



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

n-SUSPENSIONES DE HIPERESPACIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
FERNANDO GARCÍA CORTÉS

TUTOR PRINCIPAL:
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, ESCUELA DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DR. RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	5
1. Conceptos básicos	7
1.1. Definiciones y ejemplos	7
2. n-suspensiones	25
2.1. Propiedad (nD)	25
2.2. n -suspensiones	29
3. Funciones inducidas	41
3.1. Varias clases de funciones	41
3.2. Funciones Inducidas	49
Bibliografía	62
Índice alfabético	67

Introducción

Un espacio topológico no vacío es llamado *continuo* si es métrico, compacto y conexo. Dado un continuo X , podemos definir sus hiperespacios 2^X , $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ como los espacios no vacíos cuyos elementos son subconjuntos compactos de X , subconjuntos compactos de X con a lo más n componentes y subconjuntos de X con a lo más n puntos, respectivamente. La Teoría de los Hiperespacios tiene ya más de 100 años de existir y su estudio ha resultado ser relevante para la Topología General. Dentro del estudio de los hiperespacios, los cocientes de un hiperespacio con respecto a otro que esté contenido en él, han sido de interés en los últimos años. El primero en estudiar este tipo de espacios fue Sam B. Nadler, Jr., quien, motivado por presentar una familia de continuos tipo disco con la propiedad del punto fijo, en 1979, en su artículo *A fixed point theorem for hyperspace suspensions* [44], define al *hiperespacio suspensión de un continuo X* como el espacio cociente $\mathcal{C}_1(X)/\mathcal{F}_1(X)$, denotado como $\mathcal{HS}(X)$. En 2004, Raúl Escobedo, María de Jesús López y Sergio Macías, en *On the Hyperspace Suspension of a Continuum* [23], obtuvieron propiedades importantes de ese espacio. También en 2004, en el artículo: *On the n -fold hyperspace suspension of continua* [39], Sergio Macías define al *n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo X* como el espacio cociente $\mathcal{C}_n(X)/\mathcal{F}_n(X)$, denotado como $\mathcal{HS}_n(X)$. Luego, Juan Carlos Macías, en el artículo del 2008 *On the n -fold pseudo-hyperspace suspensions of continua* [38], nombra al espacio cociente $\mathcal{C}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ como el *n -ésimo pseudohiperespacio suspensión del continuo X* y lo denota como $\mathcal{PHS}_n(X)$. Más recientemente, en 2017, Javier Camargo y Sergio Macías, estudian los espacios cocientes de la forma $\mathcal{C}_n(X)/\mathcal{C}_1(X)$, los cuales son denotados por $\mathcal{C}_1^n(X)$ y presentan propiedades importantes de ellos en *Quotients of n -fold Hyperspaces* [11]. Además, en 2022, Sergio Macías y Ulises Morales-Fuentes, demuestran que las gráficas finitas tienen hiperespacio $\mathcal{C}_1^n(X)$ único [41]. Por otra parte, en 2018, José G. Anaya, David Maya y Francisco Vázquez-Juárez definen al espacio $\mathcal{C}_n(X)/\mathcal{F}_m(X)$ y lo nombran *(n, m) -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo X* , denotado como $\mathcal{HS}_m^n(X)$, en el artículo *The hyperspace $\mathcal{HS}_m^n(X)$ for a finite graph X is unique* [1]. En esta tesis estudiaremos un tipo particular de cociente, al cual llamaremos *n -suspensión del hiperespacio de un continuo X* , nombre que corresponderá al espacio $2^X/\mathcal{C}_n(X)$ y al que denotaremos como 2_n^X .

La principal motivación de esta tesis es obtener algunas de las propiedades que

cumple el espacio 2_n^X . Para este fin estudiamos algunas propiedades que satisfacen los espacios $\mathcal{C}_1^n(X)$, $\mathcal{HS}(X)$, $\mathcal{HS}_n(X)$, $\mathcal{PHS}_n(X)$ y $\mathcal{HS}_m^n(X)$ tratando de encontrar su análogo en 2_n^X , si es que existe. Parte del trabajo que presentamos está basado en los resultados obtenidos en [29], el cual fue el resultado de las primeras investigaciones realizadas durante el doctorado. Además de los obtenidos en el artículo, hemos agregado otros resultados y definiciones que no se encuentran en dicho trabajo.

La tesis está dividida en 3 capítulos. En el primero encontraremos las definiciones, conceptos básicos y ejemplos necesarios para entender este trabajo. En el segundo capítulo introduciremos la definición de *continuo con la propiedad (nD)*, daremos una condición suficiente para que un continuo cumpla con esta propiedad y la relacionaremos con la existencia de arcocomponentes con interior no vacío del espacio $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. También, en el capítulo 2, definiremos formalmente a la n -suspensión del hiperespacio de un continuo dado X , denotado 2_n^X . Además, veremos que este tipo de espacios son continuos, definiremos una métrica explícita para ellos y daremos los primeros resultados relacionados con estos nuevos espacios; por ejemplo, veremos que la dimensión de la n -suspensión del hiperespacio de un continuo es infinita (Teorema 2.2.8) o que 2_n^X es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo (Teorema 5.6). El tercer capítulo está dedicado al estudio de funciones inducidas entre n -suspensiones de hiperespacios dada una función entre dos continuos. Estudiaremos diversos tipos de funciones y daremos resultados relacionados con sus funciones inducidas y las propiedades que preservan dadas las funciones originales. Algunas propiedades esperadas que podremos ver que se preservan son inyectividad, suprayectividad y ser un homeomorfismo, además de otro tipo de funciones como son: casi monótonas, libremente descomponibles, monótonas, OM , casi interiores o fuertemente libremente descomponibles.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo, daremos las herramientas básicas, notación y definiciones que nos ayudarán a entender el presente trabajo. También se encontrarán ejemplos de diferentes conceptos que son definidos y que serán utilizados a lo largo de la tesis.

1.1. Definiciones y ejemplos

Notación 1.1.1. Dados un espacio topológico X y un subconjunto A de éste, denotaremos a la *cerradura de A en X* , *frontera de A en X* e *interior de A en X* como $Cl_X(A)$, $Fr_X(A)$ y $Int_X(A)$, respectivamente. No escribiremos el subíndice cuando no haya confusión.

Notación 1.1.2. Sea X un espacio métrico con métrica d . Denotaremos a la distancia entre dos puntos x y y de X como $d_X(x, y)$. Si $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$ entonces denotamos a la *bola abierta en X con centro en A y radio ε* como $\mathcal{V}_\varepsilon^d(A) = \{x \in X \mid d_X(x, y) < \varepsilon, \text{ para alguna } y \in A\}$, si $A = \{x\}$, para algún $x \in X$, entonces escribiremos $\mathcal{V}_\varepsilon^d(x)$. Cuando no haya confusión con la métrica, escribiremos simplemente $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ y $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$.

Definición 1.1.3. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de X . Definimos el *diámetro de A* como $\text{diám}(A) = \sup\{d_X(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio y $x \in X$. Diremos que X es *localmente conexo en x* si existe una base local de abiertos conexos alrededor de x . Diremos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Definición 1.1.5. Llamaremos *continuo* a un espacio no vacío, métrico, compacto y conexo.

Definición 1.1.6. Sean X un continuo y p un punto de X . Definimos la *composante de p en X* como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p .

Lema 1.1.7. Sean X un continuo, $x \in X$ y K_x la composante de x en X . Entonces K_x es densa en X .

Demostración. Sean U un abierto propio y no vacío de X y x un punto de X . Si $x \in U$, no hay nada que probar. Supongamos que $x \in X \setminus U$. Tomemos $x' \in U$. Como X es métrico, es normal y, por lo tanto, existe un abierto V de X tal que $x' \in V \subset Cl_X(V) \subset U$, $Cl_X(V)$. Sea C_x la componente de $X \setminus V$ que contiene a x . Notemos que C_x es un subcontinuo propio de X que tiene a x . Por lo tanto, $C_x \subset K_x$. Por otro lado, por [46, Theorem 5.6], $C_x \cap Fr_X(V) \neq \emptyset$. Así, $\emptyset \neq C_x \cap Fr_X(V) \subset C_x \cap Cl_X(V) \subset K_x \cap U$. Luego K_x es densa en X .

Q.E.D.

Definición 1.1.8. Sean X un continuo y $x \in X$. Diremos que X es *conexo en pequeño en x* si, para cualquier cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset (X \setminus F)$.

Observación 1.1.9. El Ejemplo 1.1.89 presenta un espacio que es conexo en pequeño en un punto pero no es localmente conexo en dicho punto (Lema 1.1.90).

Definición 1.1.10. Sea X un espacio. Una *trayectoria entre dos puntos x y y* de X es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si, además, α es inyectiva, diremos que α es un *arco*. En algunas ocasiones, para simplificar, identificaremos a un arco con su imagen. A las imágenes del 0 y del 1 bajo α , les llamaremos los *puntos extremos de α* .

Definición 1.1.11. Sea X un continuo. Un subespacio A de X es *conexo por trayectorias* (*arcoconexo*) si para cualesquiera dos puntos x y y en A existe una trayectoria (arco) entre x y y , cuya imagen esté contenida en A . Si ningún subconjunto de X que contenga propiamente a un subconjunto arcoconexo $A \subset X$ es arcoconexo, entonces diremos que A es una *arcocomponente* de X .

Definición 1.1.12. Un continuo X es *uniformemente conexo por trayectorias* si existe una familia $\mathcal{P} = \{p : [0, 1] \rightarrow X | p \text{ es continua}\}$ de trayectorias en X tal que, para cualesquiera dos puntos x y y en X , existe una trayectoria en $\mathcal{P}$ de x a y y, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_ε tal que, para cada trayectoria p de $\mathcal{P}$, existen elementos $t_0 = 0, \dots, t_{n_\varepsilon}, t_{n_\varepsilon+1} = 1$ de $[0, 1]$ que cumplen que $\text{diám}(p([t_i, t_{i+1}])) \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{0, \dots, n_\varepsilon\}$.

Observación 1.1.13. Se sabe que ser uniformemente conexo por trayectorias es equivalente a ser una imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor [34, Theorem 3.5].

Definición 1.1.14. Un continuo será llamado una *gráfica* si puede ser escrito como la unión de una cantidad finita de arcos de tal manera que, para cualesquiera dos de ellos, su intersección es vacía o se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos.

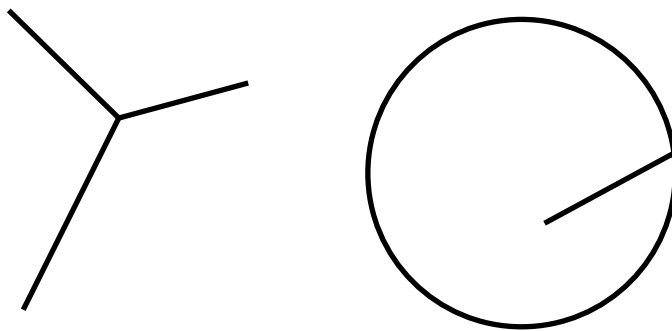


Figura 1.1. Ejemplos de gráficas (a la izquierda un árbol).

Definición 1.1.15. Un *árbol* es una gráfica que no posee curvas cerradas simples.

Definición 1.1.16. Un subconjunto cerrado A de un continuo X será llamado un *retracto* si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A$ es la identidad en A . A la función r se le llamará una *retracción*.

Definición 1.1.17. Un continuo X es un *retracto absoluto* (*retracto de vecindad absoluto*) si para cada espacio métrico Z , cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y cualquier función continua $f : A \rightarrow X$, f puede ser extendida a todo el espacio Z (puede ser extendida a una vecindad de A en Z , que depende de f).

Observación 1.1.18. Lo que se describió en la Definición 1.1.17 es, originalmente, la definición que se da para espacios que sean *extensores absolutos* (*extensores de vecindad absolutos, respectivamente*). No obstante, en [42, Theorem 1.5.2], se demuestra su equivalencia con los retracts absolutos.

Lema 1.1.19. Sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de retracts absolutos. Entonces $\prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$, con la topología producto, es un retracto absoluto.

Demostración. Sean $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de retracts absolutos, Z un espacio métrico, A un cerrado en Z y $f : A \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$ una función continua. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea π_m la proyección de $\prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$ en C_m . Así, $\pi_m \circ f$ es una función continua de A en C_m (notemos que $f(a) = ((\pi_n \circ f)(a))_{n \in \mathbb{N}}$). Para cada $m \in \mathbb{N}$, como C_m es un retracto absoluto, existe una función continua $f_m : Z \rightarrow C_m$ tal que $f_m|_A = \pi_m \circ f$. Sea $F : Z \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$ dada por $F(z) = (f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$. Para toda $m \in \mathbb{N}$, $\pi_m \circ F = f_m$, la cual es continua. Así, por [49, Theorem 8.8], F es continua. Además, si $a \in A$, $F(a) = ((f_n)(a))_{n \in \mathbb{N}} = ((\pi_n \circ f)(a))_{n \in \mathbb{N}} = f(a)$. Por tanto $\prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es un retracto absoluto.

Q.E.D.

Para el siguiente ejemplo recordaremos un Teorema clásico de Topología [35, Tietze extension theorem, pág. 127].

Teorema 1.1.20 (Teorema de extensión de Tietze). *Un espacio X es normal si y sólo si para todo subconjunto cerrado B de X y para cada función continua $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, existe una función continua $f^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^*|_B = f$. Además, si la imagen de f es un intervalo, entonces la imagen de f^* también es el mismo intervalo.*

Definición 1.1.21. Consideremos el espacio $\prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n$, donde $[0, 1]_n = [0, 1]$, para cada número entero positivo n . Este espacio, con la topología producto, es conocido como *Cubo de Hilbert* y es denotado como $\mathcal{Q}$. Como $\mathcal{Q}$ es un producto de espacios conexos y localmente conexos, se tiene que $\mathcal{Q}$ es un continuo localmente conexo [49, Theorem 27.13].

Ejemplo 1.1.22. Se sigue del Teorema 1.1.20 que cualquier intervalo es un retracto absoluto y, por el Lema 1.1.19, si I es un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces $\prod_{n \in \mathbb{N}} I_n$, donde $I_n = I$, es un retracto absoluto. Así, el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ es un retracto absoluto.

Ejemplo 1.1.23. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Entonces S^n es un retracto de vecindad absoluto [42, Corollary 1.5.6]. En particular, la curva cerrada simple, S^1 es un retracto de vecindad absoluto.

Definición 1.1.24. Sea $\{x_0, \dots, x_r\}$ un conjunto de $r+1$ puntos en $\mathbb{R}^n$. Diremos que estos puntos son *afínmente independientes* si el conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_r - x_0\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Definición 1.1.25. Sea $\{x_0, \dots, x_r\}$ un conjunto afínmente independiente en $\mathbb{R}^n$. Definimos al *r -simplejo geométrico generado por $\{x_0, \dots, x_r\}$* y denotado por $[x_0, \dots, x_r]$ como el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$[x_0, \dots, x_r] = \left\{ \sum_{j=0}^r \xi_j x_j \mid \text{para cada } j \in \{0, \dots, r\}, \xi_j \in [0, 1] \text{ y } \sum_{j=0}^r \xi_j = 1 \right\}.$$

Cada s -simplejo generado por $s+1$ puntos de $\{x_0, \dots, x_r\}$ será llamado *s -cara* de $[x_0, \dots, x_r]$.

Observación 1.1.26. Se sabe que un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento de recta, un 2-simplejo es un triángulo y un 3-simplejo es un tetraedro.

Definición 1.1.27. Un *complejo geométrico* $\mathcal{K}$ es una colección finita de simplejos en $\mathbb{R}^n$ que cumplen:

- (1) cada cara de un simplejo en $\mathcal{K}$, también pertenece a $\mathcal{K}$ y

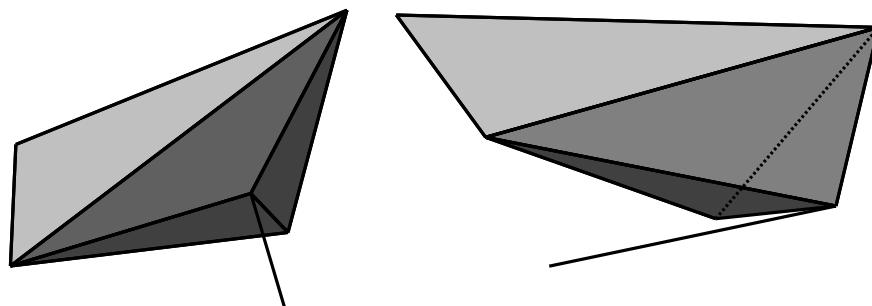


Figura 1.2. Ejemplo de un poliedro en $\mathbb{R}^3$ visto desde dos ángulos distintos.

- (2) la intersección de cualesquiera dos simplejos en $\mathcal{K}$ es vacía o una cara de ambos simplejos.

En este contexto, un *poliedro* en $\mathbb{R}^n$ es la unión de los simplejos de un complejo geométrico.

Ejemplo 1.1.28. Por [42, Theorem 3.6.11], todo poliedro es un retracto de vecindad absoluto.

A continuación presentaremos una técnica para construir continuos nuevos usando familias a lo más numerables de continuos.

Definición 1.1.29. Una *sucesión inversa* es una doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde, para toda $n \in \mathbb{N}$, X_n es un continuo y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ es una función continua. A los espacios X_n se les llamará *espacios factor* y las funciones f_n^{n+1} serán llamadas *funciones de ligadura*. Llamaremos *límite inverso* al subespacio del producto topológico $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, denotado por X_∞ o por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, y definido como:

$$X_\infty = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $m < n$, definimos $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$ y $f_n^n = 1_{X_n}$, donde 1_{X_n} es la función identidad en X_n .

Definición 1.1.30. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos. Como X_∞ es un subespacio de $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, si consideramos las funciones proyección $\pi_m : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X_m$, las restricciones de estas funciones al límite inverso, $f_n = \pi_n|_{X_\infty}$ (también llamadas funciones proyección) son funciones continuas. Por cómo están definidas las funciones f_n , se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
& X_\infty & \\
f_{n+1} \swarrow & & \searrow f_n \\
X_{n+1} & \xrightarrow{f_n^{n+1}} & X_n
\end{array}$$

i.e., $f_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n$.

A continuación, vamos a dar una base para la topología de X_∞ .

Lema 1.1.31. [40, Proposition 2.1.9] Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞ . Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, al conjunto $\mathcal{B}_n = \{f_n^{-1}(U_n) \mid U_n \text{ es un subconjunto abierto de } X_n\}$. Si $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X_∞ .

Demostración. De nuevo, recordemos que X_∞ es un subespacio de $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Así que las preimágenes de abiertos bajo las funciones proyección de $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ forman una subbase para $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, un abierto básico de X_∞ se debe ver de la forma $\bigcap_{j=1}^k f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, donde U_{n_j} es un subconjunto abierto de X_{n_j} . Sin perder generalidad, supongamos que $n_k = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Sea $U = \bigcap_{j=1}^k (f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})$. Se tiene que U es un abierto de X_{n_k} y tenemos:

$$f_{n_k}^{-1}(U) = f_{n_k}^{-1} \left(\bigcap_{j=1}^k (f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j}) \right) = \bigcap_{j=1}^k (f_{n_j}^{n_k} \circ f_{n_k}^{-1})^{-1}(U_{n_j}) = \bigcap_{j=1}^k f_{n_j}^{-1}(U_{n_j}).$$

Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

Observación 1.1.32. Se sabe que si X_∞ es el límite inverso de la sucesión inversa de continuos $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces X_∞ es un continuo [40, Proposition 2.1.8].

Definición 1.1.33. Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que se escriba como la unión de dos de sus subcontinuos, la intersección de éstos es conexa. Diremos que un continuo es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Ejemplo 1.1.34. Notemos que el círculo unitario, al poder ser escrito como unión de dos arcos que se intersectan en sus extremos, no es un continuo unicoherente. Por otro lado, el intervalo $[0, 1]$ sí es unicoherente, pues todos sus subcontinuos son intervalos o puntos y la intersección de éstos es vacía o conexa. Además, por la misma razón de que sus subcontinuos son intervalos o puntos, $[0, 1]$ es hereditariamente unicoherente.

El siguiente es un ejemplo de un continuo que es unicoherente pero no hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 1.1.35. Sea A el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$, definido en coordenadas polares y donde e^x denota la función exponencial en los reales: $A = \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\}$. Si S^1 denota el círculo unitario, entonces $S^1 = \{(1, \theta) | \theta \geq 0\}$. Así $Cl_{\mathbb{R}^2}(A) = A \cup S^1$. Como A es conexo, $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(A)$ es un continuo (ver Figura 1.3). Para ver que este espacio es unicoherente primero probaremos que si $B \subset X$ es un continuo tal que $B \cap S^1 \neq \emptyset \neq B \cap A$, $S^1 \subset B$. Sea $y \in B \cap A$. Entonces existe $\alpha \geq 0$ tal que $y = (1 + e^{-\alpha}, \alpha)$. Sea $\beta > \alpha$ y supongamos que $\beta > 1$ y $y' = (1 + e^{-\beta}, \beta) \notin B$. Definamos $B_1 = B \cap \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | 1 \leq \theta < \beta\}$ y $B_2 = B \cap (\{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \beta < \theta\} \cup S^1)$. Es claro que $B = B_1 \cup B_2$, más aún, B_1 y B_2 son abiertos ajenos y, como $y \in B_1$ y $\emptyset \neq B \cap S^1 \subset B_2$, ambos son no vacíos. Pero esto contradice la conexidad de B . Así, para toda $\beta \geq \alpha$, $(1 + e^{-\beta}, \beta) \in B$ y, como B es continuo, $S^1 \subset B$. Ahora veremos la unicoherencia de X . Sin perder generalidad, supongamos que existen dos subcontinuos propios y no degenerados de X , C_1 y C_2 tales que $X = C_1 \cup C_2$. Notemos que si, ni C_1 ni C_2 contienen a S^1 , entonces alguno debe contener un punto de S^1 y un punto de A , lo que significaría que contiene a S^1 , llegando a una contradicción. Así, sin perder generalidad $S^1 \subset B_1$. Si $A \cap B_1 = \emptyset$, entonces $A \subset B_2$, pero como B_2 es cerrado, $B_2 = X$, lo cual no puede pasar. Así, $B_1 \cap A \neq \emptyset$. Entonces $B_2 \subset A$, al ser un conexo cerrado y no degenerado contenido en un rayo, debe ser un arco. Entonces $B_1 \cap B_2$ es un punto o un arco, por lo que es conexo y X es unicoherente. Finalmente, como $S^1 \subset X$ y S^1 no es unicoherente (Ejemplo 1.1.34), X no es hereditariamente unicoherente.

Definición 1.1.36. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre los continuos X y Y . Si $g : X \rightarrow Y$ es una función continua, diremos que f es *homotópica a* g si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H((x, 0)) = f(x)$ y $H((x, 1)) = g(x)$, para toda $x \in X$; la función H será llamada una *homotopía entre* f y g . Diremos que un continuo es *contraíble* si la función identidad es homotópica a alguna función constante.

Lema 1.1.37. *Todo retracts absoluto es contraíble.*

Demostración. Sea X un retracts absoluto. Consideremos el espacio $X \times [0, 1]$, el cual es un retracts absoluto por el Lema 1.1.19 y el Teorema 1.1.20, y $A = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, el cual es cerrado en $X \times [0, 1]$. Sea $x_0 \in X$ y definamos $h : A \rightarrow X$ de la siguiente manera: si $x \in X$, entonces $h((x, 0)) = x$ y $h((x, 1)) = x_0$. Tenemos que h es continua y, como X es retracts absoluto, existe una función $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H|_A = h$. De esta manera $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ es una función continua que cumple que $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$, para toda $x \in X$. Así, H es una homotopía entre la identidad en X y una función constante en X .

Q.E.D.

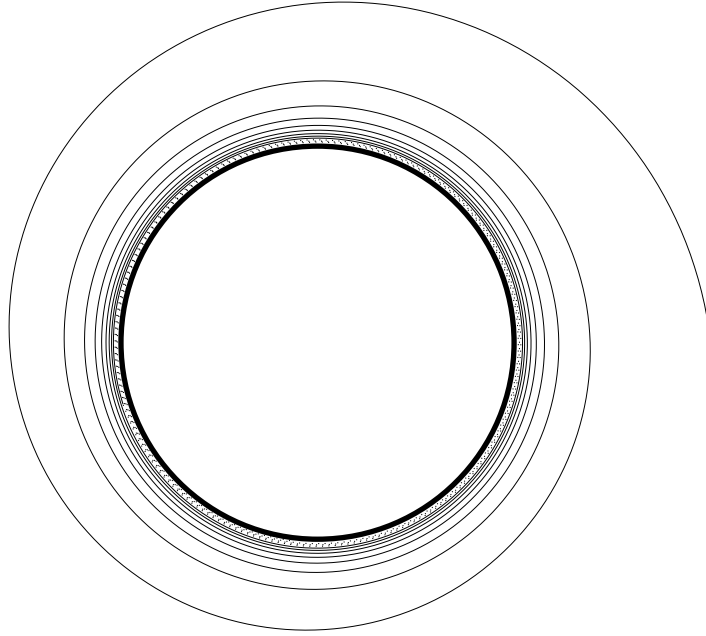


Figura 1.3. Continuo X definido en el Ejemplo 1.1.35 ($X = Cl_{\mathbb{R}^2}(\{(1+e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\} \cup S^1)$).

Definición 1.1.38. Un continuo X será llamado *libremente contraíble* si existen un punto p de X y una homotopía $R : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ tales que, para toda $x \in X$:

- (1) $R((x, 0)) = p$,
- (2) $R((x, 1)) = x$ y
- (3) $R((R((x, s)), t)) = R((x, \min\{s, t\}))$, para cualesquiera s y t en $[0, 1]$.

Observación 1.1.39. Más adelante (Observación 1.1.85) daremos una caracterización para los continuos libremente contraíbles que nos ayudará a ver ejemplos de ellos.

Definición 1.1.40. Sea X un continuo. Una función continua $f : X \longrightarrow X$ tiene un punto fijo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Un continuo X satisface la propiedad del punto fijo si toda función continua $f : X \longrightarrow X$ tiene un punto fijo.

Lema 1.1.41. Sean X un continuo y $f : X \longrightarrow X$ una función continua tales que para toda $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d_X(x, f(x)) < \varepsilon$, entonces f tiene punto fijo.

Demostración. Para probar el lema, vamos a suponer que f no posee puntos fijos. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que $d_X(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Como X es compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto x . Como f es continua $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ y, al no tener puntos fijos f , existe $\varepsilon > 0$ tal que $d_X(x, f(x)) > \varepsilon$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$, $d_X(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{3}$ y

$d_X(f(x_m), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. De esta manera $d_X(x, f(x)) \leq d_X(x, x_m) + d_X(x_m, f(x_m)) + d_X(f(x_m), f(x)) = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, lo que es una contradicción. Luego, f tiene un punto fijo.

Q.E.D.

El siguiente lema fue obtenido de [36, Lemma 13, pág. 343].

Lema 1.1.42. *Sea X un continuo. Supongamos que, para cada $\varepsilon > 0$, existen un subcontinuo X_ε , con la propiedad del punto fijo, y una función continua $f_\varepsilon: X \rightarrow X_\varepsilon$ tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supondremos que X no tiene la propiedad del punto fijo. En este caso, existe una función $f: X \rightarrow X$ sin puntos fijos. Entonces, para toda $x \in X$, $d_X(x, f(x)) > 0$. De esta manera, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $x \in X$, $d_X(x, f(x)) \geq \varepsilon$ pues, de lo contrario, f tendría un punto fijo (Lema 1.1.41), lo cual sería una contradicción.

Para $\varepsilon > 0$ obtenida, por hipótesis, existen un subcontinuo X_ε , con la propiedad del punto fijo, y $f_\varepsilon: X \rightarrow X_\varepsilon$ tal que, para toda $x \in X$, $d_X(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$. De esta manera, si definimos $h = f_\varepsilon \circ f$ y consideramos $h|_{X_\varepsilon}: X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$, tenemos que existe $x \in X_\varepsilon$ tal que $h(x) = f_\varepsilon(f(x)) = x$. Así, tenemos que $d_X(f(x), x) = d_X(f(x), h(x)) = d_X(f(x), f_\varepsilon(f(x))) < \varepsilon$, pero $d_X(f(x), x) \geq \varepsilon$, lo cual es un absurdo, por lo que el lema debe de ser cierto.

Q.E.D.

Definición 1.1.43. Diremos que una función continua y suprayectiva entre continuos $f: X \rightarrow Y$ es *monótona* si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Teorema 1.1.44. *Sean X y Y dos continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es monótona si y sólo si para cada subconjunto conexo y no vacío C de Y , se tiene que $f^{-1}(C)$ es un subconjunto conexo de X .*

Demostración. Es claro que si para todo subconjunto conexo y no vacío C de Y , $f^{-1}(C)$ es conexo, entonces f es monótona.

Supongamos que f es monótona. Sea C un subconjunto conexo y no vacío de Y y supongamos que $f^{-1}(C)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos no vacíos A y B de X tales que $f^{-1}(C) = A \cup B$ y $Cl_X(A) \cap B = \emptyset = A \cap Cl_X(B)$. Para cada $y \in C$ tal que $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(y) \subset A$, pues $f^{-1}(y)$ es conexo. De manera análoga, si $f^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(y) \subset B$. Sean $M = \{y \in C | f^{-1}(y) \subset A\}$ y $N = \{y \in C | f^{-1}(y) \subset B\}$. Tenemos que $C = N \cup M$. Ahora, como C es conexo, existe $y \in Cl_Y(M) \cap N$. Como $y \in N$, $f^{-1}(y) \subset B$ y, como $y \in Cl_Y(M)$, existe una sucesión $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset M$ convergente a y . Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $x_m \in f^{-1}(y_m)$. Como X es compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Como $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset A$, $x \in Cl_X(A)$. Usando que f es continua, tenemos que $f(x) = y$. De lo anterior

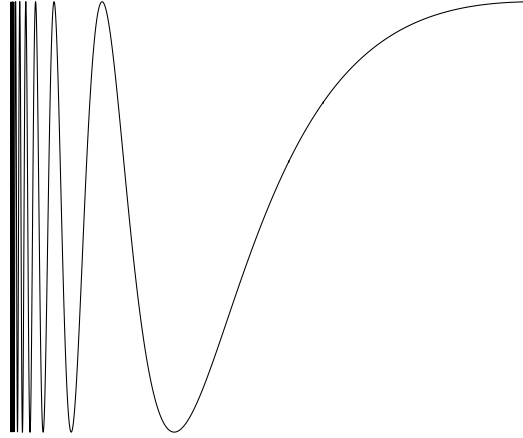


Figura 1.4. Espacio X definido en el Ejemplo 1.1.46 (la curva del topólogo).

tenemos que $x \in B \cap Cl_X(A)$, pero A y B son tales que $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$, lo cual es una contradicción, A y B fueron elegidos así gracias a que supusimos que $f^{-1}(C)$ era desconexo. Por tanto, $f^{-1}(C)$ es conexo.

Q.E.D.

Definición 1.1.45. Un subcontinuo T de un continuo X se dice que es *terminal* si para cualquier otro subcontinuo Y de X que intersecte a T sucede que $Y \subset T$, o bien, $T \subset Y$.

El espacio que definimos a continuación es uno de los más conocidos de la topología y nos será de utilidad para dar un ejemplo de subcontinuo terminal y también será de utilidad para ilustrar otros ejemplos más adelante.

Ejemplo 1.1.46. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}^2$ es conocido como *la curva del topólogo* y está definido como sigue (ver Figura 1.4):

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(0, \frac{2}{\pi} \right] \right\}.$$

Ejemplo 1.1.47. Si en el Ejemplo 1.1.46 consideramos el subcontinuo $Z = \{0\} \times [-1, 1]$ en X , entonces Z es un subcontinuo terminal de X .

Ejemplo 1.1.48. Sea X el espacio definido en el Ejemplo 1.1.35. Entonces S^1 es un subcontinuo terminal en X .

Definición 1.1.49. Sean X y Y espacios métricos, con métricas d_X y d_Y , respectivamente. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es una *isometría* si $d_X(x', x'') = d_Y(f(x'), f(x''))$, para cualesquiera x' y x'' en X .

Definición 1.1.50. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de arcos con funciones de ligadura suprayectivas. Entonces, al límite inverso de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ le llamaremos un *continuo tipo arco*.

Las siguientes definiciones nos ayudarán para poder dar ejemplos de continuos tipo arco.

Definición 1.1.51. Sea X un continuo. Una *cadena* en X es una colección finita de abiertos $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ tales que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A los elementos de $\mathcal{D}$ les llamaremos *eslabones*. Si los eslabones de la cadena $\mathcal{D}$ tienen diámetro menor que $\varepsilon > 0$, entonces a $\mathcal{D}$ le llamaremos ε -cadena.

Definición 1.1.52. Un continuo X será llamado *encadenable* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε -cadena $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Observación 1.1.53. Se sabe que un continuo es encadenable si y sólo si es tipo arco [40, Theorem 2.4.22].

Ejemplo 1.1.54. No es difícil ver que la curva del topólogo (Ejemplo 1.1.46) es un ejemplo de continuo encadenable.

Observación 1.1.55. Otros dos ejemplos interesantes de continuos encadenables pueden ser encontrados más adelante en la tesis (Observación 2.1.4 y Ejemplo 2.1.5).

Definición 1.1.56. Sean X un continuo y A un subconjunto de éste. Diremos que X es *irreducible alrededor de A* si ningún subcontinuo propio de X contiene a A .

Observación 1.1.57. Los continuos encadenables son irreducibles alrededor de un conjunto de dos puntos [46, Theorem 12.5].

Definición 1.1.58. Un continuo X satisface la *propiedad (b)* si toda función continua de X al círculo unitario es homotópica a una función constante.

Ejemplo 1.1.59. Sea S^n la esfera de dimensión n . Entonces, para $2 \leq n$, S^n tiene la propiedad (b) [36, Theorem 9 (ii), pág. 435].

Lema 1.1.60. Si X es un continuo con la propiedad (b), entonces éste es uncoherente [21, Théorème 2].

Ejemplo 1.1.61. Como el círculo unitario no es uncoherente (Ejemplo 1.1.34), por el Lema 1.1.60, tampoco tiene la propiedad (b).

Observación 1.1.62. La implicación inversa del Lema 1.1.60 sólo ocurre en espacios que sean localmente conexos [21, Théorème 3].

A continuación daremos un ejemplo de un continuo que es uncoherente pero que no tiene la propiedad (b).

Ejemplo 1.1.63. Sea $X = \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\} \cup S^1$, el espacio definido en coordenadas polares en el Ejemplo 1.1.35. Este espacio es unicoherente. Si consideramos $f : X \rightarrow S^1$ dada por $f(x) = x$, si $x \in S^1$ y $f((1 + e^{-\theta}, \theta)) = (1, \theta)$, si $x \in \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\}$, entonces f no es homotópica a una función constante. Luego, X no cumple la propiedad (b).

Lema 1.1.64. *Todo continuo contraíble cumple la propiedad (b).*

Demostración. Sean X un espacio contraíble, S^1 el círculo unitario y $f : X \rightarrow S^1$ una función continua.

Como X es contraíble, existen $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que, para toda $x \in X$, $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$. De esta manera $f \circ H : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$ es una función continua que cumple que, para toda $x \in X$, $f \circ H((x, 0)) = f(x)$ y $f \circ H((x, 1)) = f(x_0)$. Se sigue que X cumple la propiedad (b).

Q.E.D.

Notación 1.1.65. Sean X y Y continuos y consideremos W y Z dos subconjuntos cerrados de X y Y , respectivamente. Sean $q_X : X \rightarrow X/W$ y $q_Y : Y \rightarrow Y/Z$ las funciones cocientes. W^* denotará al punto $q_X(W)$ y Z^* denotará al punto $q_Y(Z)$. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, tal que $f(W) \subset Z$, entonces definiremos a $f^* : X/W \rightarrow Y/Z$ como

$$f^*(\chi) = \begin{cases} q_Y(f((q_X)^{-1}(\chi))), & \text{si } \chi \neq W^*; \\ Z^*, & \text{si } \chi = W^*. \end{cases}$$

Notemos que, por [20, Theorem 4.3, pág. 126], f^* es continua.

Definición 1.1.66. Diremos que un continuo X *tiene forma trivial* (forma de un punto) si puede ser escrito como límite inverso de continuos contraíbles.

Lema 1.1.67. *Todo continuo con forma trivial cumple la propiedad (b).*

Demostración. Por [40, Theorem 6.2.2], un espacio tiene forma trivial si y sólo si cualquier función de X en un retracts de vecindad absoluto es homotópica a una función constante. Como la curva cerrada simple es un retracts de vecindad absoluto (Ejemplo 1.1.23), un espacio con forma trivial satisface la propiedad (b).

Q.E.D.

A continuación daremos un ejemplo de un espacio que no posee forma trivial.

Ejemplo 1.1.68. La curva cerrada simple S^1 no tiene forma trivial. Como S^1 no tiene la propiedad (b) (Ejemplo 1.1.61), por el Lema 1.1.67, tenemos que S^1 no tiene forma trivial.

Definición 1.1.69. Dado un continuo X , definimos a los *hiperespacios de X* como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto y no vacío}\};$$

$$\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \text{ con } n \in \mathbb{N};$$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto 2^X es conocido como el *hiperespacio de subconjuntos compactos de X* , $\mathcal{C}_n(X)$ como el *n -ésimo hiperespacio de X* (solemos escribir $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_1(X)$) y $\mathcal{F}_n(X)$ como el *n -ésimo producto simétrico de X* . Al conjunto 2^X se le puede definir una métrica llamada la *métrica de Hausdorff*, denotada por $\mathcal{H}_X$, que se hereda a $\mathcal{C}_n(X)$ y a $\mathcal{F}_n(X)$, y se define como sigue:

$$\mathcal{H}_X(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(B) \text{ y } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(A)\}.$$

No escribiremos el subíndice cuando no haya confusión.

Observación 1.1.70. Si X es un continuo con métrica d y x_1 y x_2 son puntos en X , entonces

$$\mathcal{H}_X(\{x_1\}, \{x_2\}) = d(x_1, x_2).$$

Definición 1.1.71. Dados un continuo X y una colección finita de subconjuntos no vacíos $U_1, \dots, U_m$ de X , definimos el siguiente conjunto:

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \left\{ A \in 2^X \mid A \subset \bigcup_{k=1}^m U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Notemos que la familia $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \mid U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos de } X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$, es una base para una topología en 2^X . Esta topología es llamada la *topología de Vietoris* [43, Theorem (0.11)].

Observación 1.1.72. Se sabe que la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden [43, Theorem (0.13)].

Definición 1.1.73. Sean X un continuo y A y B dos elementos en 2^X . Un *arco de orden de A a B* es un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y, para cada $s < t$, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Observación 1.1.74. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se sabe que 2^X , $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ son continuos [40, Corollary 1.8.9, Corollary 1.8.12 y Corollary 1.8.8].

Los hiperespacios de continuos son un tema muy estudiado en topología general. A continuación daremos algunos ejemplos de hiperespacios de continuos que se han podido identificar.

Ejemplo 1.1.75. Para $n \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}_n([0, 1])$ es homeomorfo a $[0, 1]^n$ [5, Theorem 6]. También se sabe que, si $n \geq 4$, entonces $\mathcal{F}_n([0, 1])$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^n$ [5, Theorem 7]. En [2] se da una descripción topológica de $\mathcal{F}_n([0, 1])$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.76. $\mathcal{C}_1([0, 1])$ es una 2-celda [43, Example (0.54)].

Ejemplo 1.1.77. $\mathcal{C}_2([0, 1])$ es homeomorfo a $[0, 1]^2$ [40, Theorem 6.9.12].

Ejemplo 1.1.78. $\mathcal{F}_2(S^1)$, donde S^1 es el círculo unitario, es homeomorfo a la banda de Möbius [5, pág. 877]. En [4], K. Borsuk asegura, de manera equivocada, que $\mathcal{F}_3(S^1)$ es homeomorfo a $S^1 \times S^2$. En [6], R. Bott corrige a Borsuk y demuestra que $\mathcal{F}_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 . En [47], se presenta una prueba elemental de este último hecho. En [18], se da una descripción topológica de $\mathcal{F}_n(S^1)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.79. $\mathcal{C}_1(S^1)$, donde S^1 es el círculo unitario, es homeomorfo a una 2-celda [43, Example (0.55)].

Definición 1.1.80. Un continuo X satisface la *propiedad de Kelley* si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si a y b son dos elementos de X tales que $d(a, b) < \delta$ y $a \in A \in \mathcal{C}_1(X)$, entonces existe $B \in \mathcal{C}_1(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. El número δ será llamado *un número de Kelley para la ε dada*.

Ejemplo 1.1.81. Todo continuo localmente conexo cumple con la propiedad de Kelley [43, Example (16.11)].

Lema 1.1.82. Si X es un continuo, entonces 2^X tiene forma trivial.

Demostración. Por [40, Theorem 2.1.56], X es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de poliedros $\{X_m, f_m^{m+1}\}_{m=1}^\infty$. Entonces 2^{X_m} es un retracto absoluto, para cada $m \in \mathbb{N}$ [50, Théorème II]. Como todo retracto absoluto es contraíble (Lema 1.1.37), 2^X es un límite inverso de retracts absolutos. Luego, tiene forma trivial.

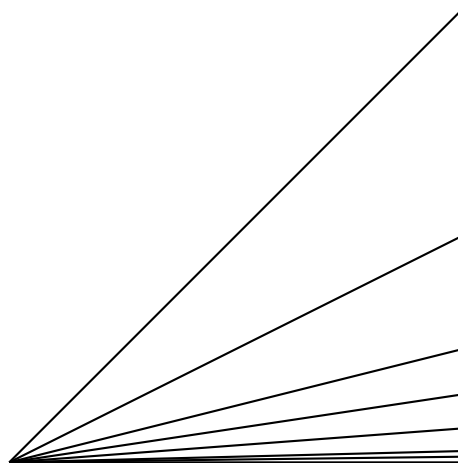
Q.E.D.

Corolario 1.1.83. Si X es un continuo, entonces 2^X satisface la propiedad (b).

Demostración. Por el Lema 1.1.82, 2^X posee forma trivial y, por el Lema 1.1.67, 2^X tiene la propiedad (b).

Q.E.D.

Definición 1.1.84. Un continuo X será llamado *suave por arcos en un punto p* si existe una función continua $\alpha : X \rightarrow \mathcal{C}_1(X)$ tal que:

Figura 1.5. *Abanico armónico*

- (1) $\alpha(p) = \{p\}$,
- (2) $\alpha(x)$ es un arco en X que une a p con x , para todo $x \in X$ y
- (3) si $y \in \alpha(x)$, entonces $\alpha(y) \subset \alpha(x)$.

Si X es un continuo suave por arcos en alguno de sus puntos, será llamado *suave por arcos*.

Observación 1.1.85. Se sabe que un continuo X es suave por arcos si y sólo si es libremente contraíble [28, Theorem II-3-A].

Definición 1.1.86. Llamaremos *dendroide* a todo continuo que sea arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Un *abanico* es un dendroide con un único punto distinguido, v , que es la parte común de tres arcos ajenos en cualquier otra parte. A este punto v lo llamaremos el *vértice* del abanico. Diremos que un dendroide es *suave* si existe un punto p de X tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ convergente a un punto $x \in X$, se tiene que la sucesión de arcos $\{px_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, con la métrica de Hausdorff, al arco px . A este punto p los llamaremos el *punto de suavidad* del dendroide. Un abanico es *suave* si lo es en su vértice.

Observación 1.1.87. Los continuos suaves por arcos nacieron como una generalización de algunas propiedades de los dendroides suaves. Por lo que se sabe que todo dendroide suave es suave por arcos [27, 3. Some Examples (1), pág. 647].

Vamos a considerar los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1.88. Consideremos la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, esta sucesión es convergente a 0. Al cono sobre $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se le llamará *abanico armónico* (ver Figura 1.5). El abanico armónico es un ejemplo de abanico suave.

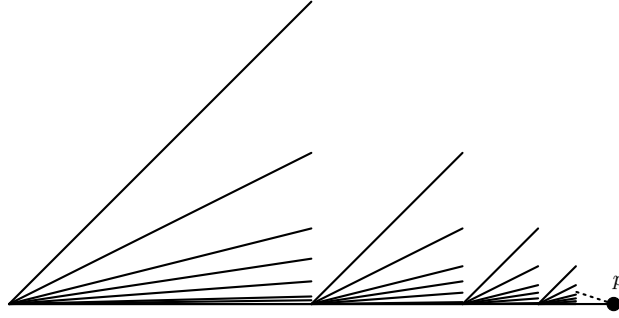


Figura 1.6. Sucesión de abanicos armónicos

Ejemplo 1.1.89. Consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abanicos armónicos con diámetro decreciente y convergente a cero, de tal manera que el abanico A_k es el cono sobre una sucesión armónica $\{a_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge al punto a_k . Además, al vértice del abanico A_k lo denotaremos como v_k . Supondremos que la sucesión de abanicos armónicos es tal que, para cada entero $k > 1$, $v_k = a_{k-1}$, de tal manera que $A_k \cap A_l \neq \emptyset$ si y sólo si $l \in \{k-1, k+1\}$. Así, si $l = k-1$, entonces $A_l \cap A_k = \{v_k\} = \{a_l\}$ y, si $l = k+1$, entonces $A_l \cap A_k = \{v_l\} = \{a_k\}$. Así, la sucesión de abanicos armónicos converge a un punto p . Sea $X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup \{p\}$ (ver Figura 1.6).

Lema 1.1.90. Si X es el continuo definido en el Ejemplo 1.1.89, entonces X es conexo en pequeño en el punto p pero no es localmente conexo en p .

Demostración. Primero veamos que X es conexo en pequeño en p . Sea U un abierto propio de X que contiene a p ($X \setminus U$ es un cerrado tal que $p \notin (X \setminus U)$). Como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos convergente a p , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq k$, $A_m \subset U$. Entonces $\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$ es un continuo contenido en U tal que $p \in \text{Int}_X(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i)$.

Ahora veremos que X no es localmente conexo. Sean $\varepsilon > 0$ tal que existe v_k tal que $v_k \notin \mathcal{V}_\varepsilon(p)$ y U un abierto de X tal que $p \in U \subset \mathcal{V}_\varepsilon(p)$. Entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $v_l \in U$ pero v_{l-1} no es un elemento de U . Como $a_{l-1} = v_l \in U$ y A_{l-1} es el cono sobre la sucesión $\{a_{(l-1)_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_{(l-1)_j} \in U$, para $j \geq r$. Como el vértice de A_{k-1} , v_{k-1} , no es elemento de U , para cualesquiera s y t naturales distintos y mayores que r , las componentes en U de $a_{(k-1)_s}$ y $a_{(k-1)_t}$ son disrtintas. Por tanto U es disconexo.

Q.E.D.

Observación 1.1.91. Es sabido que los espacios de los Ejemplos 1.1.88 y 1.1.89 son dendroides suaves. Por la Observación 1.1.87, son ejemplos de continuos suaves por arcos y, por la Obervación 1.1.85, también son libremente contraíbles.

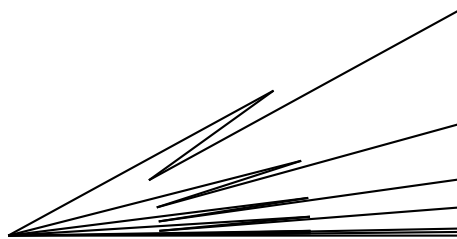


Figura 1.7. Abanico definido en el Ejemplo 1.1.92

A continuación daremos un ejemplo de un abanico que no es suave.

Ejemplo 1.1.92. Haremos la siguiente construcción en $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2^n})$, $b_n = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}})$ y $c_n = (1, \frac{1}{2^n})$. Consideremos las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, las cuales convergen a $a = (\frac{2}{3}, 0)$, $b = (\frac{1}{3}, 0)$ y a $c = (1, 0)$, respectivamente. Denotaremos a los segmentos de recta que unen a $(0, 0)$ con c , a $(0, 0)$ con a_n , a a_n con b_n y a b_n con c_n como $(0, 0)c$, $(0, 0)a_n$, a_nb_n y b_nc_n , respectivamente. Así, definimos:

$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, 0)a_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_nb_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_nc_n \right) \cup \{(0, 0)c\}.$$

Por construcción X es un abanico (ver Figura 1.7). Dados dos puntos x y y en X , xy denotará el único arco en X que comienza en x y termina en y . Para ver que X no es suave, basta con notar que, si $z \in X$ y consideramos la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces la sucesión de arcos $\{zb_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ va a converger a un arco que contiene al arco $(0, 0)a$, el cual contiene a b en su interior relativo. Por lo que no puede converger a un arco con b como punto extremo. Por tanto, X no es suave.

Los siguientes son ejemplos relacionados con los conceptos anteriores e hiperespacios de continuos.

Ejemplo 1.1.93. Sea X un continuo. Entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo [43, Theorem (1.97)].

Ejemplo 1.1.94. Sea X un continuo. Entonces $\mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo y todo arco en X tiene interior vacío [40, Theorem 6.1.8].

Ejemplo 1.1.95. Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces, tanto 2^X como $\mathcal{C}_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, son contraíbles [43, Theorem (16.15)] y [40, Corollary 6.1.19], respectivamente.

Ejemplo 1.1.96. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces tanto 2^X como $\mathcal{C}_n(X)$ tienen forma trivial (Lema 1.1.82 y [40, Theorem 6.2.3], respectivamente).

Ejemplo 1.1.97. Si X es el continuo definido en el Ejemplo 1.1.63, entonces $\mathcal{C}_1(X)$ no posee la propiedad del punto fijo [43, Theorem (7.2)].

Capítulo 2

n -suspensiones

Antes de dar la definición formal de las n -suspensiones de hiperespacios de continuos comenzaremos dando una generalización de [11, Theorem 3.4] (Teorema 2.1.16). Para eso daremos una nueva definición. Esta definición no se encuentra en el artículo original pero la incluimos en la tesis por tener resultados de interés.

2.1. Propiedad (nD)

En esta sección introducimos una propiedad que nos pareció interesante y que llamamos propiedad (nD) . Para esto, comenzaremos con las definiciones que necesitaremos para presentarla.

Definición 2.1.1. Un continuo será llamado *descomponible* si puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios de él y será llamado *indescomponible* si no es descomponible. Un continuo será llamado *hereditariamente descomponible* (*hereditariamente indescomponible*) si todos sus subcontinuos propios y no degenerados son descomponibles (indescomponibles).

Notemos que los ejemplos de continuos que poseen una imagen ilustrativa en esta tesis, hasta el momento, son descomponibles. A continuación daremos un ejemplo de un continuo indescomponible.

Definición 2.1.2. El *continuo de Knaster*, denotado como $\mathcal{K}$, es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ que consiste en todos los semicírculos con ordenadas no negativas y con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$ que pasen por los puntos del conjunto de Cantor, junto con todos los semicírculos con ordenadas no positivas tales que, para cada entero positivo n , los centros de los semicírculos estén en el punto $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ y que los semicírculos pasen por los puntos del conjunto de Cantor que estén en el intervalo $[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}]$ (ver Figura 2.1).

Observación 2.1.3. Sabemos que el continuo de Knaster es indescomponible [36, Remark to Theorem 8, pág. 213].

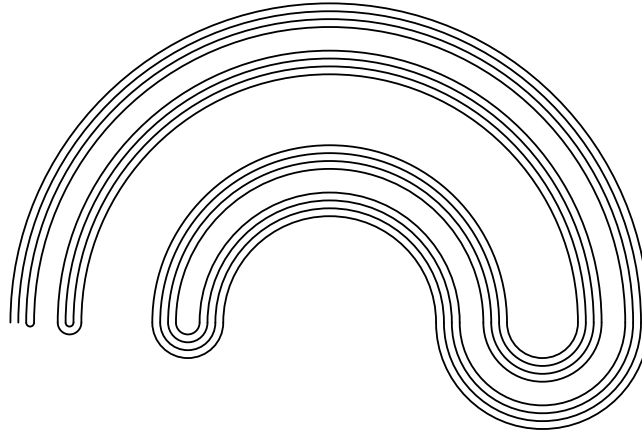


Figura 2.1. Continuo de Knaster (Definición 2.1.2).

Observación 2.1.4. Se sabe que el continuo de Knaster es un continuo encadenable [3, pág. 43]. Así, por la Observación 1.1.53, el continuo de Knaster es tipo arco.

Ejemplo 2.1.5. Se define al *pseudoarco* como el único continuo encadenable hereditariamente indecomponible [3, Example 1 y Theorem 1]. Luego, por la Observación 1.1.53, el pseudoarco es tipo arco.

Definición 2.1.6. Sean X un continuo y n un entero mayor que uno. Diremos que X cumple con la propiedad (nD) si existen n subcontinuos $C_1, \dots, C_n$ de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$ y, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $(X \setminus \bigcup_{i \neq j} C_i) \neq \emptyset$.

Observación 2.1.7. En la Definición 2.1.6, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $X \setminus \bigcup_{i \neq j} C_i \subset C_j$ y, por lo tanto, C_j tiene interior no vacío en X .

Observación 2.1.8. Es fácil notar que, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, si X es un continuo que cumple la propiedad (nD) , entonces, también cumple la propiedad $((n-1)D)$.

Observación 2.1.9. Se sabe que los continuos indecomponibles no tienen subcontinuos propios con interior no vacío [40, Corollary 1.7.26]. De esta manera, por la Observación 2.1.7, ningún continuo indecomponible posee la propiedad (nD) , para ningún número natural. En particular el continuo de Knaster (Definición 2.1.2) no cumple la propiedad (nD) .

Una pregunta natural que podemos realizar es determinar qué tipo de continuos cumplen con la propiedad (nD) . El Lema 2.1.12 nos da una caracterización de los continuos que cumplen la propiedad (nD) que nos será de utilidad.

En el artículo [48], P. M. Swingle define a los *continuos indescomponibles bajo el índice n* como aquellos continuos que pueden ser escritos como la unión de n subcontinuos pero no pueden ser escritos como unión de $n + 1$ subcontinuos. Posteriormente, fueron renombrados por C. E. Burgess, en el artículo [7], como continuos *n -indescomponibles*. Swingle, [48, Theorem 2], demuestra la siguiente caracterización que presentamos como definición.

Definición 2.1.10. Un continuo X se dice *n -indescomponible* si es la unión de n subcontinuos indescomponibles tal que ninguno de ellos se queda contenido en la unión de los demás.

Inmediatamente, de la definición anterior, se tiene la siguiente observación.

Observación 2.1.11. Si $n \in \mathbb{N}$, cualquier continuo n -indescomponible cumple la propiedad (nD) . Además, si X es n -indescomponible, entonces cumple la propiedad (nD) pero no la propiedad $((n + 1)D)$.

Lema 2.1.12. Sea X un continuo. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, X tiene la propiedad (nD) si y sólo si X es un continuo descomponible pero que no es k -indescomponible para ningún entero k mayor que uno.

Demostración. Es claro que si un continuo posee la propiedad (nD) , para todo entero positivo, no puede ser k -indescomponible.

Si X es descomponible, se sigue que tiene la propiedad $(2D)$. Como no es k -indescomponible, para ninguna k , X debe cumplir la propiedad $(3D)$, de lo contrario sería 2-indescomponible (Observación 2.1.11). De manera recursiva podemos repetir este argumento para toda $n \in \mathbb{N}$. Así X cumplirá la propiedad (nD) , para toda $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Corolario 2.1.13. Todo continuo hereditariamente descomponible posee la propiedad (nD) , para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si X es un continuo hereditariamente descomponible, siempre que lo vea como unión de dos subcontinuos propios, estos dos continuos serán hereditariamente descomponibles. Por tanto, X no puede ser visto como la unión de subcontinuos indescomponibles. Así, X no es k -indescomponible, para ninguna $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.1.12, X posee la propiedad (nD) , para toda $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Lema 2.1.14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo n -indescomponible. Entonces X no posee puntos de conexidad local.

Demostración. Sean $C_1, \dots, C_n$ subcontinuos indescomponibles de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$ tal que ningún C_j está contenido en la unión de los demás.

Supongamos que p es un punto de conexidad local de X . Sea U un abierto conexo de X alrededor de p tal que $C_i \setminus Cl_X(U) \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sea C_j tal que $U \cap C_j \neq \emptyset$. Tenemos que $Cl_X(U) \cap C_j$ es desconexo, pues C_j es indescomponible, $U \cap C_j$ es abierto en C_j y $U \cap C_j \subset Cl_X(U) \cap C_j$. Así, si $Cl_X(U) \cap C_j$ fuera conexo, $Cl_X(U) \cap C_j$ sería un subcontinuo propio de C_j con interior no vacío, pero los continuos indescomponibles no contienen subcontinuos propios con interior no vacío (Observación 2.1.9). Más aún, como las composantes en continuos indescomponibles son ajenas [46, Theorem 11.17], cada componente de $Cl_X(U) \cap C_j$ se queda contenida en alguna composante de C_j , y sólo una. Por [13, Theorem 2.1], existe una composante $\mathcal{K}_j$ de C_j que no intersecta a C_i , para ninguna $i \neq j$. Por el Lema 1.1.7, existe una componente K de $Cl_X(U) \cap C_j$ contenida en $\mathcal{K}_j$. De [46, Theorem 5.6] tenemos que, como K es cerrada en $Cl_X(U)$, $K \cap Cl_{Cl_X(U)}(Cl_X(U) \setminus (Cl_X(U) \cap C_j)) = K \cap Cl_{Cl_X(U)}(Cl_X(U) \setminus C_j) \neq \emptyset$. Si K no intersectara a C_m , para ninguna $m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, entonces existiría un abierto V de $Cl_X(U)$ que contendría a K y que no intersectaría a C_m para ninguna $m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ (por ser una cantidad finita de cerrados). Pero, como $K \cap Cl_{Cl_X(U)}(Cl_X(U) \setminus C_j) \neq \emptyset$, se tiene que V debe intersectar a $Cl_X(U) \setminus C_j$, es decir $V \cap C_m \neq \emptyset$, para alguna $m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, lo que es una contradicción. Entonces K intersecta a algún C_m para $m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ pero esto también es una contradicción, pues $K \subset \mathcal{K}_j$ y $\mathcal{K}_j$ no intersecta a C_i , para ninguna $i \neq j$. Luego, X no posee puntos de conexidad local.

Q.E.D.

Corolario 2.1.15. *Si X es un continuo que posee un punto de conexidad local, entonces posee la propiedad (nD) , para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se sigue de los Lemas 2.1.14 y 2.1.12.

Q.E.D.

Teorema 2.1.16. *Sean n un entero positivo y X un continuo con la propiedad $((n+1)D)$. Entonces existe una arcocomponente Γ de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ con interior no vacío.*

Demostración. Como X tiene la propiedad $((n+1)D)$, existen $n+1$ subcontinuos $C_1, \dots, C_{n+1}$ de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$ y $(X \setminus \bigcup_{i \neq j} C_i) \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, tomemos un punto x_j y un abierto V_j de X tales que $x_j \in V_j \subset X \setminus \bigcup_{i \neq j} C_i \subset C_j$.

Sean Γ la arcocomponente de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ en 2^X y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_{n+1} \rangle$ un abierto de la topología de Vietoris para 2^X (Definición 1.1.71). Tomemos $E \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{V}$ se forma a partir de $n+1$ abiertos ajenos dos a dos en X , $E \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$.

Para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$, definimos $E_j = V_j \cap E$. Como $E_1 \subset C_1$ y $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n+1}$, por [43, Theorem (1.8)], existe un arco de orden α_1 de E a $C_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n+1}$. Además, como $x_1 \in C_1$, existe un arco de orden β_1

de $\{x_1\} \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n+1}$ a $C_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n+1}$. De esta manera $\lambda_1 = \alpha_1 \cup \beta_1$ contiene un arco en 2^X que une E con $\{x_1\} \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n+1}$. Como, para todo $i \in \{2, \dots, n+1\}$, $C_1 \cap V_i = \emptyset$, se sigue $\lambda_1 \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$.

Sea $j \in \{2, \dots, n+1\}$. Como $E_j \subset C_j$, por [43, Theorem (1.8)], existe un arco de orden α_j de $\{x_1, \dots, x_{j-1}\} \cup E_j \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$ a $\{x_1, \dots, x_{j-1}\} \cup C_j \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$. Como $x_j \in C_j$, existe un arco de orden β_j de $\{x_1, \dots, x_j\} \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$ a $\{x_1, \dots, x_{j-1}\} \cup C_j \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$. De esta manera, $\lambda_j = \alpha_j \cup \beta_j$ contiene un arco que une $\{x_1, \dots, x_{j-1}\} \cup E_j \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$ con $\{x_1, \dots, x_j\} \cup E_{j+1} \cup \dots \cup E_{n+1}$. Como, para todo $i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1\}$, $C_j \cap V_i = \emptyset$, se sigue $\lambda_j \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. De esta forma, como $\lambda_j \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, para toda $j \in \{1, \dots, n+1\}$, si $\lambda = \bigcup_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, entonces λ contiene un arco en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ que une E con $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$.

Finalmente $E \in \Gamma$ y, como E fue un elemento arbitrario en $\mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset \Gamma$, por lo que este último posee interior no vacío.

Q.E.D.

Corolario 2.1.17. *Si X es un continuo hereditariamente descomponible, entonces, para todo entero n mayor que cero, existe una arcocomponente Γ de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ con interior no vacío.*

Demostración. El resultado se sigue del Corolario 2.1.13 y del Teorema 2.1.16.

Q.E.D.

Corolario 2.1.18. *Si un continuo X posee un punto de conexidad local, entonces, para todo entero n mayor que cero, existe una arcocomponente Γ de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ con interior no vacío.*

Demostración. El resultado se sigue del Corolario 2.1.15 y del Teorema 2.1.16.

Q.E.D.

2.2. n -suspensiones

Ahora definiremos el principal objeto de estudio de la tesis, las n -suspensiones del hiperespacio de subconjuntos compactos de un continuo dado X . Aquí encontraremos los principales resultados relacionados a estos espacios.

Definición 2.2.1. Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Al espacio cociente $2^X / \mathcal{C}_n(X)$ lo llamaremos la *n -suspensión del hiperespacio de X* y lo denotaremos como 2_n^X . A la función cociente entre 2^X y 2_n^X la denotaremos como q^{nX} y a $q^{nX}(\mathcal{C}_n(X))$ lo escribiremos como $\mathcal{C}^{nX}$.

Observación 2.2.2. Como consecuencia de [40, Theorem 1.7.3] y de la arcoconexidad de 2^X [43, Theorem (1.13)], se tiene que el espacio 2_n^X es un continuo arcoconexo.

Observación 2.2.3. Si restringimos q^{nX} a $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, entonces la función resultante $q^{nX}|_{2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)} : 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es un homeomorfismo. Además, como $\mathcal{C}_n(X)$ es conexo (Observación 1.1.74), resulta que q^{nX} es monótona.

Definición 2.2.4. Sea X un continuo. El conjunto 2^{2^X} queda definido como el conjunto de todos los subconjuntos compactos de 2^X . Este conjunto es un espacio métrico con la métrica inducida por la métrica de Hausdorff, $\mathcal{H}$, de 2^X , la cual es denotada por $\mathcal{H}_X^2$, y está definida como sigue:

Si $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$, entonces:

$$\mathcal{H}_X^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{B}) \text{ y } \mathcal{B} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{A})\}.$$

Definición 2.2.5. Sea X un continuo no degenerado. Definamos el conjunto $\mathfrak{C}_n^X$ y la función $\xi_n : 2_n^X \longrightarrow \mathfrak{C}_n^X$ como sigue:

$$\mathfrak{C}_n^X = \{\mathcal{C}_n(X) \cup \{A\} \mid A \in 2^X\}$$

y

$$\xi_n(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_n(X) \cup (q^{nX})^{-1}(\mathcal{A}).$$

Notemos que ξ_n es un homeomorfismo. La función $\rho_{2_n^X} : 2_n^X \times 2_n^X \longrightarrow [0, \infty)$ definida como sigue:

$$\rho_{2_n^X}(\chi_1, \chi_2) = \mathcal{H}_X^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)),$$

es una métrica para 2_n^X cuya topología generada coincide con la topología de espacio cociente [40, Lemma 7.1.15].

El siguiente lema nos dará información sobre la métrica que acabamos de definir y que nos será de utilidad más adelante.

Lema 2.2.6. Sean X un continuo no degenerado, $\varepsilon > 0$ y χ_1 y χ_2 dos elementos de $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$. Si $\mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)) < \varepsilon$, entonces $\mathcal{H}^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)) < \varepsilon$. Además, si $\varepsilon > 0$ es tal que $\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X)) \cap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_j)\}) = \emptyset$, con $j \in \{1, 2\}$. Entonces $\mathcal{H}^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)) < \varepsilon$ implica que $\mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)) < \varepsilon$.

Demostración. Sean χ_1 y χ_2 dos elementos de $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)) < \varepsilon$. Entonces $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\})$ y $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\})$. De esta forma, obtenemos que $\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\})$ y que $\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\})$. Así, $\xi_n(\chi_2) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\xi_n(\chi_1))$ y $\xi_n(\chi_1) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\xi_n(\chi_2))$. De donde, $\mathcal{H}^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)) < \varepsilon$.

A continuación, supongamos que χ_1 , χ_2 y $\varepsilon > 0$ cumplen que $\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X)) \cap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_j)\}) = \emptyset$, con $j \in \{1, 2\}$ y que $\mathcal{H}^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)) < \varepsilon$. Así, $\xi_n(\chi_2) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\xi_n(\chi_1))$. Entonces resulta que $\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X) \cup \{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\}) = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X)) \cup \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\})$. Como, por hipótesis, se tiene que $\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X)) \cap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\}) = \emptyset$, se sigue que $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset$

$\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\})$. De manera análoga, se puede demostrar que $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\})$, por lo que resulta que $\mathcal{H}^2(\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1)\}, \{(q^{nX})^{-1}(\chi_2)\}) = \mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)) < \varepsilon$ (Observación 1.1.70).

Q.E.D.

Teorema 2.2.7. *Si X es un continuo, entonces cualquier vecindad de $\mathcal{C}^{nX}$ en 2_n^X contiene curvas cerradas simples que pasan por $\mathcal{C}^{nX}$*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_1, \dots, x_n$ puntos distintos en X tales que $\mathcal{V}_\varepsilon(x_1) \cap \{x_2, \dots, x_n\} = \emptyset$. Consideremos $\mathcal{V}_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_1)$. Por [46, Corollary 5.5], existe un subcontinuo no degenerado K' de X , tal que $x_1 \in K' \subset \mathcal{V}_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_1)$. Sean y_1 y y_2 puntos distintos en K' y K un subcontinuo de K' irreducible alrededor de $\{y_1, y_2\}$ [49, Theorem 28.4]. Por [43, Theorem (1.8) y Theorem (1.11)], existen dos arcos de orden α_1 y α_2 , en $\mathcal{C}(X)$ de $\{y_1\}$ a K y de $\{y_2\}$ a K , respectivamente. Notemos que $y_2 \notin \alpha_1(t)$ y que $y_1 \notin \alpha_2(t)$, para ninguna $t \in [0, 1)$, esto porque K es irreducible alrededor de $\{y_1, y_2\}$. Definimos un arco β en $\mathcal{C}(X)$, dado por $\beta(t) = \alpha_2(1 - t)$. Así β es un arco de K a $\{y_2\}$ y $y_1 \notin \beta(t)$ para ninguna $t \in (0, 1]$.

Definamos γ_1 y γ_2 de la siguiente manera: $\gamma_1(t) = \{y_1\} \cup \beta(t) \cup \{x_2, \dots, x_n\}$ y $\gamma_2(t) = \alpha_1(t) \cup \{y_2\} \cup \{x_2, \dots, x_n\}$. Entonces γ_1 es un arco que va de $K \cup \{x_2, \dots, x_n\}$ a $\{y_1, y_2\} \cup \{x_2, \dots, x_n\}$ y γ_2 es un arco que va de $\{y_1, y_2\} \cup \{x_2, \dots, x_n\}$ a $K \cup \{x_2, \dots, x_n\}$. Por construcción $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\{y_1, y_2\} \cup \{x_2, \dots, x_n\}, K \cup \{x_2, \dots, x_n\}\}$, también por construcción, $\gamma_1(t) \in \mathcal{C}_{n+1}(X) \setminus \mathcal{C}_n(X)$, para toda $t \in (0, 1]$ y $\gamma_2(t) \in \mathcal{C}_{n+1}(X) \setminus \mathcal{C}_n(X)$, para toda $t \in [0, 1)$. De esta manera $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ es la unión de dos arcos que solo se intersectan en sus puntos finales, por tanto, γ es una curva cerrada simple y, como γ_1 y γ_2 sólo intersectan a $\mathcal{C}_n(X)$ en $K \cup \{x_2, \dots, x_n\}$, el cual es uno de los dos únicos puntos donde se intersectan, tenemos que $\gamma \cap \mathcal{C}_n(X) = K \cup \{x_2, \dots, x_n\}$. Entonces, como $q^{nX}|_{2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)}$ es un homeomorfismo (Observación 2.2.3), $q^{nX}(\gamma)$ es una curva cerrada simple.

Como, por construcción, $K \subset \mathcal{V}_\varepsilon(x_1)$, $\text{diám}(K) < \varepsilon$. Así, para cada $t \in [0, 1]$, $K \cup \{x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\gamma_1(t)) = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\{y_1\} \cup \beta(t) \cup \{x_2, \dots, x_n\})$, pues $\{y_1\} \cup \beta(t) \subset K$. De manera análoga, para cada $t \in [0, 1]$, $K \cup \{x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\gamma_2(t)) = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\alpha_1(t) \cup \{y_2\} \cup \{x_2, \dots, x_n\})$. Entonces $K \cup \{x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\gamma)$. Por otro lado, es claro ver que $\gamma \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(K \cup \{x_2, \dots, x_n\}) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X))$. Así, por la Definición 2.2.5, $q^{nX}(\gamma) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\rho_{2_n^X}}(\mathcal{C}^{nX})$. Finalmente, cualquier vecindad de $\mathcal{C}^{nX}$ en 2_n^X contiene curvas cerradas simples que pasan por $\mathcal{C}^{nX}$.

Q.E.D.

A continuación demostraremos que la dimensión de la n -suspensión del hiperespacio de un continuo siempre es infinita. Para este fin daremos el siguiente teorema, el cual es otra manera de escribir los teoremas obtenidos de [43, Theorem (1.95)] y de [33, Theorem 5.1]:

Teorema 2.2.8. *Sean X un continuo no degenerado y n un número natural. Entonces $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Así, 2^X tiene dimensión infinita.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X convergente a p . Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea U_i un abierto de X alrededor de p_i de tal manera que, si $i \neq j$, entonces $Cl_X(U_i) \cap Cl_X(U_j) = \emptyset$ y $\text{diám}(Cl_X(U_i)) < \frac{1}{i}$. Sea A_i un continuo no degenerado contenido en U_i que contiene a p_i [46, Corollary 5.5]. De esta manera, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos no degenerados en X que converge a p .

Así, por [43, Theorem (1.8) y (1.11)], para cada $i \in \mathbb{N}$, 2^{A_i} contiene un arco de orden β_i de $\{p_i\}$ a A_i tal que, para cada $t \in [0, 1]$, $\beta_i(t)$ es conexo.

Consideremos el cubo de Hilbert, $\mathcal{Q} = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n$, donde $[0, 1]_n = [0, 1]$, para toda n natural.

Definamos $\beta \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n \rightarrow 2^X$ como:

$$\beta((t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(\pi_i((t_j)_{j \in \mathbb{N}})) \right) \cup \{p\} = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(t_i) \right) \cup \{p\},$$

donde π_i es la proyección de $\prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n$ en $[0, 1]_i$. Como $\{\beta_i(t_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de compactos convergente a p y, para $i \neq j$, $\beta_i(t_i) \neq \beta_j(t_j)$, β está bien definida, además de que, como $\beta((t_i)_{i \in \mathbb{N}})$ tiene una cantidad infinita de componentes ajenas dos a dos, obtenemos que $\beta((t_i)_{i \in \mathbb{N}}) \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Notemos que β es continua.

Por otro lado, si $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq (t'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t'_j \neq t_j$. Por lo tanto, $\beta_j(t_j) \neq \beta_j(t'_j)$. Así $\beta((t_i)_{i \in \mathbb{N}}) \neq \beta((t'_i)_{i \in \mathbb{N}})$. Luego, por [49, Theorem 17.14], β es una inclusión de $\mathcal{Q}$ en 2^X . Como el cubo de Hilbert tiene dimensión infinita [22, Corollary 7.3.21], 2^X tiene dimensión infinita.

Q.E.D.

Corolario 2.2.9. *Si X es un continuo no degenerado, entonces 2_n^X tiene dimensión infinita.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.8, $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ contiene una copia del cubo de Hilbert. De la Observación 2.2.3, tenemos que $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo a $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$, de donde se tiene que 2_n^X contiene una copia del cubo de Hilbert. Como el cubo de Hilbert tiene dimensión infinita, [22, Corollary 7.3.21], 2_n^X tiene dimensión infinita.

Q.E.D.

Teorema 2.2.10. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Entonces 2_n^X tiene la propiedad (b) y, en particular, es unicoherente.*

Demostración. Por el Corolario 1.1.83, 2^X cumple la propiedad (b) y, por la Observación 2.2.3, la función cociente $q^{nX} : 2^X \longrightarrow 2_n^X$ es monótona. Así, por [36, Theorem 2 (ii), pág. 434], 2_n^X tiene la propiedad (b) y, por [21, Théorème 2], es unicoherente.

Q.E.D.

Teorema 2.2.11. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Si 2^X es contraíble, entonces 2_n^X es contraíble.*

Demostración. Supongamos que 2^X es contraíble. Entonces existe una homotopía $H' : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$, tal que $H'((A, 0)) = A$ y $H'((A, 1)) = X$, para toda $A \in 2^X$.

Definamos la función $H : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ dada por:

$$H((A, t)) = \bigcup \{H'((A, s)) \mid 0 \leq s \leq t\}.$$

La función H es continua [43, Lemma (16.3)] y es conocida como *homotopía de segmento asociada a H'* [43, (16.4)]. Tenemos que $H((A, 0)) = A$, $H((A, 1)) = X$ y $H((A, s)) \subset H((A, t))$, para $s \leq t$ [43, (16.5.1)].

Tenemos que si $H((A, t)) \in \mathcal{C}_n(X)$, para alguna $t \in [0, 1]$, entonces $H(A \times [t, 1]) \subset \mathcal{C}_n(X)$ [16, Proposition 2.6].

Sea $K : 2_n^X \times [0, 1] \rightarrow 2_n^X$ dada por:

$$K((\chi, t)) = \begin{cases} q^{nX}(H(((q^{nX})^{-1}(\chi), t))), & \text{si } \chi \neq \mathcal{C}^{nX}; \\ \mathcal{C}^{nX}, & \text{si } \chi = \mathcal{C}^{nX}. \end{cases}$$

Por [20, 4.3, pág. 126], K es continua. Como $K((\chi, 0)) = \chi$ y $K((\chi, 1)) = \mathcal{C}^{nX}$, 2_n^X es contraíble.

Q.E.D.

Corolario 2.2.12. *Si X es un continuo no degenerado y contraíble entonces 2_n^X es contraíble.*

Demostración. Como X es contraíble, por [43, Corollary (16.18)], 2^X es contraíble. El corolario se sigue del Teorema 2.2.11.

Q.E.D.

Corolario 2.2.13. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Si X cumple la propiedad de Kelley, entonces 2_n^X es contraíble.*

Demostración. Como X satisface la propiedad de Kelley, 2^X es contraíble [43, Theorem (16.15)]. Por el Teorema 2.2.11, 2_n^X es contraíble.

Q.E.D.

El siguiente resultado es un caso particular de [22, 3.12.13]

Teorema 2.2.14. *Sea $\{X_m, f_m^{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos y, para cada $m \in \mathbb{N}$, Z_m un subconjunto cerrado y no vacío de X_m tal que $f_m^{m+1}(Z_{m+1}) \subset Z_m$. Si $X_\infty = \varprojlim \{X_m, f_m^{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $Z_\infty = \varprojlim \{Z_m, f_m^{m+1}|_{Z_{m+1}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ entonces X_∞/Z_∞ es homeomorfo a $\varprojlim \{X_m/Z_m, (f_m^{m+1})^*\}_{m \in \mathbb{N}}$ (Notación 1.1.65).*

Teorema 2.2.15. *Si X es un continuo y n es un entero positivo entonces 2_n^X tiene forma trivial.*

Demostración. Sea X un continuo. Por [40, Theorem 2.1.56], X es homeomorfo al límite inverso $\varprojlim \{X_m, f_m^{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$, donde cada X_m es un poliedro. Por [50, Théorème II], para cada $m \in \mathbb{N}$, 2^{X_m} es un retracto absoluto. En consecuencia, 2^{X_m} es contraíble (Lema 1.1.37). Por el Teorema 2.2.11, se tiene que, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $2_n^{X_m}$ es contraíble.

Por [40, Theorem 2.3.4], resulta que 2^X es homeomorfo a $\varprojlim \{2^{X_m}, 2_n^{f_m^{m+1}}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $2^{f_m^{m+1}}(\mathcal{C}_n(X_{m+1})) \subset \mathcal{C}_n(X_m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, por el Teorema 2.2.14, obtenemos que $2^X/\mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo a $\varprojlim \{2^{X_m}/\mathcal{C}_n(X), 2_n^{f_m^{m+1}*}\}$; i.e., 2_n^X es homeomorfo a

$$\varprojlim \{2_n^{X_m}, 2_n^{f_m^{m+1}*}\}.$$

Como cada $2_n^{X_m}$ es contraíble, obtenemos que 2_n^X tiene forma trivial.

Q.E.D.

Los siguientes resultados están relacionados con la arcoconexidad de 2_n^X .

Teorema 2.2.16. *Sean X un continuo no degenerado, n un entero positivo y $A \in \mathcal{C}_n(X)$. Si $B \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \{A\}$, entonces existe un arco α en $2^X \setminus \{A\}$ que une a B con algún elemento de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que B tiene $(n-l)$ componentes, con $0 \leq l < n$. Sea C una componente de B . Entonces $B \setminus C$ tiene $(n-l) - 1$ componentes.

Supongamos que C también es una componente de A . Sea U un abierto tal que $C \subset U$ y $U \cap ((B \cup A) \setminus C) = \emptyset$. Por [46, Corollary 5.5], existe un subcontinuo no degenerado K de X tal que C se queda contenido propiamente en K y $K \subset U$. Sea $\{p_i\}_{i=1}^{l+2}$ una familia de puntos distintos en $K \setminus A$. Por [43, Theorem (1.8)], existen arcos de orden γ y β que unen a B con $B \cup K$ y a $(B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}$ con $B \cup K$, respectivamente. Notemos que $((B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}) \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ y ni γ ni β tienen a A . De esta manera, $\gamma \cup \beta$ contiene un arco α en $2^X \setminus \{A\}$ que une a B con un elemento de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$.

Supongamos que existe un elemento c en $C \setminus A$. Por [46, Corollary 5.5], existe un subcontinuo no degenerado K de C tal que $c \in K$ y $K \cap A = \emptyset$. Sea $\{p_i\}_{i=1}^{l+2}$ una familia de puntos distintos dos a dos en K . Notemos que $((B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}) \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Por [43, Theorem (1.8)], existe un arco de orden α que une a B con $(B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}$. Como α no tiene a A , α es el arco que nos sirve.

Finalmente, se supondrá que C se queda contenido propiamente en una componente D de A . Por [46, Corollary 5.5], existe un subcontinuo propio no degenerado K de D tal que C es un subcontinuo propio de K . Sea $\{p_i\}_{i=1}^{l+2}$ una familia de puntos distintos dos a dos en $K \setminus C$. Notemos que $((B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}) \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Por [43, Theorem (1.8)], existen arcos de orden γ y β que unen a $(B \setminus C) \cup \{p_i\}_{i=1}^{l+2}$

con $B \cup K$ y a B con $B \cup K$, respectivamente. De esta manera $\gamma \cup \beta$ contiene un arco α en $2^X \setminus \{A\}$ que une a B con un elemento en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ y, además, α no tiene a A .

Q.E.D.

Lema 2.2.17. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Si $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es arcoconexo, entonces $2^X \setminus \{A\}$ es arcoconexo, para toda $A \in \mathcal{C}_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es arcoconexo. Por [43, Theorem (11.3)], basta considerar elementos en $\mathcal{C}_1(X)$. Sean A en $\mathcal{C}_1(X)$ y E y F dos elementos de $2^X \setminus \{A\}$.

Supongamos que E y F están en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Como, por la Observación 2.2.3, $q^{nX}|_{2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)} : 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X) \rightarrow 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es un homeomorfismo y, por hipótesis, $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es arcoconexo, así que existe un arco α en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ que une a E con F . En particular, $\alpha \subset 2^X \setminus \{A\}$.

Ahora supongamos que E y F pertenecen a $\mathcal{C}_n(X)$. Entonces, por el Teorema 2.2.16, existen dos elementos E_0 y F_0 en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ y dos arcos α_E y α_F en $2^X \setminus \{A\}$ que unen E con E_0 y a F con F_0 , respectivamente. Como E_0 y F_0 están contenidos en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, de manera análoga al caso anterior, existe un arco β en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ que une a E_0 con F_0 , en particular $\beta \subset 2^X \setminus \{A\}$. De esta manera $\alpha_E \cup \alpha_F \cup \beta$ contiene un arco que une a E con F .

Para concluir, supongamos que $E \in \mathcal{C}_n(X)$ y $F \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Por el Teorema 2.2.16, existen un elemento $E_0 \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ y un arco $\gamma \subset 2^X \setminus \{A\}$ que une E_0 con E . Como E_0 y F pertenecen a $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, al igual que el primer caso, existe un arco β que une a E_0 con F . Así, $(\gamma \cup \beta) \subset 2^X \setminus \{A\}$ y contiene un arco que une E con F .

Q.E.D.

Corolario 2.2.18. *Sean X un continuo no degenerado, n un entero positivo y T un subcontinuo propio, no degenerado y terminal de X . Entonces $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ no es arcoconexo.*

Demostración. Por [40, Theorem 6.5.4], $2^X \setminus \{T\}$ no es arcoconexo y, por el Lema 2.2.17, se concluye que $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ no es arcoconexo.

Q.E.D.

Corolario 2.2.19. *Sean X un continuo no degenerado e indescomponible y n un entero positivo. Entonces $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ no es arcoconexo.*

Demostración. Como X es indescomponible, por [43, Theorem (11.4)], $2^X \setminus \{X\}$ no es arcoconexo. El resultado se sigue del Teorema 2.2.17.

Q.E.D.

El Teorema 2.2.21 nos muestra casos en los que podemos encontrar diferencias que hay entre nuestro espacio 2_n^X con otro tipo de cocientes de hiperespacios. A continuación, una definición.

Definición 2.2.20. Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. El espacio cociente $\mathcal{C}_n(X)/\mathcal{F}_n(X)$ es nombrado n -ésimo hiperespacio suspensión de X y lo denotaremos como $\mathcal{HS}_n(X)$.

Teorema 2.2.21. Si X es un continuo no degenerado e indescomponible y n es un entero positivo entonces 2_n^X no es homeomorfo a $\mathcal{HS}_n(X)$.

Demostración. Supongamos que 2_n^X es homeomorfo a $\mathcal{HS}_n(X)$. Notemos que, por el Corolario 2.2.19, $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ no es arcoconexo. Por otro lado, $\mathcal{HS}_n(X) \setminus \{\chi\}$ es arcoconexo, para cualquier elemento $\chi \in \mathcal{HS}_n(X)$ [40, Theorem 7.5.1], lo cual es una contradicción. Así 2_n^X no es homeomorfo a $\mathcal{HS}_n(X)$.

Q.E.D.

A continuación vamos a caracterizar a las n -suspensiones del hiperespacio de un continuo localmente conexo (Teorema 2.2.24). Para esto, daremos unos resultados previos.

Lema 2.2.22. Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Tenemos, por [43, Theorem (1.92)], que 2^X es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo. Como $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es un abierto de 2^X , también será localmente conexo.

Ahora supongamos que $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x_1 \in X$ y U_1 un abierto de X tales que $x_1 \in U_1 \subset Cl_X(U_1) \neq X$. Sean $x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ puntos distintos de $X \setminus Cl_X(U_1)$ y $U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$ abiertos ajenos por pares tales que $x_j \in U_j$, para toda $j \in \{2, \dots, n, n+1\}$. De esta manera $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subset \langle U_1, \dots, U_n, U_{n+1} \rangle \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Como $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{U}$ de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ tal que $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subset \mathcal{U} \subset Cl_{2^X}(\mathcal{U}) \subset \langle U_1, \dots, U_n, U_{n+1} \rangle$.

Se sabe, por [40, Lemma 6.1.1], que $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ tiene a lo más $n+1$ componentes. Como $Cl_{2^X}(\mathcal{U}) \subset \langle U_1, \dots, U_n, U_{n+1} \rangle$, tenemos que $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U}) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j$ y, como $U_1, \dots, U_{n+1}$ son abiertos ajenos dos a dos, $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ posee exactamente $n+1$ componentes.

Por construcción, $x_1 \in \bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$. Sea K la componente de $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ que tiene a x_1 . Como $x_1 \in U_1$, K es conexo, $K \subset \bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U}) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j$ y $U_1, \dots, U_{n+1}$ son abiertos ajenos dos a dos, tenemos que $K \subset U_1$. Además, como $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ tiene exactamente $n+1$ componentes, K es la única componente de $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ contenida en U_1 .

Consideremos $\langle W_1, \dots, W_k \rangle$ un subconjunto abierto básico de 2^X que cumple que $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \in \langle W_1, \dots, W_k \rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $W = (\bigcap \{W_j | x_1 \in W_j\}) \cap U_1$. Entonces W es un abierto de X que contiene a x_1 . Si x' es un elemento de W , entonces tenemos que $\{x', x_2, \dots, x_{n+1}\} \in \langle W_1, \dots, W_k \rangle \subset Cl_{2^X}(\mathcal{U})$. Así, $x' \in \bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{U}) \cap$

U_1 . Como K es la componente de $Cl_{2^X}(\mathcal{U})$ contenida en U_1 , $x' \in K$. Entonces $W \subset K$ y $x_1 \in \text{Int}_X(K)$. De esta manera, X es conexo en pequeño en x_1 . Como x_1 fue arbitrario, por [40, Theorem 1.7.12], X es localmente conexo.

Q.E.D.

Teorema 2.2.23. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si 2_n^X es localmente conexo.*

Demostración. Si X es localmente conexo, por [43, Theorem (1.92)], 2^X es localmente conexo. Como 2_n^X es una imagen continua de un continuo localmente conexo, también es localmente conexo [46, Proposition 8.16].

Supongamos que 2_n^X es localmente conexo. Entonces tenemos que $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es un abierto de 2_n^X y, por lo tanto, es localmente conexo. Por la Observación 2.2.3, como $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ es homeomorfo a $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, éste es localmente conexo y, por el Lema 2.2.22, X es localmente conexo.

Q.E.D.

Teorema 2.2.24. *Sean X un continuo no degenerado y n un entero positivo. Entonces 2_n^X es homeomorfo al cubo de Hilbert, $\mathcal{Q}$, si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Entonces 2^X es homeomorfo a un cubo de Hilbert [43, Theorem (1.97)]. Por [40, Theorem 6.2.3], $\mathcal{C}_n(X)$ tiene forma trivial. Luego, por [14, Theorem 25.2], tenemos que $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{Q} \setminus \{p\}$, para algún elemento $p \in \mathcal{Q}$. Como $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ es homeomorfo a $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ (Observación 2.2.3), tenemos que $\mathcal{Q} \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$. De esta manera, por [20, Theorem 8.4, pág. 246], 2_n^X es homeomorfo a $\mathcal{Q}$.

Si 2_n^X es homeomorfo a $\mathcal{Q}$, por la Definición 1.1.21, $\mathcal{Q}$ es localmente conexo. De donde, 2_n^X es localmente conexo y, por el Teorema 2.2.23, X es localmente conexo.

Q.E.D.

Corolario 2.2.25. *Si X es localmente conexo y n es un entero positivo, entonces 2_n^X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Se sabe que todo retracto absoluto cumple la propiedad del punto fijo [42, Corollary 3.5.4]. Como el cubo de Hilbert es un retracto absoluto (Ejemplo 1.1.22), por el Teorema 2.2.24, 2_n^X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Teorema 2.2.26. *Si X es un continuo no degenerado y $n \in \mathbb{N}$, entonces 2_n^X es uniformemente conexo por trayectorias.*

Demostración. Por [33, Theorem 2.7], 2^X es una imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor. Como q^{nX} es la función cociente, 2_n^X es una imagen continua

del cono sobre el conjunto de Cantor. Se sigue de la Observación 1.1.13 que 2_n^X es uniformemente conexo por trayectorias.

Q.E.D.

Lema 2.2.27. *Sean X un continuo con métrica d y $f : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una función continua. Entonces $F : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ dada por $F((A, t)) = \{f((a, t)) | a \in A\}$ está bien definida y es continua.*

Demostración. Notemos que si $(a, t) \in 2^X \times [0, 1]$, entonces $F((A, t)) = f(A \times \{t\})$. Como f es una función continua, F está bien definida.

Usaremos la métrica del máximo, denotada por $\mathcal{D}_d$, en $X \times [0, 1]$ y la métrica del máximo, denotada por $\mathcal{D}_\mathcal{H}$, en $2^X \times [0, 1]$, para probar que F es continua.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, dada por la continuidad uniforme de f , y $\{(A, t), (B, s)\} \subset 2^X \times [0, 1]$ tales que $\mathcal{D}_\mathcal{H}((A, t), (B, s)) < \delta$. Entonces, por como seleccionamos δ , $d(f((a, t)), f((b, s))) < \varepsilon$. Entonces $f((a, t)) \in \mathcal{V}_\varepsilon^\mathcal{H}(F((B, t)))$. Por tanto, $F((A, t)) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^\mathcal{H}(F((B, t)))$. De manera similar $f((B, t)) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^\mathcal{H}(F((A, t)))$. Finalmente, $\mathcal{H}(F((A, t)), F((B, t))) < \varepsilon$. De donde F es continua.

Q.E.D.

El siguiente teorema es [30, Theorem 1], presentamos una prueba diferente. El resultado será de utilidad para demostrar el Teorema 2.2.29.

Teorema 2.2.28. *Si X es un continuo no degenerado y suave por arcos en el punto p , entonces 2^X es suave por arcos en $\{p\}$.*

Demostración. Por la Observación 1.1.85, tenemos que X es libremente contraíble en el punto $p \in X$. Entonces existe una homotopía $R : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que, para toda $x \in X$:

- (1) $R((x, 0)) = p$,
- (2) $R((x, 1)) = x$ y
- (3) $R((R((x, s)), t)) = R((x, \min\{s, t\}))$, para cualesquiera s y t en $[0, 1]$.

Si definimos $G = 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $G(A, t) = \{R((a, t)) | a \in A\}$, por el Lema 2.2.27, tenemos que G está bien definida y es continua. Además, para cada $A \in 2^X$, $G((A, 0)) = \{p\}$, $G((A, 1)) = A$. Por definición, si s y t están en $[0, 1]$, tenemos que $G((G((A, s)), t)) = \{R((b, t)) | b \in G((A, s))\}$, entonces $b = R((a, s))$ con $a \in A$, por lo que $G((G((A, s)), t)) = \{R((R((a, s)), t)) | a \in A\} = \{R((a, \min\{s, t\})) | a \in A\} = G((A, \min\{s, t\}))$.

De esta manera, se tiene que, 2^X es libremente contraíble y, por la Observación 1.1.85, 2^X es suave por arcos en $\{p\}$.

Q.E.D.

Teorema 2.2.29. *Sea X un continuo no degenerado y suave por arcos. Entonces 2_n^X es suave por arcos.*

Demostración. Usando la función G definida en la demotración del Teorema 2.2.28, podemos definir la función $K : 2_n^X \times [0, 1] \longrightarrow 2_n^X$ como sigue:

$$K((\chi, t)) = \begin{cases} q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), t))), & \text{si } \chi \neq \mathcal{C}^{nX}; \\ \mathcal{C}^{nX}, & \text{si } \chi = \mathcal{C}^{nX}. \end{cases}$$

Por [20, Theorem 4.3, pág. 126] K es una función continua. Además, para cada $\chi \in 2_n^X$, $K((\chi, 0)) = \mathcal{C}^{nX}$, $K((\chi, 1)) = \chi$.

Veamos que $K((K((\chi, s)), t)) = K((\chi, \min\{s, t\}))$, con s y t en $[0, 1]$. Consideremos primero que $\chi = \mathcal{C}^{nX}$. En este caso, por definición, $K((K((\mathcal{C}^{nX}, s)), t)) = K((\mathcal{C}^{nX}, t)) = \mathcal{C}^{nX} = K((\mathcal{C}^{nX}, \min\{s, t\}))$.

Ahora, supongamos que $\chi \neq \mathcal{C}^{nX}$. Observemos que $K((K((\chi, s)), t)) = K((q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))), t))$. Además, notemos que si $G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s)) = \mathcal{C}_n(X)$, entonces $K((K((\chi, s)), t)) = \mathcal{C}^{nX}$ y, como $\min\{s, t\} \leq s$, resulta que $K((\chi, \min\{s, t\})) = \mathcal{C}^{nX}$. Por lo que $K((K((\chi, s)), t)) = K((\chi, \min\{s, t\}))$. Así, supongamos que $G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s)) \neq \mathcal{C}_n(X)$. De donde, se tiene que $K((q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))), t)) = q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))))), t))$, ya que $q^{nX}|_{2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)}$ es un homeomorfismo (Observación 2.2.3). Así, obtenemos que:

$$q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))))), t)) = q^{nX}(G((G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))), t)).$$

Pero, por las propiedades de G , tenemos que $q^{nX}(G((G(((q^{nX})^{-1}(\chi), s))), t)) = q^{nX}(G(((q^{nX})^{-1}(\chi), \min\{s, t\}))) = K((\chi, \min\{s, t\}))$.

Entonces 2_n^X es libremente contraíble y, por la Observación 1.1.85, 2_n^X es suave por arcos en $\mathcal{C}^{nX}$.

Q.E.D.

Capítulo 3

Funciones inducidas

3.1. Varias clases de funciones

A continuación daremos las definiciones de varias clases de funciones para las cuales encontramos resultados relacionados con las n -suspensiones.

Definición 3.1.1. Diremos que una función continua entre continuos $f: X \longrightarrow Y$ es *atómica* si para todo subcontinuo K de X , tal que $f(K)$ es no degenerado, tenemos que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Observación 3.1.2. Toda función atómica es monótona [40, Theorem 8.1.24].

Ejemplo 3.1.3. Sea X el espacio definido en coordenadas polares en el Ejemplo 1.1.35, es decir $X = \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\} \cup S^1$. Definamos $f: X \longrightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera: si $x \in S^1$, entonces $f(x) = 0$ y, si $x = (1 + e^{-\theta}, \theta)$, para alguna $\theta \geq 0$, entonces $f(x) = e^{-\theta}$. La función f es una función atómica.

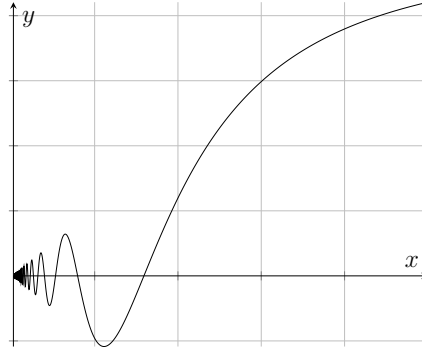
Observación 3.1.4. Sea $X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 | x \in (0, \frac{2}{\pi}]\}$, la curva del topólogo (Ejemplo 1.1.46). Notemos que la función $f: X \longrightarrow [0, 1]$, definida como $f((x, y)) = x$, es una función atómica.

Definición 3.1.5. Sean X y Y dos continuos y $f: X \longrightarrow Y$ una función continua. Diremos que f es *débilmente confluyente* si para cada subcontinuo Q de Y , existe una componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$.

Ejemplo 3.1.6. Sea f una función con dominio $[0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es una función que, restringida a su rango, es débilmente confluyente. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la función:

Figura 3.1. Gráfica de la función f

Ejemplo 3.1.7. Se sabe que toda función continua y suprayectiva de un continuo en un continuo tipo arco es débilmente confluyente [40, Theorem 2.4.22 y Theorem 2.4.25].

Definición 3.1.8. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos y ε un número real positivo. Diremos que f es una ε -función si para toda $y \in Y$, $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \varepsilon$.

Observación 3.1.9. Es claro que un homeomorfismo es una ε -función, para toda $\varepsilon > 0$.

A continuación daremos un ejemplo de una ε -función.

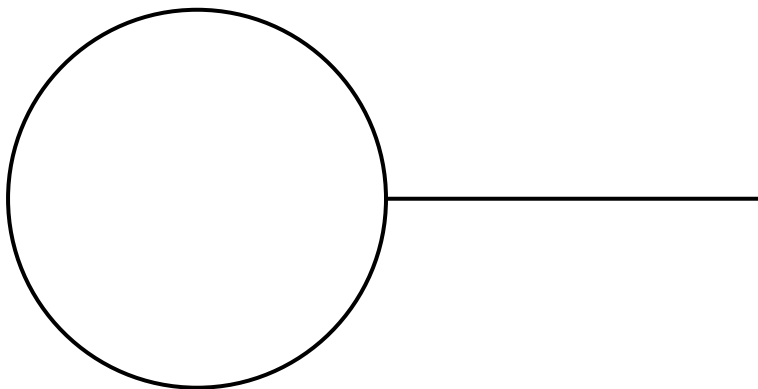
Ejemplo 3.1.10. Consideremos el continuo definido en coordenadas polares dado en el Ejemplo 1.1.35, $X = S^1 \cup \{(1 + e^{-\theta}, \theta) | \theta \geq 0\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $A = Cl_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{V}_\varepsilon(S^1)) \cap X$. Supondremos que ε es tal que $B = X \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(S^1) \neq \emptyset$. Entonces B es un arco, $X = A \cup B$ y $A \cap B$ consta de un único punto $(1 + e^\eta, \eta)$, para alguna $\eta \geq 0$. Llamaremos Y al espacio que consta de la unión de S^1 con un arco L tal que $S^1 \cap L = \{(1, \eta)\}$ y $(1, \eta)$ es un punto extremo de L (ver Figura 3.2). Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función tal que, si $(r, \theta) \in A$, entonces $f((r, \theta)) = (1, \theta)$ y $f|_B$ es un homeomorfismo entre B y L de manera que $f((1 + e^\eta, \eta)) = (1, \eta)$. Entonces f es una ε -función.

Definición 3.1.11. Sean X y Y dos continuos y f una función continua y suprayectiva entre ellos, f será llamada *refinable* si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε -función $g : X \longrightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$.

Ejemplo 3.1.12. Consideremos la curva del topólogo (Ejemplo 1.1.46):

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 | x \in \left(0, \frac{2}{\pi} \right] \right\}.$$

Como X es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, podemos considerar la función proyección en la primera entrada restringida a X , $f : X \longrightarrow [0, \frac{2}{\pi}]$, i.e., $f((a, b)) = a$, la cual es

Figura 3.2. Espacio Y en el Ejemplo 3.1.10

continua. Probaremos que f es una función refinable. Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{2}{(3+4n)\pi} < \varepsilon$. Notemos que $\sin\left(\frac{(3+4n)\pi}{2}\right) = -1$, así que $(\frac{2}{(3+4n)\pi}, -1) \in X$. Sean $g'_1 : X \rightarrow [-1, 1]$ dada por $g'_1((a, b)) = b$ (la proyección en la segunda coordenada de $\mathbb{R}^2$ restringida a X) y $h : [-1, 1] \rightarrow [0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]$ un homeomorfismo tal que $h(-1) = \frac{2}{(3+4n)\pi}$ y $h(1) = 0$. Definamos $g_1 = h \circ g'_1$ y $g : X \rightarrow [0, \frac{2}{\pi}]$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$g((a, b)) = \begin{cases} g_1((a, b)), & \text{si } a \in [0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]; \\ a, & \text{si } a \in [\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]. \end{cases}$$

Veamos que g está bien definida como función pues, si $(a, b) \in X$ es tal que $a = \frac{2}{(3+4n)\pi}$, entonces $b = -1$ y tenemos $g_1((a, b)) = h \circ g'_1((\frac{2}{(3+4n)\pi}, -1)) = h(-1) = \frac{2}{(3+4n)\pi} = a$, por lo que g coincide en la intersección de las partes en las que fue dividido su dominio. Observe que, cuando $a \in [\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]$, g coincide con la función proyección en la primera entrada, la cual es continua, además, por construcción, g_1 es continua. De esta forma $g : X \rightarrow [0, \frac{2}{\pi}]$ es una función continua. Ahora veremos que g es una ε -función. Como g restringida a $\{(a, b) \in X | a \in [\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]\}$ es un homeomorfismo entre $\{(a, b) \in X | a \in [\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]\}$ y $[\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]$, sólo nos fijaremos en las preimágenes bajo g de los elementos en $[0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]$. Si $t \in [0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]$, entonces $g^{-1}(t) = (g'_1)^{-1}(h^{-1}(t))$. Como g'_1 es la proyección en la segunda entrada, se sigue que, si $(a, b) \in g^{-1}(t)$, $b = h^{-1}(t)$ y, por la restricción de g , $a \in [0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]$. Tomemos $a \neq a'$ tales que $\{(a, h^{-1}(t)), (a', h^{-1}(t))\} \subset g^{-1}(t)$. Entonces $d_{\mathbb{R}^2}((a, h^{-1}(t)), (a', h^{-1}(t))) = |a - a'| \leq \frac{2}{(3+4n)\pi} < \varepsilon$. Por lo anterior, $\text{diám}(g^{-1}(t)) < \varepsilon$, para toda $t \in [0, \frac{2}{\pi}]$. Consecuentemente g es una ε -función. Como $f((a, b)) = g((a, b))$ en $\{(a, b) \in X | a \in [\frac{2}{(3+4n)\pi}, \frac{2}{\pi}]\}$, nos fijaremos en la distancia entre ambas funciones en $\{(a, b) \in X | a \in [0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]\}$. En este caso, tanto $f((a, b))$ como $g((a, b))$ son elementos de $[0, \frac{2}{(3+4n)\pi}]$. Entonces $d(f((a, b)), g((a, b))) \leq \frac{2}{(3+4n)\pi} < \varepsilon$. Así, concluimos que f es una función refinable.

ble.

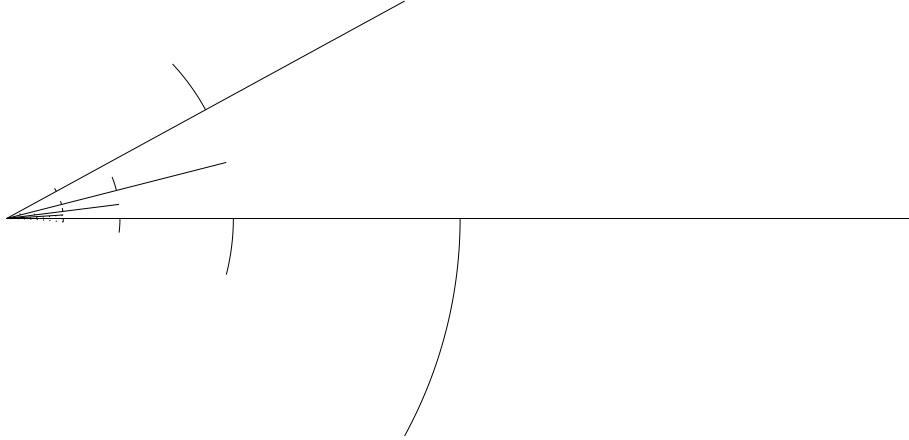
Definición 3.1.13. Sean X y Y dos continuos y f una función continua y supra-yectiva entre ellos, f será llamada *monótonamente refinable* si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε -función monótona $g : X \rightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$.

Notemos que la función f que definimos en el Ejemplo 3.1.12 no es monótonamente refinable. A continuación veremos un ejemplo de una función monótonamente refinable.

Ejemplo 3.1.14. [31, Example 1] Sea $S = \{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen una cantidad infinita de elementos en S iguales a n . Definiremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, expresados en coordenadas polares:

$$T_0 = \{(r, 0) | 0 \leq r \leq 1\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{(r, 0) | r = \frac{1}{2^j} \text{ y } -\frac{1}{2^j} \leq \theta \leq 0\} \right)$$

y, para cada entero positivo i , T_i es la unión de $\{(r, \frac{1}{2^i}) | 0 \leq r \leq \frac{1}{2^i}\}$ con a_i arcos de la forma $\{(\frac{1}{2^j}, \theta) | \frac{1}{2^i} \leq \theta \leq \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i}\}$, con $j > i$. Definimos el continuo $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. La siguiente figura da una ilustración de X en donde $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 1$:



$$\text{Continuo } X = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i.$$

Sean $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ y $f : X \rightarrow Y$ la función que se comporta como la identidad en los elementos en Y y al conjunto T_0 lo identifica con $(0, 0)$. Entonces la función f es una función monótonamente refinable. Para ver esto, sean $\varepsilon > 0$ y n el número de arcos en T_0 de la forma $\{(r, 0) | r = \frac{1}{2^j}, -\frac{1}{2^j} \leq \theta \leq 0\}$ de diámetro mayor a ε . Sea $\{a_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $a_{m_k} = n$ y $\text{diám}(T_{a_{m_k}}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda

$k \in \mathbb{N}$. Así, por construcción, para toda $k \in \mathbb{N}$, $T_{a_{m_k}}$ posee n arcos de la forma $\{(\frac{1}{2^j}, \theta) | \frac{1}{2^{a_{m_k}}} \leq \theta \leq \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{a_{m_k}}}\}$, con $j > a_{m_k}$. Definimos a la función $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$ que se comporta como la identidad en $Y \setminus \left(T_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{a_{m_k}}\right)\right)$ y a cada $T_{a_{m_k}}$ lo manda de manera homeomorfa a $T_{a_{m_{k+1}}}$, dejando fijo a $(0, 0)$. La imagen de T_0 , bajo f_ε , es $T_{a_{m_1}}$ de la siguiente manera: primero identifiquemos a cada arco de la forma $\{(r, 0) | r = \frac{1}{2^j} \text{ y } -\frac{1}{2^j} \leq \theta \leq 0\}$ y de diámetro menor que ε en el punto $(\frac{1}{2^j}, 0)$, después de aplicar a T_0 este movimiento, lo que nos queda es la unión de la recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ con los n arcos de la forma $\{(r, 0) | r = \frac{1}{2^j} \text{ y } -\frac{1}{2^j} \leq \theta \leq 0\}$ de diámetro mayor a ε . Por último, a este conjunto lo podemos mandar, de manera homeomorfa a $T_{a_{m_1}}$, dejando a $(0, 0)$ fijo. La preimagen de los puntos de Y bajo f_ε son puntos o arcos, por lo que f_ε es monótona. Notemos que los únicos conjuntos del dominio de f_ε donde ésta no es inyectiva son los arcos en T_0 de la forma $\{(r, 0) | r = \frac{1}{2^j} \text{ y } -\frac{1}{2^j} \leq \theta \leq 0\}$ y de diámetro menor que ε , los cuales van a dar, cada uno, a un punto pero al tener diámetro menor que ε , f es una ε -función. Para ver que $d(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, consideremos 3 casos:

Caso (1). $x \in Y \setminus \left(T_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{a_{m_k}}\right)\right)$.

En este caso se tiene que $f(x) = f_\varepsilon(x)$.

Caso (2). $x \in T_{a_{m_k}}$, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Aquí, resulta que $f_\varepsilon(x) \in T_{a_{m_{k+1}}}$. Como $\text{diám}(T_{a_{m_l}}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $l \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(f(x), f_\varepsilon(x)) \leq d(x, (0, 0)) + d((0, 0), f_\varepsilon(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Caso (3). Si $x \in T_0$, $f(x) = (0, 0) \in T_{a_{m_1}}$ y $f_\varepsilon(x) \in T_{a_{m_1}}$.

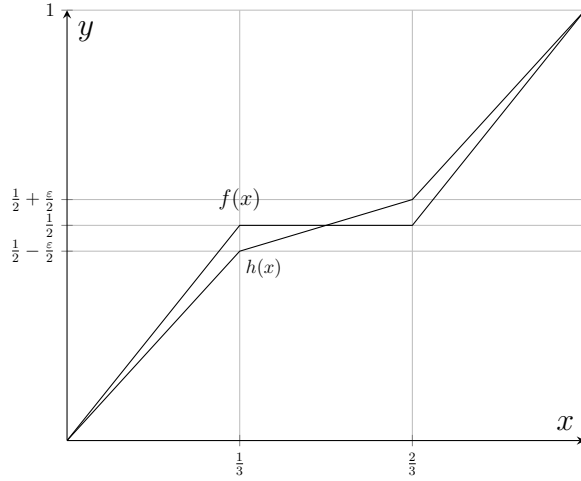
Como $\text{diám}(T_{a_{m_1}}) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.

Concluimos que f_ε es una ε -función monótona, tal que $d_Y(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$. Por tanto, f es una función monótonamente refinable.

Definición 3.1.15. Diremos que una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \rightarrow Y$ es un *casi homeomorfismo* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

A continuación un ejemplo de casi homeomorfismo.

Ejemplo 3.1.16. Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como sigue: la gráfica de f restringida al intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ es el segmento de recta que va de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; restringida al intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ es el segmento de recta que va de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ a $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ y restringida al intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ es el segmento de recta que va de $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ a $(1, 1)$. Notemos que f no es un homeomorfismo pero, dada $\varepsilon > 0$, podemos considerar la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como sigue: la gráfica de h restringida al intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ es el segmento de recta que va de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$; restringida al intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ es el segmento de recta que va de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$ a $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$ y restringida al intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ es el segmento de recta que va de $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$ a $(1, 1)$. Es claro que h es un homeomorfismo y que $d(f(x), h(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in [0, 1]$. Así, f es un casi homeomorfismo. La siguiente imagen muestra las gráficas de las funciones f y h .



Definición 3.1.17. Diremos que una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \rightarrow Y$ es *casi monótona* siempre que $f^{-1}(Q)$ sea conexo para cualquier subcontinuo Q de Y tal que $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$.

Por definición, toda función monótona es casi monótona. A continuación, mostramos una función casimonótona que no es monótona

Ejemplo 3.1.18. [15, Remarks 2.3 (a)] Sea:

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(0, \frac{2}{\pi} \right] \right\};$$

i.e., X es la curva del topólogo (Ejemplo 1.1.46). Entonces la función cociente que identifica a los puntos $(0, -1)$ y $(0, 1)$ en uno solo (ver Figura 3.3), es un ejemplo de una función casi monótona que no es monótona.

Definición 3.1.19. Diremos que una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \rightarrow Y$ es *fuertemente libremente descomponible* si cada vez que A and B sean subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, se sigue que tanto $f^{-1}(A)$ como $f^{-1}(B)$ son conexos.¹

Ejemplo 3.1.20. [15, Remarks 2.3 (b)] Consideremos el círculo unitario $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces la función proyección en el eje X restringida a S^1 es una función fuertemente libremente descomponible.

Definición 3.1.21. Diremos que una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \rightarrow Y$ es *libremente descomponible* si cada vez que A y B sean subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, existen dos subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subset A$ y $f(B') \subset B$.

¹Las funciones fuertemente libremente descomponibles (strongly freely decomposable) también son conocidas como *funciones débilmente monotonas* (feebly monotone) en la literatura.

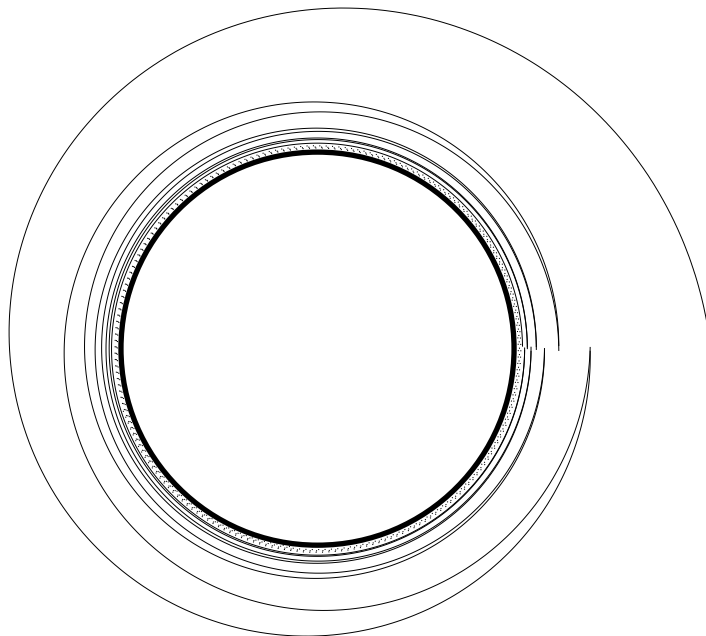


Figura 3.3. Imagen del continuo X del Ejemplo 3.1.18

Observación 3.1.22. Es fácil notar que toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

El ejemplo que presentamos a continuación es de una función libremente descomponible pero no fuertemente libremente descomponible.

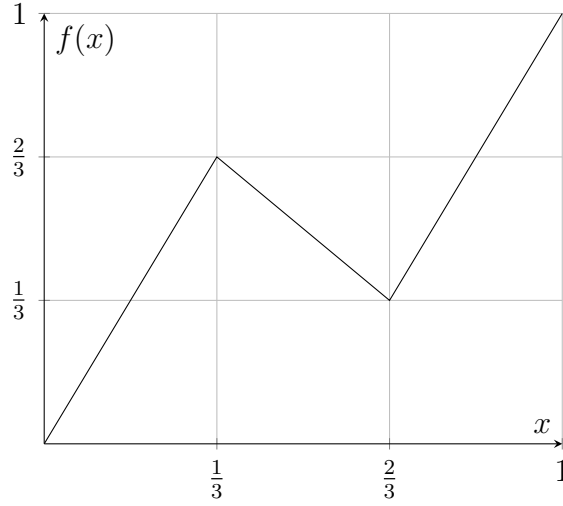
Ejemplo 3.1.23. [9, Example 2.1] Sea $K = \{t \in [-1, 1] | t = \pm 1 \text{ o bien } t = \pm \frac{n}{n+1}, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$. Sea X el cono sobre K . Definimos Y como $X / \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Si f es la función cociente de X en Y , entonces f es libremente descomponible pero no fuertemente libremente descomponible.

Definición 3.1.24. Una función continua y suprayectiva f es *abierta* si para cada subconjunto abierto U de X , $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y .

Definición 3.1.25. Una función continua y suprayectiva f es *casi abierta* si para cualquier punto y de Y , existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $y \in \text{Int}_Y(f(U))$ para cada subconjunto abierto U of X con $x \in U$.

Observación 3.1.26. Es claro que toda función abierta es casi abierta. El Ejemplo 3.1.27 muestra una función casi abierta que no es abierta.

Ejemplo 3.1.27. [51, pág. 52] Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = 2x$ para $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $f(x) = 1 - x$ para $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y $f(x) = 2x - 1$ para $x \in [\frac{2}{3}, 1]$. La gráfica de esta función se ve como la siguiente imagen.



Definición 3.1.28. Diremos que una función continua y suprayectiva es *casi interior* siempre que para cada $y \in Y$, cualquier componente C de $f^{-1}(y)$ y cada subconjunto abierto U de X con $C \subset U$, se tiene que $y \in \text{Int}_Y(f(U))$.

Observación 3.1.29. Es fácil ver que toda función casi abierta es casi interior, no obstante, no toda función casi interior es casi abierta. La función f del Ejemplo 3.1.16 es un ejemplo de función casi interior pero que no es casi abierta.

Definición 3.1.30. Sean X y Y continuos. Se dice que una función continua y suprayectiva $f: X \rightarrow Y$ es una *CE-función* siempre que para cualquier elemento y de Y , $f^{-1}(y)$ tenga forma trivial.

Definición 3.1.31. Una función continua y suprayectiva será llamada *función OM* siempre que existan una función abierta g y una función monótona h de tal forma que $f = g \circ h$.

Observación 3.1.32. Observemos que, por [40, Theorem 8.1.10], tenemos que una función f es OM si y sólo si f es casi interior.

Incluimos la prueba de la siguiente proposición para conveniencia del lector.

Proposición 3.1.33. [12, Proposition 6.13] Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: Z \rightarrow W$ funciones continuas entre continuos tales que existen funciones monótonas $q_1: X \rightarrow Z$ y $q_2: Y \rightarrow W$, donde $q_2 \circ f = g \circ q_1$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es cualquiera de las siguientes clases de funciones: casi monótonas, libremente descomponibles, monótonas, OM, casi interiores o fuertemente libremente descomponibles. Si f pertenece a $\mathcal{A}$, entonces g también pertenece a $\mathcal{A}$.

Demostración. Supongamos que f es casi monótona y sea Q un subcontinuo de W tal que $\text{Int}_W(Q) \neq \emptyset$. Como q_2 es una función monótona, $q_2^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de Y tal que $\text{Int}_Y(q_2^{-1}(Q)) \neq \emptyset$. En consecuencia, $f^{-1}(q_2^{-1}(Q))$ es un subcontinuo

de X . Notemos que $q_1(f^{-1}(q_2^{-1}(Q))) = g^{-1}(Q)$. De esta forma, $g^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de Z y g es casi monótona.

Supongamos que f es casi interior. Observemos que, como q_2 es monótona, por [40, Corollary 8.1.9], q_2 es casi interior. De donde, por [40, Theorem 8.1.7], $q_2 \circ f$ es casi interior. Ahora, como $q_2 \circ f = g \circ q_1$, por [40, Theorem 8.1.13], g es casi interior. Además, por la Observación 3.1.32, g es OM .

Si f pertenece a $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es libremente descomponible, monótona, casi monótona o fuertemente descomponible entonces $q_2 \circ f$ pertenece a $\mathcal{A}$ ya que $q_2 \in \mathcal{A}$, y por [40, Theorem 8.1.7] y [8, Propositions 4.1, 4.3 and 4.4]. Como $q_2 \circ f = g \circ q_1$, por [40, Theorem 8.1.13 y Remark 8.1.14], g pertenece a $\mathcal{A}$.

Q.E.D.

3.2. Funciones Inducidas

En esta sección vamos a encontrar resultados relacionados con funciones entre n -suspensiones de hiperespacios que serán contruidas a partir de funciones definidas entre los continuos originales. Dichos resultados estarán enfocados a propiedades de las funciones que sean preservadas a su función inducida.

Definición 3.2.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos. Entonces a la función $2^f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A)$ la llamaremos *función inducida por f entre los hiperespacios de compactos de X y Y* . Por [40, Theorem 8.2.2], las funciones inducidas entre hiperespacios de compactos son continuas.

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Definimos $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

Observación 3.2.3. La función $\sigma : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ en la Definición 3.2.2 es continua por [40, Lemma 1.8.11].

El siguiente resultado es [32, Lemma 3.1], incluimos una prueba para beneficio del lector.

Lema 3.2.4. Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X y $A \in \mathcal{A}$, entonces A intersecta a cada componente de $\sigma(\mathcal{A})$.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ un subcontinuo de 2^X y $A \in \mathcal{A}$. Por [40, Lemma 1.8.11], $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$. Supongamos que existe una componente C de $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $C \cap A = \emptyset$. Por [40, Theorem 1.6.8], existen dos subconjuntos cerrados y disjuntos K y L de X tales que $\sigma(\mathcal{A}) = K \cup L$, $A \subset K$ y $C \subset L$.

Definamos los conjuntos $\mathcal{K} = \langle K \rangle \cap \mathcal{A}$ y $\mathcal{L} = \langle X, L \rangle \cap \mathcal{A}$. Así, tenemos que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son dos cerrados ajenos de 2^X cuya unión es $\mathcal{A}$. Pero esto contradice la conexidad de $\mathcal{A}$. Luego, C debe intersectar a A .

Q.E.D.

Lema 3.2.5. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos y K un subcontinuo de Y . Si L es una componente de $f^{-1}(K)$, entonces 2^L es una componente de $(2^f)^{-1}(2^K)$.

Demostración. Si $A \in 2^L$, entonces $f(A)$ es un compacto contenido en K . Así $2^f(2^L) \subset 2^K$. Sea $\mathcal{L}$ la componente de $(2^f)^{-1}(2^K)$ que contiene a 2^L . Notemos que $f(\bigcup \mathcal{L}) \subset K$. Por el Lema 3.2.4, L intersecta a cada componente de $\bigcup \mathcal{L}$. De esta manera, como L es conexo, $\bigcup \mathcal{L}$ es conexo y, como L es una componente de $f^{-1}(K)$, $L = \bigcup \mathcal{L}$. Por tanto, $2^L = \mathcal{L}$.

Q.E.D.

Definición 3.2.6. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces a la función $2_n^f : 2_n^X \longrightarrow 2_n^Y$ dada por:

$$2_n^f(\mathcal{A}) = \begin{cases} q^{nY}(2^f((q^{nX})^{-1}(\mathcal{A}))), & \text{si } \mathcal{A} \neq \mathcal{C}^{nX}; \\ \mathcal{C}^{nY}, & \text{si } \mathcal{A} = \mathcal{C}^{nX}, \end{cases}$$

se le llamará *función inducida entre las n -suspensiones de X y Y* .

Lema 3.2.7. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces 2_n^f es una función continua y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 2^X & \xrightarrow{2^f} & 2^Y \\ q^{nX} \downarrow & & \downarrow q^{nY} \\ 2_n^X & \xrightarrow{2_n^f} & 2_n^Y \end{array} \quad (*)$$

conmuta.

Demostración. Por [20, Theorem 4.3, pág. 126], 2_n^f es continua y, por construcción, el diagrama conmuta.

Q.E.D.

Teorema 3.2.8. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces $(2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY})$ es arcoconexo o un punto.

Demostración. Supongamos que $\chi \in (2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY}) \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$. Entonces, por el Lema 3.2.7, tenemos que $2^f((q^{nX})^{-1}(\chi)) \in \mathcal{C}_n(Y)$. Como $(q^{nX})^{-1}(\chi)$ es un compacto de X , existe un arco de orden $\gamma: [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $\gamma(0) = (q^{nX})^{-1}(\chi)$ y $\gamma(1) = X$ [43, Theorem (1.8)]. De esta manera $\alpha = 2^f \circ \gamma$ es un arco en 2^Y tal que $\alpha(0) \in \mathcal{C}_n(Y)$, reparametrizando si es necesario, podemos suponer que α es un arco de orden. Entonces, por [16, Proposition 2.6], $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{C}_n(Y)$, por lo que $q^{nY} \circ \alpha([0, 1]) = \{\mathcal{C}^{nY}\}$. Tenemos que $\eta = q^{nX} \circ \gamma$ es un arco en 2_n^X que une a χ con $\mathcal{C}^{nX}$ y tal que $2_n^f \circ \eta([0, 1]) = \{\mathcal{C}^{nY}\}$. Por lo tanto, $\eta([0, 1]) \subset (2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY})$. Finalmente $(2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY})$ es arcoconexo.

Q.E.D.

A continuación daremos resultados relacionados con la inyectividad y la suprayectividad de las funciones continuas entre continuos y sus funciones inducidas a sus n -suspensiones. También daremos un teorema que caracteriza a las funciones inducidas por homeomorfismos.

Lema 3.2.9. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) f es inyectiva;
- (2) 2^f es inyectiva;
- (3) 2_n^f es inyectiva.

Demostración. Supongamos que f es inyectiva. Si A y B son dos compactos distintos de X , entonces, sin perder generalidad, existe $x \in A \setminus B$. De esta manera $x \in f(A) \setminus f(B)$. Luego, $f(A) \neq f(B)$; i.e., $2^f(A) \neq 2^f(B)$ y, en consecuencia, 2^f es inyectiva.

Supongamos que 2^f es inyectiva y que tenemos dos elementos distintos χ y ψ en 2_n^X . Entonces, sin perder generalidad, supondremos que χ es distinto a $\mathcal{C}^{nX}$. También, sin perder generalidad, existe $x \in (q^{nX})^{-1}(\chi) \setminus (q^{nX})^{-1}(\psi)$. Como 2^f es inyectiva, de manera análoga al párrafo anterior, $2^f((q^{nX})^{-1}(\chi))$ y $2^f((q^{nX})^{-1}(\psi))$ son elementos distintos en 2^Y . Además $2_n^f(\chi) \neq \mathcal{C}^{nY}$. Por tanto $2_n^f(\chi) \neq 2_n^f(\psi)$ y 2_n^f es inyectiva.

Por último, supongamos que 2_n^f inyectiva y sean a y b elementos distintos en X . Consideremos n puntos distintos entre sí $x_2, \dots, x_{n+1}$ en $X \setminus \{a, b\}$. De esta manera, $A = \{a, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ y $B = \{b, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ son dos elementos distintos en $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Así $2_n^f(q^{nX}(A)) \neq 2_n^f(q^{nX}(B))$ y, por el Lema 3.2.7, $q^{nY}(f(A)) \neq q^{nY}(f(B))$. De esto se sigue que $f(A) \in 2^Y \setminus \mathcal{C}_n(Y)$, por lo tanto, $f(A) \in \mathcal{F}_{n+1}(Y)$, entonces $f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$ son elementos distintos dos a dos. De manera análoga, $f(B) \in \mathcal{F}_{n+1}(Y)$. Tenemos que $f(A)$ y $f(B)$ coinciden en todos los elementos $f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$, pero $f(A) \neq f(B)$. Por tanto, $f(a) \neq f(b)$.

Q.E.D.

Lema 3.2.10. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) f es suprayectiva;
- (2) 2^f es suprayectiva;
- (3) 2_n^f es suprayectiva.

Demostración. Supongamos que f es suprayectiva. Si L es un compacto en Y , al ser f continua y X un compacto, $f^{-1}(L)$ es un compacto en X . De esta manera $2^f(f^{-1}(L)) = f(f^{-1}(L)) = L$. Así, 2^f es suprayectiva.

Supongamos que 2^f es suprayectiva. Como q^{nY} es suprayectiva, $2^f \circ q^{nY}$ es suprayectiva. Sabemos que el diagrama (*) del Lema 3.2.7 conmuta; i.e., $2^f \circ q^{nY} = 2_n^f \circ q^{nY}$. Por tanto, $2_n^f \circ q^{nY}$ es suprayectiva y 2_n^f es suprayectiva.

Finalmente, supongamos que 2_n^f es suprayectiva y sean $y \in Y$ y $y_2, \dots, y_{n+1}$ n puntos distintos en $Y \setminus \{y\}$. Entonces $L = \{y, y_2, \dots, y_n\} \in 2^Y \setminus \mathcal{C}_n(Y)$ y $q^{nY}(L) \neq \mathcal{C}^{nY}$. Por hipótesis, existe $\chi \in 2_n^X$ tal que $2_n^f(\chi) = q^{nY}(L)$. Como $L \notin \mathcal{C}_n(Y)$, por el Lema 3.2.7, se tiene que $2^f(q^{nX})^{-1}(\chi) = \{y, y_1, \dots, y_n\}$. De esta manera, existe un elemento en $(q^{nX})^{-1}(\chi)$ cuya imagen bajo f es y . Así f es suprayectiva.

Q.E.D.

Teorema 3.2.11. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos no degenerados y n un entero positivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) f es un homeomorfismo;
- (2) 2^f es un homeomorfismo;
- (3) 2_n^f es un homeomorfismo;
- (4) 2^f es atómica;
- (5) 2_n^f es atómica.

Demostración. Notemos que el hecho de que (1), (2) y (3) sean equivalentes se sigue de los Lemas 3.2.9 y 3.2.10 y del hecho de que toda función inyectiva entre un compacto y un espacio Hausdorff es un homeomorfismo [49, Theorem 17.14].

Para ver que (1) implica (5), supongamos que f es un homeomorfismo. Como (1) y (3) son equivalentes, 2_n^f es un homeomorfismo y, por tanto, atómica. De manera similar, podemos ver que (1) implica (4).

Si 2_n^f es atómica, como 2_n^X es arcoconexo (Observación 2.2.2), 2_n^f es homeomorfismo [40, Corollary 8.1.26] y, como (1) y (3) son equivalentes, f es un homeomorfismo. De manera análoga, si 2^f es atómica, como 2^X es arcoconexo [43, Theorem (1.13)], 2^f es un homeomorfismo [40, Corollary 8.1.26], por lo que f es un homeomorfismo ((2) y (1) son equivalentes). Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

La equivalencia entre la monotonía de f y 2^f fue originalmente probada en [32, Theorem 3.2], nuestra prueba es diferente y la incluimos por completez.

Teorema 3.2.12. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) f es monótona;
- (2) 2^f es monótona;
- (3) 2_n^f es monótona.

Demostración. Supongamos que f es monótona. Sea $A \in 2^Y$ y consideremos $L \in (2^f)^{-1}(A)$. Entonces para cada componente C de L , existe una componente E_C de A tal que $C \subset f^{-1}(E_C)$. Como f es monótona, $f^{-1}(E_C)$ es conexo y, por tanto, existe un arco de orden $\alpha_C : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha_C(0) = C$ y $\alpha_C(1) = f^{-1}(E_C)$ [43, Theorem (1.8)]. De esta manera, si $\mathcal{L}$ es el conjunto cuyos elementos son las componentes de L , podemos definir $\gamma(t) = \bigcup_{C \in \mathcal{L}} \alpha_C(t)$. Así, γ es un arco en 2^X de

L a $f^{-1}(A)$. Como, para cada $t \in [0, 1]$, $L \subset \gamma(t) \subset f^{-1}(A)$ y $f(L) = A$, tenemos que $f(\gamma(t)) = A$, para toda $t \in [0, 1]$. Así $\gamma([0, 1]) \subset (2^f)^{-1}(A)$ y $(2^f)^{-1}(A)$ es arcoconexo. De donde, 2^f es monótona.

Supongamos que 2^f es monótona. Sabemos, por la Observación 2.2.3, que q^{nY} es monótona. Así, $q^{nY} \circ 2^f$ es monótona [40, Theorem 8.1.7]. Como el diagrama (*) del Lema 3.2.7 conmuta, $2_n^f \circ q^{nX}$ es monótona. De esta manera, por [40, Theorem 8.1.13], 2_n^f es monótona.

Para probar que (3) implica (1), supondremos que f no es monótona. Entonces existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ es desconexo. Sean A y B dos componentes distintas de $f^{-1}(y)$, a y b puntos en A y B , respectivamente, y $x_2, \dots, x_{n+1}$ puntos distintos en $X \setminus (A \cup B)$ tales que $f(x_i) \neq f(x_j)$, para cualesquiera i y j en $\{2, \dots, n+1\}$. Para cada $j \in \{2, \dots, n+1\}$, C_j será la componente de $f^{-1}(f(x_j))$ que contiene a x_j .

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \left\{ D \in 2^X \mid D \subset \left(\bigcup_{j=2}^{n+1} C_j \right) \cup A, D \cap C_j \neq \emptyset \text{ para toda } j \in \right. \\ & \left. \{2, \dots, n+1\} \text{ y } D \cap A \neq \emptyset \right\} \text{ y} \\ \mathcal{L}_2 = & \left\{ D \in 2^X \mid D \subset \left(\bigcup_{j=2}^{n+1} C_j \right) \cup B, D \cap C_j \neq \emptyset \text{ para toda } j \in \right. \\ & \left. \{2, \dots, n+1\} \text{ y } D \cap B \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Notemos que ambos conjuntos son distintos y $\mathcal{L}_1$ es conexo pues cualquier elemento en él puede ser unido mediante un arco de orden con $\left(\bigcup_{j=2}^{n+1} C_j \right) \cup A$ [43, Theorem (1.8)]. De manera análoga, $\mathcal{L}_2$ es conexo.

Veremos que $\mathcal{L}_1$ también resulta ser una componente de $(2^f)^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$. Si $\mathcal{K}$ fuera la componente de $(2^f)^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$ que contuviera a $\mathcal{L}_1$, entonces $\bigcup \mathcal{L}_1 \subset \bigcup \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ es conexo y $\left(\bigcup_{j=2}^{n+1} C_j\right) \cup A \in \mathcal{K}$, $\bigcup \mathcal{K}$ tiene exactamente $n+1$ componentes en X , por el Lema 3.2.4 y porque, para y o $f(x_j)$, para cada $j \in \{2, \dots, n+1\}$, existe una componente de $\bigcup \mathcal{K}$ que, bajo f , va a dar a tal elemento. De esta forma, cada componente de $\bigcup \mathcal{K}$ se queda contenida en A o en C_j , para alguna $j \in \{2, \dots, n+1\}$, pues, por construcción, A y C_j son componentes de $f^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$, para toda $j \in \{2, \dots, n+1\}$ y cada uno intersecta a una componente de $\bigcup \mathcal{K}$. Así, si $L \in \mathcal{K}$, tenemos que L intersecta a cada componente de $\bigcup \mathcal{K}$ (Lema 3.2.4), por tanto $L \subset \bigcup \mathcal{L}_1$ y L intersecta a cada componente de $\bigcup \mathcal{L}_1$, de donde $L \in \mathcal{L}_1$, luego $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}_1$ y, finalmente, $\mathcal{K} = \mathcal{L}_1$. Por lo que $\mathcal{L}_1$ es una componente de $(2^f)^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$. Análogamente, se tiene que $\mathcal{L}_2$ es una componente de $(2^f)^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$. De esta manera, $(2^f)^{-1}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\})$ consta de al menos dos componentes.

Como $\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\} \in 2^Y \setminus \mathcal{C}_n(Y)$ y tanto $\mathcal{L}_1$ como $\mathcal{L}_2$ son subconjuntos de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, por la Observación 2.2.3 y el Lema 3.2.7, tenemos que $(2_n^f)^{-1}(q^{nY}(\{y, f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\}))$ tiene al menos dos componentes. Así, 2_n^f no es monótona.

Q.E.D.

Como consecuencia de la Proposición 3.1.33, tenemos que:

Corolario 3.2.13. [12, Corollary 6.14] Sean X y Y continuos, n un número entero positivo y $f: X \rightarrow Y$ una función continua débilmente confluyente. Supongamos que $\mathcal{A}$ es cualquiera de las siguientes clases de funciones: casi monótonas, libremente descomponibles, monótonas, OM, casi interiores o fuertemente libremente descomponibles. Si 2^f pertenece a $\mathcal{A}$, entonces 2_n^f también pertenece a $\mathcal{A}$.

Ahora vamos a trabajar con funciones relacionadas con métricas.

Teorema 3.2.14. Sean X y Y dos continuos no degenerados y g y f funciones continuas de X en Y , n un entero positivo y $\varepsilon > 0$. Consideremos los siguientes enunciados:

- (1) $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$;
- (2) $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) < \varepsilon$, para toda $A \in 2^X$;
- (3) $\rho_{2_n^X}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) < \varepsilon$, para cada $\chi \in 2_n^X$.

Entonces (1) y (2) son equivalentes y (2) implica (3).

Demostración. Para ver que (1) implica (2), consideremos $A \in 2^X$. Sabemos que, para toda $a \in A$, $d_Y(f(a), g(a)) < \varepsilon$. De esta manera $f(A) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(g(A))$. Similarmente, resulta que $g(A) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(f(A))$, luego $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) = \mathcal{H}_Y(f(A), g(A)) < \varepsilon$. Ahora, supongamos (2). Sea $x \in X$. Por hipótesis, $\mathcal{H}_Y(2^f(\{x\}), 2^g(\{x\})) < \varepsilon$,

por la Observación 1.1.70 y por la definición de función inducida (Definición 3.2.1), tenemos que $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

Volvamos a suponer (2) para probar (3). Sea $\chi \in 2_n^X$. Entonces tenemos dos casos:

Caso (1). $2_n^f(\chi) = 2_n^g(\chi) = \mathcal{C}^{nY}$.

En este caso $\rho_{2_n^Y}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) = 0 < \varepsilon$.

Caso (2). Alguna de las funciones manda a χ a un elemento distinto de $\mathcal{C}^{nY}$.

Sin perder generalidad, supondremos $2_n^g(\chi) \neq \mathcal{C}^{nY}$. Por como están definidas las funciones inducidas a las n -suspensiones, tenemos $\chi \in 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$. De esta manera, existe $A \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ tal que $q^{nX}(A) = \chi$ y, por hipótesis, $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) < \varepsilon$. De aquí tenemos otros dos casos:

Caso (2.1). $2_n^f(\chi) = \mathcal{C}^{nY}$.

En este caso $2^f(A) \in \mathcal{C}_n(X)$. Como el diagrama (*) del Lema 3.2.7 conmuta, se tiene que $(q^{nY})^{-1}(2_n^f(\chi)) = \mathcal{C}_n(Y)$ y $(q^{nY})^{-1}(2_n^g(\chi)) = \{2^g(A)\}$. Además, como $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) < \varepsilon$, resulta que $2^g(A) \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{C}_n(Y))$. Así, $\mathcal{C}_n(Y) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\})$ y $\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{C}_n(Y))$. De donde se sigue que, $\rho_{2_n^Y}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) = \mathcal{H}_Y^2(\xi_n(2_n^f(\chi)), \xi_n(2_n^g(\chi))) = \mathcal{H}_Y^2(\mathcal{C}_n(Y), \mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\}) < \varepsilon$.

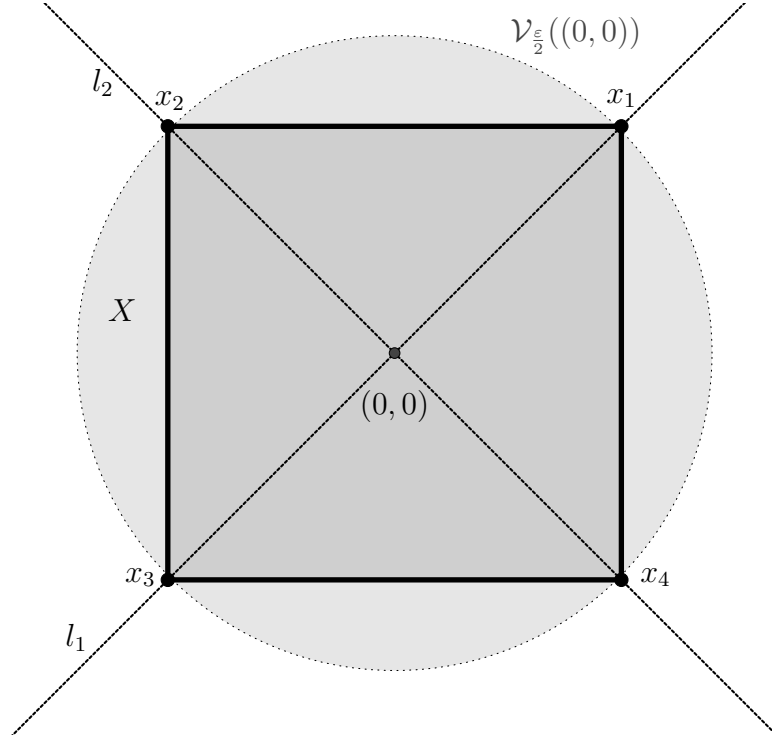
Caso (2.2). $2_n^f(\chi) \neq \mathcal{C}^{nY}$.

Para este caso, se tiene que $2^f(A) \notin \mathcal{C}_n(Y)$. Como el diagrama (*) del Lema 3.2.7 conmuta, obtenemos que $(q^{nY})^{-1}(2_n^f(\chi)) = \{2^f(A)\}$ y $(q^{nY})^{-1}(2_n^g(\chi)) = \{2^g(A)\}$. Por hipótesis, $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) < \varepsilon$, así que, $2^g(A) \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(2^f(A))$ y $2^f(A) \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(2^g(A))$. Entonces $\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^f(A)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\})$ y $\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\} \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^f(A)\})$. Finalmente, $\rho_{2_n^Y}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) = \mathcal{H}_Y^2(\xi_n(2_n^f(\chi)), \xi_n(2_n^g(\chi))) = \mathcal{H}_Y^2(\mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^f(A)\}, \mathcal{C}_n(Y) \cup \{2^g(A)\}) < \varepsilon$. Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

Notemos que la implicación de (3) para (1) o (2) en el Teorema 3.2.14 no está considerada. A continuación vamos a mostrar que el que dos funciones f y g cumplan (3) del Teorema 3.2.14 no es suficiente para que $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$ se cumpla.

Ejemplo 3.2.15. Sean $\varepsilon > 0$, Y el círculo de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(0, 0)$, l_1 y l_2 las rectas que pasan por $(0, 0)$ con pendientes 1 y -1 , respectivamente, y x_1, x_2, x_3 y x_4 serán los cuatro puntos donde se intersectan $l_1 \cup l_2$ con Y . Cada punto se encuentra en un cuadrante del plano, así x_i , con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, será el punto que se encuentre en el cuadrante i . Llamemos X al cuadrado cuyos vértices son los puntos $x_1 = (\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}})$, $x_2 = (-\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}})$, $x_3 = (-\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, -\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}})$ y $x_4 = (\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, -\frac{\varepsilon}{\sqrt{8}})$ (ver Figura 3.4). Sean $f: X \rightarrow X$ la reflexión con respecto a l_2 y g la función identidad en X . Observemos que para todo subconjunto A de X con más de dos puntos, $X \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(A)$. También notemos que si $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, entonces $X \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(x)$.

Figura 3.4. Continuo X

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y $\chi \in 2^X$. Si $\chi = \mathcal{C}^{nX}$, entonces $2_n^f(\chi) = \mathcal{C}^{nX} = 2_n^g(\chi)$, por lo que $\rho_{2_n^X}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) = 0 < \varepsilon$. Si $\chi \neq \mathcal{C}^{nX}$, entonces $(q^{nX})^{-1}(\chi) \in 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Así, $(q^{nX})^{-1}(\chi)$ tiene más de 2 puntos de X . Como f y g son inyectivas $f((q^{nX})^{-1}(\chi))$ y $g((q^{nX})^{-1}(\chi))$ son elementos de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$, por lo que también tienen más de 2 puntos. Así, X se queda contenido tanto en $\mathcal{V}_\varepsilon^f(f((q^{nX})^{-1}(\chi)))$ como en $\mathcal{V}_\varepsilon^g(g((q^{nX})^{-1}(\chi)))$, por lo tanto, también cualquier subconjunto de X se quedará contenido en ambos. Así,

$$\mathcal{H}_X(f((q^{nX})^{-1}(\chi)), g((q^{nX})^{-1}(\chi))) < \varepsilon.$$

Notemos que, como el diagrama (*) del Lema 3.2.7 conmuta, tenemos que

$$\mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(2_n^f(\chi)), (q^{nX})^{-1}(2_n^g(\chi))) < \varepsilon.$$

De esta manera, por el Lema 2.2.6,

$$\rho_{2_n^X}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) = \mathcal{H}^2(\xi_n(2_n^f(\chi)), \xi_n(2_n^g(\chi))) < \varepsilon.$$

No obstante, considerando x_3 , tenemos que $d(f(x_3), g(x_3)) = d(x_1, x_3) = \varepsilon$, por lo que la desigualdad no se cumple.

Teorema 3.2.16. [12, Theorem 6.17] Sean X y Y continuos, n un número entero positivo, y $f: X \rightarrow Y$ una función súldébilemte confluyente. Consideremos los siguientes enunciados:

- (1) f es monótona;
- (2) 2^f es una CE -función;
- (3) 2_n^f es una CE -función.

Entonces (1) y (2) son equivalentes y (3) implica (1).

Demostración. Notemos que, por [45, Lemma 2.1], (1) y (2) son equivalentes. Por [40, Remark 8.4.9], las CE -funciones son monótonas. En consecuencia, si 2_n^f es una CE -función, también es una función monótona y, por el Teorema 3.2.12, f es una función monótona.

Q.E.D.

El siguiente resultado y su demostración contienen una parte de [17, Proposition 2] que hemos incluido para fines de completez de la tesis.

Corolario 3.2.17. Sean X y Y continuos, $f: X \rightarrow Y$ una función suprayectiva y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes enunciados:

- (1) f es un casi homeomorfismo;
- (2) 2^f es un casi homeomorfismo;
- (3) 2_n^f es un casi homeomorfismo.

Entonces (1) implica (2) y (3).

Demostración. Supongamos que f es un casi homeomorfismo. Del Teorema 3.2.10 tenemos que 2^f y 2_n^f son suprayectivas. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por hipótesis, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$. Por el Teorema 3.2.11, tanto 2^h como 2_n^h son homeomorfismos. Finalmente, usando el Teorema 3.2.14,

$$\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^h(A)) < \varepsilon,$$

para cada $A \in 2^X$ y

$$\rho_{2_n^X}(2_n^f(\chi), 2_n^h(\chi)) < \varepsilon,$$

para cada $\chi \in 2_n^X$. De esta manera 2_n^f y 2^X son casi homeomorfismos.

Q.E.D.

Teorema 3.2.18. [17, Theorem 3] Sean X y Y continuos localmente conexos, n un número entero positivo y $f: X \rightarrow Y$ una función monótona. Entonces tanto 2^f como 2_n^f son casi homeomorfismos.

Demostración. Como X y Y son continuos localmente conexos, por [43, Theorem (1.97)] y el Teorema 2.2.24, tenemos que 2^X , 2^Y , 2_n^X y 2_n^Y son cubos de Hilbert. En consecuencia, por el Teorema 3.2.16, obtenemos que tanto 2^f como 2_n^f son CE -funciones entre cubos de Hilbert. De donde, por [42, Theorem 7.5.7 and Corollary 7.8.4], ambas funciones son casi homeomorfismos.

Q.E.D.

Corolario 3.2.19. *Sean X y Y continuos y n un número entero positivo. Si $f: X \rightarrow Y$ es un casi homeomorfismo, entonces tanto 2^f como 2_n^f son débilmente confluentes.*

Demostración. Por el Corolario 3.2.17, 2_n^f y 2^f son casi homeomorfismos. Por su definición, los casi homeomorfismos son funciones refinables y, por [24, Corollary 1.1], las funciones refinables son débilmente confluentes.

Q.E.D.

Corolario 3.2.20. *Sean X y Y continuos localmente conexos y n un número entero positivo. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función monótona, entonces tanto 2^f como 2_n^f son débilmente confluentes.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.18, 2_n^f y 2^f son casi homeomorfismos. Por su definición, los casi homeomorfismos son funciones refinables y, por [24, Corollary 1.1], las funciones refinables son débilmente confluentes.

Q.E.D.

Teorema 3.2.21. *Sean X y Y continuos no degenerados, $f: X \rightarrow Y$ una función débilmente confluyente, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Si 2^f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función, entonces 2_n^f es una ε -función.*

Demostración. Sean $\eta \in 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nY}\}$ y χ_1 y χ_2 dos elementos de $(2_n^f)^{-1}(\eta)$. Tenemos que $(q^{nY})^{-1}(\eta) \in 2^Y \setminus \mathcal{C}_n(X)$, $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset (2^f)^{-1}((q^{nY})^{-1}(\eta))$ y $\{(q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)\} \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$.

Por hipótesis 2^f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función. Entonces $\mathcal{H}((q^{nX})^{-1}(\chi_1), (q^{nX})^{-1}(\chi_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera, por el Lema 2.2.6, $\mathcal{H}^2(\xi_n(\chi_1), \xi_n(\chi_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir $\rho_{2_n^X}(\chi_1, \chi_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sean $\chi \in (2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY}) \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ y $A = (q^{nX})^{-1}(\chi)$. Notemos que $B = 2^f(A) \in \mathcal{C}_n(Y)$. Como f es débilmente confluyente, tenemos que existe $A' \in \mathcal{C}_n(X)$ tal que $f(A') = B$. De esta manera $\{A, A'\} \subset (2^f)^{-1}(B)$. Como 2^f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función, tenemos que $\mathcal{H}(A, A') = \mathcal{H}^2(\{A\}, \{A'\}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (Observación 1.1.70). Tenemos $\{A\} \subset \mathcal{V}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X))$ y $\mathcal{C}_n(X) \subset \mathcal{V}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}_n(X) \cup \{A\})$. Esto implica que $\mathcal{H}^2(\xi_n(\mathcal{C}^{nX}), \xi_n(\chi)) < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir $\rho_{2_n^X}(\mathcal{C}^{nX}, \chi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo que, si χ_1 y χ_2 son elementos de $(2_n^f)^{-1}(\mathcal{C}^{nY})$, entonces $\rho_{2_n^X}(\chi_1, \chi_2) < \varepsilon$.

Q.E.D.

Corolario 3.2.22. *Sean X y Y continuos no degenerados, $f: X \rightarrow Y$ una función débilmente confluyente, n un entero positivo y $\varepsilon > 0$. Entonces, si f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función, entonces 2_n^f es una ε -función.*

Demostración. Si f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función, entonces 2^f es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función [32, Lemma 2.1]. Por el Teorema 3.2.21, 2_n^f es una ε -función, lo que completa la prueba.

Q.E.D.

Teorema 3.2.23. *Sean X y Y dos continuos no degenerados y n un entero positivo y $f : X \rightarrow Y$ una función débilmente confluyente y refinable. Entonces 2^f y 2_n^f son refinables.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$. Primero veremos que 2^f es refinable. Como f es refinable, existe una ε -función g de X en Y tal que $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$. Tenemos que 2^g es una ε -función [32, Lemma 2.1] y, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $\mathcal{H}_Y(2^f(A), 2^g(A)) < \varepsilon$, para toda $A \in 2^X$.

Ahora veremos que 2_n^f es refinable. Como f es refinable, existe una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función $g : X \rightarrow Y$ tal que $d(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $x \in X$. Como g es una $\frac{\varepsilon}{2}$ -función, por el Corolario 3.2.22, se tiene que 2_n^g es una ε -función. Luego, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $\rho_{2_n^X}(2_n^f(\chi), 2_n^g(\chi)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, para toda $\chi \in 2_n^X$.

De esta manera, 2^f y 2_n^f son refinables.

Q.E.D.

Teorema 3.2.24. *Sean X y Y dos continuos no degenerados y n un entero positivo y $f : X \rightarrow Y$ una función débilmente confluyente y monótonamente refinable. Entonces 2^f y 2_n^f son monótonamente refinables.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 3.2.12 y 3.2.23.

Teorema 3.2.25. *Sean X un continuo no degenerado, A un subcontinuo no degenerado de X y $n \in \mathbb{N}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) $r : X \rightarrow A$ es una retracción.
- (2) $2^r : 2^X \rightarrow 2^A$ es una retracción.
- (3) $2_n^r : 2_n^X \rightarrow 2_n^A$ es una retracción.

Demostración. Supongamos que r es una retracción. Sea $B \in 2^A$. Como $r|_A = 1_A$, se tiene que $2^r(B) = r(B) = B$. Entonces 2^r es una retracción. Si 2^r es una retracción, para $\{a\} \in 2^A$, tenemos que $2^r(\{a\}) = \{r(a)\} = \{a\}$. De donde se tiene que r es retracción.

Supongamos que 2^r es una retracción. Sea $\chi \in 2_n^A$. Si $\chi = \mathcal{C}^{nX}$, por definición $2_n^r(\mathcal{C}^{nX}) = \mathcal{C}^{nX}$. Supongamos que $\chi \neq \mathcal{C}^{nX}$. Entonces tenemos que $(q^{nX})^{-1}(\chi) \in 2_n^A \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Así, por hipótesis, $2^r((q^{nX})^{-1}(\chi)) = (q^{nX})^{-1}(\chi)$ y $2_n^r(\chi) = q^{nX}(2^r((q^{nX})^{-1}(\chi))) = q^{nX}((q^{nX})^{-1}(\chi)) = \chi$. Por consiguiente, 2_n^r es una retracción.

Ahora probaremos que, si 2_n^r es una retracción, entonces r es una retracción. Sean $a \in A$ y $b, a_1, \dots, a_n$ puntos distintos en $A \setminus \{a\}$. Definimos $L_1 = \{a, a_1, \dots, a_n\}$ y $L_2 = \{b, a_1, \dots, a_n\}$. Entonces L_1 y L_2 son elementos de $2^A \setminus \mathcal{C}_n(A) \subset 2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$. Así tenemos que $q^{nX}(L_1) \in 2_n^A$ y $q^{nX}(L_1) \neq \mathcal{C}^{nX}$. Como 2_n^r es una retracción, $2_n^r(q^{nX}(L_1)) = q^{nX}(L_1)$. Así, $(q^{nX})^{-1}(q^{nX}(L_1)) = L_1$. Como el diagrama (*)

del Lema 3.2.7 conmuta, tenemos que $r(L_1) = L_1$. De manera análoga $r(L_2) = L_2$. Si $r(a) \neq a$, entonces, como $r(L_1) = L_1$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $r(a_j) = a$. Notemos que $a \notin L_2$ pero $a_j \in L_2$. De esta manera, $a = r(a_j) \in r(L_2) = L_2$, lo cual es un absurdo. De donde obtenemos que $r(a) = a$. Por tanto, r es una retracción.

Q.E.D.

Proposición 3.2.26. [12, Proposition 6.2] Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y n un número entero positivo. Si $r: X \rightarrow Y$ es una retracción, entonces la función inducida $2^r: 2^X \rightarrow 2^Y$ es casi abierta.

Demostración. Sea B un elemento de 2^Y . Notemos que, como $r|_Y = 1_Y$, tenemos que $2^r|_{2^Y} = 1_{2^Y}$. Esto implica que $B \in (2^r)^{-1}(B)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de 2^X que tiene a B . Entonces $\mathcal{U} \cap 2^Y$ es un subconjunto abierto de 2^Y y $B \in \text{Int}_{2^Y}(2^r(\mathcal{U}))$. Por tanto, 2^r es casi abierta.

Q.E.D.

Lema 3.2.27. [12, Lemma 6.5] Sean X y Y continuos, $f: X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva, n un número entero positivo y $\chi \in 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ tal que $2_n^f(\chi) = \mathcal{C}^{nY}$. Entonces existe un subconjunto abierto $\mathcal{W}$ de 2_n^X tal que $\chi \in \mathcal{W}$ y $2_n^f(\chi) \in 2_n^Y \setminus \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{W}))$.

Demostración. Sean $\chi \in 2_n^X \setminus \{\mathcal{C}^{nX}\}$ tal que $2_n^f(\chi) = \mathcal{C}^{nY}$ y A el único elemento de 2^X tal que $q^{nX}(A) = \chi$. Como $2_n^f(\chi) = \mathcal{C}^{nY}$, $2^f(A) = B$, para alguna $B \in \mathcal{C}_n(Y)$. Debido a que $\mathcal{C}_n(X)$ es denso en ninguna parte en 2^X [40, Theorem 6.1.9], podemos encontrar un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $2^X \setminus \mathcal{C}_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$ y $2^Y \setminus \text{Cl}_{2^Y}(2^f(\mathcal{U})) \neq \emptyset$. Sea $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en $2^Y \setminus (\text{Cl}_{2^Y}(2^f(\mathcal{U}) \cup \mathcal{C}_n(Y)))$ que converge a un elemento de $\mathcal{C}_n(Y) \setminus \text{Cl}_{2^Y}(2^f(\mathcal{U}))$.

Tomemos $\mathcal{W} = q^{nX}(\mathcal{U})$. Observemos que $\mathcal{W}$ es un subconjunto abierto de 2_n^X , $\chi \in \mathcal{W}$ y $2_n^f(\mathcal{W}) = q^{nY}(2_n^f(\mathcal{U}))$. De aquí se sigue que $\{q^{nY}(E_j)\}_{j=1}^\infty \subset 2_n^Y \setminus 2_n^f(\mathcal{W})$. Además, $\{q^{nY}(E_m)\}_{m=1}^\infty$ converge a $\mathcal{C}^{nY}$. De esta forma, $\mathcal{C}^{nY} \in 2_n^Y \setminus \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{W}))$.

Q.E.D.

Como una consecuencia del Lema 3.2.27, se tiene que:

Corolario 3.2.28. [12, Lemma 6.7] Sean X y Y continuos, $f: X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva tal que 2^f es casi abierta, y n un número entero positivo. Entonces 2_n^f es casi abierta si y sólo si $\mathcal{C}^{nY} \in \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{U}))$, para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ of 2_n^X que contiene a $\mathcal{C}^{nX}$.

Demostración. Por el Lema 3.2.27, si 2_n^f es casi abierta entonces se tiene que $\mathcal{C}^{nY} \in \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{U}))$, para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de 2_n^X que contiene a $\mathcal{C}^{nX}$.

Probaremos que si $\mathcal{C}^{nY} \in \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{U}))$, para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de 2_n^X que contiene a $\mathcal{C}^{nX}$ entonces 2_n^f es casi abierta. Para esto, sea $\chi \in 2_n^X$. Mostraremos que existe $\gamma \in (2_n^f)^{-1}(\chi)$ tal que $\chi \in \text{Int}_{2_n^Y}(2_n^f(\mathcal{U}))$, para cada

subconjunto abierto $\mathcal{U}$ of 2_n^X que tiene a γ . Por nuestra suposición, sólo tenemos que considerar el caso cuando $\chi \neq \mathcal{C}^{nY}$, y este caso se sigue de la Observación 2.2.3 y el hecho de que por hipótesis 2^f es casi abierta.

Q.E.D.

Teorema 3.2.29. [12, Theorem 6.15] Sean X y Y continuos, $f: X \rightarrow Y$ una función continua y n un número entero positivo. Entonces 2_n^f es casi monótona si y sólo si 2_n^f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Es claro que toda función casi monótona es fuertemente libremente descomponible. Supongamos que 2_n^f es fuertemente libremente descomponible. Como 2_n^X es uncoherente (Teorema 2.2.10), tenemos que 2_n^f es casi monótona. [9, Theorem 4.2].

Q.E.D.

Teorema 3.2.30. [12, Theorem 6.15] Sean X y Y continuos, n un número entero positivo y $f: X \twoheadrightarrow Y$ una función débilmente confluyente. Consideremos los siguientes enunciados:

- (1) f es casi monótona;
- (2) 2^f es casi monótona;
- (3) 2_n^f es casi monótona;
- (4) 2^f es fuertemente libremente descomponible;
- (5) 2_n^f es fuertemente libremente descomponible.

Entonces (2) y (4) son equivalentes, (3) y (5) son equivalentes, y (2) implica (1), (3) y (5).

Demostración. Por [10, Theorem 4.6], sabemos que (2) y (4) son equivalentes. Por el Teorema 3.2.29, obtenemos que (3) y (5) son equivalentes. Por [40, Theorem 8.2.18], se tiene que (2) implica (1). Ahora, por el Corolario 3.2.13, (2) implica (3). Finalmente, por el Teorema 3.2.29, sabemos que (2) implica (5).

Q.E.D.

Teorema 3.2.31. [12, Theorem 6.18] Sean X y Y continuos, donde Y es localmente conexo, n un número entero positivo y $f: X \twoheadrightarrow Y$ una función débilmente confluyente. Consideremos los siguientes enunciados:

- (1) 2_n^f es libremente descomponible;
- (2) 2^f es fuertemente libremente descomponible;
- (3) 2^f es casi monótona;
- (4) 2^f es monótona;
- (5) 2_n^f es libremente descomponible;
- (6) 2^f es fuertemente libremente descomponible;
- (7) 2_n^f es casi monótona:

- (8) 2_n^f es monótona;
 (9) f es monótona.

Entonces (1), (2), (3), (4), (8) and (9) son equivalentes. Más aún, (6) y (7) son equivalentes. Además, (1) implica (5), (6) y (7).

Demostración. Por [10, Corollary 4.10], tenemos que (1), (2), (3), (4) y (9) son equivalentes. Por el Teorema 3.2.12, (8) y (9) son equivalentes. Por el Teorema 3.2.29, (6) y (7) son equivalentes. Por el Teorema 3.2.30, (2) implica (6) y (7). Por el Corolario 3.2.13, (1) implica (5).

Q.E.D.

La propiedad del punto fijo para hiperespacios ha sido, en general, difícil de probar. A continuación mostramos dos clases de continuos con la propiedad de que sus n -suspensiones de sus hiperespacios tienen la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.2.32. *Sean X un abanico o un dendroide suave y $n \in \mathbb{N}$. Entonces 2_n^X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que X es un abanico y sea $\varepsilon > 0$. Por [25, Theorem 1], existen un árbol T_ε contenido en X y una retracción $r_\varepsilon: X \rightarrow T_\varepsilon$ tal que $d(x, r_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, para todo punto $x \in X$. Por el Teorema 3.2.25, $2^{r_\varepsilon}: 2^X \rightarrow 2^{T_\varepsilon}$ y $2_n^{r_\varepsilon}: 2_n^X \rightarrow 2_n^{T_\varepsilon}$ son retracciones y, por el Teorema 3.2.14, $\mathcal{H}(A, 2^{r_\varepsilon}(A)) < \varepsilon$, para toda $A \in 2^X$, y $\rho_{2_n^X}(\chi, 2_n^{r_\varepsilon}(\chi)) < \varepsilon$, para toda $\chi \in 2_n^X$. Como ε es arbitrario y $2_n^{T_\varepsilon}$ tiene la propiedad del punto fijo (Corolario 2.2.25), resulta que 2_n^X tiene la propiedad del punto fijo (Lema 1.1.42).

Si X es un dendroide suave y $\varepsilon > 0$, por [26, Theorem 2], existen un árbol $T_\varepsilon \subset X$ y una retracción $r_\varepsilon: X \rightarrow T_\varepsilon$ tal que $d(x, r_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, para toda $x \in X$. De manera análoga al párrafo anterior, tenemos que 2_n^X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Bibliografía

- [1] J. G. Anaya, D. Maya and F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $\mathcal{HS}_n^m(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl., 234 (2018), 428-439.
- [2] R. N. Andersen, M. M. Marjariović and R. M. Schori, *Symmetric products and higher dimensional dunce hats*, Topology Proc., 18 (1993), 1-17.
- [3] R H Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pac. J. Math., 1 (1951), 41-51.
- [4] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math., 36 (1949), 236-244.
- [5] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.
- [6] R. Bott, *On the third symmetric potency of S_1* , Fund. Math., 39 (1952), 264-268.
- [7] C. E. Burgess, *Separation properties and n -indecomposable continua*, Duke Math. J., 23 (1956), 595-599.
- [8] J. Camargo, *Some relationships between induced mappings*, Topology Appl., 157 (2010), 2038-2047.
- [9] J. Camargo and S. Macías, *On Freely Decomposable Maps*, Topology Appl., 159 (2012), 891-899.
- [10] J. Camargo and S. Macías, *On strongly freely decomposable and induced maps*, Glasnik Mat., 48(68) (2013), 429-442.
- [11] J. Camargo and S. Macías, *Quotients of n -fold hyperspaces*. Topology Appl., 197 (2017), 154-166.
- [12] J. Camargo and S. Macías, *More on Quotients of n -fold hyperspaces*, preprint.
- [13] J. Camargo, S. Macías and C. Uzcátegui, *On the image of Jones' set function $\mathcal{T}$* , Colloquium Math., 153 (2018), 1-19.

- [14] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., Vol. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.
- [15] J. J. Charatonik, *On feebly monotone and related classes of mappings*, Topology Appl., 105 (2000) 15-29.
- [16] J. J. Charatonik and S. Macías, *Mappings on some hyperspaces*, JP Jour. Geometry & Topology, 4 (2004), 53-80.
- [17] W. J. Charatonik, *Induced near-homeomorphisms*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 41 (2000), 133-137.
- [18] N. Chinen, A. Koyama, *On the symmetric hyperspace of the circle*, Topology Appl., 157 (2010) 2613-2621
- [19] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math., 69 (1947), 200 - 242.
- [20] J. Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [21] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math., 26 (1936) 61-112.
- [22] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann, Berlin, 1989.
- [23] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl., 138 (2004), 109-124.
- [24] J. Ford and J. W. Rogers, Jr., *Refinable maps*, Colloquium Math., 39 (1978), 263-269.
- [25] J. B. Fugate, *Retracting fans onto finite fans*, Fund. Math., 71 (1971), 113-125.
- [26] J. B. Fugate, *Small retractions of smooth dendroids onto trees*, Fund. Math., 71 (1971), 255-262.
- [27] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr and L. Lum *On arc-smooth continua*, Topology Proc. 2 (1977), 645-656.
- [28] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr and L. Lum, *Arc-smooth continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 265 (1981), 545-561.
- [29] F. García, and S. Macías, *Another type of quotients of hyperspaces*, Topology Proc., 65 (2025), 75-97.
- [30] J. T. Goodykoontz, Jr., *Hyperspaces of arc-smooth continua*, Houston J. Math., 7 (1981), 33-41.

- [31] E. E. Grace, *Refinable maps on graphs are near homeomorphisms*, Topology Proc., 2 (1977), 139-150.
- [32] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., 21 (1997), 239-250.
- [33] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22-36.
- [34] W. Kuperberg, *Uniformly Pathwise Connected Continua*, en *Studies in Topology*, Proc. Conf. Univ. North Carolina. Charlotte, NC, (1974), Academic Press, New York, 1975, 315 - 324. (eds. N. M. Stavrakas and K. R. Allen).
- [35] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press and PWN, New York, N. Y., London, Warszawa, 1966.
- [36] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, N. Y., London, Warszawa, 1966.
- [37] M. de J. López and S. Macías, *Induced maps on n -fold hyperspaces*, Houston J. Math., 33 (2007), 1047-1057.
- [38] J. C. Macías, *On the n -fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glasnik Mat., Vol. 43 (2008), 439 - 449.
- [39] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), No. 1, 125-138.
- [40] S. Macías, *Topics on Continua*, 2nd Edition, Springer-Cham, 2018.
- [41] S. Macías and U. Morales-Fuentes, *Graphs have unique quotient hyperspace $C_1^n(X)$* , Topology Appl., 308 (2022), 107996.
- [42] J. van Mill, *Infinite-dimensional Topology*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [43] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure Applied. Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978. Reimpreso en: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.
- [44] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math., 5 (1979), 125-132.
- [45] S. B. Nadler, Jr., *Induced universal maps and some hyperspaces with the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc., 100 (1987), 749-754.

- [46] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [47] Y. Nakandakari and S. Tsukuda, *An elementary proof that the third finite subset space of the circle is the 3-sphere*, Amer. Math. Monthly, 127 (2020), 789-805.
- [48] P. M. Swingle, *Generalized indecomposable continua*, Amer. J. Math., 52 (1930) 647-658.
- [49] S. Willard, *General Topology*, Dover Publ., Mineola, NY, 2004.
- [50] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math., 32 (1939), 184-192.
- [51] H. Xianjiu, Z. Fanping and Z. Gengrong, *Semi-openness and almost-openness of induced mappings*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B., 20(1) (2005), 21-26.

Índice alfabético

- 2^X , 19
- $\mathcal{C}_n(X)$, 19
- $\mathcal{F}_n(X)$, 19
- ε -función, 42
- n -ésimo hiperespacio de un continuo, 19
- n -ésimo producto simétrico de un continuo, 19
- n -suspensión del hiperespacio de un continuo, 29
- abanico, 21
- arco, 8
 - de orden, 19
- cadena, 17
 - ε -, 17
 - eslabones de, 17
- complejo geométrico, 10
- composante de un punto, 7
- continuo, 7
 - con forma trivial, 18
 - conexo en pequeño, 8
 - de Knaster, 25
 - descomponible, 25
 - encadenable, 17
 - hereditariamente descomponible, 25
 - hereditariamente
 - indescomponible, 25
 - hereditariamente unicoherente, 12
 - hiperespacios de un, 19
 - indescomponible, 25
- irreducible alrededor de un subconjunto, 17
- libremente contraíble, 14
- que posee la propiedad (b), 17
- que posee la propiedad de Kelley, 20
- que posee la propiedad del punto fijo, 14
- suave por arcos, 21
 - en un punto, 20
- tipo arco, 16
- unicoherente, 12
- cubo de Hilbert, 10
- dendroide, 21
 - suave, 21
- diámetro de un conjunto, 7
- espacio
 - conexo por trayectorias, 8
 - contraíble, 13
 - localmente conexo, 7
 - localmente conexo en un punto, 7
 - uniformemente conexo por trayectorias, 8
- función
 - CE -función, 48
 - OM , 48
 - abierta, 47
 - atómica, 41
 - casi abierta, 47
 - casi homeomorfismo, 45

- casi interior, 48
- casi monótona, 46
- débilmente confluyente, 41
- fuertemente libremente
 - descomponible, 46
- homotópica a otra función, 13
- inducida
 - entre hiperespacios de continuos, 49
- libremente descomponible, 46
- monotonamente refinable, 44
- que tiene un punto fijo, 14
- refinable, 42
- función inducida
 - entre las n -suspensiones de dos continuos, 50
- gráfica, 8
- hiperespacio de subconjuntos
 - compactos de un continuo, 19
- homotopía entre funciones, 13
- isometría, 16
- métrica de Hausdorff, 19
- poliedro, 11
- propiedad de Kelley, 20
- pseudoarco, 26
- puntos
 - afínmente independientes, 10
- retracto absoluto, 9
- retracto de vecindad absoluto, 9
- simplejo geométrico, 10
- subcontinuo terminal, 16
- sucesión inversa, 11
 - espacios factor de, 11
 - funciones ligadura de, 11
 - límite inverso de, 11
- topología de Vietoris, 19
- trayectoria entre dos puntos, 8