



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MEDIAS EQUIVARIANTES Y G-ARs

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANANDA LÓPEZ POO CABRERA

TUTOR PRINCIPAL:
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. LUIS JORGE SÁNCHEZ SALDAÑA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DR. RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ
UAM-IZTAPALAPA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO,
FEBRERO DE 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	11
1.1. Notación	11
1.2. Convergencia en espacios de funciones	12
1.3. Topologías en hiperespacios	14
1.4. Retículas topológicas	15
1.5. G -espacios	21
1.6. Retractos y retracts equivariantes	24
1.7. Equiconexidad y estructuras convexas	28
1.8. Problema de Jaworowski y problema de Anderson	35
1.9. Medias	42
2. n-Medias equivariantes	45
2.1. n -Medias equivariantes	45
2.2. Grupos finitos	47
2.3. n -Cuasimedias equivariantes	51
3. Medias e involuciones decrecientes	63
3.1. 2-Medias equivariantes	63
3.2. Versión débil del problema de Jaworowski	66
3.3. Problema de Anderson	79
4. Otros resultados y trabajo a futuro	81
4.1. Medias propias y orden	81
4.2. El espacio de medias	82
4.3. Conclusión	90

Introducción

A lo largo de la tesis, suponemos que G es un grupo topológico Hausdorff y compacto. El objetivo de este trabajo es estudiar bajo qué condiciones un G -espacio es un retracto absoluto equivariante (que denotaremos por G -AR), centrándonos principalmente en el caso en el que G es un grupo finito. En particular, en el Capítulo 3, estudiaremos específicamente el caso en el que G es el grupo de dos elementos $\mathbb{Z}_2$.

El concepto de G -AR es una generalización para G -espacios de la noción de retracto absoluto (que denotaremos por AR) en espacios topológicos. Con respecto a la pregunta de cuándo un G -espacio es un G -AR, en 1975 J. M. Smirnov probó en [52] que una condición necesaria para que un G -espacio metrizable X sea un G -AR es que, para cada subgrupo cerrado H de G , el conjunto de puntos en X fijados por H ,

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \text{ para cada } h \in H\},$$

sea un AR. Es natural preguntarse si esta es también una condición suficiente.

En 1976, en [34, Teorema 2.1], J. Jaworowski dio una respuesta parcial a esta pregunta. Demostró que si X es un G -espacio metrizable, separable, localmente compacto y de dimensión finita que tiene un número finito de tipos orbitales (esto se cumple, por ejemplo, cuando G es finito), entonces la condición anterior sí es suficiente para que X sea un G -AR. Sin embargo, la pregunta de si esta es una condición suficiente en un contexto más general permanece abierta y se conoce como el problema de Jaworowski.

Problema (Problema de Jaworowski). Sean G un grupo de Lie compacto y X un G -espacio metrizable que tiene un número finito de tipos orbitales. Supongamos que para cada subgrupo cerrado H de G el conjunto X^H es un AR. ¿Entonces X es un G -AR?

En 2005, en [6], S. Antonyan dio una respuesta parcial a esta pregunta. Demostró que, si G es un grupo de Lie compacto, un G -espacio metrizable

X es un G -AR si y sólo si X es un AR y, para todo subgrupo cerrado H de G , X^H es un H -retracto por deformación fuerte de X .

En [37], H. Juárez-Anguiano estudió la relación entre el hecho de que un G -espacio X sea un G -AR y la existencia de una n -media equivariante en X .

Una n -media en un espacio topológico X es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

- (M1) $p(x, \dots, x) = x$ para cada $x \in X$,
- (M2) $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y σ permutación de $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplos clásicos de este tipo de funciones son la media aritmética de n puntos en un espacio vectorial topológico, la media armónica de dos números en $(0, \infty)$ o la media geométrica de dos números en $[0, \infty)$.

Las n -medias fueron estudiadas en 1954 en [24] por B. Eckmann, y posteriormente en 1962 por B. Eckmann, T. Ganea y P. J. Hilton. Ellos probaron en [25, Corolario 3.2 y p. 90] que si X es un espacio conexo con el tipo de homotopía de un poliedro y grupos de homología finitamente generados que son cero a partir de cierta dimensión, entonces X admite una n -media para alguna $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si es contráctil. En [37], H. Juárez-Anguiano observó que, como todo ANR es homotópicamente equivalente a un poliedro y la clase de ANRs contráctiles es precisamente la clase de ARs, entonces el resultado de B. Eckmann, T. Ganea y P. J. Hilton puede escribirse de la siguiente manera.

Teorema. Sea X un ANR conexo con grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- 1) Existe una n -media $p : X^n \rightarrow X$ para toda $n \geq 2$.
- 2) Existe una n -media $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$.
- 3) X es un AR.

En la década de los ochentas, G. Chichilnisky y G. Heal redescubrieron las implicaciones $1) \iff 3)$ en [18] y [19], en el contexto de teoría de elección social. En sus resultados, X es un complejo CW que tiene un número finito de

celdas en cada dimensión y es conexo. Posteriormente, en 2004, S. Weinberger redescubrió la implicación $2) \implies 3)$ en [58, Teorema 1.1].

En 2020, en [37], H. Juárez-Anguiano mostró que el resultado anterior puede generalizarse a G -espacios, considerando ahora la existencia de una n -media equivariante en lugar de una n -media común. Si X es un G -espacio, una n -media equivariante es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satiface las condiciones (M1) y (M2), y además cumple que

$$p(gx_1, \dots, gx_n) = gp(x_1, \dots, x_n)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y $g \in G$.

Teorema ([37, Teorema 3.3]). Sea X un G -espacio metrizable que es un G -ANR y tal que para cada subgrupo cerrado H de G , X^H es un espacio conexo con grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- 1) Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para toda $n \geq 2$.
- 2) Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$.
- 3) X es un G -AR.

Además, H. Juárez-Anguiano también planteó el siguiente problema en [37], en el que pregunta si el teorema anterior será verdadero si no suponemos ninguna hipótesis sobre los conjuntos X^H .

Pregunta. Sea X un G -espacio metrizable, conexo y compacto que es un G -ANR. Si existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$, ¿entonces X es un G -AR?

En el Capítulo 2 de este texto, nos inspiramos en esta pregunta y en el problema de Jaworowski para trabajar en identificar condiciones bajo las cuáles un G -espacio es un G -AR. En el caso en el que G es un grupo finito, en el Teorema 2.2.5 veremos que el problema de Jaworowski tiene una respuesta positiva si en X existe una n -media equivariante, donde n es un múltiplo de la cardinalidad de G . Demostramos este resultado también en [36, Teorema 3.5].

Teorema (N. Jonard-Pérez, A. L., 2025). Sea X un G -espacio metrizable, donde G es un grupo finito. Supongamos que para cada subgrupo H de G el conjunto X^H es un AR. Si existe una n -media equivariante en X para algún múltiplo n de $|G|$, entonces X es un G -AR.

También, en el Corolario 2.2.8 veremos que la pregunta de H. Juárez-Anguiano tiene una respuesta positiva si n es un múltiplo de la cardinalidad de G . Demostramos este resultado en [36, Corolario 3.6.1].

Corolario (N. Jonard-Pérez, A. L., 2025). Sea X un G -ANR conexo y compacto, donde G es un grupo finito. Si existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para algún múltiplo n de $|G|$, entonces X es un G -AR.

Si G no es necesariamente finito, en el Corolario 2.3.8 damos otra respuesta parcial a la pregunta de H. Juárez-Anguiano en el caso en el que X es un espacio métrico y p cumple una condición relacionada con la distancia en X . La razón por la que agregamos esto como hipótesis es un resultado de S. Weinberger.

En [58], S. Weinberger llamó a una función $p : X^n \rightarrow X$ definida en un espacio métrico (X, d) *salomónica* si para cada $\delta > 0$ existe $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tal que $d(p(x_1, \dots, x_n), x_i) > \delta$, para cada $i = 1, \dots, n$. En [58, Proposición 3.2], probó que, si X tiene una métrica propia d y es un CW complejo, conexo, que admite n -medias para cada $n \in \mathbb{N}$ y no es contráctil, entonces toda n -media en X es salomónica. Esto implica que una n -media $p : X^n \rightarrow X$ en un espacio que no es contráctil se comporta de una forma que no esperaríamos, pues no hay ninguna restricción sobre las distancias $d(p(x_1, \dots, x_n), x_i)$. Entonces, es natural preguntarse si agregarle a la pregunta de H. Juárez-Anguiano una hipótesis opuesta con respecto a esta distancia puede ser útil para resolverla. Por lo tanto, en la Definición 2.3.3 introducimos el concepto de *n -cuasimedia contractiva*. Este tipo de funciones están definidas de manera que no sean salomónicas. Cumplen la condición (M1), pero no necesariamente (M2).

En el Corolario 2.3.8 probamos que la pregunta H. Juárez-Anguiano tiene una respuesta positiva si en X existe una n -cuasimedia contractiva equivariante para alguna n natural (en lugar de una n -media equivariante, como la pregunta supone). Demostramos este resultado en [36, Corolario 4.4.1].

Corolario (N. Jonard-Pérez, A. L., 2025). Sea (X, d) un espacio métrico completo.

- (1) Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ existe una n -cuasimedia contractiva $p : X^n \rightarrow X$, entonces X es contráctil.
- (2) Si además X es un G -espacio tal que X^G es no vacío y p es una n -cuasimedia equivariante, entonces X es G -contráctil. Además, si X es un G -ANR, entonces es un G -AR.

Por otra parte, en el Capítulo 3 trabajaremos en el problema de Jaworowski cuando el grupo G es $\mathbb{Z}_2$. Notemos que toda acción del grupo $\mathbb{Z}_2$ en un espacio X induce una involución $\alpha : X \rightarrow X$, dada por $\alpha(x) = -1 \cdot x$. Recíprocamente, una involución α en X induce una acción de $\mathbb{Z}_2$ en X . Denotaremos este $\mathbb{Z}_2$ -espacio por (X, α) .

En el caso específico en el que G es el grupo $\mathbb{Z}_2$, X es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [-1, 1]$ y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es un conjunto unitario, S. Antonyan observó en [8] que el problema de Jaworowski es equivalente al siguiente problema planteado por R. D. Anderson en la década de los sesentas.

Problema (Problema de Anderson). Sea $\sigma : Q \rightarrow Q$ la involución estándar en Q (i.e., la involución dada por $\sigma((x_n)) = (-x_n)$). Si $\alpha : Q \rightarrow Q$ es una involución con un único punto fijo, ¿entonces α es conjugada con σ ? Es decir, ¿existe un homeomorfismo $h : Q \rightarrow Q$ tal que $h \circ \alpha = \sigma \circ h$?

Este caso particular del problema de Jaworowski también permanece abierto, a pesar de que se han hecho varios intentos para resolverlo (ver [62], [59], [5]). En 2022, en [29], L. Higuera-Montaña y N. Jonard-Pérez encontraron una respuesta parcial al problema de Anderson. Probaron que tiene una respuesta positiva si la involución α es decreciente con respecto a cierto orden parcial en Q . Como el orden jugó un papel importante en este caso, es natural preguntarse si lo hace en un contexto más general. Así, en el Problema 1.8.6 planteamos una versión débil del problema de Jaworowski, para el caso en el que existe una estructura de retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ en X y se cumple que la involución dada por la acción de $\mathbb{Z}_2$ en X es decreciente con respecto a $\leq$.

En el Corolario 3.2.4, probamos que esta versión débil del problema de Jaworowski tiene una respuesta positiva si la retícula $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es modular (en particular, si es distributiva).

Corolario (N. Jonard-Pérez, A. L., 2025). Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable con una estructura de retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ tal que α es decreciente con respecto a $\leq$. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Si $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es modular o distributiva y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es no vacío, entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.

Por otra parte, en el Corolario 3.2.10 damos otras condiciones para que este problema tenga una respuesta positiva.

Este texto está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 introducimos los conceptos y resultados que son necesarios para el resto del

trabajo. En el Capítulo 2 damos las respuestas parciales al problema de Jaworowski y a la pregunta de H. Juárez-Anguiano mencionadas anteriormente. El Capítulo 3 está dedicado al caso en el que el grupo G es $\mathbb{Z}_2$ y a las respuestas parciales de la versión débil del problema de Jaworowski. Finalmente, en el Capítulo 4 planteamos algunas preguntas en las que seguiremos trabajando y mostramos otros resultados parciales.

Con los resultados del Capítulo 2 de esta tesis se escribió un artículo, *Equivariant means* ([36]), que fue aceptado para su publicación en la revista Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. También, con los resultados del Capítulo 3 se está escribiendo un segundo artículo titulado *Decreasing involutions and $\mathbb{Z}_2$ -means*.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación

En esta sección introducimos la notación que usaremos en este texto.

A lo largo de esta tesis, G denotará un grupo topológico Hausdorff y compacto.

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , usaremos los símbolos $\overline{A}$, $\text{int}A$ y ∂A para denotar la cerradura, el interior y la frontera de A , respectivamente. Si Y es otro espacio topológico, denotaremos

$$C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Si X es un espacio vectorial y A es un subconjunto de X , denotaremos por $\text{conv}(A)$ a la envolvente convexa de A .

Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos las bolas abierta y cerrada con centro en x y radio $\varepsilon > 0$ por $B(x, \varepsilon)$ y $\overline{B}(x, \varepsilon)$, respectivamente. Es decir,

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}, \quad \overline{B}(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $x, y \in X$, escribiremos $x < y$ cuando $x \leq y$ y $x \neq y$. Si $x \leq y$, denotaremos por $[x; y]$ al conjunto $\{a \in X \mid x \leq a \leq y\}$.

Escribiremos el símbolo $\mathbb{R}$ para denotar el conjunto de números reales, $\mathbb{R}^+$ para los números reales positivos y $\mathbb{N}$ para los números naturales. Denotaremos el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$ por $\mathbb{Z}_2$. Usaremos el símbolo Q para denotar al cubo de Hilbert, es decir, $Q := \prod_{n=1}^{\infty} [-1, 1]$, equipado con la topología producto.

1.2. Convergencia en espacios de funciones

En esta sección introduciremos algunos resultados sobre convergencia de funciones continuas que usaremos en este trabajo.

Definición 1.2.1. Sean X y Y espacios topológicos, (f_n) una sucesión en $C(X, Y)$ y $f \in C(X, Y)$. Diremos que (f_n) **converge puntualmente** a f si, para cada $x \in X$, $(f_n(x))$ converge a $f(x)$ en Y .

Si X es un espacio topológico y Y es un espacio métrico, denotaremos

$$B(X, Y) := \{f \in C(X, Y) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

Notemos que si X es un espacio compacto, entonces $B(X, Y) = C(X, Y)$.

Definición 1.2.2. Sean X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, (f_n) una sucesión en $B(X, Y)$ y $f \in B(X, Y)$. Diremos que (f_n) **converge uniformemente** a f si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$ y $x \in X$, entonces $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Notemos que si una sucesión (f_n) en $B(X, Y)$ converge uniformemente a f , entonces también converge puntualmente a f .

En el caso en el que X es un espacio topológico y $Y = \mathbb{R}$, la norma $\|\cdot\|$ en $B(X, \mathbb{R})$ dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

es llamada la **norma uniforme**. Una sucesión (f_n) en $B(X, \mathbb{R})$ converge a f con respecto a la topología inducida por la norma uniforme si y sólo si (f_n) converge uniformemente a f (ver [49, Teorema 7.9] y [49, p. 151]).

Más adelante usaremos el siguiente teorema. Su demostración puede consultarse en [23, Capítulo 12, Teorema 7.5].

Teorema 1.2.3. Sean X un espacio topológico compacto y primero numerable, Y un espacio métrico, (f_n) una sucesión en $C(X, Y)$ y $f \in C(X, Y)$. Si (f_n) converge uniformemente a f , entonces, para cada sucesión (x_n) en X que converge a algún $x \in X$, $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$ en Y .

La siguiente es otra forma de definir convergencia en $C(X, Y)$.

Definición 1.2.4. Sean X y Y espacios topológicos. La **topología compacto-abierta** en $C(X, Y)$ es la generada por la subbase

$$\{[K, U] \mid K \subseteq X \text{ es compacto y } U \subseteq Y \text{ es abierto}\},$$

donde

$$[K, U] := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

En el caso en el que X es un espacio compacto, una sucesión (f_n) en $C(X, Y)$ converge a f con respecto a la topología compacto-abierta si y sólo si (f_n) converge uniformemente a f (ver [61, Teoremas 43.6 y 43.7]).

Definición 1.2.5. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$.

1. Sea $x_0 \in X$. Diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ es **equicontinua en x_0** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in X$ y $d(x_0, x) < \delta$, entonces $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Además, si $\mathcal{F}$ es equicontinua en x para cada $x \in X$, diremos que $\mathcal{F}$ es **equicontinua**.
2. Diremos que $\mathcal{F}$ es **uniformemente equicontinua** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [61, Teorema 43.14].

Teorema 1.2.6. Sean X y Y espacios métricos y $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ una familia equicontinua. Sean (f_n) una sucesión en $\mathcal{F}$ y $f \in \mathcal{F}$. Entonces, (f_n) converge a f con respecto a la topología compacto-abierta si y sólo si (f_n) converge puntualmente a f .

Como en un dominio compacto la convergencia con respecto a la topología compacto-abierta coincide con la convergencia uniforme, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.7. Sean X y Y espacios métricos y $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ una familia equicontinua. Sean (f_n) una sucesión en $\mathcal{F}$ y $f \in \mathcal{F}$. Entonces, si X es compacto, (f_n) converge uniformemente a f si y sólo si (f_n) converge puntualmente a f .

1.3. Topologías en hiperespacios

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotaremos por 2^X a la familia de subconjuntos cerrados de X , y por $\text{Cld}(X)$ a la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X . Es decir,

$$2^X := \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado en } X\}, \quad \text{Cld}(X) := 2^X \setminus \{\emptyset\}.$$

Denotaremos a las siguientes subfamilias de $\text{Cld}(X)$ por

$$\text{K}(X) := \{A \in \text{Cld}(X) \mid A \text{ es compacto}\}$$

y, en el caso en el que X es $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{K}_0^n := \{A \in \text{Cld}(\mathbb{R}^n) \mid A \text{ es convexo y } 0 \in A\},$$

$$\mathcal{K}_{(0),b}^n := \{A \in \mathcal{K}_0^n \mid A \text{ es compacto y } 0 \in \text{int}A\}.$$

A continuación definiremos tres topologías en $\text{Cld}(X)$ que usaremos en algunos ejemplos a lo largo de este texto.

Si Y es un subconjunto de X , denotaremos

$$Y^- := \{A \in \text{Cld}(X) \mid A \cap Y \neq \emptyset\}, \quad Y^+ := \{A \in \text{Cld}(X) \mid A \subseteq Y\}.$$

Definición 1.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. La topología en $\text{Cld}(X)$ que tiene como subbase a la familia

$$\{U^-, V^+ \mid U, V \text{ son abiertos en } X\}$$

es llamada la **topología de Vietoris**.

Esta topología fue introducida por L. Vietoris en [56] y [57], y E. Michael identificó gran parte de sus propiedades topológicas básicas en [43].

A continuación, definimos la topología de Hausdorff a través de una métrica infinita. Una métrica infinita en un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ que cumple las mismas tres propiedades que una métrica usual. Esta función define una topología en X de la misma manera que una métrica. Es decir, las bolas abiertas $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$, para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, forman una base para esta topología.

Definición 1.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico. La **métrica de Hausdorff** $H_d : \text{Cld}(X) \times \text{Cld}(X) \rightarrow [0, \infty]$ está dada por

$$H_d(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|.$$

La **topología de Hausdorff** en $\text{Cld}(X)$ es la topología inducida por H_d . F. Hausdorff introdujo esta topología originalmente en [28], basándose en el trabajo de D. Pompeiu ([47]). Otras de sus propiedades pueden consultarse en [15, Sección 3.2]. La siguiente definición de la métrica de Attouch-Wets es la usada en [51], que es equivalente a la forma en la que se define en [15, Definición 3.1.2].

Definición 1.3.3. Sean (X, d) un espacio métrico y x_0 un punto fijo en X . La **métrica de Attouch-Wets** $d_{AW} : \text{Cld}(X) \times \text{Cld}(X) \rightarrow [0, \infty)$ con respecto a x_0 está dada por

$$d_{AW}(A, B) = \sup \left\{ \min \left\{ \frac{1}{k}, \sup_{x \in B(x_0, k)} |d(x, A) - d(x, B)| \right\} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

La topología inducida en $\text{Cld}(X)$ por esta métrica no depende del punto x_0 . Por lo tanto, llamaremos la **topología de Attouch-Wets** a la topología inducida por d_{AW} , con respecto a cualquier elemento en X . Esta topología se introdujo inicialmente en [46] por U. Mosco, y su estudio se retomó en [11] y [12] por H. Attouch y R. Wets. Otras de sus propiedades pueden consultarse en [15, Sección 3.1].

Sean (X, d) un espacio métrico y x_0 un punto fijo de X . Notemos que para cada $A, B \in \text{Cld}(X)$ se tiene que

$$\min \left\{ \frac{1}{k}, \sup_{x \in B(x_0, k)} |d(x, A) - d(x, B)| \right\} \leq \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, en general se cumple que $d_{AW}(A, B) \leq H_d(A, B)$. Esto implica que la topología de Attouch-Wets está contenida en la topología de la métrica de Hausdorff. Además, si X es un espacio normado, estas topologías coinciden en la subfamilia de $\text{Cld}(X)$ de subconjuntos de X que son convexos y acotados ([51, Teorema 3.2]). En particular, coinciden en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$.

Las definiciones introducidas en esta sección pueden consultarse en las secciones 2.2, 3.1 y 3.2 de [15].

1.4. Retículas topológicas

Definición 1.4.1. Diremos que un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ es una **retícula** si para cada $x, y \in X$ existen una máxima cota inferior

(denotada por $x \wedge y$) y una mínima cota superior (denotada por $x \vee y$) de $\{x, y\}$.

En [27, Capítulo 1, Sección 1, Teorema 1], se demuestra que es equivalente definir una retícula como un conjunto X junto con dos operaciones $\wedge : X \times X \rightarrow X$ y $\vee : X \times X \rightarrow X$ conmutativas y asociativas que cumplen que, para cada $x, y \in X$,

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad y \quad x \wedge (x \vee y) = x.$$

En este caso, se puede definir un orden parcial en X por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \wedge y = x,$$

y entonces $x \wedge y$ y $x \vee y$ resultan ser una máxima cota inferior y una mínima cota superior, respectivamente, de $\{x, y\}$ con respecto al orden $\leq$.

Definición 1.4.2. Diremos que un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ es una **semiretícula inferior** si para cada $x, y \in X$ existe una máxima cota inferior (denotada por $x \wedge y$) de $\{x, y\}$. Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ es una **semiretícula superior** si para cada $x, y \in X$ existe una mínima cota superior (denotada por $x \vee y$) de $\{x, y\}$.

En algunos casos, sólo diremos que $(X, \leq)$ es una semiretícula si es una semiretícula inferior o una semiretícula superior.

Una retícula es en particular una semiretícula inferior y una semiretícula superior. Es claro que en una semiretícula inferior $(X, \leq, \wedge)$ (una semiretícula superior $(X, \leq, \vee)$) siempre se cumplen las siguientes propiedades.

1. Para cada $x \in X$, $x \wedge x = x$ ($x \vee x = x$).
2. Para cada $x, y, a, b \in X$, si $x \leq y$ y $a \leq b$, entonces $x \wedge a \leq y \wedge b$ ($x \vee a \leq y \vee b$).

Sea $(X, \leq)$ una semiretícula inferior. Si $A, B \subseteq X$, denotaremos

$$A \wedge B := \{a \wedge b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si $A = \{a\}$ para alguna $a \in X$, simplemente escribiremos $a \wedge B$ en lugar de $\{a\} \wedge B$. Usaremos la notación análoga para una semiretícula superior.

Definición 1.4.3. Consideremos un espacio topológico de Hausdorff X con una estructura de retícula $(X, \leq, \wedge, \vee)$. Decimos que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una **retícula topológica** si los operadores $\wedge : X \times X \rightarrow X$ y $\vee : X \times X \rightarrow X$ son funciones continuas. Similarmente, si X es un espacio topológico con una estructura de semiretícula $(X, \leq, \wedge)$ (o $(X, \leq, \vee)$), decimos que es una **semiretícula topológica** si $\wedge : X \times X \rightarrow X$ es una función continua (o $\vee : X \times X \rightarrow X$ es una función continua).

Ejemplo 1.4.4. 1. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea 2^X la familia de subconjuntos cerrados de X . Consideremos el orden de la contención $\subseteq$ en 2^X , y los operadores $\cap : 2^X \times 2^X \rightarrow 2^X$ y $\cup : 2^X \times 2^X \rightarrow 2^X$ dados por la intersección y la unión de conjuntos, respectivamente. Entonces $(2^X, \subseteq, \cap, \cup)$ es una retícula.

2. Sea (X, d) un espacio métrico. Consideremos la métrica de Hausdorff en $\text{Cld}(X) = 2^X \setminus \{\emptyset\}$. En [20, Proposición 2.4] se demostró que la función unión $\cup : \text{Cld}(X) \times \text{Cld}(X) \rightarrow \text{Cld}(X)$ es continua, y entonces $(\text{Cld}(X), \subseteq, \cup)$ es una semiretícula topológica. ◀

Sea $(X, \leq, \wedge)$ una semiretícula. Si A es un subconjunto de X , denotamos

$$L(A) := A \wedge X = \{a \wedge x \mid a \in A, x \in X\}.$$

Diremos que un subconjunto A de X es un **ideal** si $A = L(A)$.

En el Capítulo 3 usaremos los conceptos de retícula modular y retícula distributiva, que definimos a continuación.

Definición 1.4.5. Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Diremos que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es **modular** si para cualesquiera $x, a, b \in X$ tales que $x \leq b$ se cumple que

$$x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Definición 1.4.6. Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Diremos que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es **distributiva** si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple que

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Las retículas distributivas son modulares, como demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.7. Si $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula distributiva entonces es modular.

Demostración. Sean $x, a, b \in X$ tales que $x \leq b$. Entonces $x = x \wedge b$ y, como X es una retícula distributiva,

$$x \vee (a \wedge b) = (x \wedge b) \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Por lo tanto, X es una retícula modular. $\square$

Los siguientes son ejemplos de retículas topológicas distributivas.

Ejemplo 1.4.8. Consideremos el cubo de Hilbert $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [-1, 1]$, y la estructura de retícula en Q dada por los operadores $\wedge$ y $\vee$, definidos como

$$(x_n) \wedge (y_n) = (\min \{x_n, y_n\}), \quad (x_n) \vee (y_n) = (\max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq$ definido por

$$(x_n) \leq (y_n) \text{ si y sólo si } x_n \leq y_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $(Q, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica distributiva. $\blacktriangleleft$

Ejemplo 1.4.9. Sea $(X, \leq, \wedge)$ una semiretícula topológica tal que X es compacto, y consideremos el espacio de ideales cerrados

$$X' = \{A \subseteq X \mid A = L(A) \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\},$$

equipado con la topología de Vietoris, junto con el orden de la contención $\subseteq$ y los operadores $\cap$ y $\cup$ de intersección y unión. En [41, Teorema 1.2] se demostró que $(X', \subseteq, \cap, \cup)$ es una retícula topológica distributiva. $\blacktriangleleft$

Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula topológica. Diremos que un subconjunto A de X es **convexo con respecto a $\leq$** si, para cada $x, y, z \in X$ tales que $x, y \in A$ y $z \in [x; y]$, se cumple que $z \in A$. Diremos que X es **localmente convexo con respecto a $\leq$** si su topología tiene una base formada por conjuntos convexos con respecto a $\leq$. En el caso en el que X es metrizable, definimos la siguiente condición uniforme de convexidad local.

Definición 1.4.10. Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula topológica tal que X es metrizable. Diremos que X es **uniformemente localmente convexo** si hay una métrica d en X compatible con su topología que cumple que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(x, z) < \varepsilon$ para cada $z \in [x; y]$.

Si X es compacto, esta condición siempre se cumple, como demostramos a continuación.

Lema 1.4.11. *Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula topológica tal que X es metrizable y compacto. Entonces X es uniformemente localmente convexo.*

Demostración. Sea d una métrica en X que induce su topología. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $x_n, y_n \in X$ con $x_n \leq y_n$ y $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ tales que existe $z_n \in [x_n; y_n]$ con $d(x_n, z_n) \geq \varepsilon$.

X es compacto, por lo que existen subsucesiones (x_{n_k}) , (y_{n_k}) y (z_{n_k}) de (x_n) , (y_n) y (z_n) , respectivamente, que son convergentes. Como $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, (x_{n_k}) y (y_{n_k}) convergen al mismo punto. Sea x este límite común y sea z el límite de (z_{n_k}) . Como $\vee$ y $\wedge$ son continuas, tenemos que $(x_{n_k} \vee z_{n_k})$ converge a $x \vee z$ y $(y_{n_k} \wedge z_{n_k})$ converge a $x \wedge z$. Pero

$$x_{n_k} \vee z_{n_k} = z_{n_k} = y_{n_k} \wedge z_{n_k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $z = x \vee z = x \wedge z$ y podemos concluir que $x = z$, pero esto contradice el hecho de que $d(x_n, z_n) \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

El converso del resultado anterior no es cierto. Es decir, si X es uniformemente localmente convexo no necesariamente es compacto, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.4.12. Sea d la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. Consideremos la estructura de retícula en $\mathbb{R}^n$ dada por los operadores $\wedge$ y $\vee$, definidos como

$$(x_1, \dots, x_n) \wedge (y_1, \dots, y_n) = (\min \{x_1, y_1\}, \dots, \min \{x_n, y_n\}),$$

$$(x_1, \dots, x_n) \vee (y_1, \dots, y_n) = (\max \{x_1, y_1\}, \dots, \max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq$ definido por

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \text{ si y sólo si } x_i \leq y_i \text{ para toda } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces $(\mathbb{R}^n, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica. Además, notemos que los intervalos $[(a_1, \dots, a_n); (b_1, \dots, b_n)]$, para cada $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$, son los rectángulos

$$[(a_1, \dots, a_n); (b_1, \dots, b_n)] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Afirmamos que si $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$, $\varepsilon > 0$ y $(b_1, \dots, b_n)$ es un elemento de la bola $B((a_1, \dots, a_n), \varepsilon)$, entonces

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq B((a_1, \dots, a_n), \varepsilon). \quad (1.1)$$

En efecto, si $(t_1, \dots, t_n) \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, entonces $t_i \in [a_i, b_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y por lo tanto $|a_i - t_i| \leq |a_i - b_i|$. Así,

$$\begin{aligned} d((a_1, \dots, a_n), (t_1, \dots, t_n)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i - t_i|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^2} \\ &= d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

y $(t_1, \dots, t_n) \in B((a_1, \dots, a_n), \varepsilon)$.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es uniformemente localmente convexo, pues la contención (1.1) implica que, para cada $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ satisface la condición de convexidad local uniforme. ◀

Ejemplo 1.4.13. Sea $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ el espacio de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen en su interior, equipado con la métrica de Hausdorff H_d . Consideremos la estructura de retícula $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \subseteq, \wedge, \vee)$, donde los operadores $\wedge$ y $\vee$ están definidos como

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = \text{conv}(A \cup B),$$

y $\subseteq$ es el orden de la contención. Más adelante, en el Ejemplo 1.8.10, observaremos que esta es una retícula topológica.

Notemos que, si $A, B, C \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$ y $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $d(x, C) \leq d(x, B) \leq d(x, A)$ para cada $x \in X$, y por lo tanto

$$|d(x, A) - d(x, B)| \leq |d(x, A) - d(x, C)|.$$

Entonces,

$$H_d(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)| \leq \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, C)| = H_d(A, C).$$

Esto implica que $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es uniformemente localmente convexo pues, para cada $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ satisface la condición de convexidad local uniforme.

Sin embargo, $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ no es compacto. En efecto, notemos que

$$H_d(\overline{B}(0,1), \overline{B}(0,N)) = N - 1 \rightarrow \infty$$

cuando $N \rightarrow \infty$, por lo que la métrica H_d no es acotada. ◀

Sea $(X, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Diremos que un subconjunto A de X es una **subretícula** si A es cerrado bajo las operaciones $\wedge$ y $\vee$. Similarmente, un subconjunto de una semiretícula es una **subsemiretícula** si es cerrado bajo su operación.

Se dice que una semiretícula topológica $(X, \leq, \wedge)$ es una **semiretícula de Lawson** si la topología de X tiene una base formada por subsemiretículas. J. Lawson introdujo este concepto en [40].

Las definiciones y propiedades sobre retículas mencionadas en esta sección pueden consultarse en [27, Capítulo 1]. Por otra parte, más información sobre semiretículas topológicas y semiretículas de Lawson puede encontrarse en [40].

1.5. G -espacios

Definición 1.5.1. Una **acción** de un grupo topológico G en un espacio topológico X es una función continua $\alpha : G \times X \rightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $\alpha(e, x) = x$ para cada $x \in X$, donde e es la identidad en G .
2. $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ para cada $g, h \in G$ y $x \in X$.

Para simplificar la notación, escribiremos gx en lugar de $\alpha(g, x)$. Un espacio X junto con una acción de G es llamado un **G -espacio**.

Ejemplo 1.5.2. Si G es un grupo topológico, G actúa en sí mismo con la acción de la conjugación, dada por $gh = ghg^{-1}$ para cada $g, h \in G$. Entonces G es un G -espacio. ◀

Ejemplo 1.5.3. El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices invertibles de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ actúa en $\mathbb{R}^n$, y el grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ de matrices ortogonales de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ actúa en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ y en el disco unitario $\mathbb{D}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbb{R}^n$ es un $GL(n, \mathbb{R})$ -espacio, $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{D}^n$ son $O(n, \mathbb{R})$ -espacios. ◀

Un espacio vectorial topológico X junto con una acción lineal de G , es decir, una acción que cumple que $g(sx + ty) = s(gx) + t(gy)$ para cada $x, y \in X$, $s, t \in \mathbb{R}$ y $g \in G$, es llamado un **G -espacio lineal**.

Ejemplo 1.5.4. $\mathbb{R}^n$ es un $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -espacio lineal. ◀

A continuación, definiremos algunos conceptos relacionados con G -espacios.

Sea X un G -espacio. Si $x \in X$, escribiremos G_x para denotar al **estabilizador** de x , definido por

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Si A es un subconjunto de X , la **saturación** de A , denotada por $G(A)$, se define como el conjunto

$$G(A) := \{ga \mid g \in G, a \in A\}.$$

Cuando $G(A) = A$ se dice que A es **invariante**. Si $A = \{x\}$ para alguna $x \in X$, escribiremos $G(x)$ en lugar de $G(\{x\})$. En este caso, diremos que $G(x)$ es la **órbita** de x .

Observación 1.5.5. El conjunto de órbitas $\{G(x) \mid x \in X\}$ es una partición de X . En efecto, $x = ex \in G(x)$ para cada $x \in X$, por lo que $X = \cup_{x \in X} G(x)$. Además, si $x, y \in X$ y $z \in G(x) \cap G(y)$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $z = g_1x = g_2y$. Por lo tanto, para cada $g \in G$

$$gx = gg_1^{-1}g_1x = gg_1^{-1}g_2y \in G(y),$$

y entonces $G(x) \subseteq G(y)$. De manera análoga, tenemos que $G(y) \subseteq G(x)$. Por lo tanto, para cada $x, y \in X$ se cumple que si $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$ entonces $G(x) = G(y)$. Podemos concluir que el conjunto de órbitas es una partición e induce una relación de equivalencia en X .

Llamaremos al conjunto de órbitas, equipado con la topología cociente, el **espacio orbital** de X , y lo denotaremos por X/G .

Definición 1.5.6. Sea X un G -espacio. Dado un subgrupo H de G , X^H denota el **conjunto de puntos fijos por H** , definido como

$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \text{ para cada } h \in H\}.$$

Si $x \in X^G$, decimos que x es un **punto G -fijo**.

Si X es un espacio de Hausdorff, el conjunto de puntos fijos X^H siempre es cerrado en X , como demostramos a continuación.

Proposición 1.5.7. *Sean X un G -espacio y H un subgrupo de G . Supongamos que X es un espacio de Hausdorff. Entonces X^H es cerrado en X .*

Demostración. Sea $y \in X \setminus X^H$. Entonces existe $h \in H$ tal que $hy \neq y$. Como X es de Hausdorff, existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $hy \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Ya que la acción de G en X es continua, la función $f : X \rightarrow X$ dada por $f(x) = hx$ es continua. Entonces, como $f(y) = hy \in U$, existe un abierto W en X tal que $y \in W$ y $f(W) \subseteq U$. Esto implica que para cada $x \in W \cap V$ se cumple que $f(x) = hx \in U$ y $x \in V$, y debido a que $U \cap V = \emptyset$, entonces $hx \neq x$. Por lo tanto,

$$y \in W \cap V \subseteq \{x \in X \mid hx \neq x\} \subseteq X \setminus X^H,$$

y podemos concluir que y es un punto interior de $X \setminus X^H$. Entonces, $X \setminus X^H$ es abierto en X , y X^H es cerrado en X . $\square$

Sea X un G -espacio. Para cada subgrupo H de G , la familia de todos los subgrupos de G que son conjugados con H será denotada por (H) . Es decir,

$$(H) := \{gHg^{-1} \mid g \in G\}.$$

Para cada $x \in X$, (G_x) será llamado el **tipo orbital** de la órbita $G(x)$. Si (H) es el tipo orbital de alguna órbita de X , entonces (H) será llamado un **tipo orbital** de X .

Los G -espacios son los objetos de una categoría cuyos morfismos son llamados funciones equivariantes. Estas son funciones continuas que conmutan con la acción de G , como definimos a continuación.

Definición 1.5.8. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre G -espacios es llamada **equivariante** si $f(gx) = gf(x)$ para cualesquiera $g \in G$, $x \in X$.

En varias ocasiones a lo largo de este texto consideramos funciones de la forma $f : X^n \rightarrow X$, donde X es un G -espacio. En este caso, cuando decimos que f es equivariante, estamos considerando la acción de G en X^n dada coordenada a coordenada. Es decir, f es equivariante si cumple que

$$f(gx_1, \dots, gx_n) = gf(x_1, \dots, x_n)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y $g \in G$.

Las definiciones y resultados intruducidos en esta sección pueden consultarse en [17, Capítulo 1].

1.6. Retractos y retracts equivariantes

Definición 1.6.1. Un espacio metrizable Y es un **retracto absoluto de vecindad** (denotado por ANR) si para cada espacio metrizable X que contiene a Y como un subconjunto cerrado existen una vecindad U de Y en X y una retracción $r : U \rightarrow Y$. Si además siempre podemos tomar $U = X$, entonces se dice que Y es un **retracto absoluto** (denotado por AR).

Definición 1.6.2. Un espacio metrizable Y es llamado un **extensor absoluto de vecindad** (denotado por ANE) si para cada subconjunto cerrado A de un espacio metrizable X y cada función continua $f : A \rightarrow Y$, existen una vecindad U de A en X y una función continua $F : U \rightarrow Y$ tales que $F|_A = f$. Si además siempre podemos tomar $U = X$, entonces se dice que Y es un **extensor absoluto** (denotado por AE).

Es un hecho sabido que un espacio metrizable X es un ANR si y sólo si es un ANE, y X es un AR si y sólo si es un AE ([50, Teorema 6.2.5]). Además, si un espacio es un AR entonces es contráctil (ver, por ejemplo, [50, Proposición 6.2.8]), y todo ANR contráctil es un AR ([31, Capítulo 2, Teorema 7.1]).

Ejemplo 1.6.3. 1. El teorema de Tietze ([31, Capítulo 2, Teorema 3.1]) garantiza que el intervalo $[0, 1]$ es un AR.

2. Cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ es un AR.

3. Todo retracto de un AR es un AR ([31, Capítulo 2, Proposición 5.1]) y todo producto numerable de ARs es un AR ([31, Capítulo 2, Proposición 4.1]). En particular, $\mathbb{R}^n$ y el cubo de Hilbert Q son ARs.

4. En la clase de los espacios metrizables de dimensión finita, los ARs son precisamente los espacios que son contráctiles y localmente contráctiles ([22, Teorema 15.2]). ◀

Ejemplo 1.6.4. 1. La esfera unitaria S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ es un ANR, pero no es un AR ya que no es contráctil. La esfera unitaria en un espacio normado de dimensión infinita es un AR ([31, Capítulo 2, Teorema 15.2]).

2. Cualquier subconjunto abierto de un ANR es un ANR ([31, Capítulo 2, Proposición 6.1]).

3. En la clase de los espacios metrizables de dimensión finita, los ANRs son precisamente los espacios localmente contráctiles ([22, Teorema 15.1]).



El siguiente teorema de Dugundji muestra que todo subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico localmente convexo es un AR. Recordemos que un espacio vectorial topológico es **localmente convexo** si su topología tiene una base formada por conjuntos convexos. En particular, los espacios normados son localmente convexos ([50, Teorema 3.6.10]). La demostración del siguiente teorema se puede consultar, por ejemplo, en [31, Capítulo 2, Teorema 14.1].

Teorema 1.6.5 (Teorema de Dugundji). *Sean X un espacio metrizable y L un espacio vectorial topológico localmente convexo. Si A es un subconjunto cerrado de X y $f : A \rightarrow L$ es una función continua, entonces existe una extensión $F : X \rightarrow L$ tal que $F(X) \subseteq \text{conv}(f(A))$, donde $\text{conv}(f(A))$ es la envolvente convexa de $f(A)$.*

Ejemplo 1.6.6. Consideremos el conjunto $C([0, 1], \mathbb{R})$ de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, equipado con la norma uniforme $\|\cdot\| : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Como este espacio es normado, es localmente convexo. Además, notemos que

$$\text{Cvx}(I) := \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ es convexa}\}$$

es un subconjunto convexo de $C([0, 1], \mathbb{R})$. En efecto, si $f, g \in \text{Cvx}(I)$ y $s, t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} & (sf + (1-s)g)(tx + (1-t)y) \\ &= sf(tx + (1-t)y) + (1-s)g(tx + (1-t)y) \\ &\leq s(tf(x) + (1-t)f(y)) + (1-s)(tg(x) + (1-t)g(y)) \\ &= t(sf(x) + (1-s)g(x)) + (1-t)(sf(y) + (1-s)g(y)) \\ &= t(sf + (1-s)g)(x) + (1-t)(sf + (1-s)g)(y), \end{aligned}$$

y por lo tanto $sf + (1-s)g \in \text{Cvx}(I)$.

Entonces, por el teorema de Dugundji, $\text{Cvx}(I)$ es un AR. ◀

Más adelante usaremos el siguiente teorema. Su demostración puede consultarse en [14, Proposición 1.2.1]. Recordemos que un subconjunto Y de un espacio topológico X es llamado **homotópicamente denso** en X si existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que H_0 es la identidad en X y $H(X \times (0, 1]) \subseteq Y$.

Teorema 1.6.7. *Sean X un espacio metrizable y Y un subconjunto homotópicamente denso en X . Si X es un AR (ANR), entonces Y es un AR (ANR).*

Ejemplo 1.6.8. Consideremos el espacio $\mathcal{K}_0^n$ de subconjuntos cerrados y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen, y el espacio $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen en su interior, equipados con la métrica de Attouch-Wets. En [29, Proposición 3.3]-(3) se demostró que $\mathcal{K}_0^n$ es un AR, y que $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es homotópicamente denso en $\mathcal{K}_0^n$. Por el Teorema 1.6.7, esto implica que $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es también un AR. ◀

En [42] y [13] se estudió la relación entre semiretículas de Lawson y retracts absolutos. En [42, Teorema 2.1], se demostró que si $(X, \leq, \wedge)$ es una semiretícula de Lawson y X es un espacio métrico, compacto, conexo y localmente conexo, entonces X es un AR. En [13, Proposición 3.2], se probó que una semiretícula de Lawson $(X, \leq, \wedge)$ tal que X es metrizable cumple que X es un ANR (AR) si y sólo si es localmente conexo por trayectorias (conexo y localmente conexo por trayectorias).

Las nociones de retracto y extensor absolutos se generalizan a G -espacios de la siguiente manera.

Definición 1.6.9. Un G -espacio metrizable Y es un **retracto absoluto de vecindad equivariante** (denotado por G -ANR) si para cada G -espacio metrizable X que contiene a Y como un subconjunto cerrado e invariante existen una vecindad invariante U de Y en X y una retracción equivariante $r : U \rightarrow Y$. Si además siempre podemos tomar $U = X$, entonces se dice que Y es un **retracto absoluto equivariante** (denotado por G -AR).

Definición 1.6.10. Similarmente, un G -espacio metrizable Y es llamado un **extensor absoluto de vecindad equivariante** (denotado por G -ANE) si para cada subconjunto invariante y cerrado A de un G -espacio metrizable X y cada función equivariante $f : A \rightarrow Y$, existen una vecindad invariante U de A en X y una función equivariante $F : U \rightarrow Y$ tales que $F \upharpoonright_A = f$. Si además siempre podemos tomar $U = X$, entonces se dice que Y es un **extensor absoluto equivariante** (denotado por G -AE).

En [3, Teorema 14] se probó que un G -espacio metrizable X es un G -ANR (G -AR) si y sólo si es un G -ANE (G -AE).

La siguiente versión equivariante del teorema de Dugundji muestra que, si G es un grupo de Lie compacto, todo subconjunto convexo e invariante de un G -espacio lineal localmente convexo es un G -ANR. Además, todo subconjunto convexo e invariante que contiene un punto G -fijo es un G -AR.

Teorema 1.6.11 ([2]). *Sean G un grupo de Lie compacto, X un G -espacio metrizable y Z un G -espacio lineal localmente convexo. Si A es un subconjunto cerrado e invariante de X y V es un subconjunto convexo e invariante de Z , entonces toda función equivariante $f : A \rightarrow V$ admite una extensión equivariante $F : L \rightarrow V$ a alguna vecindad invariante L de A . Si además el conjunto de puntos fijos V^G es no vacío, entonces se puede tomar $L = X$.*

A continuación definimos unos conceptos relacionados con algunos resultados sobre G -ARs.

Definición 1.6.12. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones equivariantes entre G -espacios. Una G -homotopía de f a g es una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y H_t es equivariante para cada $t \in [0, 1]$. Un G -espacio X es llamado G -contráctil si la función identidad en X es G -homotópica a una función constante $X \rightarrow \{x_0\}$.

Notemos que si X es G -contráctil, el punto x_0 debe ser un punto fijo, y entonces el conjunto X^G es no vacío.

Definición 1.6.13. Un subconjunto invariante A de un G -espacio X es un G -retracto por deformación fuerte de X si existe una G -homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que H_0 es la identidad en X , H_1 es una retracción de X en A y $H_t(a) = a$ para todos $a \in A$ y $t \in [0, 1]$.

En el capítulo 2 usaremos los siguientes resultados sobre G -ARs, probados por S. Antonyan.

Teorema 1.6.14 ([1, Teorema 6]). *Sea X un G -espacio metrizable. Entonces X es un G -AR si y sólo si X es un G -ANR y es G -contráctil.*

Este resultado implica en particular que todo G -AR tiene un punto G -fijo.

Teorema 1.6.15 ([6, Teorema 3.7]). *Sea G un grupo de Lie compacto. Un G -espacio metrizable X es un G -AR si y sólo si X es un AR y, para todo subgrupo cerrado H de G , X^H es un H -retracto por deformación fuerte de X .*

El teorema anterior implica que un G -AR siempre es un AR, cuando G es un grupo de Lie compacto. El siguiente ejemplo muestra que un AR no es necesariamente un G -AR, incluso si el grupo G es $\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 1.6.16. Sea $X = \mathbb{S}_{\ell_2}$, la esfera unitaria en el espacio de Hilbert ℓ_2 . Por [16, Capítulo 6, Teorema 5.1], X es homeomorfo a ℓ_2 , y por lo tanto es un AR debido al teorema de Dugundji. Sin embargo, si consideramos la acción de $\mathbb{Z}_2$ en X dada por

$$(t, x) \rightarrow tx,$$

entonces el conjunto de $\mathbb{Z}_2$ -puntos fijos es vacío. En particular, X no es un $\mathbb{Z}_2$ -AR. ◀

Más información sobre la teoría de retracts absolutos puede consultarse en [31, Capítulo 2] y [50, Capítulo 6]. Por otra parte, las definiciones y resultados sobre retracts absolutos equivariantes mencionados en esta sección pueden encontrarse en [1], [2] y [3].

1.7. Equiconexidad y estructuras convexas

En esta sección introduciremos las nociones de equiconexidad y estructura convexa, y algunas de sus propiedades. Usaremos el siguiente teorema de encaje, cuya demostración puede consultarse en [50, Teorema 6.2.1].

Teorema 1.7.1 (Teorema de encaje de Arens-Eells). *Todo espacio métrico puede encajarse isométricamente en un espacio normado como un subconjunto cerrado y linealmente independiente.*

Definición 1.7.2. Un espacio X es **equiconexo** si existe una función continua $\tau : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\tau(x, y, 0) = x$, $\tau(x, y, 1) = y$ y $\tau(x, x, t) = x$ para cada $x, y \in X$ y $t \in [0, 1]$. En este caso llamaremos a τ una **función de equiconexidad**.

Ejemplo 1.7.3. Cualquier subconjunto convexo A de un espacio vectorial topológico es equiconexo, pues $\tau : A \times A \times [0, 1] \rightarrow A$, dada por

$$\tau(x, y, t) = (1 - t)x + ty,$$

es una función de equiconexidad. ◀

Este ejemplo implica que todo AR es equiconexo, como demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 1.7.4. *Si X es un AR, entonces es equiconexo.*

Demostración. Como X es metrizable, puede encajarse en un espacio normado E como un subconjunto cerrado, debido al Teorema 1.7.1. Sea $i : X \rightarrow E$ un encaje cerrado. El espacio X es un AR, entonces existe una retracción $r : E \rightarrow i(X)$. Además, como en el ejemplo anterior, existe una función de equiconexidad $\tau : E \times E \times [0, 1] \rightarrow E$. Entonces, la función $\tau' : i(X) \times i(X) \times [0, 1] \rightarrow i(X)$, dada por

$$\tau'(x, y, t) = r(\tau(x, y, t)),$$

es también una función de equiconexidad. Así, $i(X)$ es equiconexo, y por lo tanto X es equiconexo. $\square$

El converso de este resultado es verdadero para espacios de dimensión finita. Esto es debido a que los espacios equiconexos son contráctiles y localmente contráctiles.

Proposición 1.7.5. *Si X es equiconexo, entonces es contráctil y localmente contráctil.*

Demostración. Sean $\tau : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ una función de equiconexidad y p un elemento de X . Entonces, la función $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, dada por

$$H(x, t) = \tau(x, p, t),$$

es una contracción de X .

Por otra parte, para ver que X es localmente contráctil, consideremos $p \in X$ y U una vecindad de p en X . Queremos probar que existe una vecindad V de p tal que $V \subseteq U$ y V es contráctil en U . Como $\tau(p, p, t) = p \in U$ para toda $t \in [0, 1]$, existen vecindades A_t de p en X y B_t de t en $[0, 1]$ tales que $\tau(x, p, s) \in U$ para cada $x \in A_t$ y $s \in B_t$. Por la compacidad de $[0, 1]$, podemos tomar $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ tales que $\{B_{t_i}\}_{i=1}^n$ es una cubierta de $[0, 1]$. Entonces,

$$V := \left(\bigcap_{i=1}^n A_{t_i} \right) \cap U$$

es la vecindad de p buscada, pues $H \upharpoonright_{V \times [0, 1]}$ es una contracción de V en U . $\square$

En la clase de espacios metrizables de dimensión finita los ARs son precisamente los espacios que son contráctiles y localmente contráctiles ([22, Teorema 15.2]). Por lo tanto, las dos proposiciones anteriores implican que, en esta clase, un espacio es equiconexo si y sólo si es un AR. Otras propiedades de espacios equiconexos pueden consultarse en [30].

En [44, Definición 1.1], E. Michael generalizó la noción de convexidad en espacios vectoriales a espacios métricos, definiendo una estructura convexa de la siguiente manera.

Definición 1.7.6. Una **estructura convexa** en un espacio métrico (X, d) es un conjunto de funciones continuas $\{k_n : X^n \times \Delta_n \rightarrow X \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\Delta_n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \in [0, 1] \text{ para cada } i = 1, \dots, n \text{ y } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\},$$

que satisfacen las siguientes condiciones.

1. $k_1(x, 1) = x$ para cada $x \in X$.
2. Si $n \geq 2$, $i \leq n$, $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y $(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) \in \Delta_n$, entonces

$$\begin{aligned} & k_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n)) \\ &= k_{n-1}((x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

3. Si $n \geq 2$, $i \leq n-1$, $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$ y se cumple que $x_i = x_{i+1}$, entonces

$$\begin{aligned} & k_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)) \\ &= k_{n-1}((x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

4. La función $t \rightarrow k_n(x, t)$ de Δ_n a X es continua, para cada $x \in X$.
5. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V_ε de la diagonal en $X \times X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X^n$ con $(x_i, y_i) \in V_\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$, se cumple que $d(k_n(x, t), k_n(y, t)) < \varepsilon$ para toda $t \in \Delta_n$.

Definición 1.7.7. Sea X un espacio métrico con una estructura convexa $\{k_n : X^n \times \Delta_n \rightarrow X \mid n \in \mathbb{N}\}$. Un subconjunto A de X es **convexo** si para cada $x_1, \dots, x_n \in A$ y $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$ se cumple que

$$k_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)) \in A.$$

Observación 1.7.8. La estructura convexa usual de un espacio vectorial topológico es una estructura convexa en el sentido de E. Michael. Es decir, si X es un espacio vectorial topológico, las funciones $k_n : X^n \times \Delta_n \rightarrow X$, con $n \in \mathbb{N}$, dadas por

$$k_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)) = \sum_{i=1}^n t_i x_i,$$

cumplen las condiciones de la Definición 1.7.6. Es obvio que en este caso los conjuntos convexos de X son exactamente los conjuntos convexos según la Definición 1.7.7.

Ejemplo 1.7.9. Sea $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ el espacio de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen en su interior, equipado con la métrica de Hausdorff. En este espacio se puede definir la suma de Minkowski, dada por

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

y un producto por escalar, dado por

$$tA = \{ta \mid a \in A\},$$

para cada $A, B \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. Notemos que esta suma es cerrada en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$, pero el producto por escalar no lo es, pues el conjunto $0A = \{0\}$ no es un elemento de $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ para ninguna $A \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$. En particular, estas operaciones no definen una estructura de espacio vectorial en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$. Sin embargo, las funciones $k_m : (\mathcal{K}_{(0),b}^n)^m \times \Delta_m \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$, con $m \in \mathbb{N}$, dadas por

$$k_m((A_1, \dots, A_m), (t_1, \dots, t_m)) = \sum_{i=1}^m t_i A_i,$$

definen una estructura convexa en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$. ◀

En la siguiente proposición notamos que cada AR tiene una estructura convexa.

Proposición 1.7.10. *Si X es un AR, entonces tiene una estructura convexa.*

Demostración. Por el Teorema 1.7.1, existe un encaje cerrado $i : X \rightarrow E$, donde E es un espacio normado. Como X es un AR, existe una retracción $r :$

$E \rightarrow i(X)$. Consideremos la estructura convexa $\{k_n : E^n \times \Delta_n \rightarrow E \mid n \in \mathbb{N}\}$ en E , dada como en la Observación 1.7.8. Entonces, las funciones $k'_n : i(X)^n \times \Delta_n \rightarrow i(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, definidas por

$$k'_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)) = r(k_n((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n))),$$

forman una estructura convexa en $i(X)$. □

Notemos también que cada espacio con una estructura convexa es en particular equiconexo.

Observación 1.7.11. Las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.7.6 implican que, si $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, entonces

$$k_n((x_1, \dots, x_n), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) = x_i,$$

donde la i -ésima entrada de $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es 1.

Por otra parte, las condiciones 1 y 3 de la Definición 1.7.6 implican que, si $x \in X$ y $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$, entonces

$$k_n((x, \dots, x), (t_1, \dots, t_n)) = x.$$

En particular, esto significa que la función $\tau : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, dada por

$$\tau(x, y, t) = k_2((x, y), (t, 1 - t)),$$

es una función de equiconexidad. Es decir, si X tiene una estructura convexa, entonces es equiconexo.

En los capítulos 3 y 4 usaremos el siguiente teorema sobre selecciones en espacios con una estructura convexa, probado por E. Michael.

Recordemos que, si X y Y son espacios topológicos y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, se dice que una función $\psi : X \rightarrow \mathcal{C}$ es **semicontinua inferiormente** si para cada $U \subseteq Y$ abierto se cumple que

$$\psi^{\leftarrow}(U) := \{x \in X \mid \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto en X . Además, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua tal que $f(x) \in \psi(x)$ para cada $x \in X$, se dice que f es una **selección** de ψ .

Teorema 1.7.12 ([44, Teorema 1.3]). *Sean E un espacio métrico completo con una estructura convexa, y $\text{Conv}(E)$ la familia de subconjuntos cerrados, no vacíos y convexos de E . Sea Y un espacio paracompacto y supongamos que $\phi : X \rightarrow \text{Conv}(E)$ es semicontinua inferiormente. Entonces existe una selección de ϕ .*

A continuación, demostraremos un lema que usaremos más adelante para verificar que ciertas funciones son semicontinuas inferiormente.

Lema 1.7.13. *Sean X y Y espacios metrizables, C un subconjunto cerrado de X y $f, g : X \rightarrow Y$, $h : C \rightarrow Y$ funciones continuas. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones.*

1. *Existe una estructura de retícula $(Y, \leq, \wedge, \vee)$ en Y que es topológica.*
2. *Existe una estructura convexa en Y tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in Y$ con $x \leq y$.*
3. *$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para cada $x \in C$ y $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in X$.*

Entonces, la función $\phi : X \rightarrow \text{Conv}(Y)$, dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} \{h(x)\} & \text{si } x \in C, \\ [f(x); g(x)] & \text{si } x \in X \setminus C, \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente, donde $\text{Conv}(Y)$ es la familia de subconjuntos cerrados, no vacíos y convexos de Y .

Demostración. Notemos que $\phi(x) \subseteq [f(x); g(x)]$ para cualquier $x \in X$.

Sean $U \subseteq Y$ un conjunto abierto y $x \in \phi^{\leftarrow}(U)$. Entonces $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$, por lo que existe

$$z \in \phi(x) \cap U \subseteq [f(x); g(x)] \cap U.$$

Como $g(x) \wedge z = z \in U$ y las funciones g y $\wedge$ son continuas, entonces existen conjuntos abiertos $U_1 \subseteq X$ y $U_2 \subseteq Y$ tales que

$$x \in U_1, \quad z \in U_2 \quad \text{y} \quad g(x') \wedge z' \in U$$

para cada $x' \in U_1$ y $z' \in U_2$. Además, como $f(x) \vee z = z \in U_2$ y las funciones f y $\vee$ son continuas, entonces existe un conjunto abierto $U_3 \subseteq X$ tal que

$$x \in U_3 \quad \text{y} \quad f(x') \vee z \in U_2$$

para cada $x' \in U_3$.

Afirmamos que

$$[f(x'); g(x')] \cap U \neq \emptyset$$

para cada $x' \in U_1 \cap U_3$. En efecto, sea $x' \in U_1 \cap U_3$. Entonces $f(x') \vee z \in U_2$, debido a nuestra elección de U_3 . Esto implica que

$$w := g(x') \wedge (f(x') \vee z) \in U,$$

por nuestra elección de U_1 y U_2 . Notemos que, por la definición de w , $w \leq g(x')$ y

$$f(x') = f(x') \wedge g(x') \leq (f(x') \vee z) \wedge g(x') = w,$$

por lo que $w \in [f(x'); g(x')]$. Como $w \in U$, esto prueba la afirmación.

Ahora consideramos los siguientes dos casos.

Caso 1. $x \in X \setminus C$. Entonces, notemos que

$$x \in U_1 \cap U_3 \cap (X \setminus C) \subseteq \phi^{\leftarrow}(U).$$

En efecto, si $x' \in U_1 \cap U_3 \cap (X \setminus C)$, entonces, debido a la afirmación anterior,

$$[f(x'); g(x')] \cap U \neq \emptyset$$

y, como $x' \notin C$, $\phi(x') = [f(x'); g(x')]$. Entonces $x' \in \phi^{\leftarrow}(U)$. Además, como C es cerrado en X , el conjunto $U_1 \cap U_3 \cap (X \setminus C)$ es abierto en X . Esto significa que $x \in \text{int}(\phi^{\leftarrow}(U))$.

Caso 2. $x \in C$. Entonces $\phi(x) = \{h(x)\}$ y, como $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$, tenemos que $h(x) \in U$. La función $h : C \rightarrow X$ es continua, por lo tanto existe un conjunto abierto $V \subseteq X$ tal que $h^{-1}(U) = V \cap C$. Entonces

$$x \in U_1 \cap U_3 \cap V \subseteq \phi^{\leftarrow}(U).$$

En efecto, si $x' \in U_1 \cap U_3 \cap V$ y $x' \notin C$, entonces, de manera análoga al caso anterior, se tiene que $x' \in \phi^{\leftarrow}(U)$. Y si $x' \in C$, entonces $x' \in C \cap V = h^{-1}(U)$, y por lo tanto $\phi(x) = \{h(x)\} \subseteq U$. Esto implica que $x' \in \phi^{\leftarrow}(U)$, y podemos concluir que $x \in \text{int}(\phi^{\leftarrow}(U))$.

Entonces, $\phi^{\leftarrow}(U)$ es abierto en X y ϕ es semicontinua inferiormente. $\square$

Más información sobre estructuras convexas puede encontrarse en [44].

En [7, Definición 3.1], se definió una generalización de estructuras convexas para G -espacios, que debe cumplir ser compatible con la acción de G . En [7, Teorema 3.3], se probó que, si G es un grupo de Lie compacto, todo G -espacio con una estructura convexa equivariante y tal que X^G es no vacío es un G -AR. Este y otros resultados sobre estructuras convexas equivariantes pueden consultarse en [7].

1.8. Problema de Jaworowski y problema de Anderson

J. Jaworowski comenzó a estudiar retracts y extensores equivariantes en [33], [34] y [35]. Una condición necesaria para que un G -espacio metrizable X sea un G -ANR (G -AR) es que el conjunto de puntos fijos X^H sea un ANR (AR), para cada subgrupo cerrado H de G ([52], [32, Proposición 8.45]). En la década de los setentas, J. Jaworowski planteó el problema converso a esto.

Problema 1.8.1 (Problema de Jaworowski). Sean G un grupo de Lie compacto y X un G -espacio metrizable que tiene un número finito de tipos orbitales (por ejemplo, cuando G es un grupo finito). Supongamos que para cada subgrupo cerrado H de G el conjunto X^H es un AR. ¿Entonces X es un G -AR?

Este problema permanece abierto incluso en el caso más simple, cuando X es homeomorfo al cubo de Hilbert $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [-1, 1]$, G es el grupo $\mathbb{Z}_2$ y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es un conjunto unitario. En este caso, el problema de Jaworowski resulta equivalente a un problema planteado por R. D. Anderson en los años sesentas, referente a la cantidad de clases de conjugación de involuciones en el cubo de Hilbert.

Recordemos que una **involución** en un espacio topológico X es una función continua $\alpha : X \rightarrow X$ que es su propia función inversa, es decir, $\alpha \circ \alpha = \text{Id}_X$. Si α y β son involuciones en los espacios X y Y , se dice que α y β son **conjugadas** si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ \alpha = \beta \circ h$. A lo largo de este texto, llamaremos a la involución $\sigma : Q \rightarrow Q$, dada por $\sigma(x) = -x$, la **involución estándar** en el cubo de Hilbert.

Notemos que toda acción del grupo $\mathbb{Z}_2$ en un espacio X induce una involución $\alpha : X \rightarrow X$, dada por $\alpha(x) = -1 \cdot x$. Recíprocamente, una involución α en X induce una acción de $\mathbb{Z}_2$ en X . Denotaremos este $\mathbb{Z}_2$ -espacio por (X, α) . En este caso, es claro que $X^{\mathbb{Z}_2}$ es un conjunto unitario si y sólo si α tiene un único punto fijo.

En 1977, en [60, Teorema 1], J. E. West y R. Wong probaron que si $\alpha : Q \rightarrow Q$ es una involución con un único punto fijo y el espacio orbital $Q/\mathbb{Z}_2$ de (X, α) es un AR, entonces α es conjugada con la involución estándar. Por otra parte, en 1988, en [4, Teorema 8], S. Antonyan demostró que si un $\mathbb{Z}_2$ -espacio (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR, entonces el espacio orbital $X/\mathbb{Z}_2$ es un AR. En [8], S. Antonyan usó estos resultados para probar el siguiente teorema.

Teorema 1.8.2. *Si X es un espacio homeomorfo a Q y $\alpha : X \rightarrow X$ es una involución con un único punto fijo, entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR si y sólo si α es conjugada con $\sigma : Q \rightarrow Q$.*

Este resultado implica que, en este caso específico, el problema de Jaworowski es equivalente al siguiente problema planteado por R. D. Anderson.

Problema 1.8.3 (Problema de Anderson). Sea $\sigma : Q \rightarrow Q$ la involución estándar en Q . Si $\alpha : Q \rightarrow Q$ es una involución con un único punto fijo, ¿entonces α es conjugada con σ ?

Este problema permanece abierto a pesar de que se han hecho varios intentos para resolverlo. En 1974, en [62, Teorema 1], R. Wong probó que, para que una involución $\alpha : Q \rightarrow Q$ con un único punto fijo sea conjugada con σ , es necesario y suficiente que el punto fijo tenga una base de vecindades abiertas, contráctiles e invariantes bajo α .

En 1977, en [59], J. E. West intentó dar una respuesta negativa al problema de Anderson, construyendo involuciones en ciertos hiperespacios que son homeomorfos al cubo de Hilbert. Sin embargo, demostró que estas resultan ser conjugadas con σ , como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8.4. Dado un espacio métrico (X, d) , consideremos el espacio $\text{Cld}(X)$ equipado con la métrica de Hausdorff. Si (X, d) es compacto, conexo, localmente conexo y tiene más de un punto, entonces $\text{Cld}(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert ([21, Teorema 1]). J. E. West demostró que, en este caso, si $\alpha : X \rightarrow X$ es una involución con un único punto fijo y

$$\mathcal{S} = \{A \in \text{Cld}(X) \mid \alpha(A) = A\},$$

entonces $\text{Cld}(X)/\mathcal{S}$ es también homeomorfo al cubo de Hilbert, y la función $\hat{\alpha} : \text{Cld}(X)/\mathcal{S} \rightarrow \text{Cld}(X)/\mathcal{S}$, dada por $\hat{\alpha}([A]) = [\alpha(A)]$, es una involución con un único punto fijo que es conjugada con σ . ◀

El siguiente es un ejemplo más complejo de otra involución que es conjugada con σ .

Ejemplo 1.8.5. Consideremos el conjunto

$$T := \{-1, 1\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, 1)^n \right) \times \{-1, 1\} \cup \prod_{n=1}^{\infty} (-1, 1).$$

Los elementos de T son sucesiones $x = (x(n))$ que son infinitas y tienen todas sus coordenadas en $(-1, 1)$, o bien, son finitas y tienen su última coordenada en $\{-1, 1\}$ y sus coordenadas anteriores en $(-1, 1)$.

Se define el orden de un elemento $y \in T$ como el número de coordenadas de y si y es una sucesión finita, y como ∞ si y es una sucesión infinita. Lo denotaremos por $\text{ord}(y)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definimos $\varphi_n : T \rightarrow [-1, 1]$ por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x(1), \\ \varphi_n(x) &= \begin{cases} x(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) & \text{si } n \leq \text{ord}(x), \\ 0 & \text{si } n > \text{ord}(x) \end{cases} \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Entonces $d : T \times T \rightarrow [0, \infty)$, definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|,$$

es una métrica en T .

La definición y propiedades de (T, d) pueden consultarse en [16, Capítulo 3, Sección 3], donde este espacio se usa para probar el teorema de Keller ([16, Capítulo 3, Teorema 3.1]). En particular, se demuestra que el cubo de Hilbert Q es homeomorfo a T . El homeomorfismo dado en [16, Capítulo 3, Proposición 3.2] está definido de la siguiente manera.

Consideremos la norma usual $\|\cdot\|_2$ en el espacio de Hilbert ℓ_2 . Definimos $g : Q \rightarrow \ell_2$ por

$$g((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n(1 + \|(\frac{x_n}{n})\|_2)} \right).$$

Denotemos por $g_n : Q \rightarrow \mathbb{R}$ a cada función coordenada de g , para toda $n \geq 1$.

Para cada $x \in Q$, definimos $K_0(x) := Q$ y, para toda $n \geq 1$,

$$K_n(x) := \{y \in Q \mid g_i(x) = g_i(y) \text{ para cada } i \geq n\}.$$

Finalmente, para cada $n \geq 1$ definimos $b_n : Q \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$b_n(x) = \max \{g_n(y) \mid y \in K_{n-1}(x)\}$$

y $f_n : \{x \in Q \mid b_n(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{b_n(x)}.$$

Entonces, la función $F : Q \rightarrow T$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} (f_1(x), \dots, f_k(x)) & \text{si } k+1 = \min \{n \geq 1 \mid b_n(x) = 0\}, \\ (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} & \text{si } b_n(x) \neq 0 \text{ para toda } n \geq 1 \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Observemos que el espacio T también tiene una involución natural $\sigma' : T \rightarrow T$, dada por $\sigma'((x(n))) = (-x(n))$. De la definición de F , es fácil verificar que $F \circ \sigma = \sigma' \circ F$. Entonces, σ y σ' son involuciones conjugadas. ◀

En 1999, en [5, Corolario 2], S. Antonyan demostró que si X es un espacio compacto y $\alpha : X \rightarrow X$ es una involución con un único punto fijo, entonces existe un encaje $j : X \rightarrow Q$ tal que $j \circ \alpha = \sigma \circ j$.

En 2020, en [54, Teorema 1.1], J. van Mill y J. E. West probaron que, en el espacio de Hilbert ℓ_2 , la pregunta análoga al problema de Anderson tiene una respuesta negativa. Es decir, existen dos involuciones con un único punto fijo en ℓ_2 que no son conjugadas.

En 2022, en [29], L. Higuera-Montaña y N. Jonard-Pérez encontraron una respuesta parcial al problema de Anderson. Probaron que el espacio $\mathcal{K}_0^n$ de subconjuntos cerrados y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen, equipado con la métrica de Attouch-Wets, es homeomorfo a Q , y que todas las involuciones con un único punto fijo en $\mathcal{K}_0^n$ que son decrecientes con respecto al orden de la contención son conjugadas con σ . Como el orden jugó un papel importante en este caso, es natural preguntarse si lo hace en un contexto más general. Así, planteamos la siguiente versión débil del problema de Jaworowski.

Problema 1.8.6 (Versión débil del problema de Jaworowski). Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, y que existe una estructura de retícula $(X, \leq, \wedge, \vee)$ en X que es topológica y tal que α es decreciente con respecto al orden parcial $\leq$. Entonces, ¿es (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -AR?

En el Problema 1.8.6, es equivalente suponer que existe una estructura de semiretícula en X a una estructura de retícula, como demostramos a continuación.

Lema 1.8.7. *Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio. Supongamos que existe una estructura de semiretícula $(X, \leq, \wedge)$ (o $(X, \leq, \vee)$) en X que es topológica y tal que α es decreciente con respecto al orden $\leq$. Entonces, existe una función continua $\vee : X \times X \rightarrow X$ (o $\wedge : X \times X \rightarrow X$) tal que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(X, \leq, \wedge)$ es una semiretícula topológica tal que α es decreciente con respecto a $\leq$. Definimos $\vee : X \times X \rightarrow X$ por

$$x \vee y = \alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y)).$$

Sean $x, y \in X$. Veamos que $x \vee y$ es el supremo de $\{x, y\}$. Como $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \leq \alpha(x)$, $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \leq \alpha(y)$ y α es decreciente con respecto al orden, entonces $x \leq \alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y))$ y $y \leq \alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y))$, y por lo tanto $\alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y))$ es una cota superior de $\{x, y\}$.

Por otra parte, si $s \in X$ es tal que $x \leq s$ y $y \leq s$, entonces $\alpha(s) \leq \alpha(x)$ y $\alpha(s) \leq \alpha(y)$, y por lo tanto $\alpha(s) \leq \alpha(x) \wedge \alpha(y)$. Esto implica que $\alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) \leq s$, y podemos concluir que $\alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y))$ es el supremo del conjunto $\{x, y\}$.

Entonces $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula, y es topológica porque $\vee$ es continua (ya que es una composición de funciones continuas). $\square$

En la siguiente definición damos un nombre a un espacio que cumple las condiciones del Problema 1.8.6.

Definición 1.8.8. Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable. Llamaremos una $\mathbb{Z}_2$ -**retícula decreciente** a una retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ tal que α es decreciente con respecto a $\leq$. La denotaremos por $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$.

Los siguientes son ejemplos de situaciones en las que se cumplen las hipótesis del Problema 1.8.6. Es decir, son $\mathbb{Z}_2$ -retículas decrecientes $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ tales que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs.

Ejemplo 1.8.9. Consideremos la involución estándar σ en Q . La estructura de retícula $(Q, \leq, \wedge, \vee)$ es topológica, donde los operadores $\wedge$ y $\vee$ están definidos como

$$(x_n) \wedge (y_n) = (\min \{x_n, y_n\}), \quad (x_n) \vee (y_n) = (\max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq$ está dado por

$$(x_n) \leq (y_n) \text{ si y sólo si } x_n \leq y_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

El único punto fijo de σ es (0) , entonces $Q^{\mathbb{Z}_2} = \{(0)\}$. Por lo tanto, Q y $Q^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Además, si $(x_n) \leq (y_n)$, entonces $(-y_n) \leq (-x_n)$, por lo que σ es decreciente con respecto a $\leq$. $\blacktriangleleft$

Ejemplo 1.8.10. Sea $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ el espacio de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen en su interior, equipado con la métrica de Hausdorff (recordemos que en este conjunto la topología de Hausdorff coincide con la topología de Attouch-Wets). Este espacio es un AR, como vimos en el Ejemplo 1.6.8.

Consideremos la involución polar $\circ : \mathcal{K}_{(0),b}^n \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$, definida por

$$A^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle \leq 1 \right\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Esta involución se estudió en [45] y en [29]. Su único punto fijo es la bola unitaria $\overline{B}(0, 1)$, y por lo tanto $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es un AR también.

Consideremos la estructura de retícula $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \subseteq, \wedge, \vee)$, donde los operadores $\wedge$ y $\vee$ están definidos como

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = \text{conv}(A \cup B),$$

y $\subseteq$ es el orden de la contención. La involución polar es decreciente con respecto a $\subseteq$.

Además, en [51, Lema 2.1] se demostró que la función $A \mapsto \text{conv}(A)$ es continua en $\text{Cld}(X)$, equipado con la métrica de Hausdorff, para todo espacio normado X . Por otra parte, recordemos del Ejemplo 1.4.4 que la función unión es continua. Entonces, en particular, la función $\vee$ es continua y, por lo tanto, el Lema 1.8.7 implica que $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \subseteq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica. ◀

Ejemplo 1.8.11. Recordemos que en el Ejemplo 1.6.6 vimos que el espacio

$$\text{Cvx}(I) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es convexa y continua}\},$$

equipado con la métrica inducida por la norma uniforme en $C([0, 1], \mathbb{R})$, es un AR.

Le damos la estructura de retícula $(\text{Cvx}(I), \leq, \wedge, \vee)$, definida por

$$f \leq g \text{ si y sólo si } f(x) \leq g(x) \text{ para toda } x \in [0, 1]$$

y

$$f \wedge g(x) = \sup \{h(x) \mid h \in \text{Cvx}(I), h \leq f \text{ y } h \leq g\},$$

$$f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

para cada $x \in [0, 1]$.

En este espacio, consideramos la involución de Legendre $\mathcal{L} : \text{Cvx}(I) \rightarrow \text{Cvx}(I)$, definida por

$$\mathcal{L}(f)(x) = \max_{y \in [0,1]} (xy - f(y))$$

para cada $x \in [0, 1]$. Esta involución es decreciente con respecto al orden $\leq$, y su único punto fijo es la función $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_0(x) = \frac{x^2}{2}$. Entonces, $\text{Cvx}(I)^{\mathbb{Z}_2}$ también es un AR. La involución de Legendre se estudió en [9] y en [10, Sección 4, Ejemplo 2].

Finalmente, notemos que la función $\vee$ es continua. Consideremos la métrica en $\text{Cvx}(I) \times \text{Cvx}(I)$ dada por

$$d((f, g), (h, j)) = \max\{\|f - h\|, \|g - j\|\},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma uniforme en $C([0, 1], \mathbb{R})$. Sean $(f, g), (h, j) \in \text{Cvx}(I) \times \text{Cvx}(I)$. Veamos que para cada $x \in [0, 1]$ se cumple que

$$|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{h(x), j(x)\}| \leq d((f, g), (h, j)). \quad (1.2)$$

Sea $x \in [0, 1]$. Consideremos el caso en el que

$$\max\{f(x), g(x)\} \geq \max\{h(x), j(x)\}$$

y $f(x) \geq g(x)$ (en los otros casos, la demostración de (1.2) es análoga). Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} & |\max\{f(x), g(x)\} - \max\{h(x), j(x)\}| \\ &= \max\{f(x), g(x)\} - \max\{h(x), j(x)\} \\ &= f(x) - \max\{h(x), j(x)\} \\ &\leq f(x) - h(x) \\ &\leq |f(x) - h(x)| \\ &\leq \max\{|f(x) - h(x)|, |g(x) - j(x)|\} \\ &\leq \max\{\|f - h\|, \|g - j\|\} = d((f, g), (h, j)), \end{aligned}$$

como queríamos probar. Esto implica que

$$\begin{aligned} \|f \vee g - h \vee j\| &= \max_{x \in X} |\max\{f(x), g(x)\} - \max\{h(x), j(x)\}| \\ &\leq d((f, g), (h, j)), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\vee$ es una función Lipschitz continua. Así, como $\mathcal{L}$ es decreciente con respecto al orden $\leq$, el Lema 1.8.7 implica que la retícula $(\text{Cvx}(I), \leq, \wedge, \vee)$ es topológica. ◀

1.9. Medias

Definición 1.9.1. Sea X un espacio topológico. Una **n -media** en X es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

- (M1) $p(x, \dots, x) = x$ para cada $x \in X$,
- (M2) $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y σ permutación de $\{1, \dots, n\}$.

Cuando $n = 2$, simplemente diremos que p es una **media**

Este tipo de funciones fueron estudiadas en [24] por B. Eckmann en 1954, donde demostró que si un poliedro conexo y compacto admite una n -media para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces es contráctil. En 1962, B. Eckmann, T. Ganea y P. J. Hilton generalizaron este resultado en [25, Corolario 3.2 y p. 90], probando que si X es un espacio conexo con el tipo de homotopía de un poliedro y grupos de homología finitamente generados que son cero a partir de cierta dimensión, entonces X admite una n -media para alguna $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si es contráctil. En [37], H. Juárez-Anguiano observó que, como todo ANR es homotópicamente equivalente a un poliedro y la clase de ANRs contráctiles es precisamente la clase de ARs, entonces el resultado de B. Eckmann, T. Ganea y P. J. Hilton puede escribirse de la siguiente manera.

Teorema 1.9.2. *Sea X un ANR conexo con grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- 1) *Existe una n -media $p : X^n \rightarrow X$ para toda $n \geq 2$.*
- 2) *Existe una n -media $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$.*
- 3) *X es un AR.*

Posteriormente, en la década de los ochentas, G. Chichilnisky y G. Heal estudiaron n -medias en [18] y [19] en el contexto de teoría de elección social, y redescubrieron las implicaciones $1) \iff 3)$. En esta área, $\{1, \dots, n\}$ es un conjunto de votantes, y cada elemento de X es una **preferencia**. Una n -media es una **regla de elección social**, y las condiciones (M1) y (M2) son llamadas **unanimidad** y **anonimidad**, respectivamente. En los resultados de G. Chichilnisky y G. Heal, X es un complejo CW que tiene un número finito de celdas en cada dimensión y es conexo. En [18], se demostró que el hecho de que X sea contráctil es suficiente para que admita una n -media para toda $n \in \mathbb{N}$, y en [19] se demostró que la contractibilidad de X es también necesaria.

En 2004, S. Weinberger redescubrió la implicación $2) \implies 3)$ en [58, Teorema 1.1].

Capítulo 2

n -Medias equivariantes

En este capítulo estudiaremos la relación entre n -medias equivariantes y G -ARs.

En la primera sección definiremos la noción de n -media equivariante, e introduciremos una pregunta planteada por H. Juárez-Anguiano (Pregunta 2.1.4) sobre cuándo la existencia de una n -media equivariante en un G -espacio implica que este sea un G -AR.

En la segunda sección daremos respuestas parciales al problema de Jaworowski (Problema 1.8.1) y a la Pregunta 2.1.4, en el caso en el que el grupo G es finito. En particular, veremos que si X es un G -espacio, G es un grupo finito y se cumplen las hipótesis del problema de Jaworowski o de la Pregunta 2.1.4, entonces la existencia de una $|G|$ -media equivariante en X implica que X sea un G -AR.

En la tercera sección daremos otra respuesta parcial a la Pregunta 2.1.4. Veremos que la existencia de una n -cuasimedia contractiva equivariante en un G -ANR que es métrico y completo implica que este es un G -AR.

2.1. n -Medias equivariantes

Retomando la definición de n -media (Definición 1.9.1), ahora daremos una versión equivariante de este concepto.

Definición 2.1.1. Si X es un G -espacio metrizable, una **n -media equivariante** es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satiface las condiciones (M1) y (M2), y además cumple que

$$p(gx_1, \dots, gx_n) = gp(x_1, \dots, x_n)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y $g \in G$. Cuando $n = 2$, simplemente diremos que p es una **media equivariante**.

Recordemos que, si X es un ANR conexo con grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero, entonces la existencia de una n -media en X es equivalente a que X sea un AR (Teorema 1.9.2). En 2020, en [37], H. Juárez-Anguiano demostró la siguiente versión equivariante de este resultado.

Teorema 2.1.2 ([37, Teorema 3.3]). *Sea X un G -espacio metrizable que es un G -ANR y tal que para cada subgrupo cerrado H de G , X^H es un espacio conexo con grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- 1) *Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para toda $n \geq 2$.*
- 2) *Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$.*
- 3) *X es un G -AR.*

Si un G -espacio X es un G -ANR, el conjunto de puntos fijos X^H es un ANR para cualquier subgrupo H de G ([1, Teorema 7]). Además, cualquier ANR compacto tiene grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero ([31, Capítulo 4, Corolario 7.2]). Estos dos hechos implican que el siguiente resultado de H. Juárez-Anguiano es consecuencia del teorema anterior.

Corolario 2.1.3 ([37, Corolario 3.4]). *Sea X un G -espacio metrizable que es un G -ANR y tal que para cada subgrupo cerrado H de G , X^H es un espacio conexo y compacto. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- 1) *Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para toda $n \geq 2$.*
- 2) *Existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$.*
- 3) *X es un G -AR.*

En [37], H. Juárez-Anguiano planteó la pregunta de si, en el resultado anterior, la hipótesis de que los conjuntos de puntos fijos X^H sean conexos y compactos puede cambiarse por que X lo sea.

Pregunta 2.1.4. *Sea X un G -espacio metrizable, conexo y compacto que es un G -ANR. Si existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para alguna $n \geq 2$, ¿entonces X es un G -AR?*

2.2. Grupos finitos

En esta sección damos una respuesta positiva al problema de Jaworowski (Problema 1.8.1) en el caso en el que G es un grupo finito y X admite una $|G|$ -media equivariante. Bajo estas hipótesis, también damos una respuesta parcial a la Pregunta 2.1.4.

Antes de eso, demostraremos los siguientes tres lemas. Empezaremos observando que la existencia de una n -media (n -media equivariante) garantiza la existencia de k -medias (k -medias equivariantes) para todo k divisor de n .

Lema 2.2.1. *Si $p : X^n \rightarrow X$ es una n -media (n -media equivariante) y $k \in \mathbb{N}$ divide a n , entonces existe una k -media (k -media equivariante) $q : X^k \rightarrow X$.*

Demostración. Definimos $q : X^k \rightarrow X$ por

$$q(x_1, \dots, x_k) = p(x_1, \dots, x_k, \dots, x_1, \dots, x_k),$$

donde $x_1, \dots, x_k$ se repiten $\frac{n}{k}$ veces en el argumento de p . Claramente q es una k -media. Además, si p es equivariante, entonces q es equivariante también. $\square$

En el siguiente lema demostramos que la existencia de una $|G|$ -media equivariante nos permite obtener una G -homotopía a partir de una homotopía.

Lema 2.2.2. *Sea X un G -espacio, donde G es un grupo finito. Supongamos que existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$, donde $n = |G|$. Si $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ es una homotopía y $g_1, \dots, g_n$ son los elementos de G , entonces la función $\Psi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por*

$$\Psi(x, t) = p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, t))$$

es una G -homotopía. Además, cumple lo siguiente:

- (1) *Si Φ_0 es la función identidad en X , entonces Ψ_0 es la función identidad en X .*
- (2) *Si Φ_1 es una función constante, entonces Ψ_1 es una función constante.*

Demostración. Primero demostraremos que Ψ es una G -homotopía. Claramente, Ψ es continua. Notemos que para cada $h \in G$ la regla $g_i \rightarrow g_i h$ define

una biyección en G . Entonces, como p es equivariante y satisface la propiedad (M2), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Psi(hx, t) &= p(g_1^{-1}\Phi(g_1hx, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nhx, t)) \\
 &= hh^{-1}p(g_1^{-1}\Phi(g_1hx, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nhx, t)) \\
 &= hp(h^{-1}g_1^{-1}\Phi(g_1hx, t), \dots, h^{-1}g_n^{-1}\Phi(g_nhx, t)) \\
 &= hp((g_1h)^{-1}\Phi(g_1hx, t), \dots, (g_nh)^{-1}\Phi(g_nhx, t)) \\
 &= hp(g_1^{-1}\Phi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, t)) \\
 &= h\Psi(x, t)
 \end{aligned}$$

para cada $h \in G$ y $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Entonces, Ψ es una G -homotopía.

Ahora, demostramos que Ψ cumple (1) y (2).

(1) Supongamos que $\Phi(x, 0) = x$ para cada $x \in X$. Entonces, por la condición (M1) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, 0) &= p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, 0), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, 0)) \\
 &= p(g_1^{-1}g_1x, \dots, g_n^{-1}g_nx) \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

(2) Si $c \in X$ es tal que $\Phi(x, 1) = c$ para cada $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, 1) &= p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, 1), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, 1)) \\
 &= p(g_1^{-1}c, \dots, g_n^{-1}c).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ_1 es una función constante. □

Lema 2.2.3. Sean X un G -espacio metrizable, donde G es un grupo finito, y H un subgrupo de G tal que $|H| = n$. Supongamos que existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$. Entonces se cumple lo siguiente:

- (1) El conjunto X^H es no vacío.
- (2) Si X es un AR y X^H es un retracto de X , entonces X^H es un H -retracto por deformación fuerte de X .

Demostración. Como $|H| = n$, podemos suponer que $H = \{g_1, \dots, g_n\}$.

(1) Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Definimos

$$x_0 := p(g_1x, \dots, g_nx).$$

Afirmamos que $x_0 \in X^H$. En efecto, si $h \in H$, notemos que $g_i \rightarrow hg_i$ define una biyección en H . Entonces, usando el hecho de que p es equivariante y satisface la condición (M2), podemos concluir que

$$\begin{aligned} hx_0 &= hp(g_1x, \dots, g_nx) \\ &= p(hg_1x, \dots, hg_nx) \\ &= p(g_1x, \dots, g_nx) = x_0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x_0 \in X^H$.

(2) Sea $r : X \rightarrow X^H$ una retracción. Consideremos

$$A := (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (X^H \times [0, 1])$$

y la función $\varphi : A \rightarrow X$ dada por

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } (x, t) \in X \times \{0\}, \\ r(x) & \text{si } (x, t) \in (X \times \{1\}) \cup (X^H \times [0, 1]). \end{cases}$$

Como X es un AR metrizable, también es un AE. Entonces, ya que A es cerrado en $X \times [0, 1]$, existe una extensión continua $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ de φ .

Definimos $\Psi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por

$$\Psi(x, t) := p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, t)).$$

Por el Lema 2.2.2, Ψ es una H -homotopía. Además, como $\Phi(x, 0) = \varphi(x, 0) = x$, el Lema 2.2.2-(1) implica que Ψ_0 es la función identidad en X .

Ahora, si $x \in X^H$, entonces $g_jx \in X^H$ para cada $g_j \in H$, por lo que

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, t)) \\ &= p(g_1^{-1}\varphi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\varphi(g_nx, t)) \\ &= p(g_1^{-1}r(g_1x), \dots, g_n^{-1}r(g_nx)) \\ &= p(g_1^{-1}g_1x, \dots, g_n^{-1}g_nx) \\ &= p(x, \dots, x) \\ &= x, \end{aligned}$$

usando que p satisface la condición (M1). Entonces $\Psi(x, t) = x$ para cada $(x, t) \in X^H \times [0, 1]$.

Finalmente, demostraremos que Ψ_1 es una retracción de X en X^H . En efecto, como $\Psi_1(x) = x$ para cada $x \in X^H$, sólo necesitamos demostrar que

$\Psi_1(X) \subseteq X^H$. Sea $x \in X$. Notemos que $hr(x) = r(x)$ para cada $h \in H$, ya que $r(x) \in X^H$. Esto implica que

$$\begin{aligned} h\Psi_1(x) &= hp(g_1^{-1}r(g_1x), \dots, g_n^{-1}r(g_nx)) \\ &= p(hg_1^{-1}r(g_1x), \dots, hg_n^{-1}r(g_nx)) \\ &= p(r(g_1x), \dots, r(g_nx)) \\ &= p(g_1^{-1}r(g_1x), \dots, g_n^{-1}r(g_nx)) \\ &= \Psi_1(x) \end{aligned}$$

para cada $h \in H$. Entonces $\Psi_1(x) \in X^H$, y por lo tanto Ψ_1 es una retracción de X en X^H . Podemos concluir que X^H es un H -retracto por deformación fuerte de X . $\square$

Con respecto al Lema 2.2.3-(1), es interesante remarcar que, en general, el conjunto de puntos fijos X^H puede ser vacío, incluso si el grupo G es finito y el espacio X es un AR (y, por lo tanto, contráctil).

Ejemplo 2.2.4. Sea $X = \mathbb{S}_{\ell_2}$, la esfera unitaria en el espacio de Hilbert ℓ_2 . En el Ejemplo 1.6.16 vimos que X es un AR, pero, si consideramos la acción de $\mathbb{Z}_2$ en X dada por

$$(t, x) \rightarrow tx,$$

entonces el conjunto de $\mathbb{Z}_2$ -puntos fijos es vacío. $\blacktriangleleft$

Ahora, estamos en condiciones de probar que, si G es un grupo finito y X admite una $|G|$ -media equivariante, entonces el problema de Jaworowski tiene una respuesta positiva.

Teorema 2.2.5. *Sea X un G -espacio metrizable, donde G es un grupo finito. Supongamos que para cada subgrupo H de G el conjunto X^H es un AR. Si existe una n -media equivariante en X para algún múltiplo n de $|G|$, entonces X es un G -AR.*

Demostración. Como $X = X^{\{e\}}$, tenemos que X es un AR. Además, por el teorema de Lagrange, si H es un subgrupo arbitrario de G entonces $|H|$ divide a $|G|$, y por lo tanto $|H|$ divide a n . Así, por el Lema 2.2.1, existe una $|H|$ -media equivariante para cada subgrupo H de G .

Por otro lado, como X^H es cerrado en X y X^H es un AR para cada subgrupo H de G , entonces existe una retracción $r : X \rightarrow X^H$. Así, el Lema 2.2.3 implica que X^H es un H -retracto por deformación fuerte de X . Esto, junto con el Teorema 1.6.15, implica que X es un G -AR. $\square$

Corolario 2.2.6. *Sea X un G -espacio metrizable, donde G es un grupo finito. Supongamos que para cada subgrupo H de G el conjunto X^H es un AR. Si existe una $|G|$ -media equivariante, entonces X es un G -AR.*

Con respecto a la Pregunta 2.1.4, en el Corolario 2.2.8 probaremos que podemos obtener una respuesta positiva si el grupo G es finito y n es un múltiplo de $|G|$.

Teorema 2.2.7. *Sea X un G -ANR conexo, donde G es un grupo finito. Supongamos que X tiene grupos de homología finitamente generados tal que casi todos son cero. Si existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para algún múltiplo n de $|G|$, entonces X es un G -AR.*

Demostración. Por el Lema 2.2.1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n = |G|$.

Como X es un G -ANR, es un ANR ([6, Teorema 3.7]). Entonces, se sigue del Teorema 1.9.2-((2) $\Rightarrow$ (3)) que X es un AR, y por lo tanto es contráctil.

Sea $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una contracción de X , y sean $g_1, \dots, g_n$ los elementos de G . Consideremos la función $\Psi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$\Psi(x, t) = p(g_1^{-1}\Phi(g_1x, t), \dots, g_n^{-1}\Phi(g_nx, t)).$$

Por el Lema 2.2.2, Ψ es una G -homotopía de la identidad en una función constante, y por lo tanto X es G -contráctil. Así, por el Teorema 1.6.14, X es un G -AR. $\square$

Si X es un ANR compacto, entonces tiene grupos de homología finitamente generados y casi todos cero ([31, Capítulo 4, Corolario 7.2]). Este hecho, junto con el teorema anterior, nos da el siguiente corolario.

Corolario 2.2.8. *Sea X un G -ANR conexo y compacto, donde G es un grupo finito. Si existe una n -media equivariante $p : X^n \rightarrow X$ para algún múltiplo n de $|G|$ (en particular, si $n = |G|$), entonces X es un G -AR.*

2.3. n -Cuasimédias equivariantes

Recordemos que una n -media es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satisface (M1) y (M2) de la Definición 1.9.1.

Definición 2.3.1. Una n -**cuasimedia** en un espacio topológico X es una función continua $p : X^n \rightarrow X$ que satisface la condición (M1). Cuando $n = 2$, simplemente diremos que p es una **cuasimedia**.

Definición 2.3.2. Si X es un G -espacio metrizable, diremos que una n -cuasimedia $p : X^n \rightarrow X$ es una n -**cuasimedia equivariante** si cumple que

$$p(gx_1, \dots, gx_n) = gp(x_1, \dots, x_n)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ y $g \in G$. Cuando $n = 2$, simplemente diremos que p es una **cuasimedia equivariante**.

Recordemos que una métrica d en un espacio X se llama **propia** si todas las bolas cerradas en (X, d) son compactas.

Consideremos un espacio métrico (X, d) . En [58], se llama a una función $p : X^n \rightarrow X$ **salomónica** si para cada $\delta > 0$ existe $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tal que $d(p(x_1, \dots, x_n), x_i) > \delta$, para cada $i = 1, \dots, n$. En [58, Proposición 3.2], S. Weinberger probó que, si X es un CW complejo conexo con una métrica propia d y, además, X admite n -medias para cada $n \in \mathbb{N}$ y no es contráctil, entonces toda n -media en X es salomónica. Esto implica que una n -media $p : X^n \rightarrow X$ en un espacio que no es contráctil se comporta de una forma que no esperaríamos, pues no hay ninguna restricción sobre la distancia $d(p(x_1, \dots, x_n), x_i)$. Por el Teorema 1.6.14, sabemos que para que un G -espacio metrizable sea un G -AR debe ser contráctil. Por lo tanto, es natural preguntarse si agregarle a la Pregunta 2.1.4 una hipótesis con respecto a la distancia $d(p(x_1, \dots, x_n), x_i)$ puede ser útil para resolverla.

En esta sección damos una respuesta parcial a la Pregunta 2.1.4. Probaremos que, si (X, d) es un G -espacio completo tal que X^G es no vacío, y además existen una función equivariante $p : X^n \rightarrow X$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que

$$\max_{i=1, \dots, n} d(x_i, p(x_1, \dots, x_n)) \leq \lambda \max_{j, k=1, \dots, n} d(x_j, x_k) \quad (2.1)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, entonces X es G -contráctil. Si, además, X es un G -ANR (como se supone en la Pregunta 2.1.4), entonces X es un G -AR.

Notemos que si una función continua $p : X^n \rightarrow X$ satisface la desigualdad (2.1), para alguna λ positiva, entonces

$$0 \leq d(x, p(x, \dots, x)) \leq \lambda d(x, x) = 0.$$

Esto implica que p satisface la condición (M1) y por lo tanto es una n -cuasimedia. Esta situación motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función continua $p : X^n \rightarrow X$ es una **n -cuasimedia contractiva** si existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\max_{i=1, \dots, n} d(x_i, p(x_1, \dots, x_n)) \leq \lambda \max_{j,k=1, \dots, n} d(x_j, x_k)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Cuando $n = 2$, simplemente diremos que p es una **cuasimedia contractiva**.

A primera vista la desigualdad (2.1) puede parecer artificial. Sin embargo, involucra una propiedad deseada: $p(x_1, \dots, x_n)$ yace *entre* los valores $x_1, \dots, x_n$. Además, esta desigualdad se cumple en algunas situaciones clásicas.

Ejemplo 2.3.4. Si X es un subconjunto convexo de un espacio normado, la n -media aritmética $A : X^n \rightarrow X$ dada por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

satisface la desigualdad (2.1) para $\lambda = \frac{n-1}{n}$. ◀

Ejemplo 2.3.5. Si $I = [a, b]$ es un intervalo contenido en el conjunto de reales positivos $\mathbb{R}^+$, con $a < b$, entonces la media geométrica $g : I \times I \rightarrow I$, dada por $g(x, y) = \sqrt{xy}$, satisface la desigualdad (2.1) para $\lambda = \frac{b-\sqrt{ab}}{b-a}$.

En efecto, consideremos la función $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x < y\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{y - \sqrt{xy}}{y - x}.$$

Las derivadas parciales de f están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(2\sqrt{xy} - y - x)}{2\sqrt{xy}(y - x)^2}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x(2\sqrt{xy} - y - x)}{2\sqrt{xy}(y - x)^2}.$$

Notemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es negativa y $\frac{\partial f}{\partial y}$ es positiva para cada (x, y) en el dominio de f . Entonces, $f \upharpoonright_{(0, y) \times \{y\}}$ es decreciente para cada $y \in \mathbb{R}^+$ y $f \upharpoonright_{\{x\} \times (x, \infty)}$ es creciente para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Esto implica que

$$\frac{y - \sqrt{xy}}{y - x} \leq \frac{b - \sqrt{ab}}{b - a} \quad (2.2)$$

para cada $(x, y) \in (I \times I) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x < y\}$.

Ahora queremos probar que la media geométrica $g : I \times I \rightarrow I$ satisface la desigualdad (2.1) para $\lambda = \frac{b-\sqrt{ab}}{b-a}$. Es claro que esta desigualdad se cumple para cada $x, y \in I$ tales que $x = y$. Entonces, tomemos $x, y \in I$ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < y$. Notemos que, como la media geométrica de dos números es siempre menor o igual a su media aritmética, entonces

$$\max\{|x - \sqrt{xy}|, |y - \sqrt{xy}|\} = |y - \sqrt{xy}| = y - \sqrt{xy}.$$

Por lo tanto, la desigualdad (2.2) implica que

$$\max\{|x - \sqrt{xy}|, |y - \sqrt{xy}|\} \leq \frac{b - \sqrt{ab}}{b - a} |x - y|,$$

como queríamos probar. ◀

El resto de esta sección usaremos la siguiente notación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por D_n al conjunto

$$D_n := \left\{ \frac{j}{2^n} \mid j \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}$$

y por D a la unión $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, es decir, D es el conjunto de racionales diádicos en $[0, 1]$. Además, para toda $x \in D$ denotaremos

$$h(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in D_n\}.$$

Lema 2.3.6. *Supongamos que $s, t \in D$ y $s < t$. Entonces existen $k, l \in \mathbb{N}$ y $s_0, s_1, \dots, s_k, t_0, t_1, \dots, t_l \in D$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $s = s_0 \leq \dots \leq s_k = t_l \leq \dots \leq t_0 = t$.
2. $h(s_0) > \dots > h(s_k)$ y $h(t_0) > \dots > h(t_l)$.
3. Para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $s_i, s_{i+1} \in D_{h(s_i)}$ y $|s_i - s_{i+1}| = \frac{1}{2^{h(s_i)}}$.
4. Para cada $i \in \{0, \dots, l-1\}$, $t_i, t_{i+1} \in D_{h(t_i)}$ y $|t_i - t_{i+1}| = \frac{1}{2^{h(t_i)}}$.

Demostración. Si $s, t \in D$ entonces $s, t \in D_{\max\{h(s), h(t)\}}$, por lo que existe una única $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s - t| = \frac{i}{2^{\max\{h(s), h(t)\}}}.$$

Denotemos $\rho(s, t) := i$. Vamos a probar el resultado por inducción sobre $\rho(s, t)$.

Sean $s, t \in D$ tales que $s < t$ y $\rho(s, t) = 1$. Entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$s = \frac{j}{2^{\max\{h(s), h(t)\}}} \quad \text{y} \quad t = \frac{j+1}{2^{\max\{h(s), h(t)\}}}.$$

Notemos que, dado que j o $j+1$ es par, entonces $h(s) \neq h(t)$. Si $h(s) > h(t)$, entonces $s_0 := s, s_1 := t =: t_0$ satisfacen las propiedades (1)-(4) del lema. Por otro lado, si $h(t) > h(s)$, entonces $s_0 := s =: t_1, t_0 := t$ son los elementos buscados de D .

Sea $n \geq 1$ y supongamos que el resultado es cierto si $\rho(s, t) \leq n$. Sean $s, t \in D$ tales que $s < t$ y $\rho(s, t) = n+1$. Definimos $s_0 := s$ y $t_0 := t$.

Si $h(s_0) \geq h(t_0)$, definimos

$$s_1 := s_0 + \frac{1}{2^{h(s_0)}}.$$

Como $s_0, t_0 \in D_{h(s_0)}$, entonces $|s_0 - t_0| \geq \frac{1}{2^{h(s_0)}}$, lo que implica que $s_1 \leq t_0$. Además, ya que $s_0 = \frac{m}{2^{h(s_0)}}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ impar, entonces $s_1 = \frac{m+1}{2^{h(s_0)}}$ con $m+1$ par. Esto implica que $h(s_0) > h(s_1)$. Así, si $s_1 = t_0$, entonces s_0, s_1, t_0 satisfacen las propiedades (1)-(4) del lema. Si $s_1 < t_0$, entonces, como $\rho(s_1, t_0) \leq \rho(s_0, t_0)$, podemos usar nuestra hipótesis de inducción para encontrar $s_1 = s'_0, \dots, s'_k, t_0 = t'_0, \dots, t'_l \in D$ que satisfacen las propiedades (1)-(4) para s_1 y t_0 . Por lo tanto, $s_0, s'_0, \dots, s'_k, t'_0, \dots, t'_l$ las satisfacen para s y t .

Si $h(s_0) < h(t_0)$, ahora definimos

$$t_1 := t_0 - \frac{1}{2^{h(t_0)}}$$

y usamos un argumento análogo al del párrafo anterior. $\square$

Teorema 2.3.7. *Sea (X, d) un espacio métrico completo.*

- (1) *Si existe una cuasimedia contractiva $p : X \times X \rightarrow X$, entonces X es contráctil.*

(2) Si además X es un G -espacio tal que X^G es no vacío y p es una cuasimedia equivariante, entonces X es G -contráctil.

Demostración. (1) Sea $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\max \{d(x, p(x, y)), d(y, p(x, y))\} \leq \lambda d(x, y)$$

para cada $x, y \in X$.

Fijemos $\theta \in X$ y consideremos $\phi_0 : X \times D_0 \rightarrow X$ dada por $\phi_0(x, 0) = x$ y $\phi_0(x, 1) = \theta$. Para cada $n \geq 1$, definamos recursivamente $\phi_n : X \times D_n \rightarrow X$ por

$$\phi_n \left(x, \frac{j}{2^n} \right) = \begin{cases} \phi_{n-1} \left(x, \frac{j}{2^n} \right) & \text{si } j \text{ es par,} \\ p \left(\phi_{n-1} \left(x, \frac{j-1}{2^n} \right), \phi_{n-1} \left(x, \frac{j+1}{2^n} \right) \right) & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

Puede verificarse por inducción que ϕ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, podemos definir $\Phi : X \times D \rightarrow X$ por $\Phi(x, \frac{j}{2^n}) = \phi_n(x, \frac{j}{2^n})$. Entonces $\Phi|_{X \times \{t\}}$ es continua para cada $t \in D$.

Para cada $x \in X$, sea $\Phi_x : D \rightarrow X$ dada por $\Phi_x(t) = \Phi(x, t)$. Vamos a probar que cada Φ_x es uniformemente continua. Sea $x \in X$.

Afirmación 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d \left(\Phi_x \left(\frac{j}{2^n} \right), \Phi_x \left(\frac{j+1}{2^n} \right) \right) \leq \lambda^n d(x, \theta)$$

para cada $j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

Prueba de la Afirmación 1. Procedemos por inducción sobre n . Como

$$d(\Phi_x(0), \Phi_x(1)) = d(x, \theta),$$

la afirmación es verdadera para $n = 0$.

Sea $m \geq 1$. Supongamos que la afirmación es cierta para $m - 1$ y sea $j \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$. Vamos a suponer que j es impar, pues el caso cuando j es par es análogo. Usando el hecho de que p es una cuasimedia contractiva

y nuestra hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 d\left(\Phi_x\left(\frac{j}{2^m}\right), \Phi_x\left(\frac{j+1}{2^m}\right)\right) &= d\left(p\left(\Phi_x\left(\frac{j-1}{2^m}\right), \Phi_x\left(\frac{j+1}{2^m}\right)\right), \Phi_x\left(\frac{j+1}{2^m}\right)\right) \\
 &\leq \lambda d\left(\Phi_x\left(\frac{j-1}{2^m}\right), \Phi_x\left(\frac{j+1}{2^m}\right)\right) \\
 &= \lambda d\left(\Phi_x\left(\frac{\frac{j-1}{2}}{2^{m-1}}\right), \Phi_x\left(\frac{\frac{j+1}{2}}{2^{m-1}}\right)\right) \\
 &\leq \lambda \lambda^{m-1} d(x, \theta) = \lambda^m d(x, \theta).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$. ■

Afirmación 2. Para cada $s, t \in D$,

$$d(\Phi_x(s), \Phi_x(t)) \leq \frac{2d(x, \theta)}{1 - \lambda} |s - t|^\alpha, \quad (2.3)$$

donde $\alpha := -\frac{\ln(\lambda)}{\ln(2)} > 0$.

Prueba de la Afirmación 2. Sean $s, t \in D$ con $s < t$, y $s = s_0, \dots, s_k, t = t_0, \dots, t_l \in D$ tales que satisfacen las propiedades (1)-(4) del Lema 2.3.6. Notemos que, por la Afirmación 1 y las propiedades (3) y (4) del Lema 2.3.6,

$$d(\Phi_x(s_i), \Phi_x(s_{i+1})) \leq \lambda^{h(s_i)} d(x, \theta)$$

para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$ y

$$d(\Phi_x(t_i), \Phi_x(t_{i+1})) \leq \lambda^{h(t_i)} d(x, \theta)$$

para cada $i \in \{0, \dots, l-1\}$. Ahora, por el Lema 2.3.6, $h(s_0) > \dots > h(s_{k-1})$ y $h(t_0) > \dots > h(t_{l-1})$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
 d(\Phi_x(s), \Phi_x(t)) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(\Phi_x(s_i), \Phi_x(s_{i+1})) + \sum_{i=0}^{l-1} d(\Phi_x(t_i), \Phi_x(t_{i+1})) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{h(s_i)} d(x, \theta) + \sum_{i=0}^{l-1} \lambda^{h(t_i)} d(x, \theta) \\
 &\leq d(x, \theta) \left(\sum_{n=h(s_{k-1})}^{\infty} \lambda^n + \sum_{n=h(t_{l-1})}^{\infty} \lambda^n \right) \\
 &= d(x, \theta) \frac{1}{1 - \lambda} (\lambda^{h(s_{k-1})} + \lambda^{h(t_{l-1})}). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

También, notemos que $\frac{1}{2^{h(s_{k-1})}} = |s_{k-1} - s_k| \leq |s - t|$, y por lo tanto

$$\lambda^{h(s_{k-1})} = e^{\ln(\lambda)h(s_{k-1})} = e^{-\alpha \ln(2)h(s_{k-1})} = \left(\frac{1}{2^{h(s_{k-1})}} \right)^\alpha \leq |s - t|^\alpha,$$

donde $\alpha = -\frac{\ln(\lambda)}{\ln(2)}$. Usando el mismo argumento, podemos probar que $\lambda^{h(t_{l-1})} \leq |s - t|^\alpha$, y por lo tanto podemos concluir que

$$d(\Phi_x(s), \Phi_x(t)) \leq \frac{2d(x, \theta)}{1 - \lambda} |s - t|^\alpha.$$

Esto termina la prueba de la afirmación. ■

La Afirmación 2 implica que $\Phi_x : D \rightarrow X$ es Hölder continua, y por lo tanto es uniformemente continua. Como D es denso en $[0, 1]$ y (X, d) es completo, existe una extensión continua $\tilde{\Phi}_x : [0, 1] \rightarrow X$ de Φ_x ([26, Teorema 4.3.17]). Notemos que, tomando límites en los dos lados de la desigualdad (2.3), podemos probar que $\tilde{\Phi}_x$ satisface la misma desigualdad. Es decir, para cada $s, t \in [0, 1]$,

$$d(\tilde{\Phi}_x(s), \tilde{\Phi}_x(t)) \leq \frac{2d(x, \theta)}{1 - \lambda} |s - t|^\alpha. \quad (2.5)$$

Ahora, definamos $\tilde{\Phi} : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por $\tilde{\Phi}(x, t) = \tilde{\Phi}_x(t)$. Notemos que, para cada $t \in D$, $\tilde{\Phi}(x, t) = \tilde{\Phi}_x(t) = \Phi_x(t) = \Phi(x, t)$, entonces $\tilde{\Phi}$ es una extensión de Φ . Esto significa que $\tilde{\Phi}(x, 0) = x$ y $\tilde{\Phi}(x, 1) = \theta$ para cada $x \in X$. Así, para probar que $\tilde{\Phi}$ es una homotopía, y que por lo tanto X es contráctil, sólo falta demostrar que $\tilde{\Phi}$ es continua. Para probar esto, tomemos un punto $(x, \eta) \in X \times [0, 1]$ y supongamos que $((x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times [0, 1]$ es una sucesión que converge a (x, η) en $X \times [0, 1]$. Tenemos que demostrar que $(\tilde{\Phi}(x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\Phi}(x, \eta)$.

Afirmación 3. La familia $\mathcal{H} := \{\tilde{\Phi}_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{\Phi}_x\}$ es uniformemente equicontinua.

Prueba de la Afirmación 3. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x , el conjunto

$$A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \quad (2.6)$$

es compacto, y por lo tanto podemos encontrar $M > 0$ tal que $A \subseteq B(\theta, M)$. Entonces, por la desigualdad (2.5), para cada $z \in A$ y cada par $s, t \in [0, 1]$ tenemos que

$$d(\tilde{\Phi}_z(s), \tilde{\Phi}_z(t)) \leq \frac{2M}{1-\lambda} |s-t|^\alpha. \quad (2.7)$$

Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos $\delta > 0$ tal que, si $s, t \in [0, 1]$ y $|s-t| < \delta$, entonces $\frac{2M}{1-\lambda} |s-t|^\alpha < \varepsilon$. Esto, junto con la desigualdad (2.7), garantiza que $d(\tilde{\Phi}_z(s), \tilde{\Phi}_z(t)) < \varepsilon$ para cada $z \in A$ y $s, t \in [0, 1]$ con $|s-t| < \delta$. Esto significa que $\mathcal{H}$ es una familia uniformemente equicontinua. ■

Afirmación 4. La sucesión $(\tilde{\Phi}_{x_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\Phi}_x(t)$ para cada $t \in [0, 1]$.

Prueba de la Afirmación 4. Si $t \in D$, sabemos que $\Phi \downarrow_{X \times \{t\}}$ es continua. Entonces, la sucesión $(\Phi(x_n, t))_{n \in \mathbb{N}} = (\tilde{\Phi}_{x_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\Phi(x, t) = \tilde{\Phi}_x(t)$.

Si $t \in [0, 1] \setminus D$, supongamos que $(\tilde{\Phi}_{x_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $\tilde{\Phi}_x(t)$. Entonces, existen $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $(x_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(t), \tilde{\Phi}_x(t)) \geq \varepsilon_0$ para cada $l \in \mathbb{N}$. Por la Afirmación 3, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $s \in [0, 1]$ y $|t-s| < \delta$, entonces $d(\tilde{\Phi}_z(t), \tilde{\Phi}_z(s)) < \frac{\varepsilon_0}{3}$ para toda $z \in A$ (donde A es el conjunto definido en la ecuación (2.6)). En particular, para cada $l \in \mathbb{N}$ y $r \in D \cap (t - \delta, t + \delta)$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(t), \tilde{\Phi}_x(t)) \\ &\leq d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(t), \tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(r)) + d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(r), \tilde{\Phi}_x(r)) + d(\tilde{\Phi}_x(r), \tilde{\Phi}_x(t)) \\ &< d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(r), \tilde{\Phi}_x(r)) + \frac{2\varepsilon_0}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(\tilde{\Phi}_{x_{n_l}}(r), \tilde{\Phi}_x(r)) \geq \frac{\varepsilon_0}{3}$ para cada $l \in \mathbb{N}$ y $r \in D$, pero esto contradice el hecho de que $(\tilde{\Phi}_{x_n}(r))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\Phi}_x(r)$ para cada $r \in D$. Esta contradicción nos permite concluir que $(\tilde{\Phi}_{x_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\Phi}_x(t)$, como queríamos probar. ■

Después de la Afirmación 4, podemos concluir que $(\tilde{\Phi}_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\tilde{\Phi}_x$. Sin embargo, como $\mathcal{H}$ es una familia equicontinua y $[0, 1]$ es compacto, el Corolario 1.2.7 implica que esta convergencia también es uniforme. Entonces, debido al Teorema 1.2.3, la sucesión $(\tilde{\Phi}_{x_n}(t_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\tilde{\Phi}(x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\Phi}(x, \eta)$, como se quería probar.

(2) Ahora, supongamos que X es un G -espacio tal que X^G es no vacío y p es equivariante. Como X^G es no vacío, podemos suponer que θ , el punto que usamos para definir la homotopía $\tilde{\Phi}$, es un punto G -fijo. Esto implica que $\phi_0 \upharpoonright_{X \times \{t\}}$ es equivariante para $t = 0$ y $t = 1$, y se puede probar por inducción que $\phi_n \upharpoonright_{X \times \{t\}}$ es equivariante para cada $t \in D_n$. Por lo tanto, $\Phi \upharpoonright_{X \times \{t\}}$ es equivariante para cada $t \in D$.

Para probar que X es G -contráctil, falta demostrar que $\tilde{\Phi} \upharpoonright_{X \times \{t\}}$ es equivariante para cada $t \in [0, 1]$. Sean $r \in [0, 1]$, $x \in X$, y $g \in G$. Sea (r_n) una sucesión en D que converge a r . Como $\Phi \upharpoonright_{X \times \{r_n\}}$ es equivariante para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(gx, r) &= \tilde{\Phi}\left(gx, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(gx, r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(gx, r_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g\Phi(x, r_n) = g \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(x, r_n) = g\tilde{\Phi}(x, r). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{\Phi} \upharpoonright_{X \times \{r\}}$ es equivariante. $\square$

Corolario 2.3.8. *Sea (X, d) un espacio métrico completo.*

- (1) *Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ existe una n -cuasimedia contractiva $p : X^n \rightarrow X$, entonces X es contráctil.*
- (2) *Si además X es un G -espacio tal que X^G es no vacío y p es una n -cuasimedia equivariante, entonces X es G -contráctil. Además, si X es un G -ANR, entonces es un G -AR.*

Demostración. Definimos $p' : X \times X \rightarrow X$ por $p'(x, y) = p(x, y, \dots, y)$. Entonces, p' es una cuasimedia contractiva. Por lo tanto, por el Teorema 2.3.7, X es contráctil.

Si además X es un G -espacio tal que X^G es no vacío y p es equivariante, entonces p' también es equivariante y, por el Teorema 2.3.7, X es G -contráctil. Si X es también un G -ANR, entonces, por el Teorema 1.6.14, es un G -AR. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que $p : X^n \rightarrow X$ satisfaga que

$$\max_{i=1, \dots, n} d(x_i, p(x_1, \dots, x_n)) \leq \lambda \max_{j,k=1, \dots, n} d(x_j, x_k)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, para alguna $\lambda \in (0, 1)$, no puede debilitarse a

$$\max_{i=1, \dots, n} d(x_i, p(x_1, \dots, x_n)) \leq \max_{j,k=1, \dots, n} d(x_j, x_k)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$.

Ejemplo 2.3.9. Sea G un grupo actuando en el círculo $\mathbb{S}^1$. Consideremos $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $p(x, y) = x$. Esta es una cuasimedia equivariante que satisface

$$\max \{d(x, p(x, y)), d(y, p(x, y))\} = d(x, y)$$

para cada $x, y \in \mathbb{S}^1$. Sin embargo, $\mathbb{S}^1$ no es G -contráctil porque no es contráctil. ◀

Es natural preguntarse si el hecho de que X sea compacto y $p : X^n \rightarrow X$ cumpla que

$$\max_{i=1, \dots, n} d(x_i, p(x_1, \dots, x_n)) < \max_{j,k=1, \dots, n} d(x_j, x_k) \quad (2.8)$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ implica que p sea una n -cuasimedia contractiva. Por ejemplo, la media geométrica en los reales positivos $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $g(x, y) = \sqrt{xy}$, cumple la desigualdad (2.8), pero no cumple (2.1) para ninguna $\lambda \in (0, 1)$. Sin embargo, si consideramos un intervalo compacto I contenido en $\mathbb{R}^+$, entonces $g : I \times I \rightarrow I$ sí es una cuasimedia contractiva, como vimos en el Ejemplo 2.3.5. Pero, en general, la compacidad de X y la desigualdad (2.8) no son suficientes para que se cumpla la desigualdad (2.1), como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.10. Consideremos $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$p(x, y) = \min \{x, y\} + \frac{|x - y|^2}{2}.$$

Se cumple que $|x - p(x, y)| < |x - y|$ para cada $x, y \in [0, 1]$. Sin embargo, notemos que

$$\frac{|\frac{1}{n} - p(\frac{1}{n}, 0)|}{|\frac{1}{n} - 0|} = 1 - \frac{1}{2n} \rightarrow 1$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto no existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $|x - p(x, y)| \leq \lambda |x - y|$ para cada $x, y \in [0, 1]$. Entonces, p no es una cuasimedia contractiva. ◀

Capítulo 3

Medias e involuciones decrecientes

En este capítulo estudiaremos el problema de Jaworowski en el caso en el que el grupo G es $\mathbb{Z}_2$. En la primera sección daremos algunos ejemplos de medias equivariantes en este caso específico. En la segunda sección trabajaremos en la versión débil del problema de Jaworowski (Problema 1.8.6).

3.1. 2-Medias equivariantes

Los siguientes son ejemplos de n -medias equivariantes cuando $n = 2$ y G es el grupo $\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos el $\mathbb{Z}_2$ -espacio (Q, σ) , donde Q es el cubo de Hilbert $\prod_{n=1}^{\infty} [-1, 1]$ y σ es la involución estándar en Q (es decir, $\sigma(x) = -x$ para cada $x \in Q$). Entonces $p : Q \times Q \rightarrow Q$, dada por

$$p((x_n), (y_n)) = \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right),$$

es una media equivariante en (Q, σ) . ◀

Ejemplo 3.1.2. Consideremos el $\mathbb{Z}_2$ -espacio $(\mathbb{R}^+, \tau)$, donde τ es la involución en $\mathbb{R}^+$ dada por $\tau(x) = \frac{1}{x}$. Entonces la media geométrica $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $g(x, y) = \sqrt{xy}$, es una media equivariante en $(\mathbb{R}^+, \tau)$. ◀

Ejemplo 3.1.3. En [45], V. Milman y L. Rotem definieron una media equi-variante en el espacio $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen en su interior, equipado con la métrica de Hausdorff. Este es un $\mathbb{Z}_2$ -espacio si consideramos la acción inducida por la involución polar $A \rightarrow A^\circ$, dada por

$$A^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle \leq 1 \right\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

Para definirla, se inspiraron en la media geométrica de dos números reales positivos, que puede verse como el límite de dos sucesiones construidas utilizando las medias aritmética y armónica. Es decir, si $x, y > 0$, entonces las sucesiones (a_n) y (h_n) dadas por

$$a_0 = x, \quad h_0 = y, \\ a_{n+1} = \frac{a_n + h_n}{2}, \quad h_{n+1} = \left(\frac{a_n^{-1} + h_n^{-1}}{2} \right)^{-1},$$

cumplen que (a_n) es decreciente, (h_n) es creciente, $h_n \leq a_n$ para toda $n \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \sqrt{xy}$.

Siguieron el mismo proceso, cambiando la involución $x \rightarrow x^{-1}$ en los números reales positivos por la involución polar en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$, y la suma y producto de reales por la suma de Minkowski y la homotecia de conjuntos. Así, dados $K, T \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$ definieron las sucesiones (A_n) y (H_n) dadas por

$$A_0 = K, \quad H_0 = T, \\ A_{n+1} = \frac{A_n + H_n}{2}, \quad H_{n+1} = \left(\frac{A_n^\circ + H_n^\circ}{2} \right)^\circ.$$

En [45, Teoremas 2, 6] se probó que (A_n) es decreciente con respecto al orden de la contención, (H_n) es creciente, $H_n \subseteq A_n$ para toda $n \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$. Así, definieron $g : \mathcal{K}_{(0),b}^n \times \mathcal{K}_{(0),b}^n \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$ por

$$g(K, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n,$$

y llamaron a $g(K, T)$ la media geométrica de K y T . En [45, Proposición 8] y [48, Proposición 3] se probó que g cumple las propiedades para ser una media equivariante en el $\mathbb{Z}_2$ -espacio $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \cdot^\circ)$. ◀

Nos basamos en esta construcción de V. Milman y L. Rotem para definir los siguientes conceptos. Sean (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio y $\leq$ un orden parcial en X .

Definición 3.1.4. Decimos que una media $E : X \times X \rightarrow X$ es **buena** si, para cada $x, y \in X$, las sucesiones (a_n) y (h_n) definidas por

$$a_0 = x, \quad h_0 = y,$$

$$a_{n+1} = E(a_n, h_n), \quad h_{n+1} = \alpha(E(\alpha(a_n), \alpha(h_n)))$$

cumplen que (a_n) es decreciente, (h_n) es creciente, ambas son convergentes y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$.

Definición 3.1.5. Decimos que una media $E : X \times X \rightarrow X$ es una **media que preserva el orden** si cumple que $x \leq E(x, y) \leq y$ para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$.

Si, además, cumple que $x < E(x, y) \leq y$ para cada $x, y \in X$ con $x < y$, decimos que es una **media propia izquierda que preserva el orden**.

Si cumple que $x \leq E(x, y) < y$ para cada $x, y \in X$ con $x < y$, decimos que es una **media propia derecha que preserva el orden**.

Si cumple que $x < E(x, y) < y$ para cada $x, y \in X$ con $x < y$, simplemente decimos que es una **media propia que preserva el orden**.

Definición 3.1.6. Decimos que una media $E : X \times X \rightarrow X$ es una **media aritmética** si para cada $x, y \in X$ se cumple que

$$E(x, y) \geq \alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))).$$

Decimos que una media $E : X \times X \rightarrow X$ es una **media armónica** si para cada $x, y \in X$ se cumple que

$$E(x, y) \leq \alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))).$$

Observación 3.1.7. Si $E : X \times X \rightarrow X$ es una media aritmética propia derecha que preserva el orden, entonces la función $E' : X \times X \rightarrow X$, dada por

$$E'(x, y) = \alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))),$$

es una media armónica propia izquierda que preserva el orden. Conversamente, si E es una media armónica propia izquierda que preserva el orden, entonces E' es una media aritmética propia derecha que preserva el orden.

Ejemplo 3.1.8. Consideremos la acción de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ dada por la involución polar, y el orden de la contención en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$. Entonces las funciones $A, H : \mathcal{K}_{(0),b}^n \times \mathcal{K}_{(0),b}^n \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$, dadas por

$$A(K, T) = \frac{K + T}{2}, \quad H(K, T) = \left(\frac{K^\circ + T^\circ}{2} \right)^\circ,$$

son una media aritmética propia que preserva el orden y una media armónica propia que preserva el orden, respectivamente. ◀

3.2. Versión débil del problema de Jaworowski

En esta sección estudiamos el problema de Jaworowski en el caso específico en el que el grupo G es $\mathbb{Z}_2$. Damos unas respuestas parciales a la versión débil del problema de Jaworowski (Problema 1.8.6). Recordemos que este problema pregunta si es cierto que, si $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ es una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente (Definición 1.8.8) tal que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.

En el capítulo anterior, en el Teorema 2.2.5 demostramos que el problema de Jaworowski tiene una respuesta positiva cuando el grupo G es finito y X admite una n -media equivariante para algún múltiplo n de $|G|$. En el caso en el que el grupo G es $\mathbb{Z}_2$, este teorema tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. *Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable tal que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Si existe una media equivariante en X , entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.*

Por este resultado, sabemos que para encontrar una respuesta positiva a la versión débil del problema de Jaworowski es suficiente construir una media equivariante. En los siguientes resultados de este capítulo damos condiciones para la existencia de una función de este tipo en una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Primero, probaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(1) *Para cada $x, y \in X$,*

$$\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y) \quad y \quad \alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \vee \alpha(y).$$

- (2) El conjunto $[x; y]$ es cerrado en X para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$.
- (3) Si X es conexo, el conjunto $[x; y]$ es conexo para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$.
- (4) Los conjuntos $\{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$ y $\{(x, y) \in X \times X \mid y \leq x\}$ son cerrados en $X \times X$.
- (5) El conjunto $\tilde{\Delta} := \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y \text{ o } y \leq x\}$ es cerrado en $X \times X$.
- (6) Los conjuntos

$$\Delta^- := \{(x, y) \in X \times X \mid x < y\} \quad \text{y} \quad \Delta^+ := \{(x, y) \in X \times X \mid y < x\}$$

son abiertos en $\tilde{\Delta}$.

Demostración. (1) Sean $x, y \in X$. De la demostración del Lema 1.8.7, sabemos que el supremo $\vee$ está dado por

$$x \vee y = \alpha(\alpha(x) \wedge \alpha(y)). \quad (3.1)$$

Entonces, $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$. Además, como la igualdad (3.1) se cumple en particular para $\alpha(x)$ y $\alpha(y)$, entonces $\alpha(x) \vee \alpha(y) = \alpha(x \wedge y)$.

(2) Sea $x \in X$. La función $\vee$ es continua, pues $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica. Entonces,

$$X \setminus \{z \in X \mid z \leq x\} = \{w \in X \mid w \vee x \in X \setminus \{x\}\}$$

es abierto en X , ya que es la imagen inversa de un conjunto abierto bajo una función continua. Entonces $\{z \in X \mid z \leq x\}$ es cerrado en X , y similarmente tenemos que $\{z \in X \mid x \leq z\}$ es cerrado en X .

Por lo tanto,

$$[x; y] = \{z \in X \mid z \leq y\} \cap \{z \in X \mid x \leq z\}$$

es cerrado en X para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$.

(3) Sean $x, y \in X$ con $x \leq y$. Consideremos la función $f : X \rightarrow X$ dada por $f(z) = x \vee (y \wedge z)$. Como las funciones $\vee$ y $\wedge$ son continuas, f es una función continua.

Ahora, notemos que $f(X) = [x; y]$. En efecto, si $p \in f(X)$, entonces $p = x \vee (y \wedge z)$ para alguna $z \in X$. Esto implica que $x \leq p$ y, como $x \leq y$ y

$y \wedge z \leq y$, entonces $p \leq y$. Por lo tanto $p \in [x; y]$. Conversamente, si $p \in [x; y]$, entonces $x \leq p \leq y$. Esto implica que $f(p) = x \vee (y \wedge p) = x \vee p = p$. Por lo tanto $p \in f(X)$.

Así, $[x; y]$ es la imagen de un conjunto conexo bajo una función continua, por lo que podemos concluir que $[x; y]$ es conexo.

(4) Sean

$$U := (X \times X) \setminus \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$$

y $(w, z) \in U$. Entonces $w \vee z \neq z$ y, como X es Hausdorff (por ser metrizable), existen $V_1, V_2 \subseteq X$ tales que $z \in V_1$, $w \vee z \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Como $\vee$ es continua, existen conjuntos abiertos $V_3, V_4 \subseteq X$ tales que $w \in V_3$, $z \in V_4$ y $V_3 \vee V_4 \subseteq V_2$. Entonces,

$$(w, z) \in V_3 \times (V_1 \cap V_4) \subseteq \{(x, y) \in X \times X \mid x \vee y \neq y\} = U.$$

Por lo tanto, U es abierto en $X \times X$ y $\{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$ es cerrado en $X \times X$.

(5) Esta condición se sigue de (4), pues este conjunto es la unión de dos cerrados.

(6) Los complementos de Δ^- y Δ^+ en $\tilde{\Delta}$ son $\{(x, y) \in X \times X \mid y \leq x\}$ y $\{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$, respectivamente, por lo que esta condición se sigue de (4). $\square$

En el Teorema 3.2.3 y el Corolario 3.2.4 veremos que, si $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula modular y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es no vacío, la versión débil del problema de Jaworowski tiene una respuesta positiva.

Teorema 3.2.3. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente.*

(1) *Si existe $\theta \in X^{\mathbb{Z}_2}$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$ con $a \leq b$ se cumple que*

$$a \vee (\theta \wedge b) = (a \vee \theta) \wedge b, \quad (3.2)$$

entonces $p : X \times X \rightarrow X$, dada por

$$p(x, y) = (x \wedge y) \vee (\theta \wedge (x \vee y)),$$

es una media equivariante en X .

(2) *Si además X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.*

Demostración. (1) Notemos que p es simétrica y continua, pues $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica, y para cada $x \in X$ tenemos que $p(x, x) = x$. Además, debido a la condición que cumple θ (considerando $a = x \wedge y$ y $b = x \vee y$) y a que θ es un punto fijo de α , para cada $x \in X$ se cumple que

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= (x \wedge y) \vee (\theta \wedge (x \vee y)) \\
 &= ((x \wedge y) \vee \theta) \wedge (x \vee y) \\
 &= \alpha \circ \alpha(((x \wedge y) \vee \theta) \wedge (x \vee y)) \\
 &= \alpha(\alpha((x \wedge y) \vee \theta) \vee \alpha(x \vee y)) \\
 &= \alpha((\alpha(x \wedge y) \wedge \alpha(\theta)) \vee (\alpha(x) \wedge \alpha(y))) \\
 &= \alpha(((\alpha(x) \vee \alpha(y)) \wedge \theta) \vee (\alpha(x) \wedge \alpha(y))) \\
 &= \alpha(p(\alpha(x), \alpha(y))).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, p es una media equivariante.

(2) Como existe una media equivariante en X , del Corolario 3.2.1 podemos concluir que (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR. $\square$

Como las retículas distributivas son modulares, y todo punto de una retícula modular cumple la condición (3.2), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Si $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es modular o distributiva y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es no vacío, entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.*

Ejemplo 3.2.5. Consideremos la estructura de retícula en el cubo de Hilbert Q dada por los operadores $\wedge$ y $\vee$, definidos como

$$(x_n) \wedge (y_n) = (\min \{x_n, y_n\}), \quad (x_n) \vee (y_n) = (\max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq$ en Q dado por

$$(x_n) \leq (y_n) \text{ si y sólo si } x_n \leq y_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Esta es una retícula topológica distributiva. Por lo tanto, para toda involución $\alpha : Q \rightarrow Q$ que sea decreciente con respecto al orden $\leq$ y tal que $X^{\mathbb{Z}_2}$ sea un AR no vacío, se cumple que (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR. $\blacktriangleleft$

En el caso más general en el que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ no es necesariamente modular, para encontrar condiciones para la existencia de una media equivariante

en X nos basamos en la construcción de V. Milman y L. Rotem en el espacio $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ (Ejemplo 3.1.3). En los siguientes resultados, mostramos que la existencia de una media buena (Definición 3.1.4) implica la existencia de una media equivariante, y posteriormente damos condiciones para que haya una media buena en X .

Proposición 3.2.6. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Si X es uniformemente localmente convexo y $E : X \times X \rightarrow X$ es un media buena, entonces $p : X \times X \rightarrow X$, dada por*

$$p(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x, y)$$

(donde las sucesiones $(a_n(x, y))$ y $(h_n(x, y))$ están definidas como en la Definición 3.1.4), es una media equivariante, y por lo tanto (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.

Demostración. Sea d una métrica en X , compatible con su topología, que cumple la condición necesaria para que X sea uniformemente localmente convexo. Sea d' una métrica en $X \times X$ compatible con su topología.

Sea $x \in X$. Notemos que las sucesiones $(a_n(x, x))$ y $(h_n(x, x))$ son la sucesión constante (x) , por lo que $p(x, x) = x$ para cada $x \in X$. Además, p es simétrica, pues $a_n : X \times X \rightarrow X$ y $h_n : X \times X \rightarrow X$ son simétricas para cada $n \geq 1$.

Ahora, vamos a probar que p es continua. Notemos que a_n y h_n son continuas para cada $n \geq 0$. Sean $(a, b) \in X \times X$ y $\varepsilon > 0$. Debido a la condición que cumple la métrica d , existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x, y \in X$ con $x \leq y$ y $d(x, y) < \delta_1$, entonces $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $z \in [x; y]$.

Como $p(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(a, b)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(p(a, b), a_N(a, b)) < \min \left\{ \frac{\delta_1}{6}, \frac{\varepsilon}{3} \right\} \quad (3.3)$$

y

$$d(p(a, b), h_N(a, b)) < \min \left\{ \frac{\delta_1}{6}, \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \quad (3.4)$$

Entonces,

$$d(a_N(a, b), h_N(a, b)) < \frac{\delta_1}{3}. \quad (3.5)$$

Como a_N y h_N son continuas, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $(x, y) \in X \times X$ y $d'((a, b), (x, y)) < \delta_2$, entonces

$$d(a_N(a, b), a_N(x, y)) < \min \left\{ \frac{\delta_1}{3}, \frac{\varepsilon}{3} \right\} \quad (3.6)$$

y

$$d(h_N(a, b), h_N(x, y)) < \min \left\{ \frac{\delta_1}{3}, \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \quad (3.7)$$

Sea $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $(x, y) \in X \times X$ tal que $d'((a, b), (x, y)) < \delta$. Por las desigualdades (3.5), (3.6) y (3.7), tenemos que

$$d(a_N(x, y), h_N(x, y)) < \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} = \delta_1. \quad (3.8)$$

Ahora, notemos que

$$h_N(x, y) \leq p(x, y) \leq a_N(x, y).$$

En efecto, como $\wedge$ es continua, la sucesión $(h_N(x, y) \wedge h_n(x, y))$ converge a $h_N(x, y) \wedge p(x, y)$. Pero $(h_n(x, y))$ es una sucesión creciente porque E es buena, entonces $(h_N(x, y) \wedge h_n(x, y))$ es eventualmente la sucesión constante $(h_N(x, y))$. Esto implica que $h_N(x, y) = h_N(x, y) \wedge p(x, y)$, y por lo tanto $h_N(x, y) \leq p(x, y)$. Similarmente, tenemos que $p(x, y) \leq a_N(x, y)$, por lo que podemos concluir que

$$p(x, y) \in [h_N(x, y); a_N(x, y)].$$

Esto implica, por la desigualdad (3.8) y nuestra elección de δ_1 , que

$$d(h_N(x, y), p(x, y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.9)$$

Por las desigualdades (3.4), (3.7) y (3.9), tenemos que

$$d(p(a, b), p(x, y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

así que podemos concluir que p es continua. Por lo tanto, p es una media.

Ahora, notemos que $a_n(\alpha(x), \alpha(y)) = \alpha(h_n(x, y))$ para cada $n \geq 1$ y $x, y \in X$. Entonces,

$$p(\alpha(x), \alpha(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\alpha(x), \alpha(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(h_n(x, y)) = \alpha(p(x, y))$$

para cada $x, y \in X$. Esto significa que p es una media equivariante. $\square$

Por el Lema 1.4.11, sabemos que si X es compacto entonces es uniformemente localmente convexo. Entonces, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.7. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs. Si X es compacto y existe una media buena en X , entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.*

En el siguiente resultado veremos que la existencia de una media aritmética propia derecha que preserva el orden (Definiciones 3.1.5 y 3.1.6) implica la existencia de una media buena. Equivalentemente, la existencia de una media armónica propia izquierda que preserva el orden implica la de una media buena, debido a la Observación 3.1.7.

Proposición 3.2.8. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, que X es localmente compacto y que toda sucesión creciente acotada superiormente en X tiene un supremo. Si $E : X \times X \rightarrow X$ es una media aritmética propia derecha que preserva el orden, entonces E es buena.*

Demostración. Primero, notemos que el hecho de que toda sucesión creciente acotada superiormente en X tiene un supremo implica que también toda sucesión decreciente acotada inferiormente tiene un ínfimo. En efecto, si (x_n) es una sucesión decreciente acotada inferiormente por $M \in X$, entonces, como α es decreciente con respecto a $\leq$, la sucesión $(\alpha(x_n))$ es creciente y acotada superiormente por $\alpha(M)$. Entonces $(\alpha(x_n))$ tiene un supremo, digamos S , y $\alpha(S)$ es un ínfimo de (x_n) .

Ahora, sean $x, y \in X$ y consideremos las sucesiones (a_n) y (h_n) dadas por

$$a_0 = x, \quad h_0 = y,$$

$$a_{n+1} = E(a_n, h_n), \quad h_{n+1} = \alpha(E(\alpha(a_n), \alpha(h_n))).$$

Tenemos que mostrar que (a_n) es decreciente, (h_n) es creciente, que ambas son convergentes y que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$.

Primero notemos que $h_n \leq a_n$ para cada $n \geq 1$, porque E es una media aritmética. Y como α es decreciente con respecto a $\leq$, entonces $\alpha(a_n) \leq \alpha(h_n)$ para cada $n \geq 1$. Ya que E es una media que preserva el orden, tenemos que

$$h_n \leq E(a_n, h_n) \leq a_n \tag{3.10}$$

y

$$\alpha(a_n) \leq E(\alpha(a_n), \alpha(h_n)) \leq \alpha(h_n) \tag{3.11}$$

para cada $n \geq 1$. Evaluando α en la desigualdad (3.11) obtenemos

$$h_n \leq \alpha(E(\alpha(a_n), \alpha(h_n))) \leq a_n. \quad (3.12)$$

Entonces, de (3.10) y (3.12) podemos concluir que (a_n) es decreciente y (h_n) es creciente.

Ahora, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$h_n \leq a_n \leq a_1 \quad \text{y} \quad h_1 \leq h_n \leq a_n,$$

así que (h_n) es acotada superiormente y (a_n) es acotada inferiormente. Por nuestra hipótesis, esto implica que (h_n) tiene un supremo y (a_n) tiene un ínfimo. Sean h y a estos puntos, respectivamente.

Mostraremos que (a_n) converge a a . Sea U una vecindad compacta de a . Supongamos que existe una subsucesión (a_{n_k}) de (a_n) tal que $a_{n_k} \notin U$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que, debido al Lema 3.2.2-(3), cada conjunto $[a; a_{n_k}]$ es conexo (X es conexo porque es un AR). Entonces, como $a_{n_k} \in X \setminus U$ y $a \in \text{int}U$, existe $b_k \in [a; a_{n_k}]$ tal que $b_k \in \partial U$. Como ∂U es un conjunto compacto, podemos suponer que la sucesión (b_k) converge a $b \in \partial U$. Ahora, fijemos $m \in \mathbb{N}$. Como (a_n) es decreciente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \leq a_m$ para cada $k \geq K$. Entonces, $b_k \leq a_m$ para cada $k \geq K$, y por lo tanto la sucesión $(a_m \vee b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es eventualmente la sucesión constante (a_m) . Pero, como $\vee$ es continua, esta sucesión converge a $a_m \vee b$, por lo que tenemos que

$$a_m = a_m \vee b.$$

Esto implica que $b \leq a_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Como a es el ínfimo de (a_n) , entonces $b \leq a$. Por otra parte, $(b_k \wedge a)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $b \wedge a$, pero

$$b_k \wedge a = a$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que $a = b \wedge a$. Esto implica que $a \leq b$, y por lo tanto $a = b \in \partial U$. Sin embargo, esto contradice que U es una vecindad de a , así que podemos concluir que (a_n) converge a a . Similarmente, podemos demostrar que (h_n) converge a su supremo h , por lo que ambas sucesiones son convergentes.

Finalmente, notemos que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} E(a_n, h_n) = E(a, h)$$

y

$$\begin{aligned} h &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(E(\alpha(a_n), \alpha(h_n))) = \alpha(E(\alpha(a), \alpha(h))). \end{aligned}$$

Como E es una media aritmética, tenemos que $h \leq a$. Pero E es una media propia derecha que preserva el orden, por lo que el hecho de que $E(a, h) = a$ implica que $a = h$. Entonces, podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. $\square$

El siguiente corolario muestra que el resultado anterior es cierto si X es un espacio localmente compacto tal que los conjuntos $[x; y]$ son compactos para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$. En particular, es cierto si X es compacto.

Corolario 3.2.9. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, que X es localmente compacto y que $[x; y]$ es compacto para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$. Si $E : X \times X \rightarrow X$ es una media aritmética propia derecha que preserva el orden, entonces E es buena.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.8, tenemos que mostrar que toda sucesión creciente acotada superiormente en X tiene un supremo. Sea (x_n) una sucesión creciente y sea M una cota superior de (x_n) . Como (x_n) es una sucesión en el espacio compacto $[x_1; M]$, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a algún punto $x \in [x_1; M]$. Afirmamos que x es el supremo de (x_n) .

Primero, mostraremos que x es una cota superior de (x_n) . Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Como (x_n) es creciente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \leq x_{n_k}$ para cada $k \geq K$. Entonces, la sucesión $(x_m \wedge x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es eventualmente la sucesión constante (x_m) . Pero, como $\wedge$ es continua, esta sucesión converge a $x_m \wedge x$, por lo que $x_m = x_m \wedge x$. Esto implica que $x_m \leq x$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, supongamos que y es una cota superior de (x_n) . Queremos mostrar que $x \leq y$. Como $\vee$ es continua, la sucesión $(x_{n_k} \vee y)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $x \vee y$, pero $x_{n_k} \vee y = y$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que $y = x \vee y$. Entonces, $x \leq y$. Podemos concluir que x es el supremo de (x_n) . $\square$

Juntando las proposiciones 3.2.6 y 3.2.8, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.10. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs, que X es localmente compacto y uniformemente localmente convexo y que toda sucesión creciente acotada superiormente en X*

tiene un supremo. Si existe una media aritmética propia derecha que preserva el orden en X , entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.

Juntando los corolarios 3.2.7 y 3.2.9, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.11. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X y $X^{\mathbb{Z}_2}$ son ARs y que X es compacto. Si existe una media aritmética propia derecha que preserva el orden en X , entonces (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.*

Notemos que si X cumple las hipótesis del Corolario 3.2.10 (es decir, X es localmente compacto, uniformemente localmente convexo y toda sucesión creciente acotada superiormente en X tiene un supremo) no necesariamente es compacto, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.12. Consideremos la estructura de retícula en $\mathbb{R}^n$ dada por los operadores $\wedge$ y $\vee$, definidos como

$$(x_1, \dots, x_n) \wedge (y_1, \dots, y_n) = (\min \{x_1, y_1\}, \dots, \min \{x_n, y_n\}),$$

$$(x_1, \dots, x_n) \vee (y_1, \dots, y_n) = (\max \{x_1, y_1\}, \dots, \max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq$ definido por

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \text{ si y sólo si } x_i \leq y_i \text{ para toda } i \in \{1, \dots, n\}.$$

$\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, pero no compacto. Por otra parte, en el Ejemplo 1.4.12 observamos que $\mathbb{R}^n$ es uniformemente localmente convexo. Además, si $((x_1(k), \dots, x_n(k)))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, el punto $(s_1, \dots, s_n)$ es su supremo, donde s_i es el supremo de cada sucesión $(x_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. ◀

Ejemplo 3.2.13. Consideremos la retícula topológica $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \subseteq, \wedge, \vee)$ definida en el Ejemplo 1.8.10.

En el Ejemplo 1.4.13 observamos que $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es uniformemente localmente convexo y no es compacto. Además, $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es localmente compacto. En efecto, recordemos que en este conjunto la topología de Hausdorff coincide con la de Attouch-Wets, por lo que basta observarlo con esta última. En [29, Proposición 3.3]-(1) se demostró que $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es un subconjunto abierto del espacio $\mathcal{K}_0^n$ de subconjuntos cerrados y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen, cuando ambos espacios están equipados con la topología de Attouch-Wets. Además,

en [29, Teorema 3.4] se probó que $\mathcal{K}_0^n$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q . Entonces, $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ es abierto en un espacio compacto y Hausdorff, y por lo tanto es localmente compacto.

Por último, los conjuntos $[A; B]$ son compactos para cada $A, B \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$ con $A \subseteq B$ (debido a que son subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}_0^n$, equipado con la topología de Attouch Wets, que es un espacio compacto). Esto implica que toda sucesión creciente acotada superiormente en $\mathcal{K}_{(0),b}^n$ tiene un supremo, como vimos en la demostración del Corolario 3.2.9. ◀

Los Corolarios 3.2.10 y 3.2.11 implican que para obtener una respuesta positiva a la versión débil del problema de Jaworowski es suficiente construir una media aritmética propia derecha que preserve el orden en X (o, equivalentemente, una media armónica propia izquierda que preserve el orden). Notemos que siempre existe una media aritmética propia izquierda que preserve el orden en X .

Observación 3.2.14. Si $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ es una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente, las funciones $\vee : X \times X \rightarrow X$ y $\wedge : X \times X \rightarrow X$ son una media aritmética propia izquierda que preserve el orden y una media armónica propia derecha que preserve el orden, respectivamente.

En el siguiente lema, mostramos que para construir una media aritmética propia derecha que preserve el orden en X , es suficiente construirla en el espacio

$$\tilde{\Delta} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y \text{ o } y \leq x\}$$

de pares comparables. Para este resultado usaremos el teorema de Michael (Teorema 1.7.12), y supondremos que X es localmente compacto y tiene una estructura convexa (Definición 1.7.6) tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$. Esto se cumple, por ejemplo, en el espacio $\mathcal{K}_{(0),b}^n$, como veremos en el Ejemplo 3.2.17.

Lema 3.2.15. *Sea $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Supongamos que X es localmente compacto y tiene una estructura convexa tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$. Si existe una función continua $E : \tilde{\Delta} \rightarrow X$ que satisface las condiciones*

1. $E(x, x) = x$ para cada $x \in X$,
2. $E(x, y) = E(y, x)$ par cada $(x, y) \in \tilde{\Delta}$,

3. $x \leq E(x, y) \leq y$ para cada $(x, y) \in X \times X$ con $x \leq y$,
4. $x \leq E(x, y) < y$ para cada $(x, y) \in X \times X$ con $x < y$,
5. $\alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))) \leq E(x, y)$ para cada $(x, y) \in \tilde{\Delta}$,

entonces, existe una media aritmética propia derecha que preserva el orden en X .

Demostración. Como X es localmente compacto, existe una métrica d en X , compatible con su topología, tal que (X, d) es un espacio completo ([50, Corolario 2.5.6]). Sea $\text{Conv}(X)$ la familia de todos los subconjuntos convexos, cerrados, no vacíos de X . Consideremos la función $\phi : X \times X \rightarrow \text{Conv}(X)$, dada por

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \{E(x, y)\} & \text{si } (x, y) \in \tilde{\Delta}, \\ [x \wedge y; x \vee y] & \text{si } (x, y) \notin \tilde{\Delta}. \end{cases}$$

Notemos que, debido al Lema 3.2.2, $\tilde{\Delta}$ es cerrado en $X \times X$. Además, las funciones $\wedge$, $\vee$ y E son continuas y, como E satisface la condiciones 2 y 3, se cumple que $x \wedge y \leq E(x, y) \leq x \vee y$ para cada $(x, y) \in \tilde{\Delta}$. Entonces, del Lema 1.7.13 podemos concluir que ϕ es semicontinua inferiormente.

Ahora, por el Teorema 1.7.12, existe una función continua $h : X \times X \rightarrow X$ tal que $h(x, y) \in \phi(x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times X$. Notemos que $h \upharpoonright_{\tilde{\Delta}} = E$. Definimos $p : X \times X \rightarrow X$ por

$$p(x, y) = \left(h(x, y) \vee h(y, x) \right) \vee \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x))) \right).$$

Esta función es continua, simétrica y es fácil verificar que $p(x, x) = x$ para cada $x \in X$. Entonces p es una media. Además, si $(x, y) \in \tilde{\Delta}$, entonces

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \left(E(x, y) \vee E(y, x) \right) \vee \left(\alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(E(\alpha(y), \alpha(x))) \right) \\ &= E(x, y) \vee \alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))) \\ &= E(x, y), \end{aligned}$$

pues E satisface las condiciones 2 y 5. Entonces $p \upharpoonright_{\tilde{\Delta}} = E$, y esto implica que p es una media propia derecha que preserva el orden, pues E satisface las condiciones 3 y 4.

Sólo falta demostrar que p es una media aritmética. Sea $(x, y) \in X \times X$. Entonces

$$\begin{aligned}
& \alpha(p(\alpha(x), \alpha(y))) \\
&= \alpha\left(\left(h(\alpha(x), \alpha(y)) \vee h(\alpha(y), \alpha(x))\right) \vee \left(\alpha(h(x, y)) \wedge \alpha(h(y, x))\right)\right) \\
&= \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x)))\right) \wedge \left(h(x, y) \vee h(y, x)\right) \\
&\leq \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x)))\right) \vee \left(h(x, y) \vee h(y, x)\right) \\
&= p(x, y),
\end{aligned}$$

por lo que p es una media aritmética. $\square$

Observación 3.2.16. En el Lema 3.2.15, las condiciones 4 y 5 pueden intercambiarse por las siguientes propiedades.

4.' $x < E(x, y) \leq y$ para cada $(x, y) \in X \times X$ con $x < y$,

5.' $\alpha(E(\alpha(x), \alpha(y))) \geq E(x, y)$ para cada $(x, y) \in \tilde{\Delta}$.

En este caso, la conclusión del lema es que existe una media armónica propia izquierda que preserva el orden en X , que, al igual que una media aritmética propia derecha que preserva el orden, implica una respuesta positiva a la versión débil del problema de Jaworowski.

El siguiente es un ejemplo de un espacio que satisface las condiciones del Lema 3.2.15.

Ejemplo 3.2.17. Consideremos la retícula topológica $(\mathcal{K}_{(0),b}^n, \subseteq, \wedge, \vee)$ y la involución polar $\circ : \mathcal{K}_{(0),b}^n \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$, definidas en el Ejemplo 1.8.10.

Recordemos que en los Ejemplos 1.8.10 y 3.2.13 vimos que este espacio satisface las hipótesis de la versión débil del problema de Jaworowski y del Corolario 3.2.10. Por otra parte, también cumple las hipótesis del Lema 3.2.15, pues tiene una estructura convexa dada por las funciones $k_m : (\mathcal{K}_{(0),b}^n)^m \times \Delta_m \rightarrow \mathcal{K}_{(0),b}^n$, con $m \in \mathbb{N}$, definidas como

$$k_m((A_1, \dots, A_m), (t_1, \dots, t_m)) = \sum_{i=1}^m t_i A_i.$$

Además, los conjuntos $[A; B]$ son convexos para cada $A, B \in \mathcal{K}_{(0),b}^n$ con $A \subseteq B$. En efecto, si $C_1, \dots, C_m \in [A; B]$ y $(t_1, \dots, t_m) \in \Delta_m$, entonces $A \subseteq C_i \subseteq B$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, y por lo tanto

$$A = \sum_{i=1}^m t_i A \subseteq \sum_{i=1}^m t_i C_i \subseteq \sum_{i=1}^m t_i B = B,$$

donde la primera y última igualdad se dan porque A y B son convexos. Esto implica que $k_m((C_1, \dots, C_m), (t_1, \dots, t_m)) \in [A; B]$. ◀

3.3. Problema de Anderson

En esta sección traducimos algunos de los resultados de la sección anterior al caso particular del problema de Anderson (Problema 1.8.3), es decir, cuando X es homeomorfo al cubo de Hilbert Q y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es un conjunto unitario.

El siguiente corolario implica que el problema de Anderson tiene una respuesta positiva si y sólo si X admite una media equivariante.

Corolario 3.3.1. *Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable tal que X es homeomorfo a Q y α tiene un único punto fijo. Entonces, α es conjugada con la involución estándar $\sigma : Q \rightarrow Q$ si y sólo si existe una media equivariante en X .*

Demostración. Supongamos que existe una media equivariante en X . El espacio X es un AR, ya que es homeomorfo a Q , y $X^{\mathbb{Z}_2}$ es un AR porque es un conjunto unitario. Entonces, por el Corolario 3.2.1 tenemos que (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR y, por lo tanto, el Teorema 1.8.2 implica que α es conjugada con la involución estándar $\sigma : Q \rightarrow Q$.

Ahora, supongamos que α es conjugada con σ . Entonces, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Q$ tal que $\alpha = h^{-1} \circ \sigma \circ h$. La función $p : Q \times Q \rightarrow Q$, dada por

$$p((x_n), (y_n)) = \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right),$$

es una media equivariante en (Q, σ) . Entonces $p' : X \times X \rightarrow X$, dada por

$$p'(x, y) = h^{-1}(p(h(x), h(y))),$$

es una media equivariante en X . ◻

Recordemos que en el Corolario 3.2.4 vimos que, para que la versión débil del problema de Jaworowski tenga una respuesta positiva, es suficiente que exista una estructura de $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ en X tal que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ sea modular. El siguiente corolario muestra que la existencia de esta estructura es equivalente al problema de Anderson.

Corolario 3.3.2. *Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable tal que X es homeomorfo a Q y α tiene un único punto fijo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *La involución α es conjugada con la involución estándar $\sigma : Q \rightarrow Q$.*
- (2) *Existe una estructura de $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ en X tal que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es distributiva.*
- (3) *Existe una estructura de $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ en X tal que $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es modular.*

Demostración. Como las retículas distributivas son modulares, es claro que (2) implica (3).

Por otra parte, debido al Corolario 3.2.4 y al Teorema 1.8.2, (3) implica (1).

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que α es conjugada con σ . Esto significa que existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Q$ tal que $\alpha = h^{-1} \circ \sigma \circ h$. Sabemos que $(Q, \leq', \wedge', \vee')$ es una retícula topológica distributiva, donde los operadores $\wedge'$ y $\vee'$ están definidos por

$$(x_n) \wedge' (y_n) = (\min \{x_n, y_n\}), \quad (x_n) \vee' (y_n) = (\max \{x_n, y_n\}),$$

y el orden parcial $\leq'$ está dado por

$$(x_n) \leq' (y_n) \text{ si y sólo si } x_n \leq y_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Además, σ es decreciente con respecto a $\leq'$. Por lo tanto, si definimos $\wedge$ y $\vee$ en X como

$$x \wedge y = h^{-1}(h(x) \wedge' h(y)), \quad x \vee y = h^{-1}(h(x) \vee' h(y)),$$

y el orden parcial $\leq$ por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } h(x) \leq' h(y),$$

entonces $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula topológica distributiva y α es decreciente con respecto a $\leq$. $\square$

Capítulo 4

Otros resultados y trabajo a futuro

En este capítulo plantearemos algunas preguntas en las que vamos a continuar trabajando.

4.1. Medias propias y orden

Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio que cumple las hipótesis de la versión débil del problema de Jaworowski (Problema 1.8.6). En la Sección 3.2 vimos que, para obtener una respuesta positiva a este problema, es suficiente construir una media equivariante en X y, si X es compacto, para esto basta construir una media aritmética propia derecha que preserva el orden (o, equivalentemente, una media armónica izquierda que preserva el orden). En el Lema 3.2.15 mostramos que, si X tiene una estructura convexa tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in X$, con $x \leq y$, para que exista una media aritmética propia derecha que preserva el orden en X es suficiente que exista una en el espacio

$$\tilde{\Delta} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y \text{ o } y \leq x\}$$

de pares comparables. Entonces, continuaremos trabajando en encontrar condiciones para que exista una función de este tipo en $\tilde{\Delta}$. Planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 4.1.1. ¿Bajo qué condiciones en (X, α) existe una función $E : \tilde{\Delta} \rightarrow X$ que cumple las propiedades del Lema 3.2.15?

Por otra parte, como en las hipótesis de la versión débil del problema de Jaworowski suponemos que el $\mathbb{Z}_2$ -espacio (X, α) tiene una estructura de retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ tal que α es decreciente con respecto a $\leq$, es natural hacer la siguiente pregunta.

Pregunta 4.1.2. Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio. ¿Bajo qué condiciones se puede definir una estructura de retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ en X tal que α sea decreciente con respecto a $\leq$?

4.2. El espacio de medias

Sea (X, α) un $\mathbb{Z}_2$ -espacio metrizable. Consideremos el espacio de medias en X

$$\mathcal{M} := \{p : X \times X \rightarrow X \mid p \text{ es una media}\},$$

equipado con la topología compacto-abierta.

Notemos que la involución $\alpha : X \rightarrow X$ induce una involución en $\mathcal{M}$.

Proposición 4.2.1. *La función $\alpha' : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, dada por*

$$\alpha'(f)(x, y) = \alpha(f(\alpha(x), \alpha(y)))$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, es una involución.

Demostración. Es claro que si f es una media en X , entonces $\alpha'(f)$ también lo es, por lo que α' está bien definida. Además, es fácil ver que $\alpha' \circ \alpha' = \text{Id}_{\mathcal{M}}$.

Veamos que α' es continua. Sean K un subconjunto compacto de $X \times X$ y U un subconjunto abierto de X . Queremos ver que la preimagen del abierto subbásico en $\mathcal{M}$

$$[K, U] := \{p \in \mathcal{M} \mid p(K) \subseteq U\}$$

es abierta en $\mathcal{M}$. Denotemos por $\bar{\alpha}$ a la involución inducida coordenada a coordenada en $X \times X$ por α . Es decir, $\bar{\alpha} : X \times X \rightarrow X \times X$ está dada por

$$\bar{\alpha}(x, y) = (\alpha(x), \alpha(y)).$$

Entonces, notemos que

$$\begin{aligned} (\alpha')^{-1}([K, U]) &= \{p \in \mathcal{M} \mid \alpha(p(\alpha(x), \alpha(y))) \in U \text{ para cada } (x, y) \in K\} \\ &= \{p \in \mathcal{M} \mid p(x, y) \in \alpha(U) \text{ para cada } (x, y) \in \bar{\alpha}(K)\} \\ &= [\bar{\alpha}(K), \alpha(U)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\alpha')^{-1}([K, U])$ es un abierto subbásico de $\mathcal{M}$, y podemos concluir que α' es continua. $\square$

También, observemos que si α es decreciente con respecto a una estructura de retícula en X , α' es decreciente con respecto a la estructura de retícula inducida en $\mathcal{M}$.

Proposición 4.2.2. *Supongamos que X es localmente compacto. Si existe una estructura de retícula topológica $(X, \leq, \wedge, \vee)$ en X , esta induce una estructura de retícula topológica $(\mathcal{M}, \leq', \wedge', \vee')$ en $\mathcal{M}$. Además, si α es decreciente con respecto a $\leq$, entonces α' es decreciente con respecto a $\leq'$.*

Demostración. Consideremos el orden parcial $\leq'$ en $\mathcal{M}$ dado por

$$f \leq' g \text{ si y sólo si } f(x, y) \leq g(x, y) \text{ para toda } (x, y) \in X \times X.$$

Es fácil ver que, si definimos los operadores $\wedge'$ y $\vee'$ como

$$(f \wedge' g)(x, y) = f(x, y) \wedge g(x, y) \quad \text{y} \quad (f \vee' g)(x, y) = f(x, y) \vee g(x, y),$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, entonces están bien definidos y $(\mathcal{M}, \leq', \wedge', \vee')$ es una retícula.

Veamos que $(\mathcal{M}, \leq', \wedge', \vee')$ es una retícula topológica. Para ver que $\wedge'$ es continua, consideremos $(f, g) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, $K \subseteq X \times X$ compacto y $U \subseteq X$ abierto tales que $f \wedge' g \in [K, U]$.

Sea $(x, y) \in K$. Como $f(x, y) \wedge g(x, y) \in U$ y $\wedge$ es una función continua, existen abiertos $V_{(x, y)}$ y $W_{(x, y)}$ en X tales que $f(x, y) \in V_{(x, y)}$, $g(x, y) \in W_{(x, y)}$ y

$$\wedge(V_{(x, y)} \times W_{(x, y)}) \subseteq U. \quad (4.1)$$

Además, como f y g son continuas, existe un abierto $A_{(x, y)}$ en $X \times X$ tal que $(x, y) \in A_{(x, y)}$ y

$$f(A_{(x, y)}) \subseteq V_{(x, y)}, \quad g(A_{(x, y)}) \subseteq W_{(x, y)}. \quad (4.2)$$

Como $X \times X$ es localmente compacto, existe una vecindad compacta $C_{(x, y)}$ de (x, y) en $X \times X$ tal que $(x, y) \in C_{(x, y)} \subseteq A_{(x, y)}$. Entonces, de (4.2) concluimos que

$$f(C_{(x, y)}) \subseteq V_{(x, y)}, \quad g(C_{(x, y)}) \subseteq W_{(x, y)}. \quad (4.3)$$

Ahora, como K es compacto y $\{\text{int}(C_{(x,y)}) \mid (x,y) \in K\}$ es una cubierta abierta de K , existen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_{(x_i, y_i)}. \quad (4.4)$$

Sea

$$\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^n [C_{(x_i, y_i)}, V_{(x_i, y_i)}] \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n [C_{(x_i, y_i)}, W_{(x_i, y_i)}] \right).$$

$\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, pues es el producto de intersecciones de abiertos subbásicos de $\mathcal{M}$. Además, de (4.3) podemos concluir que $(f, g) \in \mathcal{U}$, y las contenciones (4.4) y (4.1) implican que, para cualquier $(h, j) \in \mathcal{U}$ y $(x, y) \in K$, se cumple que $h(x, y) \wedge j(x, y) \in U$. Es decir, $\wedge'(\mathcal{U}) \subseteq [K, U]$. Por lo tanto, la preimagen de $[K, U]$ es abierta en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, y podemos concluir que $\wedge'$ es continua. De forma análoga se puede verificar que $\vee'$ es continua, y por lo tanto $(\mathcal{M}, \leq', \wedge', \vee')$ es una retícula topológica.

Por último, supongamos además que α es decreciente con respecto a $\leq$. Si $f, g \in \mathcal{M}$ y $f \leq' g$, entonces

$$f(\alpha(x), \alpha(y)) \leq g(\alpha(x), \alpha(y))$$

para cada $(x, y) \in X \times X$. Por lo tanto,

$$\alpha(g(\alpha(x), \alpha(y))) \leq \alpha(f(\alpha(x), \alpha(y)))$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, y entonces $\alpha'(g) \leq' \alpha'(f)$. Concluimos que α' es decreciente con respecto a $\leq'$. $\square$

Ahora, notemos que si existe $f \in \mathcal{M}$ tal que $\alpha'(f) = f$, entonces

$$f(x, y) = \alpha'(f)(x, y) = \alpha(f(\alpha(x), \alpha(y)))$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, y por lo tanto f es una media equivariante. Conversamente, si f es una media equivariante en X , entonces $f \in \mathcal{M}$ y $\alpha'(f) = f$. Por lo tanto, el problema de encontrar una media equivariante en X es equivalente a que α' tenga un punto fijo. Así, planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 4.2.3. ¿Bajo qué condiciones en (X, α) se cumple que α' tiene un punto fijo?

En lo que resta de esta sección, supongamos que α tiene un único punto fijo y que (X, α) cumple las hipótesis de la versión débil del problema de Jaworowski. Es decir, X es un AR y existe una estructura de retícula $(X, \leq, \wedge, \vee)$ en X tal que $(X, \alpha, \leq, \wedge, \vee)$ es una $\mathbb{Z}_2$ -retícula decreciente. Notemos que el subconjunto de $\mathcal{M}$ de medias p que están relacionadas con su imagen $\alpha'(p)$,

$$\mathcal{N} := \{p \in \mathcal{M} \mid p \leq' \alpha'(p) \text{ o } \alpha'(p) \leq' p\}$$

(donde $\leq'$ es el orden parcial en $\mathcal{M}$ definido en la Proposición 4.2.2), es invariante bajo α' y es no vacío. En efecto, el hecho de que α es decreciente con respecto a $\leq$ implica que $\alpha'(\wedge) = \vee$ y $\alpha'(\vee) = \wedge$. Entonces, como $\wedge \leq' \vee$, las funciones $\wedge$ y $\vee$ son elementos de $\mathcal{N}$. Además, si f es una media equivariante, entonces $f \in \mathcal{N}$ y es un punto fijo de la involución $\alpha' \restriction_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$.

En la Proposición 4.2.5 construimos una sucesión de medias en $\mathcal{N}$ tal que, si es convergente, su límite es un punto fijo de α' . Antes de pasar a este resultado, demostramos el siguiente lema.

Lema 4.2.4. Sean d una métrica en $X \times X$ que induce su topología, y Y un subconjunto abierto y totalmente acotado de $(X \times X, d)$ que no intersecta a la diagonal. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε -red $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ de Y , contenida en Y , tal que los conjuntos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ son ajenos dos a dos, donde

$$A_i := \{(x_i, y_i), (y_i, x_i)\}, \quad B_i := \{(\alpha(x_i), \alpha(y_i)), (\alpha(y_i), \alpha(x_i))\}$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. Notemos que si $(x, y) \in Y$, entonces $(x, y) \neq (\alpha(x), \alpha(y))$. En efecto, como Y no intersecta a la diagonal de $X \times X$, entonces x y y son distintos y, como α tiene un único punto fijo, no puede pasar que $x = \alpha(x)$ y $y = \alpha(y)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$ una $\frac{\varepsilon}{2}$ -red de Y , contenida en Y . Queremos construir $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in Y$ tales que

$$(x_i, y_i) \in B\left((a_i, b_i), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ (esto garantiza que $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ es una ε -red de Y) y tales que los conjuntos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ son ajenos dos a dos.

Como (a_1, b_1) es un elemento de $Y \cap B((a_1, b_1), \frac{\varepsilon}{2})$ y este es un subconjunto abierto de $X \times X$, existe un abierto U de X tal que

$$(a_1, b_1) \in \{a_1\} \times U \subseteq Y \cap B\left((a_1, b_1), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

El abierto U es infinito, pues X es un espacio métrico conexo (X es un AR). Por lo tanto, podemos elegir $b'_1 \in U$ tal que $a_1 \neq \alpha(b'_1)$. Entonces, definimos $(x_1, y_1) := (a_1, b'_1)$. La elección de b'_1 garantiza que A_1 y B_1 son ajenos.

Sea $k \geq 1$, $k < m$. Supongamos que ya construimos $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ que cumplen lo requerido. Existe

$$(c, d) \in \left(Y \cap B\left((a_{k+1}, b_{k+1}), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \setminus \bigcup_{i=1}^k (A_i \cup B_i),$$

pues $Y \cap B((a_{k+1}, b_{k+1}), \frac{\varepsilon}{2})$ es un abierto no vacío de $X \times X$ y $\bigcup_{i=1}^k (A_i \cup B_i)$ es finito. De la misma forma que en el paso base, podemos elegir

$$(c, d') \in \left(Y \cap B\left((a_{k+1}, b_{k+1}), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \setminus \bigcup_{i=1}^k (A_i \cup B_i)$$

tal que $c \neq \alpha(d')$. Entonces, definimos $(x_{k+1}, y_{k+1}) := (c, d')$. Esta elección cumple lo requerido.

Por lo tanto, existe una ε -red $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ de Y , contenida en Y , tal que los conjuntos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ son ajenos dos a dos. $\square$

Proposición 4.2.5. *Supongamos que X es compacto y tiene una estructura convexa tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$.*

- (1) *Existen una métrica d en $X \times X$ (compatible con su topología) y una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$p_n \leq' p_{n+1} \leq' \alpha'(p_{n+1}) \leq' \alpha'(p_n)$$

y p_n coincide con $\alpha'(p_n)$ en un subconjunto $\frac{1}{2^n}$ -denso de $(X \times X, d)$.

- (2) Si además la sucesión (p_n) converge en $C(X \times X, X)$ (con la topología compacto-abierto), entonces su límite pertenece a $\mathcal{N}$ y es un punto fijo de α' . Por lo tanto, es una media equivariante en X , y (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR.

Demostración. (1) Sea d una métrica en $X \times X$, compatible con su topología, acotada por $\frac{1}{2}$.

Definimos $p_0 := \wedge$. Entonces $p_0 \leq' \alpha'(p_0) = \vee$. Además, p_0 y $\alpha'(p_0)$ coinciden en la diagonal de $X \times X$, que es un subconjunto 1-denso porque d está acotada por $\frac{1}{2}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que ya construimos $p_0, \dots, p_k$ que satisfacen las condiciones necesarias. Si $p_k = \alpha'(p_k)$, entonces definimos $p_{k+1} := p_k$, y es claro que p_{k+1} cumple lo requerido.

Si $p_k <' \alpha'(p_k)$, entonces el conjunto

$$\begin{aligned} Y &:= \{(x, y) \in X \times X \mid p_k(x, y) \neq \alpha'(p_k)(x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid p_k(x, y) < \alpha'(p_k)(x, y)\} \end{aligned}$$

es no vacío. Además, es abierto en $X \times X$, pues su complemento es el conjunto de puntos en los que las funciones continuas p_k y $\alpha'(p_k)$ coinciden. Notemos que, como $X \times X$ es compacto, Y es totalmente acotado y, como $p_k(x, x) = x = \alpha'(p_k)(x, x)$ para cada $x \in X$, el conjunto Y no interseca a la diagonal de $X \times X$. Entonces, debido al Lema 4.2.4, existe una $\frac{1}{2^{k+1}}$ -red $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ de Y , contenida en Y , tal que los conjuntos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ son ajenos dos a dos, donde

$$A_i := \{(x_i, y_i), (y_i, x_i)\}, \quad B_i := \{(\alpha(x_i), \alpha(y_i)), (\alpha(y_i), \alpha(x_i))\}.$$

Por otra parte, existe $\theta_i \in [p_k(x_i, y_i); \alpha'(p_k)(x_i, y_i)]$ tal que

$$p_k(x_i, y_i) < \theta_i < \alpha'(p_k)(x_i, y_i)$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, porque $p_k(x_i, y_i) < \alpha'(p_k)(x_i, y_i)$ y el intervalo es conexo. Como α es decreciente con respecto a $\leq$, entonces

$$\alpha(\alpha'(p_k)(x_i, y_i)) < \alpha(\theta_i) < \alpha(p_k(x_i, y_i))$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, y por lo tanto

$$\alpha(\theta_i) \in [p_k(\alpha(x_i), \alpha(y_i)); \alpha'(p_k)(\alpha(x_i), \alpha(y_i))].$$

Sea $\text{Conv}(X)$ la familia de todos los subconjuntos convexos, cerrados, no vacíos de X . Definimos la función $\phi : X \times X \rightarrow \text{Conv}(X)$, dada por

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \{\theta_i\} & \text{si } (x, y) \in A_i \text{ p. a. } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \{\alpha(\theta_i)\} & \text{si } (x, y) \in B_i \text{ p. a. } i \in \{1, \dots, m\}, \\ [p_k(x, y); \alpha'(p_k)(x, y)] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como los conjuntos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ son ajenos dos a dos, ϕ está bien definida. Además notemos que $\phi(x, y) \subseteq [p_k(x, y); \alpha'(p_k)(x, y)]$ en cualquiera de los casos. Por otra parte, como $\bigcup_{i=1}^m (A_i \cup B_i)$ es finito, entonces es cerrado en $X \times X$ y es discreto (y cualquier función definida en este conjunto es continua). Por lo tanto, del Lema 1.7.13 podemos concluir que ϕ es semicontinua inferiormente.

Ahora, por el Teorema 1.7.12, existe una función continua $h : X \times X \rightarrow X$ tal que $h(x, y) \in \phi(x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times X$. Entonces

$$h(x, y) \in [p_k(x, y); \alpha'(p_k)(x, y)] \quad (4.5)$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, y en particular $h(x, x) = x$ para cada $x \in X$. Además, como

$$h(\alpha(x), \alpha(y)) \in [p_k(\alpha(x), \alpha(y)); \alpha'(p_k)(\alpha(x), \alpha(y))]$$

para cada $(x, y) \in X \times X$ y α es decreciente con respecto a $\leq$, entonces

$$\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \in [p_k(x, y); \alpha'(p_k)(x, y)]. \quad (4.6)$$

Notemos que como p_k y $\alpha'(p_k)$ son simétricas, también se cumple que

$$h(x, y), \alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \in [p_k(y, x); \alpha'(p_k)(y, x)] \quad (4.7)$$

para cada $(x, y) \in X \times X$.

Definimos $p_{k+1} : X \times X \rightarrow X$ por

$$p_{k+1}(x, y) = \left(h(x, y) \vee h(y, x) \right) \wedge \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x))) \right).$$

Esta función es continua, simétrica y es fácil verificar que $p_{k+1}(x, x) = x$ para cada $x \in X$. Entonces p_{k+1} es una media. Además, de (4.5), (4.6) y (4.7) podemos concluir que $p_k(x, y) \leq h(x, y) \vee h(y, x)$ y

$$p_k(x, y) \leq \alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x)))$$

para cada $(x, y) \in X \times X$, y por lo tanto $p_k(x, y) \leq p_{k+1}(x, y)$. Esto implica que $p_k \leq' p_{k+1}$ y, como α' es decreciente con respecto a $\leq'$, entonces $\alpha'(p_{k+1}) \leq' \alpha'(p_k)$.

Por otra parte, es fácil verificar que

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x, y) &= \left(h(x, y) \vee h(y, x) \right) \wedge \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x))) \right) \\ &\leq \left(h(x, y) \vee h(y, x) \right) \vee \left(\alpha(h(\alpha(x), \alpha(y))) \wedge \alpha(h(\alpha(y), \alpha(x))) \right) \\ &= \alpha'(p_{k+1})(x, y) \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in X \times X$. Entonces, podemos concluir que $p_k \leq' p_{k+1} \leq' \alpha'(p_{k+1}) \leq' \alpha'(p_k)$.

Finalmente, notemos que, como h es una selección de ϕ , $p_{k+1}(x_i, y_i) = \theta_i = \alpha'(p_{k+1})(x_i, y_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, p_{k+1} y $\alpha'(p_{k+1})$ coinciden en la red $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$, que es un conjunto $\frac{1}{2^{k+1}}$ -denso. Esto termina el paso inductivo.

(2) Supongamos que la sucesión (p_n) converge en $C(X \times X, X)$ a una función p . Sean $x, y \in X$. Como $p_n(x, x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(p_n(x, x))$ converge a $p(x, x)$, entonces $p(x, x) = x$. Por otra parte, como $(p_n(x, y))$ converge a $p(x, y)$, $(p_n(y, x))$ converge a $p(y, x)$ y cada p_n es simétrica, entonces p también es simétrica. Por lo tanto, podemos concluir que p es una media.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $p \neq \alpha'(p)$. Entonces existen $(x_0, y_0) \in X \times X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $p(x, y) \neq \alpha'(p)(x, y)$ para cada $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Como p_k y $\alpha'(p_k)$ coinciden en un subconjunto $\frac{1}{2^k}$ -denso de $X \times X$, existe $(x', y') \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ tal que $p_k(x', y') = \alpha'(p_k)(x', y')$. Además, como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$p_n \leq' p_{n+1} \leq' \alpha'(p_{n+1}) \leq' \alpha'(p_n),$$

entonces $p_n(x', y') = \alpha'(p_n)(x', y')$ para toda $n \geq k$, y esto implica que $p(x', y') = \alpha'(p)(x', y')$. Pero esto contradice que $(x', y') \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$. Entonces, podemos concluir que p es un punto fijo de α' . Por lo tanto, es una media equivariante y, por el Corolario 3.2.1, (X, α) es un $\mathbb{Z}_2$ -AR. $\square$

En la proposición anterior basta que (p_n) converja en $C(X \times X, X)$ para que exista una media equivariante en X y (X, α) sea un $\mathbb{Z}_2$ -AR. Entonces, planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 4.2.6. ¿Bajo qué condiciones se cumple que la sucesión (p_n) de la Proposición 4.2.5 converge en $C(X \times X, X)$?

4.3. Conclusión

Para concluir este trabajo, recapitularemos brevemente los resultados. El objetivo central de esta tesis fue estudiar bajo qué condiciones un G -espacio es un G -AR, trabajando en particular en el problema de Jaworowski y la Pregunta 2.1.4, planteada por H. Juárez-Anguiano.

En el Capítulo 2, demostramos que estos dos problemas tienen una respuesta positiva cuando el grupo G es finito y existe una n -media equivariante en X tal que n es un múltiplo de la cardinalidad de G . Después, dimos otra respuesta parcial a la pregunta de H. Juárez-Anguiano, probando que se puede resolver afirmativamente si existe una n -cuasimedia contractiva equivariante en X para alguna $n \in \mathbb{N}$.

En el Capítulo 3, trabajamos en el problema de Jaworowski en el caso en el que el grupo G es $\mathbb{Z}_2$ y existe una estructura de retícula topológica en X . Demostramos que la versión débil del problema de Jaworowski (Problema 1.8.6) tiene una respuesta positiva si la retícula $(X, \leq, \wedge, \vee)$ es modular. También, probamos que este problema se puede resolver afirmativamente si existe una media equivariante en X y que, bajo ciertas condiciones en X , para construir una función de este tipo basta que haya una media aritmética propia derecha que preserva el orden (o, equivalentemente, una media armónica izquierda que preserva el orden). Posteriormente, mostramos que, si X tiene una estructura convexa tal que los conjuntos $[x; y]$ son convexos para cada $x, y \in X$, con $x \leq y$, para que exista una media aritmética propia derecha que preserva el orden en X es suficiente que exista una en el espacio $\tilde{\Delta} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y \text{ o } y \leq x\}$ de pares comparables. En el futuro, continuaremos trabajando en la pregunta de cuándo hay una función de este tipo en $\tilde{\Delta}$.

Además, trabajaremos en encontrar condiciones para que las hipótesis sobre el orden de la versión débil del problema de Jaworowski se cumplan en un $\mathbb{Z}_2$ -espacio arbitrario. Por otra parte, seguiremos estudiando el espacio de medias y las condiciones bajo las cuales la involución inducida en este espacio tiene un punto fijo.

Bibliografía

- [1] S. Antonyan. *Retracts in categories of G -spaces*. Sov. J. Contemp. Math. Anal. 15 (1980), 365-378.
- [2] S. Antonyan. *Equivariant generalization of Dugundji's theorem*. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 38 (1985), 844-848.
- [3] S. Antonyan. *Equivariant embeddings into G -AR's*. Glas. Mat. 22 (1987), 503-533.
- [4] S. Antonyan. *Retraction properties of an orbit space*. Math. USSR Sb. 65 (1990), 305-321.
- [5] S. Antonyan. *On based-free actions of compact Lie groups on the Hilbert cube*. Math. Notes 65, 2 (1999), 135-143.
- [6] S. Antonyan. *A characterization of equivariant absolute extensors and the equivariant Dugundji Theorem*. Houston Jour. Math. 31 (2005), 451-462.
- [7] S. Antonyan. *Extending equivariant maps into spaces with convex structure*. Topology Appl. 153 (2005), 261-275.
- [8] S. Antonyan. *Some open problems in equivariant infinite-dimensional topology*. Topology Appl. 311 (2022).
- [9] S. Artstein-Avidan y V. Milman. *The concept of duality in convex analysis, and the characterization of the Legendre transform*. Annals of Mathematics 169 (2009), 661-674.
- [10] S. Artstein-Avidan, S. Sadovsky, K. Wyczesany. *A zoo of dualities*. J. Geom. Anal. (2023).

- [11] H. Attouch y R. Wets. *Quantitative stability of variational systems: I. the epigraphical distance*. Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991), 695-730.
- [12] H. Attouch y R. Wets. *Quantitative stability of variational systems: II. A framework for nonlinear conditioning*. SIAM J. Optimization 3 (1993), 359-381.
- [13] T. Banakh, M. Kurihara, K. Sakai. *Hyperspaces of normed linear spaces with the Attouch-Wets topology*. Set-Valued Anal. 11 (2003), 21-36.
- [14] T. Banakh, T. Radul, M. Zarichnyi. *Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds*. VNTL Publishers, Leópolis, 1996.
- [15] G. Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [16] C. Bessaga y A. Pelczynski. *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*. Polish Scientific Publishers, Varsovia, 1975.
- [17] G. E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press, Nueva York, 1972.
- [18] G. Chichilnisky. *Social choice and the topology of spaces of preferences*. Adv. Math. 37 (1980), 165-176.
- [19] G. Chichilnisky y G. Heal. *Necessary and sufficient conditions for a resolution of the social choice paradox*. J. Econ. Theory 31 (1983), 68-87.
- [20] C. Costantini y W. Kubis. *Paths in hyperspaces*. Appl. Gen. Topol. 4 (2003), 351-360.
- [21] D. W. Curtis y R. M. Schori. *2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube*. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.
- [22] J. Dugundji. *Absolute retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces*. Compositio Math. 13 (1955), 229-246.
- [23] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [24] B. Eckmann. *Räume mit Mittelbildungen*. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 329-340.

- [25] B. Eckmann, T. Ganea, P. J. Hilton. *Generalized means*. Studies in Mathematical Analysis, Stanford University Press (1962), 82-92.
- [26] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann, Berlín, 1989.
- [27] G. Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basilea, 2003.
- [28] F. Hausdorff. *Mengenlehre*. Springer, Berlin, 1927.
- [29] L. Higuera-Montaña y N. Jonard-Pérez. *A topological insight into the polar involution of convex sets*. Israel Journal of Mathematics 263 (2024), 437-474.
- [30] C. J. Himmelberg. *Some theorems on equiconnected and locally equiconnected spaces*. Trans. Am. Math. Soc. 115 (1965), 43-53.
- [31] S. T. Hu. *Theory of Retracts*. Wayne State University Press, Detroit, 1965.
- [32] I. M. James. *General Topology and Homotopy Theory*. Springer-Verlag, Nueva York, 1984.
- [33] J. Jaworowski. *Equivariant extension of maps*. Pacific Jour. Math. 45 (1973), 229-244.
- [34] J. Jaworowski. *Extension of G -maps and Euclidean G -retracts*. Math. Z. 146 (1976), 143-148.
- [35] J. Jaworowski. *Extension properties of G -maps*. Proc. Intern. Conf. Geom. Topology, 209-213. PWN-Polish Sci. Publ., Varsovia, 1980.
- [36] N. Jonard-Pérez y Ananda López-Poo. *Equivariant means*. Aceptado en Bol. Soc. Mat. Mex.
- [37] H. Juárez-Anguiano. *Equivariant retracts and a topological social choice model*. Topology Appl. 279 (2020).
- [38] H. Juárez-Anguiano. *Social choice models and topological dynamics*. Bol. Soc. Mat. Mex. 30(2) (2024).
- [39] A. Kolmogorov. *Sur la notion de moyenne*. Rendiconti Acad. Lincei 12 (1930), 388-391.

- [40] J. Lawson. *Topological semilattices with small semilattices*. J. London Math. Soc. 1 (1969), 719-724.
- [41] J. Lawson. *Lattices with no interval homomorphisms*. Pacific J. Math. 32 (1970), 459-465.
- [42] J. Lawson y W. Williams. *Topological semilattices and their underlying spaces*. Semigroup Forum 1 (1970), 209-223.
- [43] E. Michael. *Topologies on spaces of subsets*. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.
- [44] E. Michael. *Convex structures and continuous selections*. Can. J. Math. 11 (1959), 556-575.
- [45] V. Milman y L. Rotem. *Non-standard constructions in convex geometry: geometric means of convex bodies*. En Convexity and concentration, Vol. 161 (2017), Springer, Nueva York, 361-390.
- [46] U. Mosco. *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*. Adv. in Math. 3 (1969), 510-585.
- [47] D. Pompeiu. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 7 (1905), 265-315.
- [48] L. Rotem. *Banach limit in convexity and geometric means for convex bodies*. Electron. Res. Announc. Math. Sci. 23 (2016), 41-51.
- [49] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis. Third Edition*. McGraw-Hill, Singapur, 1976.
- [50] K. Sakai. *Geometric Aspects of General Topology*. Springer, Tokio, 2013.
- [51] K. Sakai y M. Yaguchi. *The AR-property of the spaces of closed convex sets*. Colloquium Mathematicum 106, No. 1 (2006), 15-24.
- [52] J. M. Smirnov. *Sets of H -fixed points are absolute extensors*. Math. USSR Sb. 27 (1975), 85-92.
- [53] J. van Mill. *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction*. North Holland, Ámsterdam, 1989.

- [54] J. van Mill y J. E. West. *Involutions of ℓ_2 and s with unique fixed points*. Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 7327-7346.
- [55] J. van Mill y J. E. West. *Universal based-free involutions*. Topology Appl. 311 (2022).
- [56] L. Vietoris. *Stetige Mengen*. Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), 173-204.
- [57] L. Vietoris. *Bereiche zweiter Ordnung*. Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), 258-280.
- [58] S. Weinberger. *On the topological social choice model*. J. Econ. Theory 115 (2004), 377-384.
- [59] J. E. West. *Induced involutions on Hilbert cube hyperspaces*. En Topology Proceedings, Vol. I (Conf., Auburn Univ., Auburn, Ala., 1976) (1977), 281-293.
- [60] J. E. West y R. Wong. *Based-free actions of finite groups on Hilbert cubes with absolute retract orbit spaces are conjugate*. En Geometric Topology (Proc. Georgia Topology Conf., Atenas, Ga., 1977) (1979), Academic Press, Nueva York - Londres, 655-672.
- [61] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, Inc., Nueva York, 2004.
- [62] R. Wong. *Periodic actions on the Hilbert cube*. Fund. Math. 85 (1974), 203-210.