbre en teoría de categorías, para categorificar la definición de mono-

de, tenemos que reemplazar las igualdades en la definición de monoide, es decir, la asociatividad $(xy)z = x(yz)$ y la ecuación $1^2 = 1$ por isomorfismos que satisfacen algunas propiedades de consistencia, y la palabra biyección por la palabra equivalencia (de categorías). Esto nos lleva a la definición siguiente.

Una categoría monoidal es una tupla $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{I}, \alpha, \lambda, \rho)$ donde \mathcal{M} es una categoría, $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es un bifuntor llamado producto, un objeto $\mathbf{I} \in \mathcal{M}$ llamado objeto unidad,

$\alpha : (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ un isomorfismo natural cuyas componentes son

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C) \quad (7.13)$$

con $A, B, C \in \mathcal{M}$ llamado isomorfismo de asociatividad o asociador, un isomorfismo natural $\lambda : \mathbf{I} \otimes - \rightarrow -$ llamado unidad izquierda, con componentes $\lambda_B : \mathbf{I} \otimes B \rightarrow B$, un isomorfismo natural $\rho : - \otimes \mathbf{I} \rightarrow -$ llamado unidad derecha, con componentes $\rho_A : A \otimes \mathbf{I} \rightarrow A$ tales que se cumplen los siguientes 2 axiomas (los siguientes diagramas son conmutativos):

El axioma pentagonal

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A \otimes B,C,D}} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ \downarrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} & & & & \uparrow \alpha_{A,B,C} \otimes 1_D \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \end{array}$$

El axioma triangular

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (I \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & (A \otimes I) \otimes B \\ & \searrow 1_A \otimes \lambda_B & \swarrow \rho_A \otimes 1_B \\ & A \otimes B & \end{array}$$

Esto es, $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$, $\lambda_A : \mathbf{I} \otimes A \cong A$ y $\rho_A : A \otimes \mathbf{I} \cong A$.

Si los isomorfismos naturales α , λ y ρ son identidades, decimos que la categoría monoidal es estricta.

Una restricción γ en una categoría monoidal \mathcal{M} es una elección de isomorfismo $\gamma_{A,B} :$

$A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$, para cada par de objetos A y B . En particular, para tener una restricción de conmutatividad, uno debe de pedir que $A \otimes B \cong B \otimes A$ para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{M}$

Una categoría monoidal trenzada \mathcal{M} es una categoría monoidal equipada con un trenzado, esto es, una restricción conmutativa γ que además satisface dos axiomas (los siguientes diagramas son conmutativos, se les conoce como identidades hexagonales y α es el asociador que viene de la estructura monoidal.):

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\gamma} (B \otimes C) \otimes A & \\
 \alpha \nearrow & & \searrow \alpha \\
 (A \otimes B) \otimes C & & B \otimes (C \otimes A) \\
 \gamma \otimes 1 \searrow & (B \otimes A) \otimes C \xrightarrow{\alpha} B \otimes (A \otimes C) & 1 \otimes \gamma \nearrow
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\gamma} C \otimes (A \otimes B) & \\
 \alpha^{-1} \nearrow & & \searrow \alpha^{-1} \\
 A \otimes (B \otimes C) & & (C \otimes A) \otimes B \\
 1 \otimes \gamma \searrow & A \otimes (C \otimes B) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (A \otimes C) \otimes B & \gamma \otimes 1 \nearrow
 \end{array}$$

Se puede probar que el isomorfismo natural γ junto con α, λ, ρ que vienen de la estructura monoidal, satisfacen varias condiciones de coherencia, estas nos dicen básicamente que varias composiciones de morfismos de estructura son iguales. En particular, el trenzado conmuta con las unidades, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & I \otimes A \\
 \rho \searrow & & \nearrow \lambda \\
 & A &
 \end{array}$$

Una categoría monoidal trenzada es llamada simétrica si γ también satisface $\gamma_{A,B} \circ \gamma_{B,A} = Id_{A \otimes B}$, para todo par de objetos A, B .

Finalmente una categoría monoidal es distributiva si su producto monoidal distribuye sobre coproductos. Esto es, el producto monoidal preserva coproductos en cada

variable, i.e., los siguientes isomorfismos canónicos

$$\coprod_i (X \otimes Y_i) \longrightarrow X \otimes \coprod_i Y_i \quad (7.14)$$

y

$$\coprod_i (X_i \otimes Y) \longrightarrow \coprod_i X_i \otimes Y \quad (7.15)$$

7.5.1. Funtores monoidales

Finalmente funtores monoidales son funtores entre categorías monoidales que preservan la estructura monoidal, esto es, se deben de pedir condiciones de coherencia que aseguren que dichas estructuras monoidales en efecto se preserven. A veces se requiere que estas condiciones satisfagan propiedades adicionales además de preservar la multiplicación y la unidad.

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{I}_{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{D}, \bullet, \mathbf{I}_{\mathcal{D}})$ categorías monoidales. Un functor monoidal laxo de \mathcal{C} a \mathcal{D} consiste en un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ junto una transformación natural

$$\phi_{A,B} : FA \bullet FB \Longrightarrow F(A \otimes B) \quad (7.16)$$

entre funtores $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y un morfismo $\phi : \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \longrightarrow F\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ llamados los morfismos de estructura o de coherencia, que son tales que para cada terna de objetos A, B, C de \mathcal{C} los diagramas

$$\begin{array}{ccc} (FA \bullet FB) \bullet FC & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{D}}} & FA \bullet (FB \bullet FC) \\ \phi_{A,B} \bullet 1 \downarrow & & \downarrow 1 \bullet \phi_{B,C} \\ F(A \otimes B) \bullet FC & & FA \bullet F(B \otimes C) \\ \phi_{A \otimes B, C} \downarrow & & \downarrow \phi_{A, B \otimes C} \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{F\alpha_{\mathcal{C}}} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 FA \bullet I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{1 \bullet \phi} & FA \bullet FI_{\mathcal{C}} \\
 \rho_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \phi_{A, I_{\mathcal{C}}} \\
 FA & \xleftarrow{F\rho_{\mathcal{C}}} & F(A \otimes I_{\mathcal{C}}) \\
 I_{\mathcal{D}} \bullet FB & \xrightarrow{\phi \bullet 1} & FI_{\mathcal{C}} \bullet FB \\
 \lambda_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \phi_{I_{\mathcal{C}}, B} \\
 FB & \xleftarrow{F\lambda_{\mathcal{C}}} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes B)
 \end{array}$$

conmutan en la categoría \mathcal{D} . Las transformaciones naturales α, λ, ρ son parte de la estructura monoidal de \mathcal{C} y \mathcal{D} .

Si los morfismo de coherencia $\phi_{A,B}, \psi$ son invertibles, entonces el funtor monoidal se dice fuerte.

Si los morfismo de coherencia $\phi_{A,B}, \psi$ son identidades, entonces el funtor monoidal se dice estricto.

Un funtor monoidal trenzado es un funtor monoidal entre dos categorías monoidales trezadas (con trenzado γ) tal que el siguiente diagrama conmuta para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc}
 FA \bullet FB & \xrightarrow{\gamma_{FA, FB}} & FB \bullet FA \\
 \phi_{A, B} \downarrow & & \downarrow \phi_{B, A} \\
 F(A \otimes B) & \xrightarrow{F\gamma_{A, B}} & F(B \otimes A)
 \end{array}$$

A continuación veremos dos ejemplos de categorías monoidales y dedicaremos un capítulo entero a un ejemplo de funtor monoidal. Este será de suma importancia en lo que resta.

7.5.2. La categoría $Vect$

Dado un campo K , la categoría de espacios vectoriales $Vect_K$ es la categoría cuyos objetos son espacios vectoriales y cuyos morfismos son transformaciones lineales.

Cuando el campo se sobreentiende escribimos solo $Vect$.

Sabemos que si V, W y Z son espacios vectoriales, entonces $V \otimes_K (W \otimes_K Z) \cong (V \otimes_K W) \otimes_K Z$. Además, $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$ y $V \otimes_K K \cong V \cong K \otimes_K V$.

Así,

$$(Vect_K, \otimes := \otimes_K, \mathbf{I} := K) \quad (7.17)$$

es una categoría monoidal trenzada, simétrica ya que el isomorfismo natural (componentes) $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$ es su propia inversa.

Y más aún, es distributiva si consideramos el coproducto en $Vect_K$ la suma directa ya que se tiene

$$\bigoplus_i (V \otimes_K W_i) \cong V \otimes_K \bigoplus_i W_i \quad (7.18)$$

y

$$\bigoplus_i (V_i \otimes_K W) \cong \bigoplus_i V_i \otimes_K W \quad (7.19)$$

Al estudio de $Vect$ se le conoce como álgebra lineal.

7.5.3. La categoría $Cob(n)$

Un cobordismo (orientado) Σ de una variedad lisa (orientada) X_{in} a otra variedad lisa (orientada) X_{out} es una variedad lisa con frontera tal que su frontera es la unión ajena

$$\partial\Sigma \simeq_{difeo} X_{in} \amalg X_{out} \quad (7.20)$$

con orientación inducida compatible con la dada en X_{in} y siendo la opuesta de X_{out} .

Mientras que $X_{in} \amalg X_{out}$ es la frontera de Σ , recíprocamente Σ es la co-frontera de $X_{in} \amalg X_{out}$. Esta es una parte de la razón del *co* en cobordismo, pero algunas veces solo decimos bordismo. La diferencia es más pronunciada cuando uno distingue entre teoría de homología y cohomología. También es costumbre restringirnos a variedades compactas.

Con algunas condiciones técnicas sobre las inclusiones en la frontera, entonces varieda-

des $(n-1)$ - dimensionales con clases de difeomorfismo de cobordismo n -dimensionales entre ellas, forman una categoría, la categoría de cobordismos $Cob(n)$ cuyos objetos son variedades de dimensión $n-1$, cuyos morfismos son cobordismos y su composición es la operación de pegado de cobordismos a través de las fronteras.

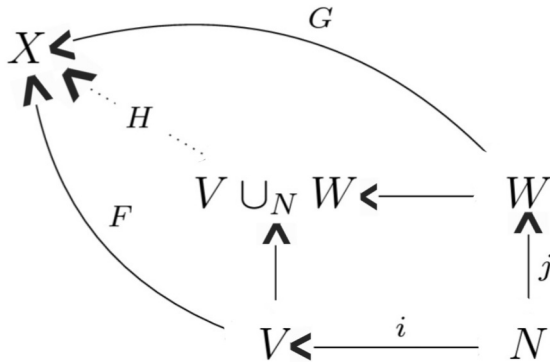
Vamos a analizar esto con más detalle: demostraremos que ser cobordantes es una relación de equivalencia. Esto es básicamente probar que tenemos en efecto una categoría.

Primero, sea X un espacio, vamos a considerar parejas (M, f) donde M es una variedad lisa compacta de dimensión $n-1$ y $f : M \rightarrow X$ es una función continua, Dadas dos parejas (M, f) y (N, g) , $dim N = dim M$, decimos que son cobordantes si existe una variedad lisa compacta con frontera Σ y una función $F : \Sigma \rightarrow X$ continua tal que $\partial \Sigma \cong_{difeo} M \amalg N$ y $F|_M = f$ y $F|_N = g$.

(Reflexividad \sim morfismo Identidad): $(M, f) \sim_{cob} (M, f)$. Basta considerar el cobordismo $\Sigma = M \times [0, 1]$ y $F : M \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por $F(x, t) := f(x)$, así, $\partial \Sigma = M \times \{0\} \cup M \times \{1\} := M \amalg M$ y $F|_{M \times \{0\}} = f$, $F|_{M \times \{1\}} = f$.

(Simetría \sim conmutatividad coproducto $(M, f) \sim_{cob} (N, g) \implies (N, g) \sim_{cob} (M, f)$): Como $(M, f) \sim_{cob} (N, g)$ entonces existe Σ y $F : \Sigma \rightarrow X$ tales que $\partial \Sigma = M \amalg N \cong_{difeo} N \amalg M$ y $F|_M = f$, $F|_N = g$. Por tanto, $(N, g) \sim_{cob} (M, f)$.

(Transitividad \sim asociatividad $(M, f) \sim_{cob} (N, g)$ y $(N, g) \sim_{cob} (O, h) \implies (M, f) \sim_{cob} (O, h)$): Supongamos que $(M, f) \sim_{cob} (N, g)$ y $(N, g) \sim_{cob} (O, h)$ entonces existen espacios V, W tales que $\partial V \cong M \amalg N$ y $\partial W \cong N \amalg O$ y funciones F, G tales que $F|_M = f$, $F|_N = g$, $G|_N = g$ y $G|_O = h$. Consideremos el pushout



donde $V \cup_N W$ es la notación para el pegado a través de N .

Entonces $\partial(V \cup_N W) \cong_{difeo} M \amalg O$ y $H|_V = F$, $H|_W = G$, $F|_M = f$ y $G|_O = h$. Por tanto $(M, f) \sim_{cob} (O, h)$.

Ahora si vista como categoría tenemos que :

$Obj(Cob(n)) = \{M | M \text{ es variedad lisa compacta de dimensión } n - 1\}$

$Mor(Cob(n)) = \{Cobordismos\}$, esto es dados un par de objetos M, N , i.e., variedades lisas compactas de dimensión $n - 1$, un morfismo entre dichos objetos es un cobordismo de M a N : i.e., una variedad Σ orientada de dimensión n , equipada con un difeomorfismo que respeta orientación $\partial\Sigma \cong_{difeo} \overline{M} \amalg N$ donde \overline{M} denota la variedad M equipada con la orientación opuesta.

La composición en esta categoría está dada por la transitividad de \sim_{cob} .

Para toda M variedad lisa, tenemos el morfismo identidad dado por el cobordismo $\Sigma := M \times [0, 1]$

y finalmente la asociatividad de los morfismos en Cob está dado otra vez por la transitividad de \sim_{cob} y por la asociatividad de la unión ajena:

$$(M \amalg N) \amalg \left[(N \amalg O) \amalg (O \amalg P) \right] \cong_{difeo} \left[(M \amalg N) \amalg (N \amalg O) \right] \amalg (O \amalg P) \quad (7.21)$$

Terminamos esta sección dotando de una estructura monoidal a $Cob(n)$, donde el producto monoidal esta dado por la unión ajena de variedades: $(Cob(n), \otimes := \amalg, \mathbf{I} := \{\})$ donde la unidad $\mathbf{I} := \{\}$ el conjunto vacío lo estamos viendo como variedad de dimensión $n - 1$. Más aún, como $M \amalg N \cong_{difeo} N \amalg M$ (simetría de \sim_{cob}), entonces tenemos una categoría monoidal trenzada y además, este difeomorfismo es su propia inversa, esto es:

$$\phi : M \amalg N \longrightarrow N \amalg M \quad (7.22)$$

dada por y

$$\phi^{-1} : N \amalg M \longrightarrow M \amalg N \quad (7.23)$$

entonces $\phi^{-1} \circ \phi(M \amalg N) \cong_{difeo} M \amalg N$ por lo que tenemos una categoría monoidal simétrica.

Capítulo 8

Teoría Cuántica de Campos

Topológica o TQFT

El punto de partida para esta sección es la definición de Atiyah para una Teoría Cuántica de Campos Topológica o *TQFT* por sus siglas en inglés. Esta noción es bastante concreta y no es difícil clasificar de manera explícita las *TQFT* de dimensiones ≤ 2 . En [13] se discute algunas de las dificultades que nos encontramos cuando tratamos de generalizar esta clasificación a dimensiones superiores. Para tratar estas dificultades, se introduce la noción de *TQFT* extendidas. Esta noción, junto con la Hipótesis de Cobordismo de Baez-Dolan [14], están expresadas usando el lenguaje de la Teoría de Categorías superiores.

Atiyah sugiere un conjunto de axiomas para una *TQFT* [15] que fueron inspirado por los axiomas de Teoría Conforme de Campos de G. Segal. Los axiomas de Atiyah están contruidos con pegados a la frontera con una transformación diferenciable (topológica o continua), mientras con Segal con una transformación conforme. Estos axiomas han sido relativamente útiles para tratamientos matemáticos de *QFT* tipo-Schwarz, aunque no es claro que capten toda la estructura de *QFT* tipo-Witten. La idea básica es que una *TQFT* es un funtor de una determinada categoría de cobordismos a la categoría de espacios vectoriales.

En *TQFT* tipo-Schwarz, las funciones de correlación calculadas por la integral de camino son invariantes topológicos porque la integral y los observables de campo

cuántico son explícitamente independientes de la métrica. Por ejemplo, en el modelo BF , el espacio-tiempo es una variedad bidimensional \mathcal{M} , los observables son dan a partir de una 2-forma F , un auxiliar escalar B y sus derivados. La acción (que determina la integral de camino) es

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} BF$$

La métrica del espacio-tiempo no aparece en esta teoría, por lo que la teoría es explícitamente topológicamente invariante. Otro ejemplo más famoso es la teoría de Chern-Simons, que puede utilizarse para calcular invariantes de nudo.

En las $TQFT$ tipo-Witten, la invarianza topológica es más sutil. Por ejemplo el Lagrangiano para el modelo dependen explícitamente de la métrica, pero uno puede mostrar que el valor esperado de la función de partición y una clase especial de funciones de correlación son en realidad un difeomorfismo invariante.

Esto es muy importante ya que lo que se propone en este trabajo es que la Cuantización por Fibras o FQ por sus siglas en inglés, puede ser descrita a través de esta formulación, en lo que hemos llamado Cuantización por Fibras Topológica o TFQ por sus siglas en inglés, debido a que el Lagrangiano para la FQ depende también de la métrica.

Sea K un campo. Una $TQFT$ de dimensión n es un funtor monoidal simétrico

$$Z : Cob(n) \longrightarrow Vect_K. \tag{8.1}$$

Desenredando la definición anterior, vemos que una $TQFT$ de dimensión n esta dada por la siguiente información:

1. Para cada variedad orientada cerrada de dimensión $n - 1$ tenemos un espacio vectorial $Z(M)$.
2. Para cada cobordismo orientado Σ de una variedad de dimensión $(n - 1)$ M a una variedad N de la misma dimensión, tenemos una transformación lineal $Z(\Sigma) : Z(M) \longrightarrow Z(N)$

3. Una colección de isomorfismos

$$Z(\{\}) \cong K \quad Z(M \amalg N) \cong Z(M) \otimes Z(N) \quad (8.2)$$

Más aún, esta información requiere satisfacer las condiciones naturales de coherencia para un funtor monoidal simétrico.

8.1. TQFT de dimensión 2

Como primer ejemplo de una TQFT vamos a ver los generadores y las relaciones para $Cob(2)$ [16].

Las categorías $Cob(n)$ son muy difíciles de describir para $n \geq 3$. Pero la categoría $Cob(2)$ puede ser descrita explícitamente, y esta es la meta de esta sección. La razón de esta diferencia es por supuesto porque existe un teorema de clasificación completa para superficies, y un resultado así para dimensiones superiores es aún desconocido. $Cob(2)$ es la categoría cuyos objetos son variedades orientadas cerradas compactas de dimensión 1, y cuyos morfismos son clases de difeomorfismos de cobordismos orientados. El propósito de esta sección es describir el conjunto de generadores y relaciones en esta categoría.

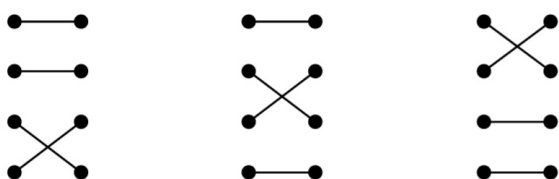
Antes, vamos a considerar un ejemplo de generadores y relaciones para un grupo, el grupo simétrico. Esto lo vamos a necesitar después para hablar de la relación entre TQFT de dimensión 2 y álgebras de Frobenius.

Sea G un grupo finito. Un conjunto generador para G es un subconjunto $S \subset G$ tal que cada elemento de G puede escribirse como producto de elementos de S (y sus inversos). Una relación es la igualdad de dos formas de escribir un elemento dado en términos de sus generadores. Un conjunto de relaciones R es completo si toda otra relación que se cumple en G puede ser establecida combinando las relaciones de R .

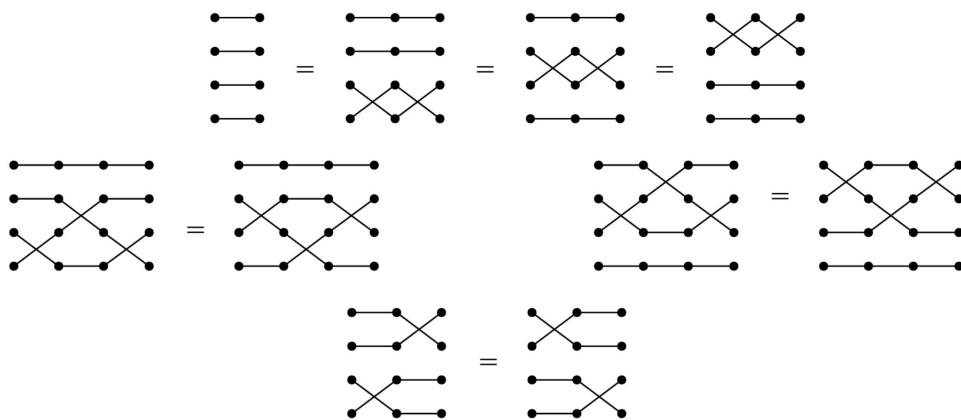
Sea \mathcal{G}_k el grupo simétrico con $k \geq 4$ letras $\{x_1, \dots, x_k\}$. Entonces \mathcal{G}_k es generado por las transposiciones que intercambian dos letras adyacentes, esto es $\tau_i := (x_i x_{i+1})$ con $i = 1, \dots, k - 1$. Sujeto a las siguientes relaciones:

1. $\tau_i \tau_i = Id$
2. $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ para $j = i + 1$
3. $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ para $j > i + 1$.

Ahora podemos pensar al grupo \mathcal{G}_k como la categoría de funciones invertibles del conjunto $\{x_1, \dots, x_k\}$ en él mismo. Si dibujamos el conjunto $\{x_1, \dots, x_k\}$ como una columna de puntos, entonces tenemos el siguiente dibujo que representa el conjunto de funciones biyectivas. Aquí dibujamos los 3 generadores para \mathcal{G}_4 :



y estas son todas sus relaciones:

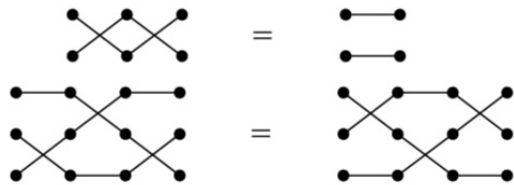


Notamos que los generadores en turno son sólo variaciones de esta transposición (elemento de \mathcal{G}_2 :



combinado en paralelo con permutaciones identidad. Si permitimos el paralelismo como concepto generador, entonces solo hay necesidad para un generador.

Al final todas las relaciones se pueden obtener de estas dos:



Dijimos que el grupo simétrico \mathcal{G}_k se puede interpretar como la categoría de todas las funciones invertibles de un conjunto dado $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ a él mismo. En otras palabras, es una subcategoría de Set que comprime un solo objeto, y que todos sus morfismos son invertibles. Esto no es solo para el caso del grupo simétrico. Cualquier grupo puede interpretarse como una categoría de un sólo objeto y cuyos morfismos son todos invertibles, esto es, los elementos del grupo resultan ser los morfismos de la categoría.

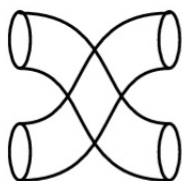
Para categorías grandes, como $Vect_K$ o $Cob(n)$, hay demasiados objetos para tener un conjunto generador, esto es, un conjunto de morfismos tales que cualquier morfismo de la categoría en cuestión se pueden obtener de la composición de morfismos del conjunto generador. Lo que se hace es considerar una construcción usual llamada esqueleto de una categoría.

Vamos a ver quienes son los objetos de $Cob(2)$: La primera observación es que toda variedad cerrada orientada de dimensión 1 es difeomorfa a la unión ajena de círculos (recordar que cerrado implica compacto en este contexto). Más específicamente, podemos fijar un círculo Σ y afirmar que toda variedad conexa cerrada de dimensión 1 es difeomorfa a Σ y cada variedad cerrada de dimensión 1 con n componentes conexas es difeomorfa a la unión ajena de n copias de Σ . En conclusión, dos objetos de $Cob(2)$ están en la misma clase de isomorfismo de $Cob(2)$ si y solo si tienen el mismo número de componentes conexas. Además dos difeomorfismos inducen la misma clase de cobordismo si y solo si son homotópicos.

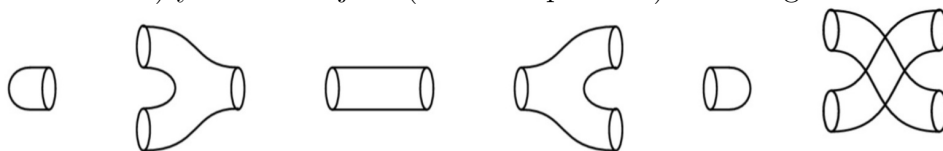
Un conjunto generador para una categoría monoidal \mathcal{C} es un conjunto S de morfismos tal que cada morfismo en \mathcal{C} puede obtenerse por composiciones y paralelismo monoidal de morfismos en S . Este último término en nuestro caso se refiere a la unión ajena. De manera más figurativa, un conjunto generador es un conjunto de bloques simples de los cuales cualquier cobordismo puede obtenerse por conexión paralela o

en serie.

El "Twist": Como ya hemos incluido la unión ajena como una de las operaciones permitida, ahora podemos concentrarnos en cobordismos que están conectados. Pero no por completo, para cada objeto \mathbf{n} siendo \mathbf{n} las componentes conexas, ($n \geq 2$), hay cobordismos entre ellos mismos que no son la identidad. Por ejemplo para la unión ajena de dos círculos tenemos el "twist", que teniendo una categoría monoidal simétrica, es indiferente el paso por arriba o por abajo :



Generadores: La categoría monoidal $Cob(2)$ es generada por la composición (conexión en serie) y la unión ajena (conexión paralela) de los siguientes 6 cobordismos:

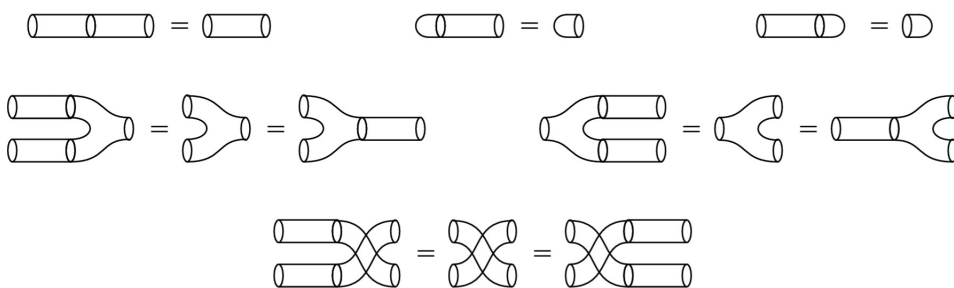


Relaciones: Vamos a enlistar todas las relaciones, primero las relaciones de identidad. Sabemos que los cilindros son identidades, esto nos dan las siguientes relaciones:

La identidad para la unión ajena de dos círculos son dos cilindros en paralelo



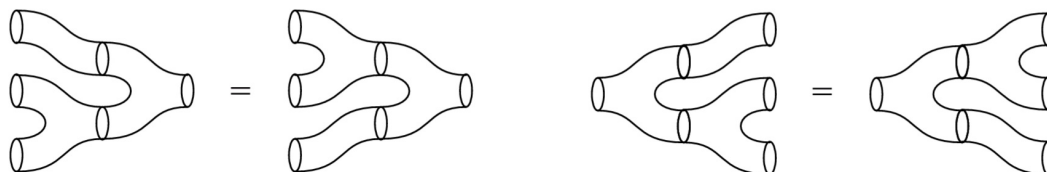
y las relaciones de identidad:



Pegado de disco:



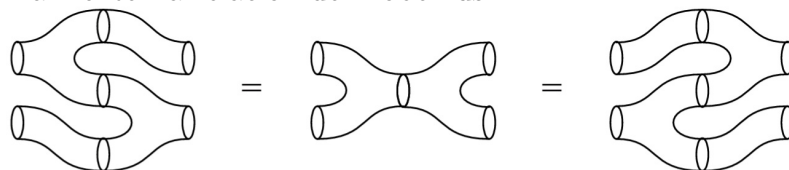
Asociatividad y coasociatividad:



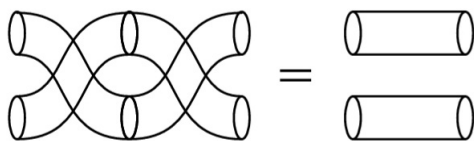
Conmutatividad y coconmutatividad:



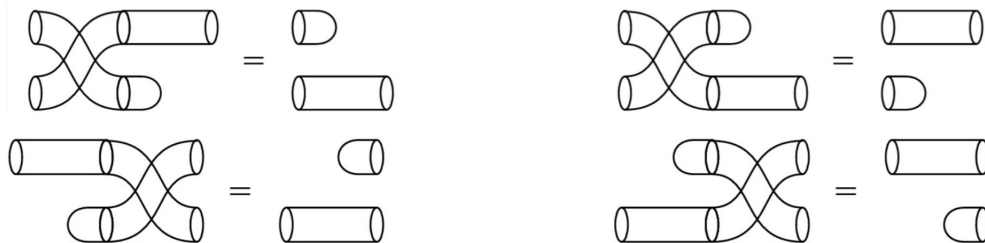
Y finalmente La relación de Frobenius:



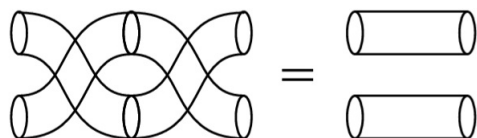
Terminamos esta sección con el enunciado de que el cobordismo twist hace a $(Cob(2), \amalg, \{ \})$ una categoría monoidal simétrica con las relaciones que involucran el "twist". Estas relaciones son análogos a los famosos movimientos de Reidemeister en teoría de nudos, pero en nuestro caso es más sencillo debido a que no estamos hablando de variedades encajadas así que no se hace distinción entre cruces por arriba o por abajo. La primera relación es el hecho de que el "twist" es su propia inversa:



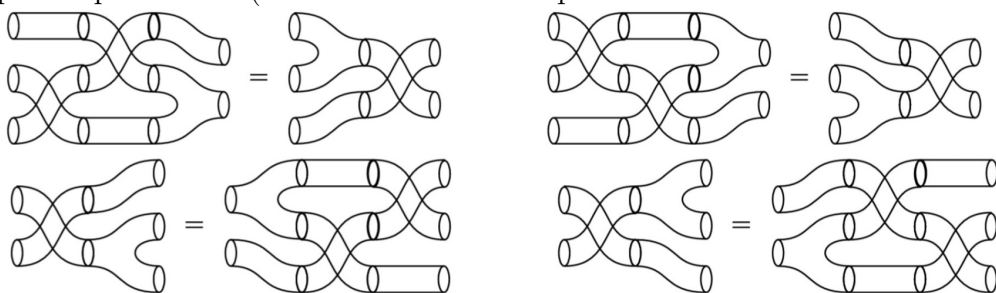
Luego la relación de twist con los discos:



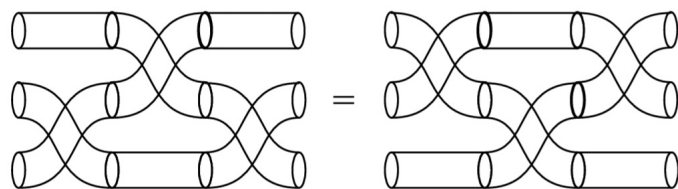
Cabe resaltar que estas relaciones son dependientes en el sentido de que se pueden derivar una de la otra (izquierda con derecha) módulo la relación básica:



Relación de pegado de twist más multiplicación y su versión con comultiplicación, de par de pantalones (estas vuelven a ser dependiente modulo la relación básica):



Y finalmente la relación de grupo simétrico que nos dice como pasar de un twist a otro:



Capítulo 9

Estructura monoidal para sistemas no acoplados

En esta sección, introducimos la unión ajena como coproducto en la categoría de variedades de Jacobi usadas en el artículo de J. P. Aupertius. Esta construcción nos permite modelar sistemas no acoplados y así introducir la noción de dualidad en la cuantización por fibras, ya que la física de dicho coproducto es la de separar sistemas que no interactúan.

Portada
Índice
Índice General
Contenido
Tabla de
Contenido
Abreviaturas

9.1. La categoría $Conf_{\Sigma}$

En la sección 5.4 vimos que a un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad cuyo Hamiltoniano es una cantidad conservada, le podemos asociar un haz fibrado principal único $(P, \Sigma, SO(k))$ de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con la variedad de Riemann (Σ, h) como la base del haz, donde h es la métrica de Jacobi, el grupo $SO(k)$ como grupo de estructura (isomorfo a la fibra) y una conexión con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k)$.

Con esta información, podemos definir la categoría $Conf_{\Sigma}$, donde los objetos son justamente los espacios de configuración Σ y cuyos morfismos son mapeos lisos.

En ésta, vamos a introducir la unión ajena \amalg como estructura monoidal donde el

objeto identidad será $\{\}$ como en el caso de Cob .

Con esta información ya podemos probar que la categoría $Conf_\Sigma$ junto con el coproducto \amalg como estructura monoidal \otimes , es una categoría monoidal. Vamos a verificar lo siguiente:

9.2. Axiomas de categoría monoidal para $Conf_\Sigma$

1. Asociatividad: $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 \cong \Sigma_1 \otimes (\Sigma_2 \otimes \Sigma_3)$
2. Unidad: $\exists I$ tal que $\Sigma \otimes I \cong \Sigma \cong I \otimes \Sigma$
3. Unidades izquierda y derecha: $\lambda_\Sigma : I \otimes \Sigma \longrightarrow \Sigma$, $\rho_\Sigma : \Sigma \otimes I \longrightarrow \Sigma$
4. Asociador: $\alpha_{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)} : (\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 \longrightarrow \Sigma_1 \otimes (\Sigma_2 \otimes \Sigma_3)$

Demostración:

1. Asociatividad: Se sigue de la asociatividad de la unión ajena.
2. Unidad: basta elegir $I := \{\}$, entonces: $\Sigma \amalg \{\} \cong \Sigma \cong \{\} \amalg \Sigma$
3. Unidades izquierda y derecha: $\lambda_\Sigma : \{\} \amalg \Sigma \longrightarrow \Sigma$, $\rho_\Sigma : \Sigma \amalg I \longrightarrow \Sigma$ son mapeos identidad
4. Asociador: $\alpha_{(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)} : (\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \amalg \Sigma_3 \longrightarrow \Sigma_1 \amalg (\Sigma_2 \amalg \Sigma_3)$ es el mapeo identidad debido a la asociatividad de la unión ajena.

Functor Monoidal: El functor unión ajena: $\amalg : Conf \times Conf \longrightarrow Conf$ es un bifunctor, que preserva identidades y composición.

Como sabemos, en teoría de categorías podemos tener múltiples productos y múltiples coproductos, estos surgen de diferentes propiedades universales, además que dichos productos dependen de la estructura de las categorías involucradas, ejemplo: existencia de límites y colímites. Hay ciertos teoremas relacionados con este tema, uno de ellos es la unicidad de productos/coproductos donde bajo ciertas condiciones, dichos productos/coproductos son únicos hasta

isomorfismo y otro relacionado con equivalencia de categorías donde diferentes productos/coprodutos nos pueden llevar a categorías equivalentes.

9.3. Formula de Desacoplamiento

Esta sección es la culminación del trabajo desarrollado en las secciones anteriores donde introdujimos en primer lugar todo el formalismo de la cuantización por fibras y dimos ejemplos del cálculo del espectro topológico marcando la relación con el espectro canónico de energía, dando así una relación directa con el mismo. Luego desarrollamos la teoría básica de categorías monoidales y dimos como ejemplo todo un capítulo sobre teorías cuánticas topológicas de dimensión 2.

Dicho lo anterior, vamos a demostrar que podemos obtener el mismo resultado visto en [4] pero haciendo uso de las propiedades de una estructura monoidal. Vamos a partir de la suposición de que en efecto, la unión ajena como estructura monoidal en $Conf_{\Sigma}$ tiene la interpretación de desacoplamiento, esto es, la separación de sistemas independientes. Dichos sistemas tienen asociado un haz fibrado principal donde en la cuantización por fibras se calcula su clase de Euler. La demostración hace uso de varias propiedades que enunciamos a continuación:

a) Propiedad aditiva de la integral sobre uniones ajenas:

$$\int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} \omega = \int_{\Sigma_1} \omega + \int_{\Sigma_2} \omega \quad (9.1)$$

b) El haz fibrado principal asociado a una unión ajena de variedades lisas, denotado por $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}$ es difeomorfo a la unión ajena de haces fibrados principales asociados a las respectivas variedades por separado:

$$\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} \cong \mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg \mathcal{P}_{\Sigma_2} \quad (9.2)$$

c) Propiedad aditiva de la clase de Euler ante estructura monoidal: Si $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}$

es el haz fibrado principal con base $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2$ entonces tenemos:

$$e(\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}) = e(\mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg \mathcal{P}_{\Sigma_2}) = e(\mathcal{P}_{\Sigma_1}) + e(\mathcal{P}_{\Sigma_2}) \quad (9.3)$$

d) Propiedad aditiva del Lagrangiano antes sistemas desacoplados: $L_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} = L_{\Sigma_1} + L_{\Sigma_2}$

Demostración:

a) Sea M una variedad orientada lisa de dimensión n con o sin frontera, y sea ω una n -forma en M con soporte compacto en el dominio de una sola carta (U, φ) que es orientada positivamente o negativamente. Definimos la integral de ω sobre M por

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega \quad (9.4)$$

Para integrar sobre toda la variedad M , combinamos la definición anterior con una partición de la unidad. Supongamos que $\{U_i\}$ una cubierta abierta finita del soporte de ω y sea $\{\psi_i\}$ una partición subordinada lisa de la partición de la unidad. Definimos la integral de ω sobre M por

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega \quad (9.5)$$

Para propósitos computacionales, es más conveniente cortar la variedad en un número finito de pedazos cuyas fronteras son conjuntos de medida cero y calcular la integral de cada pedazo por separado:

Supongamos que D_1, \dots, D_k son dominios de integración en \mathbb{R}^n , y para $i = 1, \dots, k$ tenemos los mapeos lisos $F_i : \overline{D_i} \rightarrow M$ que satisfacen lo siguiente:

- 1) F_i se restringe a un difeomorfismo que preserva orientación de D_i a un subconjunto abierto $W_i \subseteq M$;
- 2) $W_i \cap W_j = \emptyset$ con $i \neq j$

3) $\text{supp}\omega \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{W}_i$ entonces

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega \quad (9.6)$$

Para la demostración, ver [8]] y nuestro resultado se sigue de tomar para $M := \Sigma_1 \amalg \Sigma_2$ tomar dominios de integración $D_1, \dots, D_k, D_{k+1}, \dots, D_{k+l}$ en \mathcal{R}^n y para cada $i = 1, \dots, k$ y $i' = k+1, \dots, k+l$

$$\text{supp}\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{W}_i \cup \bigcup_{i'=k+1}^l \overline{W}_{i'} \quad (9.7)$$

con $W_i \cap W_j = \emptyset$ para $i \neq j$

tenemos mapeos lisos $F_i : \overline{D}_i \rightarrow \Sigma_1$ y $F_{i'} : \overline{D}_{i'} \rightarrow \Sigma_2$. De donde se tiene

$$\int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega + \sum_{i'=k+1}^l \int_{D_{i'}} F_{i'}^* \omega \quad (9.8)$$

b) Vamos a demostrar la existencia del haz $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}$. El teorema de reconstrucción de geometría diferencial [11] nos dice que un haz fibrado principal está especificado de manera única por su espacio base, la fibra estándar difeomorfa a el grupo de estructura y una familia de funciones de transición que satisfacen las condiciones de cociclo. Vamos a demostrar que todos estos elementos están presentes en nuestra construcción geométrica de sistemas desacoplados. Basta tomar una cubierta para $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2$:

$$C_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} := \left\{ U_\delta \amalg U_{\delta'} \mid \delta \in A, \delta' \in B \right\} \quad (9.9)$$

donde

$$\Sigma_1 \subseteq \bigcup_{\delta \in A} U_\delta \text{ y } \Sigma_2 \subseteq \bigcup_{\delta' \in B} U_{\delta'} \quad (9.10)$$

de aquí se sigue que

$$\Sigma_1 \amalg \Sigma_2 \subseteq \bigcup_{\delta \in A, \delta' \in B} \left(U_\delta \amalg U_{\delta'} \right) \quad (9.11)$$

La condición de cociclo nos pide tomar una intersección $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ lo que significa que dicha intersección ocurre en Σ_1 o en Σ_2 . De aquí se sigue el resultado por el teorema de reconstrucción usado en [11], ya que estamos suponiendo la existencia y unicidad de los haces \mathcal{P}_{Σ_1} y \mathcal{P}_{Σ_2} respectivamente. Para demostrar el difeomorfismo

$$\mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg_{\Sigma_2} \cong \mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg \mathcal{P}_{\Sigma_2} \quad (9.12)$$

basta tomar el mapeo identidad ya que la construcción de $\mathcal{P}_{\Sigma_1}, \mathcal{P}_{\Sigma_2}$ es la misma que en [11] y la unión ajena significa precisamente $\mathcal{P}_{\Sigma_1} \cap \mathcal{P}_{\Sigma_2} = \emptyset$.

c) Finalmente sean M y N dos variedades disjuntas base para haces principales P_M y P_N

1) Homología: los grupos de homología de la unión ajena son

$$H_k(M \amalg N) \cong H_k(M) \oplus H_k(N) \quad (9.13)$$

donde tenemos: $e(P_M \amalg N) \in H_{dR}^{2n}(M \amalg N) \cong H_{dR}^{2n}(M) \oplus H_{dR}^{2n}(N)$.

Afirmamos que $\int_{M \amalg N} e(P_M \amalg N) = \int_M e(P_M) + \int_N e(P_N)$. Esto se sigue de la propiedad aditiva de la integración sobre uniones ajenas:

Para cualquier forma *top*

$$\xi \in \Omega^{2n}(M \amalg N) \cong \Omega^{2n}(M) \oplus \Omega^{2n}(N). \quad (9.14)$$

Usando (b):

$$e(P_M \amalg N) = e(P_M \amalg P_N) = e(P_M) \oplus e(P_N) \in H_{dR}^{2n}(M \amalg N) \quad (9.15)$$

de donde

$$e(P_M) \oplus e(P_N) = (e(P_M), e(P_N)) \in H_{dR}^{2n}(M) \oplus H_{dR}^{2n}(N). \quad (9.16)$$

La integración actúa por componentes: $\int_M \amalg_N (e(P_M), e(P_N)) = \int_M e(P_M) + \int_N e(P_N)$.

- 2) la propiedad aditiva del Lagrangiano se sigue de su definición $L = T - U$ donde T es la energía cinética y U es la energía potencial. Para sistemas desacoplados $T_{total} = \Sigma T$ *sistemas individuales* y $U = \Sigma U$ *sistemas individuales*.

Con esto demostrado ya podemos abordar el problema de sistemas desacoplados: tomemos dos espacios de configuración en $Conf_\Sigma \Sigma_1, \Sigma_2$, con la propiedad $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, es decir, Σ_1, Σ_2 representan dos sistemas que no interactúan.

Entonces, gracias a la metodología usada en la cuantización por fibras [4,34], tenemos:

- a) Un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad, donde su hamiltoniano es una cantidad conservada, puede ser representado por un único haz fibrado principal \mathcal{P} de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con la variedad Riemanniana (Σ, h) como el espacio base, donde h es la métrica de Jacobi y Σ el espacio de configuración, el grupo $SO(k)$ como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar), y una conexión con valores del álgebra de Lie $so(k)$. Así, para cada sistema mecánico clásico existe una tripleta $(\Sigma, \omega, SO(k))$ la cual determina un único haz fibrado principal \mathcal{P}_Σ
- b) para cada sistema, un lagrangiano: $L = \frac{1}{2}h_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$
- c) para cada haz fibrado principal tenemos asociado el espectro topológico: $\int_\Sigma e(\mathcal{P}) = n$

la información anterior la podemos utilizar para el desacoplamiento entre dos sistemas mecánicos, esto va a estar dado por la estructura monoidal que en el caso de desacoplamiento será la unión ajena.

Tomemos por ejemplo el caso de dos osciladores armónicos de masa m desacoplados donde su espacio de configuración es la unión ajena $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2$ y cuyo

lagrangiano es:

$$L_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} = \frac{1}{2} m [(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] - \frac{1}{2} [k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2] \quad (9.17)$$

este Lagrangiano se puede escribir de la siguiente manera:

$$L_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} = \frac{1}{2} [m(\dot{q}^1)^2 - k_1(q^1)^2] + \frac{1}{2} [m(\dot{q}^2)^2 - k_2(q^2)^2] \quad (9.18)$$

donde cada sumando corresponde al Lagrangiano de cada oscilador respectivamente. Así, podemos usar el resultado (b) y calcular el espectro topológico del haz fibrado principal $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}$ asociado al sistema desacoplado $\Sigma_1 \amalg \Sigma_2$:

$$\int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} e(\mathcal{P}_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2}) = \int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} e(\mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg \mathcal{P}_{\Sigma_2}) \quad (9.19)$$

y usando (c) tenemos que

$$\int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} e(\mathcal{P}_{\Sigma_1} \amalg \mathcal{P}_{\Sigma_2}) = \int_{\Sigma_1 \amalg \Sigma_2} e(\mathcal{P}_{\Sigma_1}) \oplus e(\mathcal{P}_{\Sigma_2}). \quad (9.20)$$

donde sustituyendo tenemos el mismo resultado que en [11].

Podemos generalizar este resultado para n osciladores armónicos desacoplados cuyo espacio de configuración está dado por $\amalg_{i=1}^n \Sigma_i$: con $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, el espectro topológico está dado por (fórmula de desacoplamiento):

$$\int_{\amalg_{i=1}^n \Sigma_i} e(\amalg_{i=1}^n \mathcal{P}_{\Sigma_i}) = \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_i} e(\mathcal{P}_{\Sigma_i}) \quad (9.21)$$

En general podemos considerar cualesquiera sistemas desacoplados que cumplan con (d) donde el espectro topológico será la suma de los espectros independientes.

9.4. Acoplamiento

Concluimos este capítulo y el trabajo, con la presentación del primer borrador de la conjetura de acoplamiento. Estamos intentando usar un marco teórico poderoso y abstracto dado por la teoría de categorías para formalizar el proceso de acoplamiento.

El estudio del acoplamiento y desacoplamiento de sistemas físicos constituye un aspecto central tanto en mecánica clásica como en teorías cuánticas. Tradicionalmente, estas operaciones se formalizan mediante modificaciones del lagrangiano o del hamiltoniano. Sin embargo, en esta tesis proponemos un enfoque alternativo basado en herramientas topológicas y categóricas, donde los cambios en las interacciones entre sistemas se reflejan en la topología del espacio de configuración y en la estructura de los fibrados principales asociados.

En un enfoque inicial, exploramos la posibilidad de modelar el acoplamiento y desacoplamiento mediante una adjunción entre la unión ajena (como coproducto) y el producto cartesiano (como producto) en una categoría adecuada de espacios de configuración. Esta idea se basaba en la correspondencia intuitiva entre sistemas desacoplados (modelados por la unión ajena) y sistemas acoplados (modelados por el producto cartesiano). Sin embargo, esta estrategia no puede sostenerse formalmente, ya que el producto y el coproducto son conceptos duales, pero no adjuntos en el sentido categórico. Por tanto, no es posible construir una adjunción entre estas dos operaciones de forma general.

A partir de esta limitación, proponemos un nuevo enfoque que reestructura el marco categórico y topológico del problema. En esta tesis desarrollamos dos líneas complementarias:

1. El cobordismo como transformación natural entre funtores de acoplamiento y desacoplamiento: Reformulamos el problema estableciendo endofuntores en $Conf_{\Sigma}$ que representan los procesos de acoplamiento y desacoplamiento. En este contexto, el cobordismo entre espacios de configuración se interpreta como una transformación natural entre dichos funtores. De este modo, el acoplamiento deja de ser una operación puramente estática y pasa a ser un proceso geométrico mediado por cobordismos,

alineándose con la filosofía de las teorías topológicas de campos (TQFT) [13], donde los cobordismos representan las transiciones físicas.

2. La suma conexa como modelo geométrico del acoplamiento: Como alternativa, analizamos la suma conexa como una posible operación que modela el acoplamiento topológico entre sistemas. A diferencia del producto cartesiano, la suma conexa no posee una propiedad universal en el sentido categórico, lo que la desvincula de la dualidad problemática entre producto y coproducto. Esta operación definida quirúrgicamente permite unir dos variedades en una sola, de manera coherente con una noción topológica de interacción. Bajo ciertas condiciones (por ejemplo, categorías de variedades orientadas con punto base y estructuras adicionales), es posible definirla como un bifunctor. De este modo, planteamos la posibilidad (aún especulativa) de construir una adjunción entre la unión ajena y la suma conexa, siempre que se definan categorías y funtores adecuados.

Estas dos aproximaciones (el cobordismo como transformación natural y la suma conexa como modelo geométrico de acoplamiento) constituyen el núcleo de nuestra conjetura principal: que el proceso de acoplamiento y desacoplamiento de sistemas físicos admite una descripción categórica y topológica, con implicaciones profundas para la cuantización topológica, la interpretación de clases características como la clase de Euler, y la relación entre geometría e interacción física.

9.5. La conjetura de Acoplamiento

Sea $Cob_n^{\mathfrak{F}}$ una 2-categoría monoidal simétrica (un ejemplo típico de una 2-categoría es la categoría Cat) enriquecida con cobordismos lisos donde:

- Objetos son n -variedades suaves, cerradas, orientadas equipadas con una estructura adicional \mathfrak{F} (ejemplo, métrica, conexión, etc)
- 1-morfismos son $(n + 1)$ -cobordismos lisos
- 2-morfismos son difeomorfismos entre tales cobordismos preservando la estructura \mathfrak{F} .

Ahora definamos las siguientes categorías:

- $Conf_{\amalg} \subset Cob_n^{\mathfrak{F}}$, la subcategoría de sistemas desacoplados, cuyos objetos son uniones ajenas finitas de n -variedades de la misma dimensión $M \amalg N$, sus 1-morfismos son cobordismos que preservan la descomposición ajena y los 2-morfismos son difeomorfismos entre cobordismos.
- $Conf_{\#} \subset Cob_n^{\mathfrak{F}}$, la subcategoría de sistemas acoplados, cuyos objetos son sumas conexas finitas $M \# N$ formadas por cirugía a lo largo de n -bolas encajadas, los 1-morfismos cobordismos donde la conexidad se preserva y dicho cobordismo representa la evolución entre sistemas acoplados y los 2-morfismos son difeomorfismos entre tales cobordismos conexos, compatibles con la estructura de acoplamiento y la estructura adicional \mathfrak{F} .

Ahora vamos a definir dos funtores (interpretados como procesos):

- $Couple : Conf_{\amalg} \longrightarrow Conf_{\#}$, $Couple(M \amalg N) = M \# N$
- $Decouple : Conf_{\#} \longrightarrow Conf_{\amalg}$, $Decouple(M \# N) = M \amalg N$.

9.5.1. Enunciado Formal de la Conjetura

Existe una adjunción (débil) en la 2-categoría $Cob_n^{\mathfrak{F}}$:

$$Couple \dashv Decouple \tag{9.22}$$

con unidad y counidad :

- Unidad: $\eta : Id_{Conf_{\amalg}} \Rightarrow Decouple \circ Couple$
- $\epsilon : Couple \circ Decouple \Rightarrow Id_{Conf_{\#}}$.

Conjeturamos que tanto η como ϵ surgen de manera natural de las clases canónicas de cobordismos, posiblemente con estructuras de collares y que las identidades triangulares se mantienen hasta 2-isomorfismo en $Cob_n^{\mathfrak{F}}$:

- $(Decouple \circ \epsilon) \circ (\eta \circ Decouple) \cong Id_{Decouple},$
- $(\epsilon \circ Couple) \circ (Couple \circ \eta) \cong Id_{Couple}.$

Capítulo 10

Conclusiones

El resultado central de esta tesis se basa en el estudio de un tipo de cuantización alternativa, llamada cuantización topológica [11]. Allí se propone que el espectro de energía puede ser recuperado mediante el cálculo de invariantes topológicos globales de haces fibrados principales. En esta tesis, desarrollamos la teoría para el caso de sistemas desacoplados, modelando dichos sistemas mediante una estructura monoidal simétrica. Esta estructura refleja de manera precisa la independencia dinámica y conduce naturalmente a la propiedad aditiva del espectro.

A partir de esta primera etapa, formulamos una conjetura que busca generalizar este marco a sistemas con interacción.

Esta perspectiva sugiere la existencia de una adjunción débil mediada por cobordismos que actúan como interpolaciones topológicas entre sistemas desacoplados y acoplados.

Este planteamiento abre un camino hacia una reformulación categórica de la cuantización topológica, y el estudio más profundo de esta conjetura representa una línea prometedora de investigación futura.

Appendices

Apéndice A

Tensor Métrico

En geometría Riemanniana, el tensor métrico es un tensor de rango 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo.

Una vez que se elige una base local, el tensor métrico aparece como una matriz, denotada convencionalmente como g . La notación g_{ij} se utiliza convencionalmente para las componentes del tensor. Así el tensor métrico g se expresa fijada una base coordenada (usando el convenio de suma de Einstein) como:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

En física es muy común escribir la métrica como el cuadrado del elemento de longitud, dado que el tensor es simétrico la notación física es equivalente a la notación anterior:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

La longitud de un segmento de una curva dada parametrizada por t desde a hasta b se define como:

$$L = \int_a^b [g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j]^{\frac{1}{2}} dt$$

El ángulo entre dos vectores u y v (o entre dos curvas cuyos vectores tangentes son u y v) se define como:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} u^i v^j}{[|g_{ij} u^i u^j| |g_{ij} v^i v^j|]^{\frac{1}{2}}}$$

Una métrica euclídea no es otra cosa que una métrica arbitraria definida sobre un espacio euclídeo. Un espacio métrico es euclídeo si en el tensor de curvatura es idénticamente nulo en todo el espacio. Cuando se usan coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo las componentes del tensor métrico son constantes y, por tanto, los símbolos de Christoffel son también nulos. Sin embargo, en muchos problemas conviene usar otro tipo de coordenadas, como por ejemplo las coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, en este caso aún cuando el espacio es euclídeo las componentes del tensor métrico expresado en estas coordenadas no son constantes, y los símbolos de Christoffel no se anulan. A continuación se dan algunos ejemplos de coordenadas frecuentes.

Los sistemas de coordenadas ortogonales tiene una forma diagonal en su representación matricial. A continuación se presentan ejemplos de métricas para un espacio euclídeo, el hecho de que el espacio es localmente euclídeo queda reflejado en que el tensor de curvatura calculado para todas las métricas que siguen es idénticamente nulo.

Dado un tensor métrico euclidiano en dos dimensiones, dado en coordenadas cartesianas $(u^1, u^2) = (x, y)$:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = g_{21} = 0$

La longitud de una curva C parametrizada mediante el parámetro t se reduce a la

fórmula familiar del cálculo (teorema de Pitágoras):

$$L_C = \int_C \left[\sum_{ij} g_{ij} du^i du^j \right]^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{ij} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[1 \frac{du^1}{dt} \frac{du^1}{dt} + 0 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + 0 \frac{du^2}{dt} \frac{du^1}{dt} + 1 \frac{du^2}{dt} \frac{du^2}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

o bien en la notación más familiar:

$$L_C = \int \left[dx^2 + dy^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt.$$

Apéndice B

Grupos de Lie

Recordar que una *álgebra* A es un espacio vectorial con un producto.

El producto debe tener la propiedad

$$a(uv) = (au)v = u(av),$$

para toda $a \in \mathbb{R}$ y $u, v \in A$. Una función $\phi : A \rightarrow A'$ entre álgebras es llamada *homomorfismo* si $\phi(u \cdot v) = \phi(u) \cdot \phi(v)$.

Una *álgebra de Lie* es una álgebra A donde la multiplicación, i.e., el *corchete de Lie* $(u, v) \mapsto [u, v]$, tiene las siguientes propiedades:

1. $[u, u] = 0$ para toda $u \in A$ y
2. $[u, [v, w]] + [w [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$ para toda $u, v, w \in A$. La condición (2) es usualmente llamada *identidad de Jacobi*.

Un grupo de Lie es una variedad (de Banach) lisa \mathcal{M} que tiene a la vez una G -estructura de grupo consistente con su \mathcal{M} -estructura de variedad en el sentido de que la *multiplicación de grupo*

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh \tag{B.1}$$

y la inversión de grupo

$$\nu : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1} \tag{B.2}$$

son funciones C^k .

Por ejemplo, cualquier nD -espacio vectorial de Banach V es un grupo de Lie Abeli-
ano con las operaciones de grupo $\mu : V \times V \rightarrow V$, $\mu(x, y) = x + y$, y $\nu : V \rightarrow V$,
 $\nu(x) = -x$. La identidad es el vector cero. Llamamos a tal grupo de Lie un grupo
vectorial.

Sean G y H dos grupos de Lie. Una función $G \rightarrow H$ se dice un morfismo de grupos
de Lie (homomorfismo liso) si es homomorfismo como grupos abstractos y difeomor-
fismo como variedades diferenciables.

Similarmente, un grupo G que es a su vez un espacio topológico se dice *grupo*
topológico si sus morfismos son continuos, i.e., C^0 -funciones.

Para cada $g \in G$ con G un grupo de Lie, las siguientes funciones,

$$L_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto gh,$$

$$R_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto gh,$$

son llamadas funciones *traslación izquierda* y *derecha*. Como $L_g \circ L_h = L_{gh}$, y
 $R_g \circ R_h = R_{gh}$, se sigue que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$, entonces ambas L_g y
 R_g son difeomorfismos. Más aún $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$, i.e., las traslaciones izquierda y
derecha conmutan.

Un campo vectorial X en G es llamado *campo vectorial izquierdo invariante* si para
cada $g \in G$, $L_g^* X = X$, esto es, si $(T_h L_g)X(h) = X(gh)$ para toda $h \in G$, i.e., el
siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TL_g} & TG \\ x \uparrow & & \uparrow x \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array}$$

La correspondencia $G \rightarrow TG$ y $L_g \rightarrow TL_g$ define un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{LG} \Rightarrow \mathcal{LG}$ de la
categoría de grupos de Lie \mathcal{LG} en él mismo.

Apéndice C

Axiomas de Eilenberg-Steenrod

En matemáticas, específicamente en topología algebraica, los axiomas de Eilenberg-Steenrod son propiedades que las teorías de homología de espacios topológicos tienen en común. El ejemplo por excelencia de una teoría de homología que satisface los axiomas es la homología singular, desarrollada por Samuel Eilenberg y Norman Steenrod.

Se puede definir una teoría de homología como una sucesión de funtores que satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenrod. El enfoque axiomático, que se desarrolló en 1945, permite probar resultados, como la sucesión de Mayer-Vietoris, que son comunes a todas las teorías de homología que satisfacen los axiomas.

Si se omite el axioma de dimensión (descrito a continuación), los axiomas restantes definen lo que se llama una teoría de homología extraordinaria.

Teorías de cohomología *extraordinaria* surgieron por primera vez en la teoría K y el *cobordismo*.

Los axiomas se aplican a una sucesión de funtores H_n de la categoría de pares (X, A) de espacios topológicos a la categoría de grupos Abelianos, junto con una transformación natural $\partial : H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A)$ llamada *función frontera* (aquí $H_{i-1}(A)$ es la notación reducida de $H_{i-1}(A, \emptyset)$). Los axiomas son:

1. Homotopía: Funciones homotópicas inducen la misma función en homología, i.e., si $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es homotópica a $h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, entonces sus homomorfismos inducidos son los mismos.

2. Excisión: Si (X, A) es un par y U es un subconjunto abierto de X tal que la cerradura de U está contenida en el interior de A , entonces la función de inclusión $i : (X/U, A/U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología.
3. Dimensión: Sea P el espacio con un sólo punto, entonces $H_n(P) = 0$ para toda $n \neq 0$.
4. Aditividad: Si $\coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ es la unión ajena de una familia de espacios topológicos X_{α} , entonces

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$$

5. Exactitud: Cada par (X, A) induce una sucesión larga exacta en homología, vía las inclusiones $i : A \rightarrow X$ y $j : X \rightarrow (X, A)$:

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{k} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots,$$

Si P es el espacio de un solo punto, entonces $H_0(P)$ es llamado el grupo de coeficientes. Por ejemplo, la homología singular tiene como coeficientes los números enteros.

Apéndice D

Diagramas de Cuerdas

Los diagramas de cuerdas son un formalismo gráfico para trabajar en teoría de categorías, en particular en categorías monoidales [36], proporcionando una herramienta conveniente para describir morfismos dentro de bicategorías [Benabou, 1967]. Se pueden encontrar algunos antecedentes sobre diagramas de cuerdas en [Street, 1995].

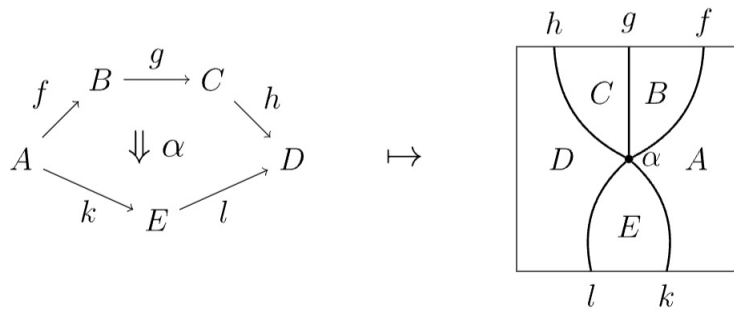
El trabajo reciente en computación cuántica y fundamentos en teoría cuántica de campos ha aplicado con éxito varios cálculos diagramáticos basados en diagramas de cuerdas para modelar sistemas cuánticos en diversas formas de categoría monoidales, véase, por ejemplo, [Abramsky y Coecke, 2008].

Además, la notación de diagramas de cuerdas "hace gran parte del trabajo de forma gratuita", además que problemas con la asociatividad, functorialidad y naturalidad son manejadas silenciosamente por la notación, lo que permite centrar la atención en los aspectos esenciales de las pruebas.

La idea básicamente es pensar a los objetos en una categoría monoidal como cuerdas y los morfismos de un producto tensorial a otro como nodos cuya cuerda fuente entra y la cuerda objetivo sale. Mayor estructura en la categoría monoidal es codificada en las propiedades geométricas de la cuerda, por ejemplo poner cuerdas juntas unas de otras significa producto monoidal, trenzar cuerdas una sobre otra corresponde al trenzado monoidal si es que hay alguno y doblar cuerdas corresponden a dualidades on objetos dualizables si hay alguno.

La idea general es la siguiente: las categorías se presentan en diagramas conmutativos como entes cero dimensionales, a veces letras a veces puntos gráficamente y su correspondiente en diagrama de cuerdas es un ente 2– dimensional gráficamente rectángulos; funtores entre categorías o 1– morfimos se representan en diagramas conmutativos como flechas u objetos 1– dimensionales y su dual en cuerdas corresponde igual a un ente de una dimensión, esto es, una cuerda. Finalmente una transformación natural o 2– morfismo en un diagrama conmutativo representado a veces como una 2– celda o diagrama globular, le corresponde en diagrama de cuerdas a un ente cero dimensional, esto es nodo. Esto lo desarrollaremos con más detalle.

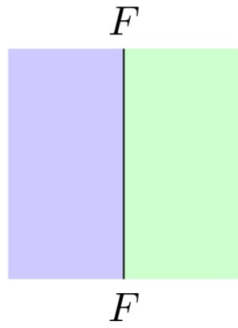
Así, los diagramas de cuerdas se pueden ver como duales (en el sentido de la dualidad de Poincaré) a los diagramas conmutativos, por ejemplo, en una 2– categoría, tenemos el siguiente diagrama para un 2– morfismo:



En el formalismo de diagrama de cuerdas, una categoría \mathcal{C} es representada como una región a veces coloreada

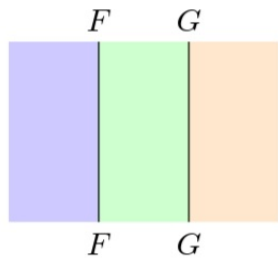


Diferentes colores son usados para denotar diferentes categorías en un diagrama. Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es representado como frontera, comúnmente referida como cuerda entre categorías



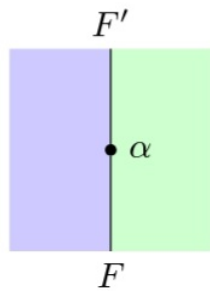
En general no se especifica las categorías, a menos que sea necesario, y se utiliza una convención que es de derecha a izquierda, así que solo tendríamos dibujada la cuerda F .

Funtores identidad son omitidos y solo se dibuja la región. Dado un segundo functor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, la composición $G \circ F$

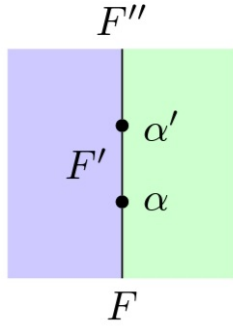


Así, funtores se componen de izquierda a derecha.

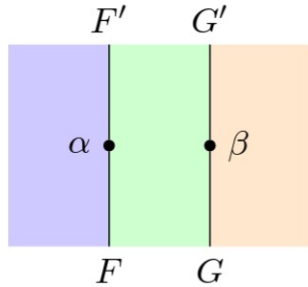
Una transformación natural $\alpha : F \Rightarrow F'$ es representada como un nodo



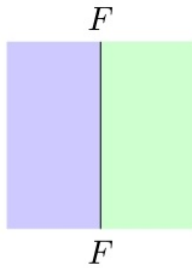
Dada una segunda transformación natural $\alpha' : F' \Rightarrow F''$, la composición vertical $\alpha' \circ \alpha$ es escrita como sigue



Así las transformaciones naturales se componen verticalmente de abajo hacia arriba. Ahora si tenemos una transformación natural $\beta : G \Rightarrow G'$ representamos la composición horizontal $\beta * \alpha$ como



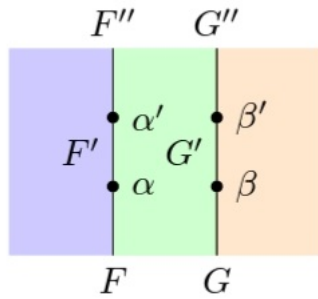
Así las transformaciones naturales se componen horizontalmente de izquierda a derecha. Transformaciones naturales identidad son omitidas, entonces $1_F : F \Rightarrow F$ se dibuja como



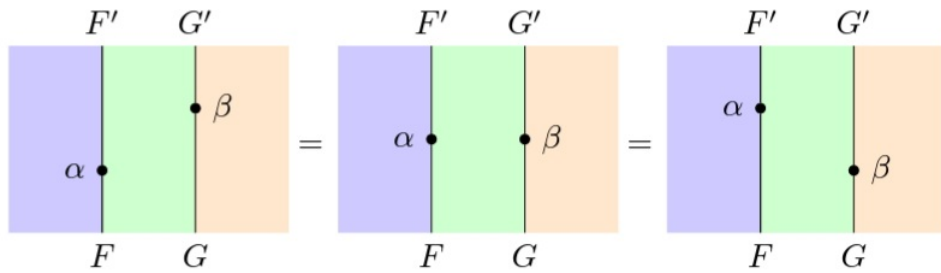
De esta forma, composición vertical con identidades no hace nada a nuestro diagrama como era de esperar. Dada otra transformación natural $\beta' : G' \Rightarrow G''$, tenemos la ley de intercambio

$$(\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) \tag{D.1}$$

Y así, la siguiente composición esta bien definida, correspondiendo a una única transformación natural



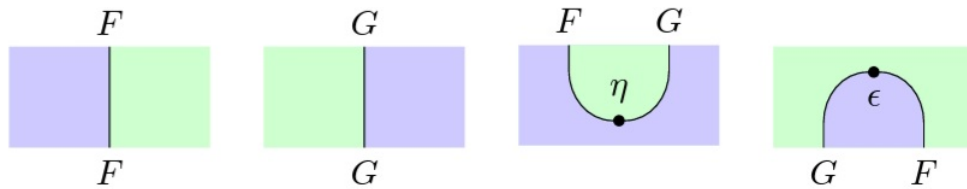
Sustituyendo las identidades apropiadamente, tenemos las siguientes igualdades de deslizamiento



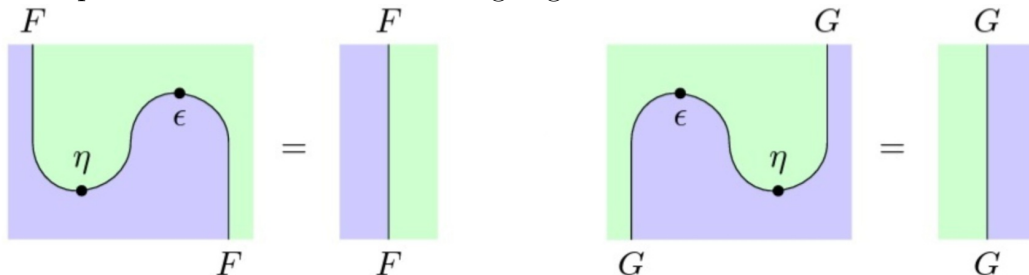
Concluimos esta sección con algunos ejemplos.

D.0.1. Adjunciones

Una adjunción consiste en funtores y transformaciones naturales



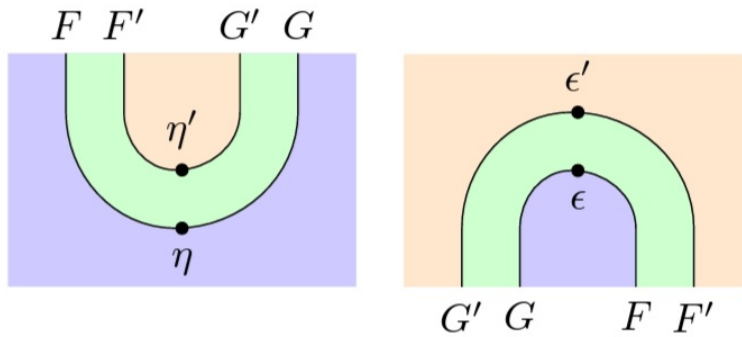
tales que satisfacen las ecuaciones zig-zag



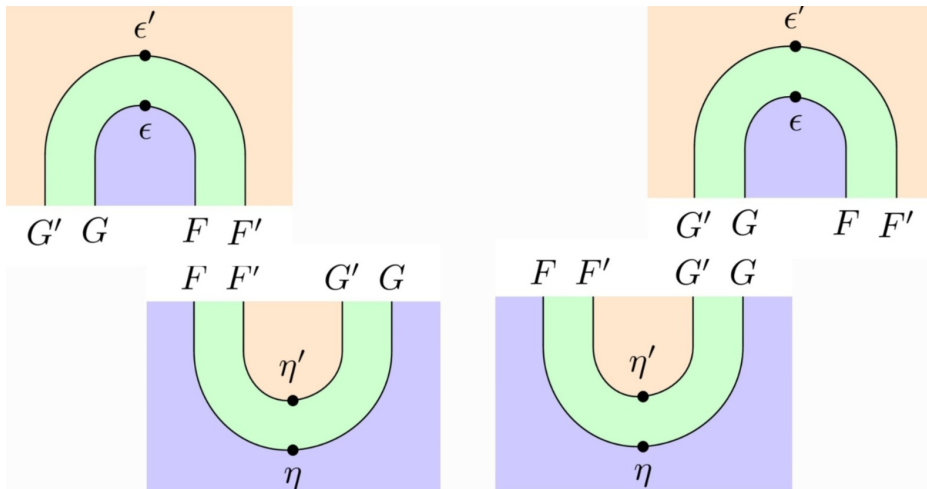
Estas ecuaciones zigzag son precisamente las identidades triangulares de la definición de adjunción vía unidad/counidad.

Composición de adjunciones

Sean dos adjunciones $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ dadas por $F : \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D} : G$ y $F' : \mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{E} : G'$ respectivamente. Entonces la composición $F' \circ F \dashv G \circ G'$ es adjunción. La demostración de este hecho es básicamente considerar las nuevas unidades y counidades



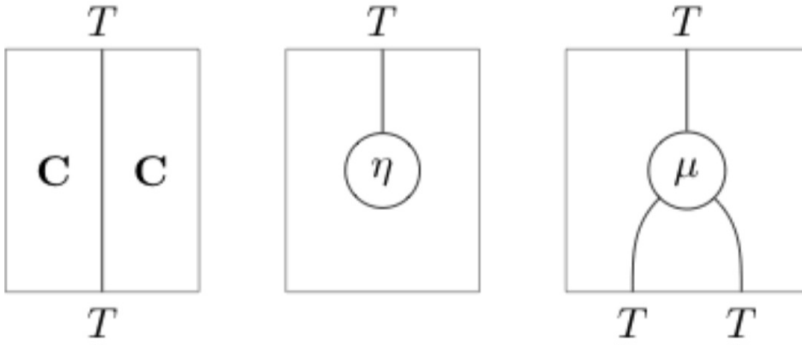
las identidades zigzag para la composición se siguen de las identidades zigzag de cada una de las adjunciones por separado.



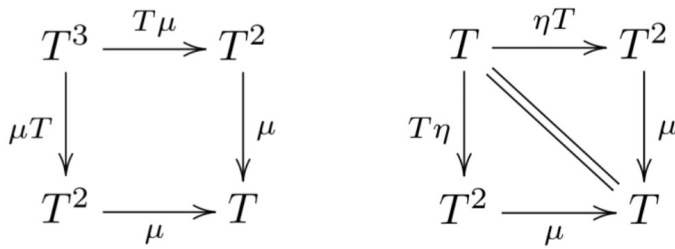
D.0.2. Mónadas

Recordemos que una monada es un endofunctor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ junto a dos transformaciones llamadas multiplicación y unidad respectivamente $\mu : T^2 \Rightarrow T$ y $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$

que en diagramas de cuerdas se pueden representar como

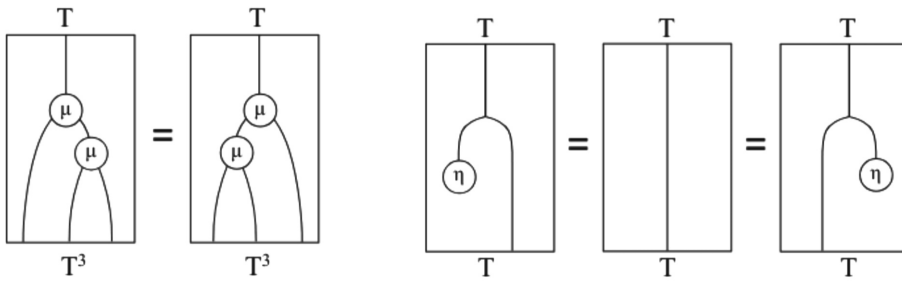


tales que los siguientes diagramas, asociatividad y unidad respectivamente



conmutan.

En diagrama de cuerdas estos se representan (omitiendo el color de la categoría \mathcal{C} y usando la notación de círculo para las transformaciones naturales).



Bibliografía

- [1] Dirac, P.A.M *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proceedings of the Royal Society of London, 1931.
- [2] Ehresmann, Charles *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950.
- [3] Yang, C.N, Mills, R.L. *Conservation of Isotopic Gauge Invariance*, Physical Review, 1954.
- [4] Utiyama, R. *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Physical Review, 1956.
- [5] Wu, T.T., Yang, C.N. *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Physical Review, 1975.
- [6] Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218. Springer, 2003.
- [7] Ivancevic G. Vladimir, Ivancevic T. Tijana *Applied Differential Geometry, A Modern Introduction*, World Scientific, 2007.
- [8] Lee. John M. *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 107. American Mathematical Society, 2009.
- [9] Nakahara, Mikio *geometry, Topology and Physics*, 2nd edition, Institute of Physics Publishing, 2003.

- [10] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M., *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer-Verlang, Berlin, 1992.
- [11] Nettel, F., Quevedo, H. *Towards the Topological Quantization of Classical Mechanics*, Journal of Mathematical Physics, 2007.
- [12] Mac Lane, Saunders *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol.5, Springer, 1998.
- [13] Lurie, Jacob *On the Classification of Topological Field Theories*, Current Developments in Mathematics, Vol.2008, 2009.
- [14] Baez, John C., Dolan, James *Higher-Dimensional Algebra and Topological Quantum Field Theory*, Journal of Mathematical Physics , 1995.
- [15] Atiyah, Michael. *Topological Quantum Field Theories*, Publications Mathématiques de L'IHÉS, 1989.
- [16] Kock, Joachim *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, London Mathematical Society Student Texts, Vol.59, Cambridge University Press, 2003.
- [17] Betti, Enrico. *Sopra gli spazi i un numero qualunque di dimensioni*, Annali di Matematica Pura ed Applicate, Serie 2, Vol.4, 1871.
- [18] Poincaré, Henri. *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique, 2e série, t.1 1895.
- [19] Noether, Emmy *Invariantentheorie*, Mathematische Annalen, Vol.96, 1927.
- [20] Einstein, Albert *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, 1922.
- [21] Chern, S. *Characteristic classes of Hermitian manifolds*, Annals of Mathematics, Second Series, 1946.