



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y DE LA
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Grupos modulares de haces de círculos sobre superficies

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Oscar Nahum Tovar Ramirez

DIRECTORA
Dra. Rita Jiménez Rolland
Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Oaxaca

Oaxaca de Juárez, Oaxaca, México Junio del 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Instituto de Matemáticas por el respaldo académico y las condiciones de trabajo con la *beca de lugar*. Así como a Maritza por su apoyo en los trámites, la gestión del seminario de estudiantes y las comodidades brindadas en mi cubículo. Asimismo, agradezco al SECIHTI por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría.

A mis sinodales, los Doctores Jesús, Luis Jorge y Porfirio, gracias por el tiempo dedicado a la lectura, por sus observaciones y por las preguntas que me empujaron a mejorar la tesis. De verdad, gracias por su disposición y cercanía.

A mi asesora la Dra. Rita, y quien fungió como un segundo asesor el Dr. Nestor, cuya guía constante y apoyo facilitaron cada etapa del proceso, no solo de la tesis, sino de la maestría. Su paciencia y confianza hicieron una gran diferencia en la culminación de este trabajo.

Agradezco a mi familia por seguir apoyándome desde la distancia, en especial a mis padres, Lourdes y Gabriel, por estar siempre al pendiente.

A mis amistades, por su compañía constante, por ayudarme a mantener el buen ánimo y por hacer más ligero el camino.

Y quiero expresar mi profundo agradecimiento a Consuelo, por cuidarme y estar a mi lado desde que nos conocimos, por estar cada día apoyándome en todos los sentidos, por todos los postres y su gran calidez y por compartir conmigo este logro.

Índice general

Introducción	IV
1. Haces de círculos orientados y su clasificación	1
1.1. Haces de círculos: definición y primeros ejemplos	1
1.2. Haces de círculos orientados	6
1.3. Clasificación de haces de círculos orientados	10
1.4. Clase de Euler de haces de círculos	12
2. Extensiones de grupos y haces de círculos	18
2.1. Extensiones de grupos y cohomología de grupos	18
2.1.1. Primer grupo de cohomología y clasificación de escisiones	20
2.1.2. Segundo grupo de cohomología y clasificación de extensiones	23
2.2. Extensiones procedentes de haces de círculos	25
3. Grupos modulares de superficies	30
3.1. Definición y primeros ejemplos	30
3.2. La sucesión exacta corta de Birman	34
3.3. El Teorema de Dehn–Nielsen–Baer	36
3.4. Cálculos de cohomología del grupo modular de superficies	39
4. Grupos modulares de haces de círculos orientados sobre una superficie	46
4.1. Grupos modulares de haces de círculos sobre la esfera	47

4.2. Grupos modulares de haces de círculos sobre superficies de género $g \geq 1$	50
4.2.1. El Teorema de Waldhausen	50
4.2.2. La sucesión exacta de Conner-Raymond	51
4.2.3. El subgrupo que preserva la orientación	56
4.3. Descripción algebraica del grupo modular $\text{Mod}(X_g^k)$	58
4.3.1. Relación con la sucesión exacta derivada de Birman	58
4.3.2. La clase de Euler y la obstrucción a la escisión	64
A. Haces fibrados y su clasificación	68
A.1. Haces fibrados	68
A.2. G -haces principales	72
A.3. Clasificación de G -haces principales y de haces fibrados	73
B. Cohomología y homología de grupos	76
B.1. Álgebra homológica para la cohomología de grupos	76
B.2. Definición de homología y cohomología de grupos	78
B.3. Cohomología de grupos y cohomología singular	79
B.4. La sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre	80
Bibliografía	83

Introducción

El *grupo modular* de una n -variedad compacta orientable X , usualmente denotado por $\text{Mod}(X)$ y conocido como ‘*mapping class group*’ en inglés, se define como

$$\text{Mod}(X) = \pi_0(\text{Homeo}^+(X)),$$

es decir, el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos de X que preservan orientación. En particular, los grupos modulares de superficies topológicas y de 3-variedades han sido ampliamente estudiados desde distintas perspectivas, ver por ejemplo las referencias introductorias al tema [FM12] para el caso de superficies y [Baetal] para el caso de 3-variedades.

El objetivo de este trabajo es estudiar el *grupo modular* de 3-variedades X que aparecen como el espacio total de un *haz de círculos orientados*

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X \rightarrow S_g$$

sobre una superficie cerrada orientable S_g de género g . Como veremos en esta tesis, fijando el género g de la superficie base, dichas 3-variedades se clasifican a través de la clase de Euler en $H^2(S_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, es decir, están determinadas por dos parámetros: g el género de la superficie y k el número de Euler (el número que le corresponde a la clase bajo el isomorfismo con \mathbb{Z}). Por ende las denotaremos por X_g^k .

Dadas las condiciones anteriores, cuando $g \geq 1$ y $(g, k) \neq (1, 0)$, el grupo modular de X_g^k denotado por $\text{Mod}(X_g^k)$ resulta ser una extensión del grupo modular de la superficie $\text{Mod}(S_g)$ por el primer grupo de cohomología $H^1(S_g; \mathbb{Z})$ de la superficie con coeficientes triviales

$$1 \rightarrow H^1(S_g; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1. \quad (1)$$

En este trabajo explicaremos cómo se deriva esta extensión de grupos a partir de resultados clásicos como los son el Teorema de Dehn-Nielsen-Baer y el Teorema de Waldhausen, así como la sucesión de Conner-Raymond.

Usando la clasificación de extensiones con núcleo abeliano por el segundo grupo de cohomología, véase Teorema 2.5, a la extensión de grupos (1) le corresponde una clase de cohomología en $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$ que denotaremos por eu_k . Más aún, la extensión de grupos (1) escinde si y sólo si $eu_k = 0$, en cuyo caso

$$\text{Mod}(X_g^k) \cong H^1(S_g; \mathbb{Z}) \rtimes \text{Mod}(S_g).$$

Basándonos en el trabajo de Chen y Tshishiku en [CT24] responderemos a la pregunta: ¿para qué casos escinde la extensión de grupo (1)? La respuesta se obtiene de calcular el orden de la clase eu_k en $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$, mismo que describimos en este trabajo. Veremos que este cálculo implica que la extensión (1) siempre escinde cuando $g = 1$, y para $g \geq 2$ escinde si y sólo si k es divisible por $2g - 2$. Más aún, esbozaremos una demostración de Chen y Tshishiku para determinar la 2-cohomología del grupo modular con coeficientes torcidos, para género mayor que 8, obteniendo

$$H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) \cong \mathbb{Z}/(2g - 2).$$

La obstrucción a la existencia de una escisión de la extensión (1) cuando $g \geq 2$ tiene implicaciones en la siguiente instancia del *problema de realización de Nielsen*. El problema es determinar si la composición

$$\text{Homeo}^+(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \quad (2)$$

admite o no secciones de grupos. Si la extensión (1) no escinde, se sigue que no pueden existir tales secciones. Por ende, se puede concluir que la composición 2 no admite secciones cuando k no es divisible por $2g - 2$ contestando parcialmente esta pregunta; véase [CT24] y [ACT23] donde los autores profundizan en este problema.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos que a continuación se describen. En el primer capítulo introducimos los *haces de círculos orientados* y describimos su clasificación. En particular, mostramos que cuando la base es una superficie orientable, estos están clasificados por un número entero llamado el *número de Euler* del haz. Particularmente damos algunos ejemplos interesantes de estos haces fibrados con el cálculo respectivo de su número de Euler.

En el segundo capítulo se estudian las *extensiones de grupos* con núcleo abeliano y su clasificación mediante la *cohomología de grupos en grados bajos*. El estudio se especializa después al caso en que las extensiones de grupos surgen a partir de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía de haces del círculo orientados sobre superficies. Probamos que estas extensiones son *centrales* y que su clase asociada en cohomología coincide con la clase de Euler del haz original.

El tercer capítulo es una exposición de las principales herramientas sobre los grupos modulares de superficies $\text{Mod}(S_g)$ que nos ayudarán a relacionarlos con el grupo modular de la 3-variedad X_g^k . En particular, presentamos los cálculos de cohomología en grados bajos del grupo modular de la superficie, siguiendo las demostraciones de Morita [Mor01] en el grado 1 y de Chen-Tshishiku [CT24] en grado 2.

En el último capítulo se establece formalmente la relación entre $\text{Mod}(X_g^k)$ y $\text{Mod}(S_g)$, y se determina cuándo la extensión (1) se escinde. Completamos la exposición exhibiendo los grupos modulares para el caso de los haces sobre la esfera, y concluimos con algunos ejemplos concretos.

Capítulo 1

Haces de círculos orientados y su clasificación

En este capítulo introducimos los *haces de círculos orientados* con espacio base una superficie cerrada y recordamos la clasificación de estos haces. Los espacios totales de estas fibraciones son 3-variedades que son el objeto de estudio en esta tesis.

Para abordar esta clasificación, nos apoyamos en la teoría de G -haces principales, cuya exposición tratamos en el Apéndice A, que proporciona una herramienta general para describir haces fibrados con grupo estructural dado. En particular, se muestra que los haces de círculos orientados pueden entenderse como \mathbb{S}^1 -haces principales, cuya clasificación queda determinada por funciones continuas con codominio un modelo de espacio clasificante $B\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$. Esta perspectiva permite introducir un invariante topológico que clasifica completamente los haces de círculos orientados: la *clase de Euler del haz*.

En particular, cuando la base es una superficie orientable, los haces de círculos posibles están clasificados por un número entero: el *número de Euler del haz*. Concluimos el capítulo calculando explícitamente este número en términos de una sección del haz.

1.1. Haces de círculos: definición y primeros ejemplos

Comenzamos introduciendo la definición formal de los haces de círculos. Posteriormente, describiremos diversas familias de estos haces que serán relevantes e interesantes una vez demos la clasificación de este tipo de haces.

Para una exposición rigurosa de las nociones empleadas de teoría de haces fibrados, remitimos al lector al Apéndice A.

Definición 1.1. Definimos un **haz de círculos** como un haz fibrado $\xi = (\pi, X, B)$ con fibra el círculo \mathbb{S}^1 y grupo estructural $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$, el grupo de homeomorfismos de \mathbb{S}^1 .

El **haz de círculos trivial** sobre un espacio topológico B es el haz fibrado

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow B \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\pi} B,$$

donde $\pi(b, z) = b$ es la proyección en la primera coordenada.

Notación 1.1. Dado que \mathbb{S}^1 es un espacio compacto y Hausdorff, el conjunto de sus homeomorfismos forma un grupo topológico cuando se equipa con la topología compacto-abierta. Cuando queramos considerar el mismo conjunto con la *topología discreta*, lo denotaremos por $\text{Homeo}_\delta(\mathbb{S}^1)$ y denotaremos por $\text{Homeo}_\tau(\mathbb{S}^1)$ a éste con la *topología compacto-abierta*.

Haces de círculos sobre espacios proyectivos complejos

Recordemos que para $n \geq 1$ el **espacio proyectivo complejo** $\mathbb{C}P^n$ se definen como el conjunto de líneas complejas en \mathbb{C}^{n+1} que pasan por el origen. Cada línea compleja que pasa por el origen se puede entender como el conjunto de puntos $\lambda(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y z_0, \dots, z_n fijos. Así, el espacio proyectivo complejo corresponde al cociente de una esfera $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ bajo la acción del círculo \mathbb{S}^1 :

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1, \quad \text{donde } (z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \text{ para toda } \lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*.$$

Se suele denotar a la clase de equivalencia de $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ en $\mathbb{C}P^n$ por $[z_0 : \dots : z_n]$.

Ejemplo 1.1 (Fibración de Hopf). Un ejemplo de haz de círculos

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{C}P^n$$

sobre el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$, está dado por la proyección $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ definida por $\pi_n(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$.

El caso $n = 1$ es la clásica **fibración de Hopf**

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

sobre la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1 = \{[z_1 : z_2] \mid (z_1, z_2) \neq (0, 0)\} \cong \mathbb{S}^2$. Para ver que este caso específico es un haz de círculos consideremos los abiertos $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$. Bajo la identificación $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$ corresponden a

$$U = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_2 \neq 0\}, \quad V = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_1 \neq 0\}.$$

Entonces $\pi^{-1}(U) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : z_2 \neq 0\}$ y $\pi^{-1}(V) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : z_1 \neq 0\}$. Verificamos que U y V con los siguientes homeomorfismos son trivializaciones del haz.

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{S}^1, \quad \varphi_U(z_1, z_2) = \left([z_1 : z_2], \frac{z_2}{|z_2|} \right),$$

$$\varphi_V : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{S}^1, \quad \varphi_V(z_1, z_2) = \left([z_1 : z_2], \frac{z_1}{|z_1|} \right).$$

Ambas son homeomorfismos que hacen conmutar la proyección al primer factor. Estos homeomorfismos tienen inversas dadas como siguen: en coordenadas afines $U \cong \{[u : 1] = \bar{u}\}$ y $V \cong \{[1 : v] = \bar{v}\}$

$$\begin{aligned}\varphi_U^{-1}: (\bar{u}, s) &\mapsto \left(s \frac{u}{\sqrt{1+|u|^2}}, s \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}} \right), \\ \varphi_V^{-1}: (\bar{v}, s) &\mapsto \left(s \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}}, s \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \right).\end{aligned}$$

Estos homeomorfismos verifican que $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un haz fibrado.

La construcción para el caso $n = 1$ se generaliza directamente para cada $n \geq 2$, usando los abiertos $U_j = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_j \neq 0\}$ y definiendo las trivializaciones de manera similar.

El **espacio proyectivo complejo** de dimensión infinita, denotado por $\mathbb{C}P^\infty$, es el colímite de la filtración

$$\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}P^n \subset \cdots,$$

donde las inclusiones $j_n : \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$, están dadas por introducir una coordenada nula $[z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \cdots : z_n : 0]$. De manera similar definimos a la esfera ∞ -dimensional como el colímite de la filtración

$$\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{S}^m \subset \cdots.$$

donde las inclusiones naturales $i_m : \mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}$, están dadas por $(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, x_m, 0)$. Los espacios definidos anteriormente pueden verse como

$$\mathbb{C}P^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}P^n \quad \text{y} \quad \mathbb{S}^\infty = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{S}^m,$$

a los que se les asigna la topología débil; $U \subset S^\infty$ es abierto si $U \cap S^m$ es abierto en S^m para todo m .

Ejemplo 1.2 (Haz de círculos universal). De la familia de fibraciones de Hopf del Ejemplo 1.1, se puede definir un haz de círculos sobre $\mathbb{C}P^\infty$,

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

Sea $\pi_n : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ la proyección del haz de Hopf y sea $i_n : S^{2n+1} \hookrightarrow S^{2n+3}$ la inclusión natural. Estas proyecciones son compatibles con las inclusiones:

$$\pi_{n+1} \circ i_n = j_n \circ \pi_n.$$

Por la propiedad universal del colímite, existe una única aplicación continua:

$$\pi : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

que hace conmutar el siguiente diagrama para todo n :

$$\begin{array}{ccccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{i_n} & S^{2n+3} & \rightarrow & S^\infty \\ \pi_n \downarrow & & \pi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{j_n} & \mathbb{C}P^{n+1} & \rightarrow & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

Explícitamente, dado $\mathbf{z} \in S^\infty$ (perteneciente a algún S^{2n+1}), definimos:

$$\pi(\mathbf{z}) := [\mathbf{z}] = [z_0 : z_1 : \dots].$$

Esta fibración es un *haz de círculos universal*. Sabemos que cualquier modelo de EG es débilmente contráctil y es único hasta homotopía de acuerdo al Teorema A.4. Dado que S^∞ es un espacio contráctil, el espacio $\mathbb{C}P^\infty$ es un modelo de espacio clasificante para cierto grupo (el grupo estructural) del cual hablaremos en las siguientes secciones.

Haces de círculos sobre la 2-esfera

De manera análoga al caso de espacios proyectivos, podemos definir una familia de haces de círculos a partir de variar los espacios totales en una familia de espacios construidos a partir de la acción de los grupos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en la 3-esfera, esta familia de espacios se encuentran dentro de una clase de espacios llamados **espacios lente**. Aquí, denotaremos por $L(p, 1)$ a los espacios lente de nuestro interés.

Existen distintas definiciones de los espacios lente, aquí damos una de las definiciones clásicas como el cociente $S^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, en el que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa libremente por homeomorfismos sobre S^3 . Consideraremos la esfera unitaria S^3 como subespacio de \mathbb{C}^2 . Definimos el siguiente homeomorfismo de la 3-esfera por

$$\rho(z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z, e^{\frac{2\pi i}{p}} w \right), \quad (1.1)$$

por lo que, ρ genera un grupo cíclico $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (isomorfo a $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{p-1}\}$). Este grupo cíclico actúa en la esfera S^3 por rotaciones y la acción es libre, ya que para cualquier potencia $\rho^j \neq Id_{S^3}$ y para todo $(z, w) \in S^3$, se cumple $\rho^j(z, w) \neq (z, w)$. Así, para cada $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definimos el **espacio lente**

$$L(p, 1) := S^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Observación 1.1. Para $p = 2$ el homeomorfismo 1.1 es la función antipodal, por lo que se recupera $\mathbb{R}P^3$ para $L(2, 1)$. Otro caso a notar es el espacio $L(1, 1)$ que coincide con S^3 .

Los espacios lente con la aplicación cociente definen espacios cubrientes, $S^3 \xrightarrow{\phi} L(p, 1)$, y bajo ciertas condiciones nos ayudan a describir espacios que fibran como haces de círculos.

Ejemplo 1.3 (Espacios lente como haces de círculos). Para cada entero $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el espacio lente $L(p, 1)$ admite una estructura de haz de círculos sobre la esfera

$$S^1 \hookrightarrow L(p, 1) \xrightarrow{\pi'} S^2.$$

Partimos del caso $p = 1$ que es la fibración de Hopf y notemos que la proyección de la fibración de Hopf nos permite factorizar a la función cubriente de la esfera en el espacio lente como sigue,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^2 = \mathbb{C}P^1 \\ \phi \downarrow & \nearrow \pi' & \\ L(p, 1) & & \end{array}$$

Denotemos por $[x, y]$ a la clase de $(x, y) \in \mathbb{S}^3$ en el cociente $L(p, 1)$, entonces si ponemos $\pi'([x, y]) = \pi(x, y)$, la proyección π' está bien definida, ya que $\pi(\rho^j(x, y)) = \pi(x, y)$ para cualquier $j = 0, \dots, (p-1)$.

Ya que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa en las fibras de la fibración de Hopf sin puntos fijos, la fibra de $\pi' : L(p, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ sigue siendo \mathbb{S}^1 . En particular, notemos que cada fibra de la fibración de Hopf, se “enrolla” p -veces en la fibra del haz $L(p, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Las trivializaciones del haz $L(p, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ se pueden expresar en términos análogos a las trivializaciones de la fibración de Hopf, con los abiertos $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$ pero recordando que la fibra del haz $(\pi, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2)$ se enrolla en la fibra de $(\pi', L(p, 1), \mathbb{S}^2)$.

$$\begin{aligned} \varphi_U : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{S}^1, & \varphi_U([z_1, z_2]) &= \left([z_1 : z_2], \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^p \right), \\ \varphi_V : \pi^{-1}(V) &\rightarrow V \times \mathbb{S}^1, & \varphi_V([z_1, z_2]) &= \left([z_1 : z_2], \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^p \right). \end{aligned}$$

El haz tangente unitario de una variedad

Un ejemplo destacado de haz con fibra \mathbb{S}^1 surge a partir del haz tangente de una variedad diferenciable de dimensión 2.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Un *vector tangente* en un punto $x \in M$ es la derivada de una trayectoria suave $p : I \rightarrow M$ evaluada en x . Denotamos por $T_x M$ al conjunto de todos los vectores tangentes en el punto x . Este conjunto $T_x M$ tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión n y se denomina *espacio tangente* a M en x .

Definición 1.2 (Haz tangente). El *haz tangente* τ_M de una n -variedad M es el *haz vectorial* de rango n cuya fibra sobre cada punto $x \in M$ es precisamente el espacio tangente $T_x M$. De manera concreta, se define el *espacio total* TM por

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M,$$

y la *proyección natural* $\pi : TM \rightarrow M$, definida por $\pi(x, v_x) = x$. Luego, definimos la topología de TM como sigue; dado $\{(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)\}$ un atlas de M definimos para cada carta la función

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n, \text{ dada por } \Phi_U(x, v) = (x, D\varphi_x(v)),$$

donde $D\varphi_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el diferencial de φ en x . Las aplicaciones Φ_U son biyectivas y, al declarar que cada Φ_U es un homeomorfismo, se obtiene una topología sobre TM que hace continua la proyección π . Con esta topología TM tiene la estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ y $\pi : TM \rightarrow M$ se convierte en un haz vectorial real de rango n , cuya fibra sobre x es precisamente $T_x M$. Note que las trivializaciones del haz están dadas por $\{U, \Phi_U\}$.

Si M es una variedad cerrada y orientable, entonces el haz tangente τ_M es trivial si y sólo si la característica de Euler de M es cero. Véase [MS79, Cor. 11.3].

Supongamos que M es una *variedad Riemanniana*: una variedad diferenciable provista de una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en cada fibra de τ_M , es decir, de una forma bilineal simétrica y definida positiva en cada espacio tangente $T_x M$. Dicha métrica permite, entre otras cosas, definir normas de vectores tangentes y ángulos entre ellos.

Definición 1.3 (Haz tangente unitario). Sea M una n -variedad Riemanniana y τ_M su haz tangente con la métrica dada. El *haz tangente unitario* τ_M^1 es el subhaz de τ_M cuya fibra en cada $x \in M$ está formada por los *vectores unitarios*, esto es, aquellos $v_x \in T_x M$ con $\|v_x\| = 1$. Denotamos al espacio total de este haz por

$$UT(M) = \{(x, v_x) \in TM \mid \|v_x\| = 1\}.$$

La proyección $\pi^1 : UT(M) \rightarrow M$ está dada por $\pi^1(x, v_x) = x$, como la restricción de π al subconjunto de vectores de norma 1. Cada fibra de π^1 es homeomorfa a la $(n - 1)$ -esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , por lo que τ_M^1 es un \mathbb{S}^{n-1} -haz.

Observación 1.2. En particular, si M es una 2-variedad, entonces el haz tangente unitario τ_M^1 es un haz de círculos sobre M .

1.2. Hazes de círculos orientados

Un haz vectorial es *orientable* siempre que su grupo estructural se pueda reducir de $O(n)$ a $SO(n)$ de acuerdo a la definición de reducción en A.4. De manera más general, consideremos un haz fibrado ξ que tenga por fibra a un espacio topológico F con la noción de orientabilidad, y sea $\text{Homeo}(F)$ el grupo estructural del haz ξ . Decimos que el haz ξ acepta una orientación si admite una reducción del grupo estructural al subgrupo $\text{Homeo}^+(F)$ de homeomorfismos de F que preservan la orientación. Un haz ξ con una reducción dada es un **haz fibrado orientado**.

Definición 1.4. Un \mathbb{S}^1 -haz ξ sobre B con grupo estructural $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ se dice orientado si su grupo estructural se reduce al subgrupo $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ (Def. A.4); esto equivale a pedir que todas las funciones de transición $g_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ tomen valores en $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$.

Ejemplo 1.4 (Fibración de Hopf y espacios lente). La fibración de Hopf $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un \mathbb{S}^1 -haz orientable. Con las trivializaciones $\{U, \varphi_U\}$ y $\{V, \varphi_V\}$ del Ejemplo 1.1, tenemos la

intersección $U \cap V \cong \{[x : 1] \wedge [1 : y] \mid x, y \neq 0\}$ y la función de transición $g_{V,U}(\bar{x}) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ en $\bar{x} = [x : 1] \in U \cap V$ esta dada por

$$g_{V,U}(\bar{x})(z) = pr_2 \varphi_V \varphi_U^{-1}(\bar{x}, z) = pr_2 \varphi_V \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}} \cdot (zx, z) \right) = pr_2 \left(x, \frac{xz}{|xz|} \right) = \frac{x}{|x|} z,$$

es decir, multiplicación por un complejo unitario. Así, $g_{V,U}(\bar{x}) \in \text{Rot}(\mathbb{S}^1) \subset \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es una rotación y preserva la orientación. En particular, el grupo estructural de la fibración de Hopf no sólo se reduce a $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$, sino que se reduce aún más a $SO(2) \cong \mathbb{S}^1$. (Análogamente, $g_{U,V}(\bar{y})(z) = \frac{|y|}{y} z$ es la rotación inversa, también en $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$.)

Un argumento similar muestra que los haces de círculos sobre \mathbb{S}^2 con espacio total $L(p, 1)$ del Ejemplo 1.3 también son haces de círculos orientados.

Ejemplo 1.5 (Haz de círculos no orientado sobre el círculo). Sea K la *botella de Klein* dada como el espacio cociente $K = I \times \mathbb{S}^1 / \sim$, donde $(0, z) \sim (1, \bar{z})$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$. La función $\pi : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $[t, z] \mapsto e^{2\pi it}$ define un haz de círculos

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow K \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$$

sobre \mathbb{S}^1 . Consideremos las trivializaciones $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, con

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\rightarrow U_1 \times \mathbb{S}^1 & \varphi_2 : \pi^{-1}(U_2) &\rightarrow U_2 \times \mathbb{S}^1 \\ [t, z] &\mapsto (e^{2\pi it}, z) & [t, z] &\mapsto \begin{cases} (e^{2\pi it}, z) & \text{si } t < 1/2, \\ (e^{2\pi it}, \bar{z}) & \text{si } t > 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que φ_2 está bien definida, ya que si $[t, z] \in \pi^{-1}(U_2)$ entonces $t \neq 1/2$ y

$$\varphi_2([0, z]) = (e^0, z) = (e^{2\pi i}, \bar{z}) = \varphi_2([1, \bar{z}]).$$

Por otro lado, los homeomorfismos inversos están dados respectivamente por las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \psi_1 : U_1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \pi^{-1}(U_1) & \psi_2 : U_2 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \pi^{-1}(U_2) \\ (e^{2\pi it}, z) &\mapsto [t, z], \quad \text{si } t \in (0, 1) & (e^{2\pi it}, z) &\mapsto \begin{cases} [t, z] & \text{si } t \leq 1 \\ [t, \bar{z}] & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $t \in (1/2, 3/2)$. Así, para determinar el grupo estructural, notemos que en la intersección $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$ tenemos que $g_{1,2} = pr_2 \circ \psi_1 \circ \varphi_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ está dada por

$$z \rightarrow \begin{cases} z & \text{si } t \leq 1/2 \\ \bar{z} & \text{si } t \geq 1/2, \end{cases}$$

el cual es un homeomorfismo que no preserva la orientación.

El grupo de homeomorfismos del círculo que preservan orientación

En la clasificación de haces de círculos orientados, el grupo de interés es $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$, el subgrupo de homeomorfismos de \mathbb{S}^1 que preservan orientación. Por ello, en esta sección describimos un modelo de espacio clasificante para $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$. Veremos que $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es homotópicamente equivalente a $SO(2)$, por lo que podemos trasladar el problema a dar un modelo de espacio clasificante para $SO(2)$. La demostración de esta equivalencia homotópica se basa en ideas de Ghys, como se presenta en [Gh01, Proposición 4.1].

El grupo $SO(2)$ se define como el conjunto de matrices ortogonales 2×2 con determinante positivo. De manera equivalente, puede definirse como el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^2 que fijan al origen y preservan la orientación. Un elemento típico de $SO(2)$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

y su acción sobre un punto $z \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ se describe por $z \mapsto e^{i\phi} z$.

Si bien $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es un grupo mucho más grande (incluye transformaciones no necesariamente lineales), ambos grupos preservan la orientación del círculo. La idea intuitiva del siguiente resultado es que cualquier homeomorfismo del círculo se puede *deformar* (vía homotopía) hasta una simple rotación.

Proposición 1.1. La inclusión $SO(2) \hookrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es una equivalencia homotópica.

Sea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ el cubriente universal del círculo, cuyo grupo de transformaciones de Deck es generado por la traslación entera $T : x \mapsto x + 1$. Por el criterio de levantamientos de funciones [Ha02, Prop. 1.33], para cada $f \in \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ existe un homeomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Cada levantamiento \tilde{f} satisface $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) \pm 1$. Cuando f preserve la orientación el signo es positivo y además, \tilde{f} preserva la orientación en \mathbb{R} por lo que es un homeomorfismo *estrictamente creciente*. Esta propiedad permite expresar a \tilde{f} como:

$$\tilde{f}(x) = x + \phi(x),$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de periodo 1, pues:

$$\phi(x+1) = \tilde{f}(x+1) - (x+1) = (\tilde{f}(x) + 1) - (x+1) = \tilde{f}(x) - x = \phi(x).$$

Dicho de otra forma, \tilde{f} está determinada por la restricción de ϕ a un intervalo de longitud 1, como $[0, 1]$. Finalmente, podemos descomponer \tilde{f} en una traslación global y una componente periódica. Si definimos $a = \phi(0)$, entonces $\phi(x) = a + \psi(x)$, donde $\psi(x) = \phi(x) - a$ cumple $\psi(x+1) = \psi(x)$ y $\psi(0) = 0$. Por lo tanto, el levantamiento se escribe como:

$$\tilde{f}(x) = x + a + \psi(x),$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un desplazamiento constante y $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 1 que encapsula la variación periódica alrededor de la traslación $x + a$.

Demostración de la Proposición 1.1. Definimos primero una homotopía $H_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entre \tilde{f} , el levantamiento de f , y una traslación por a

$$H_t(x) = x + a + (1 - t)\psi(x), \quad t \in [0, 1].$$

Para cada t , la función H_t es un homeomorfismo *estrictamente creciente* que conmuta con la traslación T , pues la parte $\psi(x)$ sigue siendo \mathbb{Z} -periódica y va desapareciendo de forma lineal en t . Además, $H_0 = \tilde{f}$ y $H_1 = x \mapsto x + a$. Al aplicar la función cubriente $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ se obtiene que

$$\rho \circ H_t = h_t,$$

una homotopía en \mathbb{S}^1 que deforma f hacia la rotación $p \circ (x \mapsto x + a)$.

Por último, la rotación $p \circ (x \mapsto x + a)$ pertenece naturalmente a $SO(2) \subset \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$. En consecuencia, todo homeomorfismo orientado del círculo es homotópico a una rotación. Esto demuestra que la inclusión $SO(2) \hookrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es una equivalencia de homotopía. \square

La Proposición 1.1 nos ayuda a simplificar la clasificación de los \mathbb{S}^1 -haces orientados, pues podemos trabajar con un grupo más manejable como $SO(2)$ sin perder información esencial de los haces. En concreto, el resultado anterior tiene la siguiente implicación a nivel de espacios clasificantes

$$B \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1) \simeq B SO(2).$$

Por otro lado, dado que $SO(2)$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 tenemos,

$$B SO(2) \cong B \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$$

En conclusión, cualquier modelo de espacio clasificante $B \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{C}P^\infty$. Una consecuencia adicional de la Proposición 1.1 es que podemos reducir el grupo estructural de cada haz de círculos orientado, para que éste tenga la estructura de un \mathbb{S}^1 -haz principal

Proposición 1.2. [Mor01, Proposición 6.15]. Cada \mathbb{S}^1 -haz orientado admite la estructura de un \mathbb{S}^1 -haz principal.

1.3. Clasificación de haces de círculos orientados

En esta sección clasificamos los haces de círculos orientados, usando la clasificación de G -haces principales (véase Teorema A.3) y el hecho de conocer la cohomología del modelo de espacio clasificante para $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$. La clasificación de estos haces se basa en la biyección entre los G -haces principales con base fija B y las clases de homotopía $[B, BG]$. En nuestro caso concreto esto se puede reducir a $[B, \mathbb{C}P^\infty]$. Un hecho clave es que $\mathbb{C}P^\infty$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $K(\mathbb{Z}, 2)$. Lo cual implica que $[B, \mathbb{C}P^\infty]$ sea isomorfo a un grupo de cohomología en concreto, resultando para este tipo de haces en la identificación con una clase de cierto grupo de cohomología.

Corolario 1.1. Sea B un CW-complejo, entonces existe un isomorfismo entre $[B, \mathbb{C}P^\infty]$ y el grupo de cohomología $H^2(B, \mathbb{Z})$.

Esta afirmación es un caso particular del siguiente resultado más general cuya demostración esbozamos a continuación.

Teorema 1.6. [TD08, Teo. 17.5.1]. Sea G un grupo abeliano y B un CW-complejo. Para $n \geq 0$, se tiene que $[B, K(G, n)] \cong H^n(B; G)$.

Esbozo de la demostración. El caso $n = 0$ lo omitimos. Sea $n \geq 1$ y denotemos por K a $K(G, n)$. Usando el teorema de Hurewicz se demuestra que $H_n(K; \mathbb{Z}) \cong G$ y $H_{n-1}(K; \mathbb{Z}) = 0$. Por el Teorema de coeficientes universales [Ha02, Teo. 3.2] se obtiene entonces un isomorfismo,

$$H^n(K; G) \cong \text{Hom}(H_n(K; \mathbb{Z}), G) \cong \text{Hom}(G, G),$$

pues $\text{Ext}(H_{n-1}(K; \mathbb{Z}), G) = 0$. Esto permite escoger un elemento universal ι_n en $H^n(K; G)$ que corresponde a la identidad en $\text{Hom}(G, G)$ bajo los isomorfismos anteriores.

Así, definimos $\lambda : [B, K] \rightarrow H^n(B; G)$ enviando una clase $[f : B \rightarrow K]$ al elemento $f^*(\iota_n)$ en $H^n(B; G)$. La naturalidad de esta construcción surge del hecho de que, para cualquier función $g : B' \rightarrow B$, se tiene que $(f \circ g)^*(\iota_n) = g^*(f^*(\iota_n))$, haciendo que λ sea compatible con las aplicaciones inducidas en cohomología. \square

Notación 1.2. Denotemos por $Bun_B^+(\mathbb{S}^1)$ al conjunto de clases de isomorfismo de haces de círculos orientados, es decir $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ -estructurado, (véase Definición A.6), sobre un espacio B con estructura de CW-complejo.

Teorema 1.7 (Clasificación de haces de círculos orientados). Sea B un CW-complejo. Existe una biyección

$$Bun_B^+(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow H^2(B; \mathbb{Z}).$$

Demostración. De acuerdo a la Proposición 1.2 cada haz de círculos orientado es un \mathbb{S}^1 -haz principal. Y de acuerdo a la clasificación de G -haces principales, véase Corolario A.1 estos

están en biyección con las clases de homotopía de funciones continuas $f : B \rightarrow B\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$, por lo que tenemos la siguiente biyección.

$$Bun_B^+(\mathbb{S}^1) = \text{Prin}_B(\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)) \leftrightarrow [B, B\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)]$$

De la Proposición 1.1 tenemos que $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ es homotópicamente equivalente a $SO(2)$, y $SO(2)$ es homeomorfo al círculo, así se tiene

$$[B, B\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)] \cong [B, BSO(2)] \cong [B, \mathbb{C}P^\infty]$$

Por último, $\mathbb{C}P^\infty$ es un espacio $K(\mathbb{Z}, 2)$, así $Bun_B^+(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow [B, K(\mathbb{Z}, 2)] \cong H^2(B; \mathbb{Z})$, por el Teorema 1.6. \square

Veamos algunos ejemplos específicos de cómo aplicar este resultado a la clasificación de haces de círculos orientados con distintos espacios base.

Ejemplo 1.8 (Clasificación de haces de círculos orientados sobre el círculo). Si consideramos haces de círculos orientados sobre \mathbb{S}^1 , entonces del Teorema 1.7 tenemos que

$$Bun_{\mathbb{S}^1}^+(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow H^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}).$$

Ya que $H^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$, existe una única clase en $Bun_{\mathbb{S}^1}^+(\mathbb{S}^1)$ que está en correspondencia con la clase trivial en $H^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ y es la clase del haz trivial $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow T^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

En general, si consideramos como base un espacio CW-complejo y conexo B con 2-cohomología trivial, entonces el conjunto de clases de haces de círculos orientados sobre B cuenta con una única clase que corresponde al haz trivial.

Ejemplo 1.9 (Clasificación de haces de círculos orientados sobre una superficie orientable). Consideramos haces de círculos orientados sobre una superficie orientable S_g de género $g \geq 0$. Del Teorema 1.7 tenemos que

$$Bun_{S_g}^+(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow H^2(S_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Así en $Bun_{S_g}^+(\mathbb{S}^1)$ existen tantas clases de isomorfismos de haces como números enteros. En la sección posterior nos enfocaremos a determinar algunos aspectos importantes de estos haces.

Ejemplo 1.10 (Clasificación de haces de círculos orientados sobre una superficie no orientable). Si consideramos haces de círculos orientados sobre una superficie no orientable N_g de género $g \geq 0$, tenemos que

$$Bun_{N_g}^+(\mathbb{S}^1) \leftrightarrow H^2(N_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Por lo que $Bun_{N_g}^+(\mathbb{S}^1)$ tiene dos clases de isomorfismos de haces, en otras palabras, solo existe un haz de círculos orientado no trivial en este caso.

1.4. Clase de Euler de haces de círculos

Las *clases características* surgen en topología y geometría diferencial como invariantes asociados a ciertos haces fibrados. La idea es asignar a cada haz fibrado (comúnmente a un haz vectorial), una clase en la cohomología de la base que codifica información acerca de cuán “torcido” está el haz. Así, una clase característica se puede pensar como una función del conjunto de clases de isomorfismos de haces fibrados a la cohomología del espacio base.

Un aspecto fundamental de las clases características es su naturalidad, la cual consiste en la compatibilidad con el ‘pull-back’ de haces. Esto significa que, dada una clase característica $c(\xi)$ asociada a un haz ξ sobre una variedad N y una función $f : M \rightarrow N$, la clase característica del haz inducido $f^*(\xi)$ sobre M se obtiene mediante el ‘pull-back’ $c(f^*(\xi)) = f^*(c(\xi))$. Esta compatibilidad hace que las clases características sean invariantes topológicos para distinguir haces.

La clase de Euler como obstrucción a secciones globales

A partir de la biyección establecida en el Ejemplo 1.9, caracterizamos el número entero que se le asocia a un haz de círculos orientado con base una superficie orientable. Las referencias para esta parte serán los libros [Mor01] y [MS79].

De la Proposición 1.2 cada haz de círculos orientado es un \mathbb{S}^1 -haz principal, por lo que si existe una sección global, entonces el haz es trivial. Así, la *clase de Euler* se puede ver como la obstrucción que impide la extensión de secciones locales a secciones globales. De otra manera, mide esencialmente, el fallo de “emparejar” adecuadamente las secciones en las intersecciones de las trivializaciones locales del haz fibrado.

Construcción de la clase de Euler. En lo que sigue, vamos a considerar un haz de círculos $\xi = (\pi, X, B)$ orientado con espacio base B un CW-complejo. En particular, podemos dotar a B de una estructura celular de tal forma que al tomar las trivializaciones del haz, cada 2-célula permanezca dentro de un abierto de las trivializaciones.

1. Comencemos eligiendo una sección $s : B^{(0)} \rightarrow X$ del haz definida en el 0-esqueleto $B^{(0)}$ de la base. Debido a que cualquier haz de círculos orientado es trivial sobre un complejo de dimensión 1, por la clasificación en el Teorema 1.7, entonces es posible extender a la sección $s : B^{(0)} \rightarrow X$ a todo el 1-esqueleto sin problemas, que en abuso de notación denotaremos igualmente por s . Note que la preimagen del 1-esqueleto es un haz de círculos trivial.
2. Sobre cada 2-célula e^2 (que es homeomorfa a un disco \mathbb{D}^2) de la estructura celular de B , el haz es trivial sobre e^2 , por la elección de la estructura celular. Así, existe una trivialización

$$\varphi : \pi^{-1}(e^2) \rightarrow e^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Además, la sección s definida en el 1-esqueleto, está bien definida en la frontera de e^2 de

manera que, podemos componer la sección con la trivialización obteniendo

$$(\varphi \circ s)(x) = (x, g(x)),$$

donde $g : \partial e^2 = \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una función continua. El grado de g , que denotaremos por d_{e^2} , es la obstrucción a extender la sección sobre e^2 . Si el grado es distinto de cero, significa que la sección no se puede extender de manera global sobre esa célula sin discontinuidades.

3. Por último consideramos la asignación del grado a cada 2-célula de la estructura celular en B

$$\begin{aligned} c_s : C_2(B) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ e^2 &\mapsto d_{e^2}. \end{aligned}$$

Afirmamos que esta función define un 2-cociclo en la cohomología celular de B , véase [Mor01, Lema 6.17]. Para demostrar esta afirmación, debemos mostrar que para cualquier 3-célula orientada, la suma de los grados en su frontera se anula (la *condición de cociclo*). En [Mor01, Lemas 18-20] se demuestra que la clase del cociclo no depende de la sección que se tome, pues para diferentes secciones los cociclos definidos difieren de una 1-cofrontera. Además, esta clase tampoco depende de la elección de la estructura celular, ni de las trivializaciones tomadas, por lo tanto, definimos un invariante.

Definición 1.5 (Clase de Euler). Sea $\xi = (\pi, X, B)$ un haz de círculos con espacio base B un CW-complejo. Definimos la **clase de Euler** $e(\xi)$ del haz como la clase del cociclo c_s construido como antes

$$e(\xi) = [c_s] \in H^2(B, \mathbb{Z})$$

La clase de Euler como invariante completo

En [Mor01, Teo. 6.22] se muestra que la clase de Euler es en realidad una clase característica, esto significa, que si $f : B' \rightarrow B$ es una función continua y $f^*\xi$ es el pull-back del haz con respecto de f , entonces

$$e(f^*\xi) = f^*e(\xi),$$

donde en un abuso de notación $f^* : H^2(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B'; \mathbb{Z})$ también denota al morfismo en cohomología inducido por f . Además, muestra que la asignación entre clases de haces y su clase de Euler es biyectiva

$$\text{Bun}_{\mathbb{S}^1}^+(B) \ni \xi \mapsto e(\xi) \in H^2(B; \mathbb{Z}),$$

Lema 1.1 (Clase de Euler del haz universal). Sea $\xi_u = \mathbb{S}^1 \hookrightarrow S^\infty \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^\infty$ el haz universal descrito en el Ejemplo 1.2. Al identificar $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, la clase de Euler

$$e(\xi_u) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$$

coincide con el generador en \mathbb{Z} . Por ese motivo se le denomina **clase de Euler universal**.

Esbozo de la demostración. Para esclarecer esta afirmación seguimos el siguiente argumento; veremos en el siguiente ejemplo que el número de Euler de la fibración de Hopf es 1 en $\mathbb{Z} \cong H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$, y por la construcción del haz universal, las inclusiones respectivas de la 3-esfera y de la esfera de Riemann ($\mathbb{C}P^1$) conmutan con la proyección $\pi : \mathbb{S}^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, se puede mostrar que el pull-back de la inclusión $i : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ es la fibración de Hopf $\xi = i^*\xi_u$. Luego, de la naturalidad de la clase de Euler

$$H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \ni e(\xi_u) \mapsto e(i^*\xi_u) = e(\xi) \mapsto 1 \in \mathbb{Z} \cong H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}).$$

□

Teorema 1.11. La clase de Euler es un invariante completo para las clases de isomorfismos de haces de círculos orientados sobre un espacio CW-complejo fijo.

La biyección del Corolario 1.1, dada entre $[B, \mathbb{C}P^\infty]$ y el grupo $H^2(B; \mathbb{Z})$ está dada como sigue; primero encontramos una clase universal u en $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = H^2(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ la cual es el generador de \mathbb{Z} y definimos

$$\lambda : [B, \mathbb{C}P^\infty] \rightarrow H^2(B; \mathbb{Z})$$

por $(f : B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty) \mapsto f^*(u)$, así, el Teorema 1.7 da la biyección

$$Bun_{\mathbb{S}^1}^+(B) \rightarrow H^2(B; \mathbb{Z}),$$

definida por mandar el haz ξ a $f^*(u)$ donde f es su función clasificante, Definición A.10. Notemos que la clase u es la introducida en el ejemplo anterior, es decir, $u = e(\xi_u)$. Además, esta biyección coincide con la asignación de la clase de Euler, lo cual se ve del Ejemplo anterior y la naturalidad de ambas aplicaciones

$$\xi \mapsto e(\xi) = e(f^*(\xi_u)) = f^*(e(\xi_u)) = f^*(u).$$

Así, dado que la asignación de la clase de Euler a cada haz orientado es una biyección, esta clase es un invariante completo en la clasificación de haces de círculos orientados.

El número de Euler de los haces de círculos orientados sobre superficies

Recordemos el enunciado general de la *dualidad de Poincaré*. Sea B una n -variedad cerrada orientada y denotemos por $[B] \in H_n(B; \mathbb{Z})$ su clase fundamental. El *producto cap*

$$\frown : H^k(B; \mathbb{Z}) \otimes H_n(B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k}(B; \mathbb{Z})$$

define, para cada $0 \leq k \leq n$, un isomorfismo natural

$$H^k(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(B; \mathbb{Z}), \quad [c] \mapsto [B] \frown [c].$$

En el caso particular, cuando $[c] \in H^k(B; \mathbb{Z})$ y $[S] \in H_k(B; \mathbb{Z})$, la clase fundamental se evalúa completamente en el cociclo, por lo que es habitual escribir

$$\langle [c], [S] \rangle := [c] \frown [S] \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Definición 1.6 (Número de Euler). Sea S una superficie orientable compacta y cerrada, y sea $\xi = \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} S$ un haz de círculos orientado sobre S . Sea $e(\xi) = [c_s] \in H^2(S; \mathbb{Z})$ la clase de Euler del haz ξ . Al entero, también denotado $e(\xi)$ (por un ligero abuso de notación), que le corresponde a la clase de Euler bajo el isomorfismo de dualidad de Poincaré lo llamamos el **número de Euler** del haz ξ , es decir $e(\xi) = \langle [c_s], [S] \rangle \in \mathbb{Z}$.

Notación 1.3. De nuestra discusión en este capítulo, se sigue que los haces de círculos orientados sobre una superficie orientable compacta S_g , se clasifican por su número de Euler $k \in \mathbb{Z}$. Denotamos por X_g^k a la 3-variedad orientable que corresponde al espacio total del haz $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X \rightarrow S_g$ con número de Euler $k \in \mathbb{Z}$.

Observación 1.3. El número de Euler k se obtiene evaluando el cociclo c_s en la clase fundamental $[S_g]$. Cambiar la orientación de S_g invierte el signo de k , lo que produce espacios totales homeomorfos pero fibrados no equivalentes, de modo que

$$X_g^k \cong X_g^{-k}.$$

Terminamos este capítulo calculando los números de Euler de los haces de círculos antes descritos. De los Ejemplos 1.12 y 1.13 se tiene que

$$\mathbb{S}^3 \cong X_0^1 \quad \text{y} \quad L(p, 1) \cong X_0^p.$$

Finalmente, en el Ejemplo 1.14 vemos que el haz tangente unitario $\tau_{S_g}^1$ tiene número de Euler $2 - 2g$, por lo que

$$US_g \cong X_g^{2-2g}.$$

Ejemplo 1.12 (Clase de Euler de la fibración de Hopf). De acuerdo a lo anterior queremos construir una sección del 1-esqueleto de la esfera (vista como el plano complejo $\mathbb{C}P^1$) y ver como falla en extenderse a una sección global. Si consideramos los abiertos U y V como en el Ejemplo 1.1. Entonces $\mathbb{C}P^1 = U \cup V$ y notemos que podemos definir una sección $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ sobre V como

$$[z : 1] \mapsto \left(\frac{z}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \right).$$

Ya que el punto $[1, 0]$ no se encuentra en U , queremos ver como falla esta sección en extenderse en la 2-célula que lo contiene. Consideremos $D = \{[1 : z] \in V \mid |z|^2 \leq 1\}$, de modo que $\partial D \cong \mathbb{S}^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ y fijémonos en $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$g = Pr_2 \circ (\varphi_V \circ s),$$

donde φ_V es la trivialización que contiene a D , recordando que está definida por la siguiente regla de correspondencia $\varphi_V(z_1, z_2) = \left([z_1 : z_2], \frac{z_1}{|z_1|} \right)$, entonces $g(z) = z^{-1}$, pues para cualquier z en ∂D tenemos que $s(z) = s([1 : z]) = s([z^{-1} : 1])$, así g tiene grado -1 . Por último, $\phi([\mathbb{S}^2]) = -1$.

Ejemplo 1.13 (Clase de Euler de los espacios lente). La clase de Euler del haz $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow L(p, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ está determinada por la acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en las fibras. La clase de Euler de este haz se puede calcular como la clase de Euler de la fibración de Hopf haciendo unas pequeñas modificaciones. Siguiendo el caso anterior y el Ejemplo 1.3, entonces $\mathbb{C}P^1 = U \cup V$ definidos como antes y definimos una sección sobre U en el haz de Hopf como $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$

$$[z, 1] \mapsto \left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \right).$$

Luego, componiendo s con la función cubriente $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow L(p, 1)$ obtenemos una sección $\tilde{s} : V \rightarrow \pi'(V) \subset L(p, 1)$. El punto $[1, 0]$ no se encuentra en U , y queremos ver como falla esta sección en extenderse en la 2-célula que lo contiene. Consideremos D como en el Ejemplo 1.12 y fijémonos en $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$g = Pr_2 \circ (\varphi_V \circ \tilde{s})$$

donde recordamos que φ_V está definida por $\varphi_V(z_1, z_2) = ([z_1 : z_2], \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^p)$, así $g(z) = z^{-p}$, de manera que g tiene grado $-p$. Así, la clase de Euler del haz $(\pi', L(p, 1), \mathbb{S}^2)$ es $-p$. Notemos que, el signo negativo está determinado por la orientación escogida de \mathbb{S}^2 , por lo que un cambio en esta orientación nos da un haz $(\pi', L(p, 1), \mathbb{S}^2)$ con clase de Euler positiva.

Ejemplo 1.14 (El haz tangente unitario de una superficie). Sea S_g una superficie orientable y cerrada de dimensión 2. Resulta que el número de Euler del haz tangente unitario $\tau_{S_g}^1$ coincide con la característica de Euler de S_g como a continuación describimos.

Notemos que dar una sección global $s : S_g \rightarrow US_g$ equivale a definir un campo vectorial unitario sin ceros sobre la superficie, es decir, asignar continuamente en cada punto $p \in S_g$ un vector tangente unitario $s(p)$.

1. Comenzamos tomando una triangulación K de S_g y consideramos dos veces su subdivisión baricéntrica K' y K'' . Para todo vértice $v \in K'$ este se encuentra en el interior de un único simplejo $\sigma \in K$ al cual denotaremos por $\sigma(v)$ y denotaremos a su baricentro por $b_{\sigma(v)}$. Así definimos

$$\varphi : K'' \rightarrow K'$$

tal que a nivel de vértices $v \mapsto b_{\sigma(v)}$. Esta función es simplicial y nos ayudará a definir un campo vectorial en la superficie.

2. *Construcción del campo vectorial (i.e. la sección de $\tau_{S_g}^1$):* Sea $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow M$ la geodésica en σ_p que une p con $\varphi(p)$, parametrizada por longitud de arco normalizada para que la longitud total sea 1. Entonces, definimos el campo vectorial X como:

$$X(p) = \begin{cases} \dot{\gamma}_p(0) & \text{si } p \notin \{b_\sigma \mid \sigma \in K\}, \\ 0 & \text{si } p \in \{b_\sigma \mid \sigma \in K\}. \end{cases}$$

Así, los únicos puntos singulares¹ de X son $\{b_\sigma \mid \sigma \in K\}$, los baricentros originales de vértices, aristas y caras de la triangulación inicial K .

¹ Decimos que un punto $q \in S_g$ es una singularidad (o cero aislado) de X , un campo vectorial sobre S_g , si existe una vecindad suficientemente pequeña alrededor de q donde X no se anula en ningún otro punto más que en q .

3. Para determinar explícitamente el índice² de cada singularidad, basta con saber que tipo de singularidad es: Cerca de un vértice de la triangulación original, el campo vectorial se comporta como un campo radial que apunta "hacia afuera". Este campo radial local tiene índice +1. Cerca del baricentro de una arista (1-símplex), el campo se comporta de manera "hiperbólica", es decir, hay direcciones donde el campo apunta hacia el baricentro y direcciones donde apunta hacia afuera. Este tipo de singularidad corresponde exactamente a una singularidad tipo "silla", cuyo índice es -1 . Cerca del baricentro de una cara (2-símplex), el campo vectorial se comporta como un campo radial que apunta "hacia adentro". Este comportamiento local corresponde también a un campo con índice +1. Así obtenemos claramente la siguiente distribución de índices locales: Sea $\sigma \in K$ un i -símplice de la triangulación original ($i = 0, 1, 2$). Se tiene que el índice del campo X en el baricentro b_σ es:

$$\text{ind}(b_\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \in K^{(0)} \text{ (vértices),} \\ -1 & \text{si } \sigma \in K^{(1)} \text{ (aristas),} \\ +1 & \text{si } \sigma \in K^{(2)} \text{ (caras).} \end{cases}$$

Así, la suma total de los índices es:

$$\sum_{\sigma \in K} \text{ind}(b_\sigma) = \chi(S_g),$$

donde $\chi(S_g)$ es la característica de Euler de la superficie M . Para finalizar, el índice de cada singularidad de X , por definición, coincide con el grado de las aplicaciones que obstruyen extender la sección sobre cada 2-símplejo. Por dualidad de Poincaré, la suma total de estos grados (índices) sobre toda la superficie es justamente la evaluación de la clase de Euler sobre la clase fundamental:

$$\langle e(\tau_{S_g}^1), [S_g] \rangle = \sum_{\sigma \in K} \text{ind}(b_\sigma) = \chi(S_g).$$

Observación 1.4. Si $\chi(S_g) \neq 0$, no existe tal sección global, lo cual equivale a que $e(\tau_{S_g}^1) \neq 0$. Para $\chi(S_g) = 0$, como en el toro, sí hay un campo vectorial no nulo y en consecuencia, $e(\tau_{S_g}^1) = 0$.

² El índice de un cero se define considerando una vecindad cerrada alrededor de q , difeomorfa a un disco, y tomando el grado del mapa inducido por el campo vectorial restringido a su frontera: $\text{ind}(X, q) = \deg\left(\frac{X}{\|X\|} : S^1 \rightarrow S^1\right)$.

Capítulo 2

Extensiones de grupos y haces de círculos

En este capítulo nos enfocamos en el estudio de *extensiones de grupos* con núcleo abeliano y su clasificación mediante la cohomología de grupos en grados bajos. Estos objetos tienen una conexión profunda con los haces fibrados del capítulo anterior, la cual emerge a través de la clase de Euler.

Comenzamos introduciendo la noción de extensión de grupos con núcleo abeliano. A continuación, se muestra que las *escisiones* de una extensión fija de un grupo G con núcleo abeliano A están clasificadas por el primer grupo de cohomología $H^1(G; A)$. Además, recordamos cómo las clases de equivalencia de este tipo de extensiones están clasificadas por el segundo grupo de cohomología $H^2(G; A)$.

El estudio se especializa después al caso en que las extensiones de grupos surgen a partir de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía de haces del círculo orientados sobre superficies. Veremos que estas extensiones son *centrales* y que su clase asociada en cohomología coincide con la clase de Euler del haz original.

2.1. Extensiones de grupos y cohomología de grupos

En esta sección utilizaremos la cohomología de grupos en dimensiones bajas para estudiar y clasificar ciertas extensiones de grupos. En el Apéndice B se presenta la definición formal de homología y cohomología de grupos, haciendo hincapié en que trabajaremos con grupos *discretos*. Esta sección está basada en [Br82, Capítulo IV] [Lö17, Sección 1.5.2] [Ca25].

Definición 2.1 (Extensión de grupos). Sean G y A dos grupos. Una **extensión** de G por A es un grupo E que se puede poner en una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1.$$

Dado que $i(A) = \text{Nuc}(p)$ se le suele llamar al grupo A el **núcleo de la extensión**, en este sentido, decimos que una extensión tiene núcleo abeliano si A es un grupo abeliano. Dado este caso, escribimos a la extensión como

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1.$$

Observación 2.1. En lo que sigue, trabajaremos con extensiones con núcleo abeliano, lo que será de ayuda para definir una estructura de $\mathbb{Z}G$ -módulo al grupo A .

Acción inducida por la extensión. Cada extensión del grupo G por un grupo abeliano A induce una acción de G sobre A , como sigue: considere la siguiente extensión de grupos,

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

donde $i(A)$ es un subgrupo normal de E . Esto permite definir una acción de E sobre $i(A)$ por conjugación:

$$e \cdot i(a) := e i(a) e^{-1}.$$

Como i es un monomorfismo, esta acción pasa a una acción de E sobre A , y queremos traducirla en una acción de G sobre A .

Para ello, tomamos $g \in G$. Como $p : E \rightarrow G$ es sobreyectivo, existe al menos un elemento $e_g \in E$ tal que $p(e_g) = g$. Para cada $a \in A$, el elemento $e_g i(a) e_g^{-1}$ pertenece a $\text{Im}(i)$, ya que $i(A)$ es normal en E . Como i es inyectivo, existe un único $a_g \in A$ tal que

$$i(a_g) = e_g i(a) e_g^{-1}.$$

Definimos entonces la acción inducida de G sobre A por la regla

$$g \cdot a := a_g. \tag{2.1}$$

Esta acción no depende de la elección de e_g . Si $e \in E$ con $p(e) = g$, se tiene $p(e^{-1}e_g) = 1$, por lo que $e^{-1}e_g = i(b)$ para algún b en A . Entonces,

$$e_g i(a) e_g^{-1} = e i(b) i(a) i(b)^{-1} e^{-1} = e i(a) e^{-1}.$$

Donde la última igualdad se sigue del hecho de que A es abeliano. Sin embargo, la acción si depende del grupo E , de manera que, extensiones diferentes de G por A pueden inducir acciones distintas de G sobre A , incluso si A y G permanecen fijos, véase el Ejemplo 2.2.

Observación 2.2. La acción de G sobre A le da una estructura de $\mathbb{Z}G$ -módulo a A siempre que éste sea un grupo abeliano. Más aún, $i(A)$ es un subgrupo del centro de E si y sólo si A tiene una estructura de G -módulo trivial, es decir, la acción de G en A es trivial. En este caso decimos que la extensión de grupos es **central**.

2.1.1. Primer grupo de cohomología y clasificación de escisiones

En esta sección describimos la *clasificación de escisiones* para una extensión que escinde. Comenzamos con la noción de escisión, para luego relacionarla con derivaciones y cohomología.

Definición 2.2. Dada una extensión de grupos

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

decimos que la extensión **escinde** si existe una sección $s : G \rightarrow E$ (tal que $p \circ s = Id_G$) que es un morfismo de grupos. A dicha aplicación s se le llama **escisión** de la extensión.

Caracterización de las extensiones que escinden. Consideremos G y A grupos, con $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ una representación de una acción de G en A . Definimos el **producto semidirecto** $A \rtimes_{\varphi} G$ como el grupo cuyo conjunto subyacente es $A \times G$ con la operación

$$(a_1, g_1) \cdot (a_2, g_2) = (a_1 \varphi(g_1)(a_2), g_1 g_2).$$

Para cualquier acción, la extensión $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A \rtimes_{\varphi} G \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ escinde naturalmente, donde i es la inclusión $a \mapsto (a, 1)$ y p la proyección $(a, g) \mapsto g$. Por otro lado, si una extensión $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$ escinde, entonces E es isomorfo a un producto semidirecto $A \rtimes_{\varphi} G$ para cierta acción dada $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$. Véase [Br82, §IV, Prop. 2.1]

Problema de clasificación de escisiones. La caracterización anterior muestra que existe una única extensión de G por A que escinde, para una acción fija, y en cuyo caso es isomorfo a $A \rtimes_{\varphi} G$. Sin embargo, distintas secciones dan, en general, copias *distintas* de G dentro de E . Y el problema de clasificación se puede entender como describir *todas* las maneras de reconstruir E como producto semidirecto $A \rtimes_{\varphi} G$.

Por otro lado, los productos semidirectos describen las extensiones de G por A que escinden. Clasificar dichas extensiones hasta cierta noción de isomorfismo (véase Definición 2.4) empieza por estudiar las acciones $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, pues cada acción determina (y es determinada por) una única extensión, salvo equivalencia. Sin embargo, dos acciones distintas pueden originar grupos isomorfos.

Ejemplo 2.1. Sean $A = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ y $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Consideremos la representación de acción $\varphi_1(t)(a) = 2a$ (multiplicación por 2 módulo 7), y la representación de acción distinta $\varphi_2(t)(a) = 4a$. Estas acciones no son conjugadas en $\text{Aut}(A) \cong (\mathbb{Z}/7)^{\times}$ (pues este grupo es abeliano), pero los productos semidirectos

$$A \rtimes_{\varphi_1} G \quad \text{y} \quad A \rtimes_{\varphi_2} G$$

son isomorfos vía $(a, t^n) \mapsto (a, t^{2n})$. Esto muestra que dos acciones diferentes de G sobre A pueden dar lugar a grupos isomorfos, aunque las acciones no sean equivalentes por conjugación.

Ejemplo 2.2. Podemos obtener dos extensiones de la forma $0 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ a partir de los productos semidirectos,

$$\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/3 \rtimes_c \mathbb{Z}/2 \quad \text{y} \quad S_3 \cong \mathbb{Z}/3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2,$$

donde la acción $c : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/3)$ es trivial, mientras que φ induce la acción multiplicar por -1 , de $\mathbb{Z}/2$ en $\mathbb{Z}/3$. Ambas extensiones escinden, pero los grupos resultantes $\mathbb{Z}/6$ y el grupo simétrico S_3 no son isomorfos.

Derivaciones y su relación con las escisiones

La clasificación de escisiones mediante la cohomología de grupos se basa en su interpretación como *derivaciones*. En concreto, toda escisión determina una derivación, y recíprocamente, cada derivación da lugar a una escisión.

Consideremos que G actúa en A . Una **derivación** de G a A es una función $d : G \rightarrow A$ que satisface la regla de Leibniz:

$$d(gh) = d(g) + g \cdot d(h) \quad \forall g, h \in G.$$

Y una **derivación principal** es una derivación de la forma $p_a(g) = a - g \cdot a$ para algún $a \in A$.

Observación 2.3. El conjunto de derivaciones, denotado por $\text{Der}(G, A)$ es un grupo abeliano con la operación inducida por sumar en A y denotamos por $\text{Pr}(G, A)$ al subgrupo de derivaciones principales.

Lema 2.1 ([Br82, §IV.2]). Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ una extensión que escinde. Entonces dada una derivación $d : G \rightarrow A$ se define una escisión

$$s_d : G \rightarrow E, \quad s_d(g) = i(d(g)) s(g),$$

donde s es una escisión fija. Esta s_d es un homomorfismo y satisface $p \circ s_d = \text{id}_G$. Por otro lado, dada una escisión $r : G \rightarrow E$, se define una derivación $d_r : G \rightarrow A$ mediante

$$i(d_r(g)) = r(g) s(g)^{-1}.$$

Estas correspondencias son inversas entre sí, y por tanto hay una biyección natural entre derivaciones $d : G \rightarrow A$ y escisiones $r : G \rightarrow E$ de la extensión.

Proposición 2.1. Existe un isomorfismo de grupos

$$H^1(G; A) \cong \text{Der}(G, A) / \text{Pr}(G, A),$$

donde los 1-cociclos en $C^1(G; A)$ se identifican con las derivaciones, y las 1-cofronteras corresponden a derivaciones principales.

Esta identificación se hace evidente al usar la resolución barra, véase el Apéndice B.

Interpretación cohomológica de las escisiones

En cohomología, dos derivaciones pertenecen a la misma clase si difieren en una derivación principal. Dada la biyección entre derivaciones y escisiones, esto nos lleva a preguntar cuándo dos escisiones s y s' deben considerarse equivalentes. Esta noción de equivalencia se formaliza mediante el concepto de A -conjugación.

Definición 2.3. Sean $s, s' : G \rightarrow E$ escisiones de la extensión

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

Decimos que s y s' son **A -conjugadas** si existe algún $a \in A$ tal que $s'(g) = i(a) s(g) i(a)^{-1}$ para todo g en G .

Dos escisiones están relacionadas por A -conjugación si y sólo si las derivaciones correspondientes difieren por una derivación principal. Y de acuerdo a la correspondencia determinada entre escisiones y derivaciones, y al hecho de que $H^1(G; A)$ es isomorfo al grupo de derivaciones módulo derivaciones principales, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3 (Clasificación de escisiones). Sean A un grupo abeliano y G un grupo actuando en A por $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$. Entonces, el grupo de cohomología $H^1(G; A)$ está en biyección con el conjunto de clases de escisiones hasta A -conjugación de la extensión

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \rtimes_{\varphi} G \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Observación 2.4. La clase trivial en $H^1(G; A)$ corresponde a la escisión donde la acción de G en A se refleja de forma “trivial”.

Ilustremos el Teorema 2.3 con el siguiente ejemplo concreto de como el primer grupo de cohomología determina las escisiones de una extensión de grupos que escinde.

Ejemplo 2.4. Considérese el grupo diédrico infinito $D_{\infty} = \langle r, s \mid s^2 = 1, s r s^{-1} = r^{-1} \rangle$ y la extensión de grupos

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} D_{\infty} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Donde $i : n \mapsto r^n$ y p está definida por $p(r^n) = 0$ y $p(r^n s) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La relación $s r s = r^{-1}$ muestra que el elemento no trivial de \mathbb{Z}_2 actúa sobre \mathbb{Z} por $n \mapsto -n$ (la acción antipodal), por lo tanto, $D_{\infty} \cong \mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$.

Por cada $n \in \mathbb{Z}$ existen escisiones $s_n : \mathbb{Z}_2 \rightarrow D_{\infty}$ dadas por $1 \mapsto r^n s$ y por supuesto $0 \mapsto e$. Por otro lado, $i : \mathbb{Z} \rightarrow D_{\infty}$ mediante $i(n) = r^n$, así que dado un $a \in \mathbb{Z}$, tenemos la conjugación

$$i(a) s_n(1) i(a)^{-1} = r^a (r^n s) r^{-a} = r^{a+n} s r^{-a},$$

y usando la relación $s r^{-a} s = r^a$, se concluye que esto vuelve a ser algún $r^m s$. Es decir, *todas* las escisiones son \mathbb{Z} -conjugadas. El Teorema 2.3 predice entonces

$$H^1(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = 0$$

lo cual coincide con el cálculo topológico $H^1(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = H^1(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{R}P^{\infty}; \mathbb{Z}) = 0$.

2.1.2. Segundo grupo de cohomología y clasificación de extensiones

En esta sección mostramos que el segundo grupo de cohomología $H^2(G; A)$, donde A es un $\mathbb{Z}G$ -módulo abeliano, clasifica hasta cierta equivalencia natural todas las extensiones que mantienen la acción de G sobre A . Para ello, comenzamos estableciendo qué significa que dos extensiones sean equivalentes cuando la estructura de A como $\mathbb{Z}G$ -módulo permanece fija.

Definición 2.4. (Extensiones equivalentes) Sea E una extensión de G por A , donde A es abeliano. Si E' es otra extensión de G por A , que preserve la acción de G en A , entonces diremos que ambas extensiones son **equivalentes** si existe un morfismo de grupos $\Phi : E \rightarrow E'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & E & & & \\
 & & & \downarrow \Phi & & & \\
 1 & \longrightarrow & A & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & G & \longrightarrow & 1 \cdot \\
 & & & E' & & &
 \end{array}$$

En otras palabras, Φ restringe a la identidad en A y respeta la proyección sobre G . Note también que de existir el morfismo Φ este es un isomorfismo.

Notación 2.1. Denotaremos por $\mathcal{E}(G; A)$ al conjunto de **clases de equivalencia** de tales extensiones que fijan la estructura de $\mathbb{Z}G$ -módulo en A .

El siguiente teorema relaciona el problema de clasificación de extensiones con el segundo grupo de cohomología. Una demostración detallada de este resultado puede consultarse en [Br82],[Lö17],[Ca25].

Teorema 2.5 (Clasificación de extensiones de grupo con núcleo abeliano). Sea G un grupo y A un $\mathbb{Z}G$ -módulo. Existe una biyección

$$H^2(G; A) \longleftrightarrow \mathcal{E}(G; A).$$

Observación 2.5. En particular, de este resultado y la Observación 2.2 se sigue que $H^2(G; \mathbb{Z})$, donde \mathbb{Z} es el G -módulo trivial, clasifica las extensiones centrales de G por \mathbb{Z} .

A continuación describimos de manera explícita la biyección del Teorema 2.5 y su inversa.

Construcción de la extensión a partir de un 2-cociclo. Sea $f : G \times G \rightarrow A$ un 2-cociclo normalizado tal que $[f] \in H^2(G; A)$. Definimos el grupo E_f considerando el conjunto $A \times G$ y dotándolo de la operación

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + gb + f(g, h), gh).$$

La inclusión $i : A \rightarrow E_f$ dada por $a \mapsto (a, 1)$ y la proyección $p : E_f \rightarrow G$ dada por $(a, g) \mapsto g$ definen la extensión de grupos

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} G \rightarrow 1.$$

De esta construcción puede verse qué acción de G en A inducida por la extensión recupera la estructura de G -módulo de A . Más aún, puede probarse que cociclos cohomólogos definen extensiones equivalentes.

Construcción de la clase de cohomología a partir de una extensión. Consideremos una extensión tal que la acción inducida de G en A recupera la estructura de G -módulo de A

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1.$$

Elegimos una sección de conjuntos $s : G \rightarrow E$ normalizada, es decir, $s(1) = 1$. Notemos que para todas $g, h \in G$ se tiene $p(s(g)s(h)) = g \cdot h = p(s(g \cdot h))$, de modo que $s(g \cdot h) (s(g)s(h))^{-1}$ se encuentra en $i(A)$. Por lo tanto, existe una única $f_s(g, h) \in A$ tal que

$$s(g \cdot h) i(f_s(g, h)) = s(g)s(h).$$

La función $f_s : G \times G \rightarrow A$ así definida satisface $f_s(g, 1) = f_s(1, g) = 0$ (es decir, es normalizado) y la identidad de 2-cociclo

$$f_s(g, h) + g \cdot f_s(h, k) = f_s(gh, k) + f_s(g, hk) \quad \forall g, h, k \in G.$$

Por tanto $f_s \in Z_N^2(G; A)$ (el conjunto de cociclos normalizados). Resulta que cambiar la sección produce un cociclo cohomólogo, de modo que a la extensión se le asocia una clase bien definida $[f_s] \in H^2(G; A)$.

Observación 2.6. El 2-cociclo f_s se puede pensar como el error que tiene la sección s de ser un morfismo (una escisión). Así, cuando este cociclo corresponde a la clase trivial del grupo de cohomología, la sección es realmente un homomorfismo y, por tanto, la extensión escinde. Recíprocamente, si $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ es la representación de la acción que da la estructura de G -módulo al A , entonces la extensión dada por el producto semidirecto $A \rtimes_{\varphi} G$ corresponde a la clase trivial en $H^2(G; A)$.

Ejemplo 2.6 (Clase de Euler universal discreta). Sea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ el cubriente universal del círculo. Cada levantamiento $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de un homeomorfismo del círculo que preserva la orientación cumple $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$ y es estrictamente creciente, lo cual define el subgrupo de levantamientos

$$\widetilde{\text{Homeo}}^+(\mathbb{S}^1) = \{ \tilde{f} \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}) \mid \tilde{f} \circ t = t \circ \tilde{f} \},$$

donde $t : x \mapsto x + 1$ es la traslación entera. Definiendo el morfismo $\phi(\tilde{f}) : \rho(x) \mapsto \rho(\tilde{f}(x))$ se induce un morfismo sobreyectivo

$$\phi : \widetilde{\text{Homeo}}^+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1),$$

dado por $\tilde{f} \mapsto \phi(\tilde{f})$, con núcleo $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, el grupo de *transformaciones de Deck* del cubriente ρ , el cual es central en $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$. De este modo, obtenemos la siguiente extensión central de grupos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{Homeo}}^+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 1. \quad (2.2)$$

Notemos que $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ tiene torsión, mientras que $\widetilde{\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)} \subset \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ es libre de torsión, por lo que la extensión no escinde, y por lo tanto su clase de cohomología asociada en $H^2(\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1); \mathbb{Z})$ es no trivial. A esta clase se le suele llamar la *clase de Euler universal discreta* y resulta ser un generador de $H^2(\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

2.2. Extensiones procedentes de haces de círculos

En esta sección veremos que las extensiones de grupos que provienen de haces de círculos orientados sobre una superficie orientable S_g con $g \geq 1$ son centrales. Veremos también la relación que existe entre la clase de Euler del haz y la clase de cohomología en $H^2(S_g; \mathbb{Z})$ que le corresponde a la extensión de grupos asociada. Los argumentos aquí descritos están basados en [Vi16, Chapter 2.5].

Dado un haz de círculos $\xi = (\pi, X, B)$, podemos asociarle una sucesión exacta larga de grupos de homotopía, véase [Ha02, Teo. 4.41],

$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_2(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_2(B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B) \rightarrow 1.$$

En el caso que la base B del haz ξ es una superficie S con $\chi(S) \leq 0$, esta sucesión se reduce a una extensión de $\pi_1(S)$ por $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(S) \rightarrow 1,$$

puesto que S es un espacio $K(\pi_1(S), 1)$.

Proposición 2.2. Sea $\xi = (\pi, X, S)$ un haz de círculos orientado sobre una superficie cerrada S donde $\chi(S) \leq 0$. Entonces la extensión inducida en grupos fundamentales

$$0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(S) \rightarrow 1. \quad (2.3)$$

es central.

Demostración. La acción inducida por la Extensión 2.3 de $\pi_1(S)$ en $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, siguiendo la Ecuación 2.1, está dada por

$$i(\gamma \cdot \alpha) := \sigma(\gamma) i(\alpha) \sigma(\gamma)^{-1},$$

para todo $\gamma \in \pi_1(S)$ y $\alpha \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$, donde $\sigma : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(X)$ es una sección arbitraria fijada.

Aquí $\sigma(\gamma)$ es un levantamiento de γ , entonces es un lazo $\sigma(\gamma) : (\mathbb{S}^1, t_0) \rightarrow (X, e_0)$. Por otro lado, $i(\alpha) : (\mathbb{S}^1, t_0) \rightarrow (X_{x_0}, e_0)$ es un lazo en la fibra de x_0 , que denotamos por X_{x_0} , el cual se proyecta al lazo constante en $\pi_1(S, x_0)$. Consideremos el *pull-back* de ξ sobre γ y $g : \gamma^*X \rightarrow X$ la función inducida por el *pull-back* tal que (g, γ) es un morfismo de haces, véase Observación A.2,

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^*X, \bar{e}_0) & \xrightarrow{g} & (X, e_0) \\ p_\gamma \downarrow & & \downarrow p \\ (\mathbb{S}^1, t_0) & \xrightarrow{\gamma} & (S, x_0) \end{array}$$

Notemos que este es un haz de círculos orientado sobre el círculo, por lo tanto, γ^*X es un toro y entonces, $\pi_1(\gamma^*X, \bar{e}_0) = \mathbb{Z}^2$ es abeliano. Ahora, definimos los lazos en $\pi_1(\gamma^*X, \bar{e}_0)$ por

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\gamma) &: (\mathbb{S}^1, t_0) \rightarrow (\gamma^*X, \bar{e}_0) \quad \text{dado por } z \mapsto (z, \sigma(z)) \\ \bar{\alpha} &: (\mathbb{S}^1, t_0) \rightarrow (\gamma^*X, \bar{e}_0) \quad \text{dado por } z \mapsto (z, i(\alpha(z))).\end{aligned}$$

Así, se cumple que $g_* : \bar{\sigma}(\gamma) \mapsto \sigma(\gamma)$ y $g_* : \bar{\alpha} \mapsto \alpha$. Por consiguiente, concluimos

$$\sigma(\gamma) \alpha \sigma(\gamma)^{-1} = g_* \left(\bar{\sigma}(\gamma) \bar{\alpha} \bar{\sigma}(\gamma)^{-1} \right) = g_*(\bar{\alpha}) = \alpha.$$

Esto demuestra que la acción de $\pi_1(S)$ en $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es trivial, y por ende la extensión es central. \square

Observación 2.7. En la demostración anterior, si tomamos un haz de círculos no orientado, y consideramos la extensión en grupos fundamentales que induce, entonces el *pull-back* sobre γ no necesariamente es isomorfo al toro, pues podría ser la botella de Klein. Por lo que en ciertos casos, puede que la acción sea no trivial.

El número de Euler de la extensión inducida

Del Teorema 2.5 se sigue que las clases de equivalencia de extensiones centrales de $\pi_1(S)$ por \mathbb{Z} están en biyección con $H^2(\pi_1(S); \mathbb{Z})$. En particular, si $S = S_g$ es una superficie orientable de género $g \geq 1$, gracias a los siguientes isomorfismos,

$$H^2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \cong_{(1)} H^2(S_g; \mathbb{Z}) \cong_{(2)} \mathbb{Z},$$

las extensiones centrales de $\pi_1(S_g)$ por \mathbb{Z} están clasificadas por un entero e_E .

Definición 2.5 (Número de Euler de una extensión central de $\pi_1(S_g)$ por \mathbb{Z}). Consideremos $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow E \rightarrow \pi_1(S_g) \rightarrow 1$ una extensión central y $[c]$ su clase de cohomología asociada en $H^2(\pi_1(S); \mathbb{Z})$. El **número de Euler e_E de la extensión** se define como el entero que le corresponde a la clase $[c]$ bajo la identificación anterior.

Para entender la identificación entre los grupos de cohomología, en lo siguiente consideremos a S_g con la estructura celular dada con una 0-célula x_0 , $2g$ 1-células correspondientes a los generadores canónicos en su grupo fundamental a_j, b_j , y una 2-célula, denotada por P , cuyo borde está dado por $\partial P = \prod_{j=1}^g [a_j, b_j]$. Tal como en el cociente de la Figura 2.1 para el caso S_2 . Además, consideramos a su grupo fundamental con presentación

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = 1 \rangle.$$

En la Figura 2.1 se muestra una región fundamental para el caso S_2 , que consiste en la unión de la mitad de las 1-células (etiquetadas en forma positiva), la 2-célula (en color azul) y una 0-célula que consiste en uno de los vértices de la 1-célula a_1 . En general, denotamos por F a la región fundamental.

El isomorfismo (1) explicado con más detalle en el Apéndice B.3 es inducido por la aplicación entre la resolución barra del grupo $\pi_1(S_g)$ y el complejo de cadenas del cubriente universal de S_g , $r_F : \bar{C}^n(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \rightarrow C_{\text{sing}}^n(\tilde{S}_g; \mathbb{Z})$, dado como sigue en el caso $n = 2$: para cada $\varphi : \pi_1(S_g)^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ un 2-cociclo (una derivación), la asignación r_F va a un 2-cociclo (singular) $r_F(\varphi)$

$$\varphi \mapsto r_F(\varphi)(s) = \varphi(g_{s(e_0)}^{-1}g_{s(e_1)}, g_{s(e_1)}^{-1}g_{s(e_2)}), \quad (2.4)$$

donde $s : \Delta^2 \rightarrow \tilde{S}$ es un 2-simplejo con vértices $s(e_i)$, y cada $g_{s(e_i)} \in \pi_1(S_g)$ es el único elemento que manda a $s(e_i)$ dentro de la región fundamental F , de la acción de $\pi_1(S_g)$ en el cubriente universal \tilde{S}_g de S_g .

La región fundamental F se puede dividir en en $4g$ triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_{4g}$ uniendo cada vértice en la frontera con el baricentro y_0 en el polígono formado por la 2-célula.

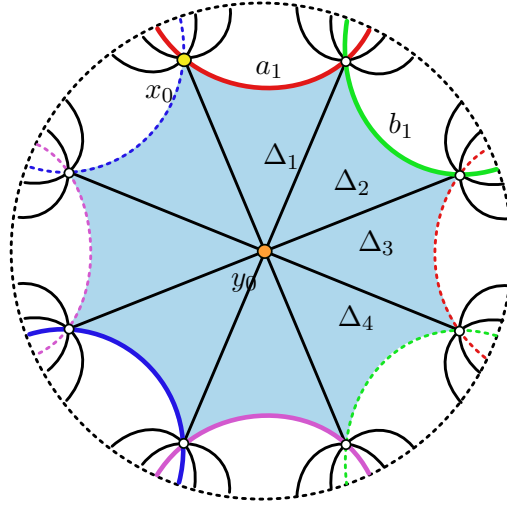


Figura 2.1: Región fundamental de $\pi_1(S_2)$ en el cubriente universal de S_2 .

Luego, el isomorfismo (2) corresponde al isomorfismo de la dualidad de Poincaré, que de acuerdo a la Fórmula (1.2) coincide con la evaluación de la clase fundamental en el cociclo representante de la clase, es decir,

$$\langle [r_F(\varphi)], [S_g] \rangle = \sum r_F(\varphi)(s_j) \quad (2.5)$$

donde $\sum s_j = [S_g] \in H_2(S_g; \mathbb{Z})$ es la clase fundamental de la superficie y los s_j son las funciones de adjunción de los triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_{4g}$.

Lema 2.2. Sea

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} \pi_1(S_g) \rightarrow 1$$

una extensión central y fijemos un generador $z := \iota(1)$ de $\iota(\mathbb{Z})$. El número de Euler $e_E \in \mathbb{Z}$ de la extensión satisface la igualdad en E

$$\prod_{j=1}^g [\sigma(a_j), \sigma(b_j)] = z^{e_E}, \quad (2.6)$$

para cualquier sección de conjuntos $\sigma : \pi_1(S_g) \rightarrow E$. En particular, e_E es independiente de la elección de σ , y cambia de signo al reemplazar z por z^{-1} .

Demostración. Para calcular el número de Euler e_E vía la Fórmula 2.5, primero fijamos la sección $\sigma : \pi_1(S_g) \rightarrow E$ y definimos el cociclo c_σ en $Z^2(\pi_1(S_g), \mathbb{Z})$ como

$$c_\sigma(g, h) = \sigma(g)\sigma(h) \cdot \sigma(gh)^{-1},$$

de acuerdo al Teorema 2.5. Luego, determinamos el morfismo r_F de la Fórmula 2.4, y para ello debemos entender cuales son los elementos $g_{s(e)}$ en $\pi_1(S_g)$ donde $s(e)$ es un vértice del simplejo en la región fundamental F , es decir, un vértice de los triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_{4j}$.

Comencemos enfocándonos en los triángulos consecutivos $\Delta_{4j-3}, \Delta_{4j-2}, \Delta_{4j-1}, \Delta_{4j}$. Estos triángulos tienen un vértice en común que es y_0 además de los vértices de la arista a_j o b_j respectivamente. En particular, los vértices en a_j y b_j son de la forma $g^{-1} \cdot x_0$ para algún g , y por sencillez denotamos por g_1 y g_2 a los elementos en $\pi_1(S_g)$ que mandan a estos vértices a x_0 , teniendo en cuenta el orden de los vértices recorriendo en sentido horario el borde del polígono. Dado que y_0 ya se encuentra en la región fundamental, g_0 es trivial, y tenemos:

$$\begin{array}{c} \Delta_{4j-3} \\ \Delta_{4j-2} \\ \Delta_{4j-1} \\ \Delta_{4j} \end{array} \begin{array}{c|c|c} g_0 & g_1 & g_2 \\ \hline 1 & w_j & w_{j+1}a_j \\ 1 & w_j a_j & w_j a_j b_j \\ 1 & w_j a_j b_j & w_j a_j b_j a_j^{-1} \\ 1 & w_j a_j b_j a_j^{-1} & w_{j+1} \end{array}$$

Donde abreviamos $w_j := \prod_{i=1}^{j-1} [a_i, b_i]$ con la convención $w_1 = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-3}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-2}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-1}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j}) \\ = c_\sigma(w_j, a_j) + c_\sigma(w_j a_j, b_j) + c_\sigma(w_j a_j b_j, a_j^{-1}) + c_\sigma(w_j a_j b_j a_j^{-1}, b_j^{-1}) \\ = \sigma(w_j) \sigma(a_j) \sigma(b_j) \sigma(a_j)^{-1} \sigma(b_j)^{-1} \sigma(w_{j+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Al sumar sobre todos los triángulos que recubren S aparece una “suma telescópica”:

$$\begin{aligned} e_E = \langle r_F(c_\sigma), [S] \rangle &= \sum_{j=1}^g r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-3}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-2}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j-1}) + r_F(c_\sigma)(\Delta_{4j}) \\ &= \prod_{j=1}^g \sigma(a_j) \sigma(b_j) \sigma(a_j)^{-1} \sigma(b_j)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Terminamos este capítulo demostrando que si la extensión central proviene de un haz orientado de círculos, entonces su número de Euler coincide exactamente con el número de Euler del haz.

Proposición 2.3. Sea $g \geq 1$. El número de Euler de un haz de círculos ξ orientado

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} S_g$$

coincide con el número de Euler la extensión central asociada

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X, e_0) \rightarrow \pi_1(S_g, x_0) \rightarrow 1.$$

Demostración. Sea ξ el haz de círculos orientado $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} S_g$. Como antes, demos a $S = S_g$ la estructura de CW-complejo usual: una única 0-célula x_0 ; $2g$ 1-células $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$; y una 2-célula P cuyo borde es $\partial P = [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Recordemos que el número de Euler del haz ξ está dado por $e(\xi) := \langle [c_s], [S_g] \rangle$ donde c_s es la obstrucción de extender la sección $s : S^{(1)} \rightarrow X$ del haz ξ , Definición 1.6.

En concreto, elegimos un punto base $e_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ y una sección $\sigma : \pi_1(S, x_0) \rightarrow \pi_1(X, e_0)$. Sobre el 1-esqueleto fijamos las secciones $\sigma(a_j)$ y $\sigma(b_j)$. En este caso, el número de Euler $e(\xi)$ es el elemento de $\pi_1(\pi^{-1}(x_0)) \cong \mathbb{Z}$ obtenido al tomar el grado de la composición:

$$\partial P \xrightarrow{\text{adj.}} S^{(1)} \xrightarrow{s} X \xrightarrow{\text{proy.}} \pi^{-1}(x_0),$$

donde proy es la restricción a la fibra de x_0 . Esta composición recorre, en $\pi_1(X, e_0)$, el producto de conmutadores $\prod_{j=1}^g [\sigma(a_j), \sigma(b_j)]$.

Por otro lado, de acuerdo a la Proposición 2.2 el número de Euler de la extensión central está dado por

$$e_E := \langle [r_F(c_\sigma)], [S] \rangle = \prod_{j=1}^g [\sigma(a_j), \sigma(b_j)].$$

En consecuencia, los números de Euler de la extensión y del haz de círculos orientado coinciden $e_E = e(\xi)$. \square

Observación 2.8. La intuición detrás del resultado anterior es que la traslación completa de cada levantamiento de un conmutador calcula exactamente el grado de la sección sobre la 2-célula, es decir, la obstrucción a extender una sección global del haz.

De los resultados anteriores y la Notación 1.3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. [Una presentación de $\pi_1(X_g^k)$] Para $k \in \mathbb{Z}$ y $g \geq 0$, una presentación del grupo fundamental de la 3-variedad X_g^k está dada por

$$\pi_1(X_g^k) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, z \mid z \text{ central}, [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = z^k \rangle, \quad (2.7)$$

donde se escogen $\sigma(a_j) = A_j$, $\sigma(b_j) = B_j$ y z la imagen del generador en $\pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Capítulo 3

Grupos modulares de superficies

El objetivo de este capítulo es exponer de manera condensada los principales resultados y herramientas sobre los *grupos modulares de superficies* que emplearemos en el siguiente capítulo. Esta tesis se centra en calcular los grupos modulares de ciertas 3-variedades que fibran como haz de círculos con base una superficie, y, en este contexto, entender la estructura y propiedades del grupo modular de la superficie base resulta esencial para describir el grupo modular de la 3-variedad correspondiente.

Una de las virtudes de los grupos modulares es su estrecha relación con otros grupos clásicos. En este capítulo, exploraremos dos resultados que ilustran estas conexiones. Por un lado tenemos la *sucesión exacta corta de Birman*, la cual muestra cómo se relacionan tres grupos importantes en una sucesión exacta: el grupo fundamental de la superficie, el grupo modular de la superficie con una ponchadura y el propio grupo modular de la superficie cerrada. Por otro lado, describiremos el *Teorema de Dehn–Nielsen–Baer* que establece un isomorfismo entre el grupo modular extendido de la superficie y el grupo de automorfismos externos de su grupo fundamental.

Finalmente, revisaremos algunos resultados sobre la cohomología en grados bajos del grupo modular de superficies, dado que desempeñan un papel relevante en la clasificación de extensiones de este grupo por otros grupos. En particular, esta información cohomológica permitirá, en el capítulo siguiente, argumentar sobre la estructura de las extensiones de grupos que aparecen cuando consideramos haces de círculos orientados sobre superficies.

3.1. Definición y primeros ejemplos

Definición 3.1 (El grupo modular de una superficie). El **grupo modular de una superficie cerrada orientable** S se define como el grupo de componentes conexas del grupo $\text{Homeo}^+(S)$ de homeomorfismos de S que preservan la orientación

$$\text{Mod}(S) := \pi_0(\text{Homeo}^+(S)).$$

Alternativamente, si $\text{Homeo}_0(S)$ denota la componente conexa de la identidad de $\text{Homeo}^+(S)$, es decir, el subgrupo de homeomorfismos isotópicos a la identidad, entonces el grupo modular $\text{Mod}(S)$ se puede definir como el grupo cociente

$$\text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S).$$

Observación 3.1. El grupo $\text{Homeo}^+(S)$ es un grupo topológico (por lo que tiene sentido tomar componentes conexas) con la topología compacto-abierta y el cociente anterior hereda la topología cociente. No obstante, $\text{Mod}(S)$ es un grupo *discreto*, pues $\text{Homeo}_0(S)$ es un subgrupo normal abierto de $\text{Homeo}^+(S)$ (lo cual sucede para superficies de tipo finito¹). Esto contrasta con la naturaleza ‘continua’ del grupo total $\text{Homeo}^+(S)$.

Observación 3.2. Si la superficie S tiene frontera no vacía, en la definición se requiere además que los homeomorfismos actúen como la identidad sobre la frontera.

En particular, el siguiente resultado sobre el tipo de homotopía de $\text{Homeo}_0(S)$ juega un rol en futuros argumentos, por ejemplo en la sucesión exacta corta de Birman.

Teorema 3.1. [Ha66, Teo. 5.1] Sea S_g una superficie compacta y orientable de género $g > 1$. Entonces $\text{Homeo}_0(S)$ es un espacio contráctil.

La definición de grupo modular de superficies puede establecerse de distintas formas: se puede considerar, por ejemplo, difeomorfismos en vez de homeomorfismos, o incluso usando clases de homotopía en vez de clases de isotopía. Notablemente, salvo en unos pocos casos excepcionales, para superficies compactas orientables, los grupos así definidos resultan ser isomorfos entre sí (véase [FM12, §2.1]). Algunas variantes importantes del grupo modular surgen al considerar homeomorfismos que preservan estructuras adicionales en la superficie S . En lo siguiente será útil considerar una superficie con una ponchadura o bien restringirnos a clases de homeomorfismos que dejan fijo un punto.

Definición 3.2. Sea S una superficie. El **grupo modular de S relativo a un punto $x \in S$** se define como

$$\text{Mod}(S, x) := \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x)),$$

donde $\text{Homeo}^+(S, x)$ denota el grupo de homeomorfismos de S que preservan la orientación y que fijan a x .

Observación 3.3. Si S es una superficie compacta y denotamos por $S^1 := S \setminus x$ la superficie con una ponchadura, entonces existe una identificación natural

$$\text{Mod}(S, x) \cong \text{Mod}(S^1).$$

Una propiedad útil de los homeomorfismos de superficies establece que, bajo condiciones generales, todo homeomorfismo puede deformarse (vía una homotopía) a uno que fija un punto; por ello cada clase de $\text{Mod}(S_g)$ admite un representante que mantiene fijo un punto. En particular será útil en el cálculo de $\text{Mod}(S^2)$.

¹ Es decir, aquellas superficies cuyo grupo fundamental es finitamente generado.

Proposición 3.1. Sea S una superficie compacta y arco conexas. Entonces, para cualquier homeomorfismo $f : S \rightarrow S$, existe un homeomorfismo $f^* : S \rightarrow S$, homotópico a f , que deja fijo al menos un punto de S .

Demostración. Dado un punto $x_0 \in S$, consideremos su imagen $f(x_0) \in S$. Como S es arco conexas, existe un camino simple $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ que une x_0 con $f(x_0)$. Sea U una vecindad tubular de la imagen de α , que podemos suponer homeomorfa a un disco cerrado $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$. Construimos un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}^2$ tal que $\phi(x_0) = 1/2$ y $\phi(f(x_0)) = -1/2$. El homeomorfismo $\psi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definido por $re^{i\theta} \mapsto re^{2r\pi i\theta}$ es la identidad en la frontera de \mathbb{D}^2 e intercambia $1/2$ y $-1/2$, además, ϕ es isotópica a la identidad $\text{Id}_{\mathbb{D}^2}$. Definimos $f^* : S \rightarrow S$ como

$$f^*(x) = \begin{cases} \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi \circ f(x), & x \in U, \\ f(x), & x \notin U. \end{cases}$$

Entonces f^* es homotópico a f y, por construcción, deja fijo el punto x_0 . \square

Primeros ejemplos de grupos modulares

Dado el rol que juegan en la teoría, en un primer acercamiento de los grupos modulares es usual determinar estos grupos para el anillo y el disco. Asimismo, pueden obtenerse la descripción del grupo modular de superficies de género pequeño, como la esfera y el toro. A modo de orientación, en las técnicas usuales, resumimos los cálculos clásicos de $\text{Mod}(S)$ para algunas de las superficies mencionadas.

Ejemplo 3.2 (El disco y el disco con una ponchadura). El *Lema de Alexander* muestra que todo homeomorfismo del disco que fija la frontera es homotópico a la identidad; en consecuencia $\text{Mod}(D^2)$ tiene una única clase y, por tanto, es trivial. El mismo argumento puede usarse para un disco con una ponchadura.

Ejemplo 3.3 (La esfera y la esfera con una ponchadura). Los grupos modulares de $\text{Mod}(S^2)$, $\text{Mod}(S_0^1)$ son triviales, con S_0^1 , la esfera con una ponchadura. En efecto, la superficie S_0^1 es homeomorfa a \mathbb{R}^2 , y en \mathbb{R}^2 toda función continua es homotópica a la función identidad. Luego, de la Proposición 3.1 cada homeomorfismo de S^2 es homotópico a uno que deja fijo un punto. Entonces podemos restringirnos a homeomorfismos de S_0^1 , los cuales ya vimos que son isotópicos a la identidad. De esto se sigue que $\text{Mod}(S^2)$ es trivial.

Ejemplo 3.4 (El toro). En este caso $\text{Mod}(T^2) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Cada clase de homeomorfismo del toro induce un automorfismo de $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$. Lo que define un morfismo

$$\text{Mod}(T^2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Preservar la orientación corresponde a tener determinante $+1$, de modo que la imagen está en $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. La inyectividad se obtiene porque un homeomorfismo del toro que actúa trivialmente en homología, es isotópico a la identidad, esto se muestra usando homotopías “lineales” en el cubriente universal \mathbb{R}^2 . El morfismo es sobreyectivo, pues toda matriz de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ proviene de un homeomorfismo lineal del plano que pasa al cociente.

Ejemplo 3.5 (El anillo). Consideremos el anillo $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. El grupo modular $\text{Mod}(\mathbb{A})$ consiste en las clases de isotopía de homeomorfismos que son la identidad en la frontera. Cada homeomorfismo orientado que fija la frontera se levanta al cubriente universal del anillo (una banda infinita) como una traslación entera, y el “número de traslación” induce un isomorfismo

$$\text{Mod}(\mathbb{A}) \cong \mathbb{Z}.$$

El generador es precisamente la clase de isotopía del *giro de Dehn estándar* en el anillo, cuya definición recordamos a continuación.

Giros de Dehn

A continuación describimos ciertos homeomorfismos que son fundamentales para describir generadores del grupo modular de una superficie.

Definición 3.3. Sea \mathbb{A} el anillo $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, definimos el **giro de Dehn estándar** como el homeomorfismo $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ definido por:

$$T(z, t) = (e^{2i\pi t} z, t).$$

Sea S una superficie orientable y sea $a : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow S$ una *curva cerrada simple* en S , es

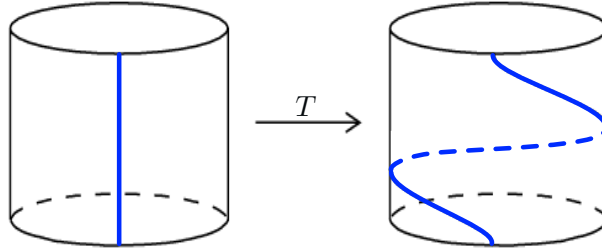


Figura 3.1: Giro de Dehn estándar.

decir un encaje de \mathbb{S}^1 en S . Consideremos una *vecindad tubular*² N de a . Definimos el **giro de Dehn a lo largo de la curva a** como el homeomorfismo de S dado por

$$T_a(x) = \begin{cases} (\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(x) & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in S \setminus N. \end{cases}$$

donde $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es el giro de Dehn estándar en el anillo \mathbb{A} , y $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow N$ es un homeomorfismo que preserva la orientación.

² Es decir $N = \text{Im}(\varphi)$, donde $\varphi : \mathbb{A} \hookrightarrow S$ es un encaje del anillo en S tal que $\varphi(\mathbb{A}) \cap \partial S = \emptyset$ y además, $\varphi(z, \frac{1}{2})(z) = a(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

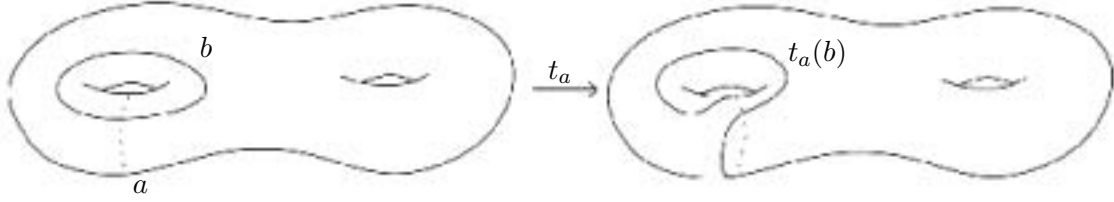


Figura 3.2: Giro de Dehn a lo largo de la curva a .

Notación 3.1. También llamamos al giro de Dehn estándar a la clase de isotopía $t \in \text{Mod}(\mathbb{A})$ del homeomorfismo T y denotamos por t_a a la clase de isotopía del giro de Dehn a lo largo de la curva a .

Observación 3.4. La clase de isotopía t_a no depende de la elección de la vecindad tubular ni de la orientación de la curva a ; sin embargo, sí depende de la orientación de la vecindad regular. Además, si a y b son curvas isotópicas, entonces $t_a = t_b$.

3.2. La sucesión exacta corta de Birman

La sucesión exacta corta de Birman relaciona al grupo modular con un punto marcado y el grupo modular de una superficie con característica de Euler negativa. En tal sucesión exacta tenemos dos morfismos, el morfismo ‘Forget’ y el morfismo ‘Push’ en inglés.

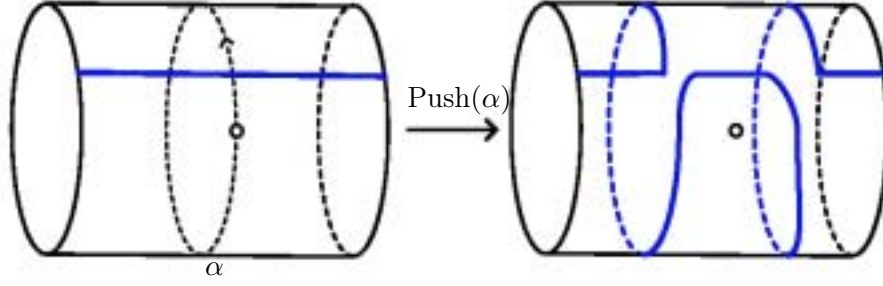
El morfismo “Forget”. Este morfismo va del grupo modular relativo a un punto x en S , al grupo modular de la superficie,

$$\text{Forget}: \text{Mod}(S; x) \longrightarrow \text{Mod}(S),$$

y envía una clase $[f]$ de homeomorfismos que fijan al punto x a la clase $[f]$ en $\text{Mod}(S)$ considerando que en esta no hay la condición de fijar el punto. Como S es arco conexa, de la Proposición 3.1 sabemos que cualquier clase en $\text{Mod}(S)$ contiene un representante que deja fijo a x , de modo que Forget es sobreyectivo.

El morfismo “Push”. Para cada clase $\alpha \in \pi_1(S, x)$ elegimos un representante a y elegimos una vecindad regular N_a de dicha curva. Si S una superficie orientable, entonces $N_a \cong \mathbb{A}$ es un anillo con bordes b y c , así definimos

$$\begin{aligned} \text{Push}: \pi_1(S, x) &\rightarrow \text{Mod}(S; x) \\ \alpha &\mapsto t_b t_c^{-1}. \end{aligned}$$

Figura 3.3: Morfismo Push sobre la curva α .

Si S es una superficie con característica de Euler negativa, entonces este morfismo es inyectivo: un elemento no trivial de $\pi_1(S, x)$ “empuja” el punto a lo largo de una curva esencial, produciendo un giro de Dehn no trivial en la clase modular.

Para una demostración detallada, consulte por ejemplo [FM12, Teo. 4.6].

Teorema 3.6 (Sucesión exacta corta de Birman). Sea S una superficie con característica de Euler negativa. Si $x \in S$, entonces la sucesión

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{Push} \text{Mod}(S, x) \xrightarrow{Forget} \text{Mod}(S) \longrightarrow 1 \quad (3.1)$$

es una sucesión exacta corta conocida como la **sucesión exacta corta de Birman**.

Idea de la demostración. Sea S una superficie compacta y orientable con $\chi(S) < 0$, y $x \in S$ un punto fijo. La idea clave es que existe una fibración

$$\text{Homeo}^+(S, x) \hookrightarrow \text{Homeo}^+(S) \xrightarrow{\psi} S,$$

donde $\psi(f) = f(x)$ y la inclusión es “olvidar” que x es un punto fijo. Como ψ es un haz localmente trivial, existe una sucesión exacta en grupos de homotopía

$$\cdots \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}^+(S)) \rightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x)) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\text{Homeo}^+(S)) \rightarrow 1$$

Al identificar $\text{Mod}(S) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S))$ y $\text{Mod}(S, x) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x))$, y dado que la componente identidad $\text{Homeo}_0(S)$ es contráctil (Teorema 3.1), se deduce que el resto de la sucesión es trivial. Por último, i_* coincide con Forget, pues la inclusión de $\text{Homeo}^+(S, x)$ en $\text{Homeo}^+(S)$ simplemente “olvida” la condición de fijar x . Y, por otro lado, ∂ se identifica con Push, al enviar cada lazo basado en x al homeomorfismo que empuja x a lo largo de ese lazo y lo regresa. Obteniendo la sucesión exacta corta de Birman. \square

3.3. El Teorema de Dehn–Nielsen–Baer

El teorema de Dehn–Nielsen–Baer establece una correspondencia precisa entre la topología de una superficie y la estructura algebraica de su grupo fundamental, afirmando que el grupo modular $\text{Mod}(S)$ es isomorfo a un subgrupo de índice dos de $\text{Out}(\pi_1(S))$, el grupo de automorfismos externos³.

Definición 3.4. El **grupo modular extendido** de una superficie S se define como

$$\text{Mod}^\pm(S) := \pi_0(\text{Homeo}(S)),$$

el conjunto de clases de homotopía libre de homeomorfismos, incluyendo aquellos que no preservan la orientación.

Observación 3.5. Existe un morfismo natural $\text{Mod}^\pm(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que registra la preservación o inversión de la orientación, dando lugar a una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}^\pm(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Esta sucesión escinde, ya que existe siempre un homeomorfismo de orden dos que invierte la orientación de S . En particular, $\text{Mod}(S)$ es un subgrupo de índice dos en $\text{Mod}^\pm(S)$.

Dada una clase $[f] \in \text{Mod}^\pm(S)$, consideramos el morfismo inducido en el grupo fundamental por un representante de la clase,

$$f_* : \pi_1(S, p) \rightarrow \pi_1(S, f(p)).$$

Corrigiendo el cambio del punto base mediante un camino γ de p a $f(p)$, se define un automorfismo, que denotaremos de la misma manera por sencillez, como

$$f_*([\alpha]) = [\gamma * f(\alpha) * \gamma^{-1}]$$

para todo lazo α basado en p (usualmente llamado el morfismo de cambio del punto base). El automorfismo obtenido depende de la elección del camino γ que se tome, sin embargo, para una elección distinta, los automorfismos son conjugados (difieren de un automorfismo interno). Entonces, se define el morfismo

$$\sigma : \text{Mod}^\pm(S) \longrightarrow \text{Out}(\pi_1(S, p))$$

donde $\sigma([f]) = [f_*]$. La función σ está bien definida, ya que dos homeomorfismos homotópicos libremente inducen automorfismos conjugados, y diferentes elecciones del camino γ también modifican f_* únicamente por conjugación.

Una exposición exhaustiva de la demostración aparece en [FM12, Teo. 8.1].

³ Sea G un grupo, para cualquier $h \in G$ le asociamos $I_h : G \rightarrow G$ un automorfismo dado por $g \mapsto hgh^{-1}$, para todo $g \in G$. El conjunto de automorfismos internos forman un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$, denotado por $\text{Inn}(G)$. Definimos el grupo de automorfismos externos de G como el cociente $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$.

Teorema 3.7 (Dehn-Nielsen-Baer). Sea $g \geq 1$. El morfismo

$$\sigma : \text{Mod}^\pm(S_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g))$$

es un isomorfismo.

En particular, en el caso $g = 1$ tenemos que

$$\text{Mod}^\pm(T^2) \cong GL(2, \mathbb{Z}) = \text{Out}(\pi_1(T^2)) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^2).$$

Acción sobre la clase fundamental y orientación

Dar una orientación a la superficie S_g corresponde a elegir un generador de la homología de grado 2, $H_2(S_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$: la *clase fundamental* $[S_g]$ de la superficie. El grupo modular extendido $\text{Mod}^\pm(S_g)$ actúa sobre $H_2(S_g; \mathbb{Z})$, y esta acción detecta si un homeomorfismo preserva o invierte la orientación.

Dado que existe una identificación natural entre $H_2(S_g; \mathbb{Z})$ y $H_2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z})$, también el grupo $\text{Out}(\pi_1(S_g))$ actúa sobre $H_2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, y esta acción es compatible con la acción topológica del grupo modular bajo el isomorfismo del Teorema de Dehn–Nielsen–Baer 3.7. La situación se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}^\pm(S_g) & \longrightarrow & \text{Out}(\pi_1(S_g)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Aut}(H_2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z})) \end{array}$$

Aquí, la flecha vertical izquierda envía la clase de un homeomorfismo a su acción sobre la orientación (trivial si la preserva, no trivial si la invierte), mientras que la flecha vertical derecha corresponde a la acción inducida en homología por automorfismos externos del grupo fundamental. La conmutatividad del diagrama garantiza que la orientación se preserve a nivel topológico si y solo si se preserve a nivel algebraico.

Esto nos permite definir un subgrupo de automorfismos del grupo fundamental que modela la orientación de manera puramente algebraica:

Definición 3.5. Sea S_g una superficie orientable cerrada. Definimos

$$\mathcal{AUT}(\pi_1(S_g)) := \{\varphi \in \text{Aut}(\pi_1(S_g)) \mid \varphi_* \text{ actúa trivialmente en } H_2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z})\}.$$

Asimismo, definimos el subgrupo correspondiente en $\text{Out}(\pi_1(S_g))$,

$$\mathcal{OUT}(\pi_1(S_g)) := \text{imagen de } \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g)) \text{ en } \text{Out}(\pi_1(S_g)).$$

Bajo el isomorfismo del teorema de Dehn–Nielsen–Baer,

$$\text{Mod}^\pm(S_g) \cong \text{Out}(\pi_1(S_g)),$$

el subgrupo $\text{Mod}(S_g) \subset \text{Mod}^\pm(S_g)$, constituido por clases de isotopía de homeomorfismos que preservan la orientación, se identifica con el subgrupo $\mathcal{O}UT(\pi_1(S_g)) \subset \text{Out}(\pi_1(S_g))$ que actúa trivialmente sobre la clase fundamental. De este modo, la preservación de la orientación se traduce algebraicamente como la preservación de la clase fundamental en homología.

Teorema de Dehn-Nielsen-Baer para superficies con una ponchadura

Sea $S = S_g^1$ una superficie orientable de género $g \geq 1$ con un punto removido. El grupo fundamental $\pi_1(S, p)$, con punto base $p \in S$, posee una clase de conjugación distinguida: la clase del lazo meridional δ que rodea el agujero generado por la ponchadura. Dado que δ detecta topológicamente la presencia del agujero, cualquier automorfismo del grupo fundamental inducido por un homeomorfismo de S debe preservar su clase de conjugación.

Definición 3.6. Definimos $\text{Out}^*(\pi_1(S))$ como el subgrupo de $\text{Out}(\pi_1(S))$ formado por clases de automorfismos que preservan la clase de conjugación del lazo meridional que rodea a x .

Un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ se extiende a un homeomorfismo de la superficie cerrada S_g , y puede considerarse homotópicamente trivial en una vecindad suficientemente pequeña alrededor del agujero. En consecuencia, el lazo meridional δ , que representa una pequeña curva que rodea la ponchadura, debe ser preservado (al menos en su clase de conjugación) bajo el automorfismo inducido por f en el grupo fundamental.

Así, definimos el morfismo $\sigma : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Out}^*(\pi_1(S))$ como $\sigma([f]) := [f_*]$, donde $[f] \in \text{Mod}(S)$ es la clase de isotopía de un homeomorfismo de S , y $[f_*]$ es la clase externa del automorfismo inducido sobre el grupo fundamental. La condición sobre la clase de conjugación de δ garantiza que σ está bien definida.

Teorema 3.8 (Dehn-Nielsen-Baer con una ponchadura). Sea $g \geq 1$ y $S = S_g^1$ una superficie de género g con un punto removido. Entonces, el morfismo

$$\sigma : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Out}^*(\pi_1(S))$$

es un isomorfismo.

Para una discusión más detallada de la demostración, véase [FM12, Teo. 8.8].

3.4. Cálculos de cohomología del grupo modular de superficies

En esta sección presentamos una síntesis de los resultados conocidos sobre los dos primeros grupos de cohomología del grupo modular de una superficie cerrada y orientable $\text{Mod}(S_g)$, haciendo énfasis en los casos con coeficientes torcidos $H^1(S_g; \mathbb{Z})$, entendido como $\text{Mod}(S_g)$ -módulo con la acción usual. En nuestro caso, el interés por los coeficientes torcidos radica en que estos grupos clasifican las posibles extensiones del grupo modular por el grupo $H^1(S_g; \mathbb{Z})$, así como la existencia o no de escisiones de dichas extensiones. Estos cálculos jugarán un rol importante en el cálculo de los grupos modulares de las 3-variedades que fibran como haces de círculos en el capítulo siguiente.

Los cálculos en el caso de coeficientes torcidos son el resultado de contribuciones de Morita [Mor86], de Chen y Tshishiku [CT24], entre otros. Por otro lado, los cálculos con coeficientes enteros, debidos principalmente a Harer [Ha83], ofrecen otras interpretaciones geométricas interesantes de los grupos de cohomología; por ejemplo, en la clasificación de haces de superficies.

Se resumen en la siguiente tabla algunos de los resultados conocidos para los dos primeros grupos de cohomología del grupo modular, tanto con coeficientes enteros como con coeficientes torcidos:

Coeficientes M	$H^1(\text{Mod}(S_g); M)$	$H^2(\text{Mod}(S_g); M)$
\mathbb{Z}	0 (si $g \geq 1$)	\mathbb{Z} (si $g \geq 4$)
$H_1(S_g; \mathbb{Z})$	0 (si $g \geq 1$)	$\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}$ (si $g \geq 8$)

El cálculo de los grupos de cohomología de $\text{Mod}(S_g)$ con coeficientes enteros se apoya de forma estrecha en los correspondientes resultados de homología. Para un estudio completo de la homología en grados bajos (incluidas superficies con ponchaduras y componentes de frontera) véase por ejemplo [CA20]. Los cálculos explícitos de $H^1(\text{Mod}(S_g); \mathbb{Z})$ y $H^2(\text{Mod}(S_g); \mathbb{Z})$ aparecen descritos con más detalle en [FM12, §5.5–5.6].

Cálculo de $H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$

El cálculo del primer grupo de cohomología con coeficientes en $H^1(S_g)$ fue realizado por Morita en [Mor86]. Recordemos que el primer grupo de cohomología de un grupo G con coeficientes en un G -módulo abeliano A se identifica con el grupo de derivaciones módulo derivaciones principales.

Morita muestra que $H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$ puede describirse explícitamente mediante funciones de la siguiente forma. Dada una derivación $d : \text{Mod}(S_g) \rightarrow H^1(S_g)$, definimos la función

$$f_d : \text{Mod}(S_g) \times H_1(S_g) \rightarrow \mathbb{Z},$$

dada por $f_d(\varphi, x) = d(\varphi^{-1})(x)$, donde la acción de $\text{Mod}(S_g)$ sobre $H^1(S_g)$ es la usual.

Se puede verificar que f_d satisface:

- I. $f_d(\varphi, x + y) = f_d(\varphi, x) + f_d(\varphi, y)$
- II. $f_d(\psi\varphi, x) = f_d(\psi, \varphi_*(x)) + f_d(\varphi, x)$ para todo ψ, φ en $\text{Mod}(S_g)$ y todo x, y en $H^1(S_g)$.

Morita demuestra que existe una biyección entre las derivaciones y las funciones que satisfacen las condiciones anteriores. Explícitamente, a una derivación d , se le asocia el morfismo cruzado $f_d(\varphi, x) = d(\varphi^{-1})(x)$. Y, por otro lado, dada una función f con las dos propiedades anteriores, define la derivación $d_f(\varphi)(x) = f(\varphi^{-1}, x)$.

Además, las derivaciones principales corresponden bajo esta biyección a las funciones

$$f_d(\varphi, x) = d(\varphi_*(x) - x).$$

Teorema 3.9. [Mor86, Prop. 4.1] Sea S_g una superficie orientable cerrada de género $g \geq 1$. Entonces,

$$H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) = 0.$$

Idea de la demostración. Morita demuestra que cualquier morfismo cruzado debe tomar una forma específica en los generadores estándar de $\text{Mod}(S_g)$. Usando explícitamente las relaciones básicas del grupo modular (trenzas, hiperelípticas y de desunión), concluye que tales morfismos sólo pueden ser derivaciones principales, es decir, cofronteras en la cohomología.

Sea $f : \text{Mod}(S_g) \times H_1(S_g) \rightarrow \mathbb{Z}$ un morfismo cruzado, es decir, cumple:

- I. $f(\varphi, x + y) = f(\varphi, x) + f(\varphi, y)$ para todo φ, x, y .
- II. $f(\psi\varphi, x) = f(\psi, \varphi_*(x)) + f(\varphi, x)$ para todo ψ, φ, x .

La idea es construir $u \in H^1(S_g)$ tal que $f(\varphi, x) = u(\varphi_*(x) - x)$ para todo φ, x . Para ello, definimos u en los generadores estándar de la homología:

$$u(x_i) := f(t_{a_i}, y_i), \quad u(y_i) := -f(t_{b_i}, x_i)$$

donde t_{a_i}, t_{b_i} son los giros de Dehn respecto a curvas generadoras y x_i, y_i los generadores de $H_1(S_g)$.

Anulación en pares de generadores distintos. Consideremos los giros de Dehn t_{a_i} y t_{a_j} asociados a curvas disjuntas ($i \neq j$), los cuales conmutan:

$$t_{a_i}t_{a_j} = t_{a_j}t_{a_i}.$$

Por la regla del morfismo cruzado,

$$f(t_{a_i}t_{a_j}, x) = f(t_{a_i}, t_{a_j*}(x)) + f(t_{a_j}, x)$$

y

$$f(t_{a_j}t_{a_i}, x) = f(t_{a_j}, t_{a_i*}(x)) + f(t_{a_i}, x).$$

Luego, por conmutatividad (relación de desunión), estas expresiones deben ser iguales para todo x :

$$f(t_{a_i}, t_{a_j*}(x)) + f(t_{a_j}, x) = f(t_{a_j}, t_{a_i*}(x)) + f(t_{a_i}, x)$$

Tomando $x = x_k$ con $k \neq i, j$, y usando que t_{a_j} y t_{a_i} fijan x_k , se deduce que

$$f(t_{a_i}, x_k) = 0, \quad f(t_{a_j}, x_k) = 0$$

por linealidad y simetría. Razonamientos similares usando las relaciones de conmutatividad y trenza muestran que también $f(t_{a_i}, y_j) = 0$ para $i \neq j$, y de igual modo para los otros pares de generadores.

Valores diagonales. Para los valores diagonales como $f(t_{a_i}, x_i)$, $f(t_{b_i}, y_i)$, se emplean relaciones adicionales (por ejemplo, la relación de trenza) para mostrar que estos valores quedan determinados completamente por la función u definida arriba.

Por lo anterior, u está bien definida y

$$f(\varphi, x) = u(\varphi_*(x) - x)$$

para todo φ y x . Es decir, f es un coborde. Por lo tanto,

$$H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) = 0.$$

□

Cálculo de $H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g))$

Morita también estudia el primer grupo de cohomología del grupo modular de la superficie S_g^1 con una ponchadura con coeficientes en $H^1(S_g)$ donde la acción en este módulo es trivial.

En nuestro contexto, el cálculo de este grupo juega un papel clave para comprender la 2-cohomología de $\text{Mod}(S_g)$, ya que $H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g))$ aparece en la sucesión exacta de cinco términos derivada de la sucesión espectral de Lyndon–Hochschild–Serre (véase en el Apéndice B.4) aplicada a la sucesión exacta corta de Birman. Esta sucesión exacta será esencial para determinar la estructura de $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$ y analizar si ciertas extensiones escinden o no.

Teorema 3.10. [Mor86, Prop. 6.4] Para $g \geq 1$, se tiene que $H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g))$ es un grupo cíclico infinito. Con mayor precisión, la siguiente función inducida por la sucesión espectral de Lyndon–Hochschild–Serre (LHS) aplicada a la sucesión exacta corta de Birman

$$H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g)) \xrightarrow{A} \text{Hom}(H_1(S_g), H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \cong \mathbb{Z}$$

es un monomorfismo, y el generador de $H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g))$ se envía al entero $2g - 2$.

Idea de la demostración. Al aplicar la sucesión espectral LHS a la sucesión exacta corta de Birman con el módulo $H^1(S_g)$, los primeros tres términos de la sucesión exacta de cinco términos asociada (véase B.4) son

$$0 \rightarrow H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) \rightarrow H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g)) \xrightarrow{A} \text{Hom}(H_1(S_g), H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)}.$$

El primer grupo es trivial por el Teorema 3.9, entonces el morfismo A es inyectivo. Por otro lado,

$$\mathrm{Hom}(H_1(S_g), H^1(S_g))^{\mathrm{Mod}(S_g)} \cong \mathbb{Z},$$

donde el generador de este grupo está dado explícitamente por el isomorfismo inverso de la dualidad de Poincaré δ . En este caso el isomorfismo está dado en términos del número de intersección algebraica ⁴, $x \mapsto \langle x, - \rangle$ el cual es invariante bajo la acción del grupo modular $\mathrm{Mod}(S_g)$. Cualquier otro morfismo en $\mathrm{Hom}(H_1(S_g), H^1(S_g))$ que sea $\mathrm{Mod}(S_g)$ -invariante es un múltiplo entero de la dualidad de Poincaré. Finalmente, la función A obtenida de la sucesión espectral envía el generador del grupo de cohomología exactamente al isomorfismo inverso de la dualidad de Poincaré multiplicado por $2g - 2$, para ello Morita expresa un cociclo explícito y muestra que su imagen no es divisible por un número entero menor a $2g - 2$, lo cual concluye la demostración. \square

Cálculo de $H^2(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g))$

El cálculo de este grupo de cohomología está dado en [CT24] con el propósito de entender la escisión de las extensiones de $\mathrm{Mod}(S_g)$ por $H^1(S_g)$ con la acción usual. El cálculo explícito de este grupo se obtiene para $g \geq 8$. Sin embargo, para $g \geq 1$ se puede calcular el orden de cierta clase de cohomología que juega un rol importante en la escisión de las extensiones.

Consideremos la sucesión exacta corta de Birman y π' el subgrupo conmutador de $\pi_1(S_g)$. Haciendo cociente sobre π' a los dos primeros términos en la sucesión exacta corta de Birman, obtenemos la extensión derivada de la sucesión de Birman

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_g, x)^{ab} \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_g^1)/\pi' \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_g) \longrightarrow 1. \quad (3.2)$$

La abelianización $\pi_1(S_g, x)^{ab}$ es isomorfo a $H_1(S_g)$ y a la vez isomorfo a $H^1(S_g)$ por la dualidad de Poincaré δ . Por lo tanto, a través de estas identificaciones obtenemos dos extensiones, una de $\mathrm{Mod}(S_g)$ por $H_1(S_g)$ y la otra de $\mathrm{Mod}(S_g)$ por $H^1(S_g)$

$$1 \longrightarrow H_1(S_g) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_g^1)/\pi' \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_g) \longrightarrow 1. \quad (3.3)$$

Ambas relacionadas por lo siguiente; denotemos por eu a la clase de la extensión (3.3) en el grupo $H^2(\mathrm{Mod}(S_g), H_1(S_g))$, entonces la clase de la segunda extensión es $\delta_*(eu)$ en $H^2(\mathrm{Mod}(S_g), H^1(S_g))$, donde

$$\delta_* : H^2(\mathrm{Mod}(S_g), H_1(S_g)) \rightarrow H^2(\mathrm{Mod}(S_g), H^1(S_g)),$$

es el isomorfismo inducido por δ .

El primer objetivo de esta sección es calcular el orden de la clase eu (el cual es el mismo orden de $\delta_*(eu)$). Finalizamos esta sección esbozando el cálculo $H^2(\mathrm{Mod}(S_g), H^1(S_g))$ para $g \geq 8$.

⁴ El número de intersección $\langle -, - \rangle : H_1(S_g) \times H_1(S_g) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el mínimo número de veces que se intersectan dos representantes de homología.

Morfismo transgresión aplicado a la sucesión exacta corta de Birman. En lo siguiente, consideramos la sucesión exacta de cinco términos derivada de la sucesión espectral de Lyndon–Hochschild–Serre aplicada a la sucesión exacta corta de Birman con módulo de coeficientes $H^1(S_g)$. Entonces, de acuerdo a la formula B.3, el morfismo de transgresión se define como

$$\text{tg} : H^1(\pi_1(S_g); H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)^{\pi_1(S_g)}).$$

En los coeficientes del grupo codominio tenemos $H^1(S_g)^{\pi_1(S_g)} = H^1(S_g)$, pues $\text{Mod}(S_g^1)$ actúa trivialmente en $H^1(S_g)$, y por lo tanto el subgrupo $\text{Push}(\pi_1(S_g)) < \text{Mod}(S_g^1)$ también actúa trivialmente en $H^1(S_g)$. El morfismo de transgresión

$$\text{tg} : H^1(\pi_1(S_g); H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)),$$

está definido por $\text{tg}([x]) = eu \smile [x]$. En particular, si eu está representada por el 2-cociclo $\tau(-, -)$, entonces

$$\text{tg}([x]) = [-x(\tau(-, -))],$$

véase la formula B.2. Por otro lado, bajo la identificación $H^1(\pi_1(S_g); H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \cong \mathbb{Z}[\delta]$, el morfismo de transgresión, $\text{tg} : \mathbb{Z}[\delta] \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$, tiene la forma

$$\text{tg}(\delta) = [-\delta(\tau(-, -))] = -\delta_*(eu). \quad (3.4)$$

Proposición 3.2. [CT24, Prop. 4.1] Fije $g \geq 1$ y sea eu la clase de la extensión de grupos 3.3. Entonces, eu tiene orden $2g - 2$ en $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$.

Demostración. El método consiste en aplicar la sucesión espectral LHS a la sucesión exacta corta de Birman con el módulo de coeficientes $H^1(S_g)$ y considerar la siguiente porción de la sucesión exacta de cinco términos asociada:

$$0 \rightarrow H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) \rightarrow H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g)) \xrightarrow{A} \text{Hom}(H_1(S_g), H^1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)).$$

Por los cálculos de Morita el primer término se anula, de modo que la función A es inyectiva. Además, $\text{Hom}(H_1(S_g), H_1(S_g))^{\text{Mod}(S_g)} \cong \mathbb{Z}$ está generado por el isomorfismo de dualidad de Poincaré δ . Así reducimos la sucesión exacta anterior a la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g)) \xrightarrow{A} \langle \delta \rangle \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)).$$

Además, vimos que Morita muestra que el generador de $H^1(\text{Mod}(S_g^1); H^1(S_g))$ corresponde al entero $2g - 2$, es decir, la imagen de A es $(2g - 2)\mathbb{Z}$. En consecuencia, el diferencial $d_2^{0,1}$ desciende a una inyección

$$\mathbb{Z}/(2g - 2)\mathbb{Z} \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g)).$$

Resta demostrar que $d_2^{0,1}$ envía un generador en eu . Por otro lado, del Apéndice B.1 el diferencial $d_2^{0,1}$ es el morfismo de transgresión. De la igualdad en la Ecuación (3.4) se concluye que $d_2^{0,1}$ envía un generador a $\delta(eu)$. \square

Resulta que para $g \geq 8$ el grupo de cohomología $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$ es isomorfo al generado por la clase eu . Para probar esto, los autores de [CT24] usan el siguiente resultado.

Proposición 3.3 (BT01, Cor. 1.2). Se tiene el siguiente isomorfismo

$$H_*(\text{Mod}(S_g^1)) \cong H_*(\text{Mod}(S_g)) \otimes \mathbb{Z}[x]$$

para $g \geq 2*$, donde x tiene grado 2.

Utilizando el teorema de coeficientes universales, la proposición anterior implica que

$$H^i(\text{Mod}(S_g)) \rightarrow H^i(\text{Mod}(S_g^1))$$

es un isomorfismo si $i = 3$ y $g \geq 6$, y es inyectiva si $i = 4$ y $g \geq 8$.

Teorema 3.11. [CT24, Theorem 1.2] Fije $g \geq 1$ y sea eu la clase de Euler de la extensión 3.2. Entonces eu tiene orden $2g - 2$ en $H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g; \mathbb{Z}))$. Además, si $g \geq 8$, entonces eu genera este grupo, es decir,

$$H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g; \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/(2g - 2)\mathbb{Z}.$$

Demostración. Aplicando la sucesión espectral LHS con el módulo trivial \mathbb{Z} , entonces la porción relevante de la página E_2 de la sucesión espectral se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\text{Mod}(S_g); H^2(S_g)) & & & & & & \\ & \searrow^{d_2^{0,2}} & & & & & \\ H^0(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) & 0 & H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g)) & & & & \\ & & & \searrow^{d_2^{2,1}} & & & \\ H^0(\text{Mod}(S_g)) & 0 & H^2(\text{Mod}(S_g)) & & H^3(\text{Mod}(S_g)) & \rightarrow & H^4(\text{Mod}(S_g)) \end{array}$$

Dado que $H_4(\text{Mod}(S_g)) \rightarrow H_4(\text{Mod}(S_g^1))$ es inyectivo, el diferencial $d_2^{2,1}$ es cero. Además, $H_3(\text{Mod}(S_g)) \rightarrow H_3(\text{Mod}(S_g^1))$ es un isomorfismo, por lo que el diferencial $d_2^{0,2}$ es sobreyectivo.

Así, la filtración de $H^2(\text{Mod}(S_g^1))$ inducida por la página E_∞ da lugar a la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g)) \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g^1)) \xrightarrow{F} H^0(\text{Mod}(S_g); H^2(S_g)) \cong \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{d_2^{0,2}} H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para $g \geq 4$, se tiene que $H^2(\text{Mod}(S_g)) \cong \mathbb{Z}[e_1]$ y $H^2(\text{Mod}(S_g^1)) \cong \mathbb{Z}[e, e_1]$, donde e_1 es llamada la clase del cociclo de Meyer [FM12, §5] y la función $\mathbb{Z}[e_1] \rightarrow \mathbb{Z}[e, e_1]$ es la obvia, $e_1 \mapsto e_1$.

Ya que $H^0(\text{Mod}(S_g); H^2(S_g)) \cong H^2(S_g)^{\text{Mod}(S_g)} \cong \mathbb{Z}$, se tiene que $F(e_1) = 2 - 2g$, pues al restringir la extensión asociada a la clase e_1 al subgrupo $\text{Push } \pi_1(S_g) < \text{Mod}(S_g^1)$, se obtiene la extensión

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(US_g) \rightarrow \pi_1(S_g) \rightarrow 1,$$

donde US_g es el haz tangente unitario y su clase de Euler está dada por $2 - 2g$. Así, se deduce el isomorfismo

$$\mathbb{Z}/(2g - 2)\mathbb{Z} \cong H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g)).$$

□

Capítulo 4

Grupos modulares de haces de círculos orientados sobre una superficie

El objetivo de este capítulo es describir el grupo modular $\text{Mod}(X_g^k)$ del espacio total del haz de círculos orientado $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X_g^k \rightarrow S_g$ cuya clase de Euler, vea la Definición 1.5, es $k \in \mathbb{Z} \cong H^2(S_g)$.

El capítulo comienza tratando el caso de estos haces para $g = 0$. Cuando $k = 0$ el espacio total es el haz trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, mientras que para $p > 0$ se obtiene el espacio lente $L(p, 1)$, cuyos grupos modulares fueron calculados en los trabajos de Cerf [Ce68], Gluck [Gl61][Gl62] y Bonahon [Bo83].

A partir de ahí nos centramos en el caso $g \geq 1$. En este caso, los grupos modulares de las 3-variedades X_g^k se pueden relacionar de manera natural, con el grupo modular de la superficie base del haz S_g . En concreto, en este capítulo vemos que esta relación queda plasmada en una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow H^1(S_g) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1,$$

obtenida combinando el Teorema de Dehn–Nielsen–Baer, el de Waldhausen y el análisis de extensiones centrales de Conner–Raymond. Esta relación sitúa al grupo modular de la 3-variedad como una extensión de $\text{Mod}(S_g)$ por $H^1(S_g)$.

Los cálculos cohomológicos de Chen y Tshishiku que describimos en el capítulo anterior completan el panorama. Su análisis de la clase en $H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g))$ asociada a la extensión demuestra que la sucesión se escinde para $g = 1$ y que, para $g \geq 2$, lo hace únicamente cuando k es múltiplo de $2g - 2$. Así, la escisión, y con ella la posibilidad de describir $\text{Mod}(X_g^k)$ como un producto semidirecto, queda descrita por un simple criterio aritmético sobre el número de Euler.

4.1. Grupos modulares de haces de círculos sobre la esfera

En este apartado mostramos el grupo modular de las 3-variedades que aparecen cuando la base del haz es la esfera \mathbb{S}^2 . Estos ejemplos, aunque fundamentales, se apartan de la estrategia cohomológica desarrollada más adelante siguiendo el trabajo de Chen y Tshishiku; las técnicas clásicas que se emplean aquí, de Cerf, Gluck y Bonahon, son esencialmente geométricas.

Recordemos que, salvo el haz trivial, el espacio total X_0^k está determinado por el número de Euler $k > 0$ y es homeomorfo al espacio lente $L(k, 1)$. En lo siguiente tratamos 3 casos; el haz trivial, el caso $L(1, 1) = X_0^1 = \mathbb{S}^3$, y por último $L(k, 1)$ para $k \geq 2$.

Además, recordamos que el grupo modular extendido de una 3-variedad orientable X es el grupo de isotopías de homeomorfismos de X (considerando tanto homeomorfismos que preservan orientación como los que no la preserva), y denotado por

$$\text{Mod}^\pm(X) = \pi_0(\text{Homeo}(X)).$$

El grupo modular del haz trivial

Teorema 4.1. [Gl62, Teorema 5.1] El grupo modular extendido de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ es isomorfo a

$$\text{Mod}^\pm(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Idea de la demostración. La idea es probar que existe un morfismo bien definido

$$\varphi : \text{Mod}^\pm(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow \text{Aut}(H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)) \oplus \text{Aut}(H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

dado por $f \mapsto (H_1(f), H_2(f))$, con $H_i(f)$ el morfismo inducido en la i -ésima homología por un representante de la clase f . Vemos que los homeomorfismos definidos por

$$a : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \quad a : (z, w) \mapsto (z, -w)$$

$$s : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \quad s : (z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$$

van a los elementos no triviales de $\text{Aut}(H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)) \oplus \text{Aut}(H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2))$ y, por tanto, el morfismo es sobreyectivo. Además, se demuestra que el núcleo de φ está generado por el homeomorfismo

$$T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \quad T : (z, w) \mapsto (z, r_z(w)),$$

llamado **Giro de Glück**, donde $r_z : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una rotación positiva de ángulo z sobre el eje vertical. La última parte de la demostración consiste en probar que $\langle T \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces es un subgrupo normal de orden 2, por lo tanto es central, esto y el hecho de que el morfismo φ escinde, muestra que T conmuta con a y s , y por lo tanto,

$$\text{Mod}^\pm(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \cong \langle a \rangle \oplus \langle s \rangle \oplus \langle T \rangle.$$

□

El grupo modular de la 3-esfera

El cálculo del grupo modular de la 3-esfera se atribuye a Jean Cerf. En [Ce68], Cerf demuestra que $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^3))$ es trivial, aunque su estudio se centra en mostrar que el grupo de difeomorfismos que preservan la orientación en \mathbb{S}^3 módulo difeomorfismos que se extienden a la 4-bola \mathbb{D}^4 es trivial (a este último se le denota por $\Gamma_4 := \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^4, \partial))$). Este grupo mide las posibles “extensiones no triviales” de difeomorfismos desde la frontera \mathbb{S}^3 al interior de la 4-bola.

Observación 4.1. Este caso es particular por dos motivos, como mencionamos hemos cambiado la categoría Homeo por Diff, la justificación nos la da el propio Cerf, quien en [Ce59, Cor. 5.1] muestra que para X una 3-variedad compacta, $\text{Homeo}(X)$ es homotópicamente equivalente a $\text{Diff}(X)$. El siguiente punto importante es que, a diferencia de los otros casos, consideraremos el grupo modular con clases de difeomorfismos que preservan orientación y no el caso del grupo modular extendido.

Teorema 4.2. [Ce68, Teo 1. Cap.I.§1] El grupo modular $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^3))$ es trivial.

Existen dos enfoques principales para esta demostración, véase [Baetal, §2]: Cerf demostró este resultado dando una serie de reformulaciones al problema mostrando que basta probar que $\text{Diff}(\mathbb{D}^3)$ es conexo. Posteriormente, Eliashberg [El92] en la década de los noventa proporcionó una demostración alternativa empleando geometría de contacto, mostrando que todo difeomorfismo que preserve la orientación es isotópico a un difeomorfismo que preserve una estructura de contacto estándar en \mathbb{S}^3 .

Idea de la demostración. En [Ce68, Apen. §5, Prop. 4] se muestra la siguiente relación entre ciertos grupos de homotopía (descomposición de difeomorfismos de la esfera)

$$\pi_i(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^n)) \cong \pi_i(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})) \oplus \pi_i(SO(n+1)).$$

Por lo tanto, para $n = 3$, basta probar que $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3, \mathbb{S}^2)) = 0$, ya que $\pi_0(SO(4)) = 0$ pues el grupo $SO(4)$ es arco conexo.

Por otro lado, la aplicación $\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3) \xrightarrow{\phi} \text{Diff}^+(\mathbb{S}^2)$ definida como la restricción del homeomorfismo a la frontera, da una fibración localmente trivial,

$$\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3, \mathbb{S}^2) \hookrightarrow \text{Diff}^+(\mathbb{D}^3) \xrightarrow{\phi} \text{Diff}^+(\mathbb{S}^2),$$

que al pasar a grupos de homotopía, se obtiene la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_1(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3)) \rightarrow \pi_1(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2)) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3, \mathbb{S}^2)) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3)) \\ \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dado que Smale demostró que los grupos $\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2)$ y $SO(3)$ son homotópicamente equivalente (véase [Sm59, Teo. A]), entonces $\pi_i(SO(3)) \rightarrow \pi_i(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2))$ es un isomorfismo para todo $i \geq 0$. En particular, $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3)) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2))$ es sobreyectivo y $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{S}^2)) = 0$.

Por lo tanto, $\pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3, \mathbb{S}^2)) \cong \pi_0(\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3))$. El último paso de la demostración de Cerf, es mostrar que $\text{Diff}^+(\mathbb{D}^3)$ es conexo, y por lo tanto se sigue el resultado. \square

Grupos modulares de espacios lente $L(p, 1)$

Los espacios lente $L(p, 1)$ se construyen como el cociente de la 3-esfera por la acción de un grupo cíclico de orden p como vimos en la primera sección del Capítulo 1, pero también se pueden describir como el espacio obtenido al pegar dos toros sólidos V_1 y V_2 a lo largo de sus fronteras, identificando ∂V_1 y ∂V_2 mediante un difeomorfismo del toro T^2 . En este modelo, la función de pegado queda determinada por un elemento de $\text{Diff}(T^2)$, y el resultado final es $L(p, 1) = V_1 \cup_{\varphi} V_2$.

El cálculo del grupo modular de estos espacios se atribuye a Bonahon, el cual calcula los grupos modulares de una familia más grande de los espacios lente, $L(p, q)$ para $q \in \mathbb{Z}$. Uno de los teoremas centrales para este cálculo, es probado por Schubert y refinado por Bonahon, este afirma que todo espacio lente contiene, hasta isotopía, un único toro esencial que lo separa en dos toros sólidos [Sc56]. Este hecho es fundamental porque reduce el estudio de los homeomorfismos de $L(p, 1)$ al estudio de aquellos que preservan este toro separador, es decir, a difeomorfismos que fijan los toros sólidos V_1 y V_2 .

Bonahon distingue tres difeomorfismos relevantes para el cálculo del grupo modular de los espacios lente $L(p, 1)$: pensando en cada toro $V_i \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ en donde $L(p, 1) = V_1 \cup_{\partial} V_2$, parametrizamos un punto en $L(p, 1)$ como una dupla de complejos.

- I. La involución τ : actúa por conjugación compleja en cada coordenada $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$. Preserva individualmente los dos toros sólidos de la descomposición $L(p, 1) = V_1 \cup_{\partial} V_2$ y tiene orden 2.
- II. El difeomorfismo σ_- : permuta los toros sólidos enviando $(u, v) \in V_1$ a $(\bar{u}, v) \in V_2$ y además, $(u, v) \in V_2$ a $(u, \bar{v}) \in V_1$. Su existencia depende de la aritmética del pegado, pero para todos los espacios lente $L(p, 1)$ con $p > 1$ está bien definido. Satisface $\sigma_-^2 = \tau$ y también conmuta con τ .
- III. Involución positiva σ_+ : actúa intercambiando los toros sólidos sin alterar las coordenadas, $(u, v) \in V_1 \longleftrightarrow (u, v) \in V_2$. También es de orden 2 y conmute con τ . A diferencia de σ_- este difeomorfismo siempre existe para cualquier espacio lente.

Para $p > 1$ basta considerar τ y σ_- ; ellos generan todas las clases relevantes en el cálculo del grupo modular.

Teorema 4.3. [Bo83, Teo. 3] Para los espacios lente $L(p, 1)$, el grupo modular se describe de la siguiente manera

$$\text{Mod}^{\pm}(L(p, 1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

generado por la involución τ si $p > 2$ y generado por σ_- si $p = 2$.

Idea de la demostración. Bonahon muestra que cualquier difeomorfismo de $L(p, 1)$ es isotópico a uno de estos tipos básicos. Esto se logra mostrando primero que cualquier difeomorfismo es

isotópico a uno que preserve el toro separador (usando la unicidad de este toro hasta isotopía), y luego analizando cómo puede actuar sobre los dos toros sólidos: o bien los preserva cada uno, o bien los intercambia. Al analizar la acción inducida en la homología y los posibles comportamientos bajo isotopía, se ve que para $p > 2$, la involución τ genera el grupo modular, el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$.

En el caso especial $L(2, 1) \simeq \mathbb{R}P^3$, la situación es ligeramente diferente. Aquí la involución τ es isotópica a la identidad, mientras que σ_- (que en este caso representa la simetría principal de $\mathbb{R}P^3$) genera el grupo modular, que sigue siendo $\mathbb{Z}/2$, pero ahora con un generador geoméricamente distinto.

Así, el resultado final se expresa de la siguiente forma: para $p > 2$, el grupo modular de $L(p, 1)$ es $\mathbb{Z}/2$, generado por la involución τ , y para $L(2, 1)$ el grupo modular es también $\mathbb{Z}/2$, pero generado por σ_- . Esta clasificación depende crucialmente de la unicidad del toro separador y de la estructura aritmética del pegado que define al espacio lente. \square

4.2. Grupos modulares de haces de círculos sobre superficies de género $g \geq 1$

Esta sección está basada en el trabajo de Chen y Tshishiku en [CT24]. Ellos estudiaron el grupo modular de las 3-variedades que fibran como haces de círculos orientados sobre superficies de género $g \geq 1$.

Su estudio se basa en una descripción algebraica de $\text{Mod}(X_g^k)$ que se tiene gracias al Teorema de Waldhausen. Esta descripción junto con el trabajo de Conner-Raymond permiten establecer una relación de este grupo con el grupo modular de la superficie base del haz $\text{Mod}(S_g)$ a través de una extensión de grupos.

4.2.1. El Teorema de Waldhausen

El Teorema de Waldhausen establece una relación entre el grupo modular de ciertas 3-variedades y el grupo de automorfismos externos de su grupo fundamental. Este resultado aparece en su artículo [Wal68] y es un análogo al Teorema de Dehn-Nielsen-Baer en 3-variedades.

Waldhausen estudió las 3-variedades compactas, orientables, *irreducibles* y *suficientemente grandes*. Una 3-variedad es **irreducible** si para toda 3-esfera encajada en esta variedad, es el borde de una bola. Además, una 3-variedad se considera **suficientemente grande** si es irreducible y además contiene una superficie incompresible¹ encajada de dos lados². Estas variedades también se conocen como **variedades de Haken**.

¹ Decimos que una superficie compacta S encajada en una 3-variedad M es **compresible** si existe un disco $D \subset M$ tal que $D \cap S = \partial D$ no es el borde de un disco en S . Entonces, S es **incompresible** en M si no es compresible y no es una esfera. ² Una superficie encajada en una 3-variedad es una **superficie de dos lados** si su vecindad regular es un haz trivial, y es una **superficie de un lado** si su vecindad regular es un haz no trivial.

Teorema 4.4 (Teorema de Waldhausen). [Wal68, Cor. 7.5] Sea X una 3-variedad compacta, orientable, irreducible y suficientemente grande. Entonces, el morfismo natural

$$\text{Mod}^{\pm}(X) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(X))$$

es un isomorfismo.

En el contexto de esta tesis, deseamos usar el Teorema de Waldhausen para las 3-variedades que fibran como haces de círculos. La clave está en determinar cuáles de estas variedades son irreducibles y contienen una superficie incompresible de dos caras.

El Teorema de Waldhausen se aplica sin restricciones adicionales, al considerar haces de círculos sobre superficies de género $g \geq 1$. Esto se sigue de los siguientes resultados.

Proposición 4.1. [Ha02, Prop.1.12] El espacio total de un haz de círculos orientado es una 3-variedad irreducible a excepción de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ (haz trivial sobre \mathbb{S}^2).

Proposición 4.2. El espacio total de un haz de círculos sobre S_g es una 3-variedad suficientemente grande (variedad Haken) si $g \geq 1$.

Demostración. Por la Proposición 4.1, el espacio total de un haz de círculos orientado es irreducible (salvo el caso $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$). Además, de acuerdo con el Lema 1.1.6 (b) de Waldhausen [Wal68, Lema 1.1.6, b)], una 3-variedad irreducible M contiene una superficie incompresible siempre que $H_1(M)$ no sea finito.

En nuestro caso, como el primer grupo de homología es la abelianización de $\pi_1(M)$, y por la presentación previamente descrita en el Corolario 2.1 esta abelianización es infinita, se sigue que el espacio total de un haz de círculos sobre S_g (con $g \geq 1$) contiene una superficie incompresible. Por definición, esto significa que la variedad es Haken. \square

4.2.2. La sucesión exacta de Conner-Raymond

Consideremos $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X_g^k \xrightarrow{p} S_g$, un haz de círculos orientado con número de Euler $k \in \mathbb{Z}$ y donde S_g es orientable de género $g \geq 1$. Nuestro objetivo en esta sección es exhibir una sucesión exacta corta que vincula el grupo modular de la 3-variedad total $\text{Mod}(X_g^k)$ con $\text{Mod}(S_g)$. En concreto, mostramos que existe la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1. \quad (4.1)$$

Para relacionar el grupo modular de la 3-variedad con el de la superficie base partimos del siguiente análisis de Conner y Raymond en [CR77, Teo. 8]; estos autores analizaron la extensión central

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow 1,$$

suponiendo que el núcleo \mathbb{Z}^n es un subgrupo característico³. Demostraron que todo automorfismo de E se describe de forma única mediante un automorfismo de N , un automorfismo del núcleo y un 1-cociclo $f: N \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Haciendo cociente sobre los automorfismos internos, esta descripción se condensa en la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{Z}^n) \rightarrow \text{Out}(E) \rightarrow \text{Out}(N) \rightarrow 1.$$

Aplicando este resultado a la extensión inducida por un haz de círculos orientado sobre una superficie cerrada, obtenemos:

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g)) \rightarrow 1.$$

Los teoremas de Waldhausen y Dehn–Nielsen–Baer, junto con homeomorfismo $\text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \cong H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z})$, traducen esta sucesión en:

$$1 \rightarrow H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}^\pm(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}^\pm(S_g) \rightarrow 1.$$

En contraste con la sucesión exacta corta 4.1 esta sucesión contiene a los grupos modulares extendidos. Posteriormente, nos restringiremos a los grupos modulares de clases de homeomorfismos que preservan la orientación.

Sucesión exacta corta de los grupos de automorfismos externos

De la Proposición 2.2, la extensión inducida en grupos fundamentales por el haz de círculos orientado $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X_g^k \xrightarrow{p} S_g$, con $g \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}$,

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \pi_1(X_g^k) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S_g) \rightarrow 1,$$

es central, siendo z un elemento central. Además, para superficies de género $g \geq 2$, el centro de $\pi_1(S_g)$ es trivial, por lo que el centro de $\pi_1(X_g^k)$ es el subgrupo $i_*(\langle z \rangle)$. En consecuencia, $\langle z \rangle$ es un subgrupo característico (es decir, fijo por cualquier automorfismo de $\pi_1(X_g^k)$).

Observación 4.2. Notemos que $\pi_1(X_g^k)/\langle z \rangle$ es isomorfo a $\pi_1(S_g)$, y p_* se puede pensar como la proyección $\pi_1(X_g^k) \rightarrow \pi_1(X_g^k)/i_*(\langle z \rangle)$. Además, si $x_1, x_2 \in \pi_1(X_g^k)$ cumplen $p_*(x_1) = p_*(x_2)$, entonces $x_1 = z^\ell x_2$ para algún $\ell \in \mathbb{Z}$.

Dado $f \in \text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$, definimos la aplicación $\bar{f}: \pi_1(S_g) \rightarrow \pi_1(S_g)$ dada por

$$\bar{f}(p_*(x)) := p_*(f(x)).$$

Observación 4.3. La condición de que $\langle z \rangle$ sea característico asegura que \bar{f} está bien definida para *todo* $f \in \text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$ y éste se tiene del hecho de que \mathbb{Z} es el centro de $\pi_1(X_g^k)$.

³ Un subgrupo A en G es **característico** si todo automorfismo ψ de G cumple que $\psi(A) = A$.

Definimos como sigue el siguiente morfismo

$$\varphi : \text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(\pi_1(S_g)), \quad (4.2)$$

dado por la asignación $f \mapsto \bar{f}$. Esta asignación respeta la composición, de modo que obtenemos un morfismo de grupos. La sobreyectividad se sigue de que todo automorfismo de $\pi_1(S_g)$ puede levantarse a $\pi_1(X_g^k)$ fijando el subgrupo \mathbb{Z} .

Observación 4.4. Para un haz orientado de círculos sobre el toro con número de Euler $k \neq 0$,

$$\pi_1(X_1^k) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z^k, z \text{ central} \rangle.$$

El centro es precisamente $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$. Notemos primero que $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$ está en el centro por hipótesis. Cualquier elemento de $\pi_1(X_1^k)$ puede escribirse en forma normal como $x^a y^b z^c$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Calculando su conmutador con x :

$$x (x^a y^b z^c) x^{-1} (x^a y^b z^c)^{-1} = x^a (x y^b x^{-1}) y^{-b} z^{c-c} x^{-a} = x^a z^{kb} x^{-a} = z^{kb},$$

pues $x y^b x^{-1} = y^b z^{kb}$ por la relación $[x, y] = z^k$ y que z es central. Para que $x^a y^b z^c$ conmute con x necesitamos $z^{kb} = 1$, es decir $b = 0$ (porque $k \neq 0$ y z tiene orden infinito). Haciendo ahora el conmutador con y se obtiene análogamente que $a = 0$. Por lo tanto, el único central es z^c .

De esta observación, junto con el análisis anterior, se deduce que \mathbb{Z} es característico en el caso $g \geq 1$ y $(g, k) \neq (1, 0)$ y, por tanto, que la aplicación 4.2 esté bien definida.

Proposición 4.3. La extensión central inducida sobre grupos fundamentales por el haz de círculos orientado $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X_g^k \xrightarrow{p} S_g$, donde S_g es orientable género $g \geq 1$, y $(g, k) \neq (1, 0)$, da lugar a la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S_g)) \rightarrow 1.$$

Demostración. Basta calcular el núcleo de φ . Sea $f \in \text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$ con $\varphi(f) = id$, es decir, $p_*(f(x)) = p_*(x)$ para todo x . Como $\ker(p_*) = \langle z \rangle$ es central, existe $\tau : \pi_1(X_g^k) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(x) = x z^{\tau(x)} \quad (\forall x). \quad (4.3)$$

Paso 1: $f(z) = z$ (no puede ocurrir $f(z) = z^{-1}$). Escribamos la clase de la extensión como $\alpha \in H^2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Para un automorfismo como el nuestro, que induce la identidad en la base y actúa por $g \in \{\pm 1\}$ en el coeficiente central \mathbb{Z} (esto es, $f(z) = z^g$), la condición de compatibilidad estándar de extensiones centrales dice que

$$g^* \alpha = id^* \alpha \quad \text{si y solo si} \quad g \cdot \alpha = \alpha.$$

Como $(g, k) \neq (1, 0)$, la clase α es no nula (el número de Euler $k \neq 0$ en $g = 1$, o bien $H^2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ sin torsión para $g \geq 2$) y H^2 no tiene torsión; por tanto la igualdad $g \cdot \alpha = \alpha$ fuerza $g = +1$. En consecuencia,

$$f(z) = z \quad \text{y} \quad \tau(z) = 0. \quad (4.4)$$

Paso 2: τ es homomorfismo y desciende al cociente. Usando (4.3) y que z es central,

$$f(xy) = f(x)f(y) \implies xy z^{\tau(xy)} = (x z^{\tau(x)})(y z^{\tau(y)}) = xy z^{\tau(x)+\tau(y)},$$

luego

$$\tau(xy) = \tau(x) + \tau(y) \quad (\forall x, y), \quad (4.5)$$

es decir, τ es homomorfismo en $\pi_1(X_g^k)$. Además, si $x' = xz^m$, entonces por (4.4) y (4.5) $\tau(x') = \tau(x) + m\tau(z) = \tau(x)$. Así, τ sólo depende de la clase de x en el cociente y factoriza como

$$\tau = \lambda \circ p_* \quad \text{con } \lambda : \pi_1(S_g) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Donde $\lambda \in \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z})$ y, por (4.3), todo $f \in \ker(\varphi)$ viene dado por $f(x) = x z^{\lambda(p_*(x))}$.

Paso 3: identificación del núcleo. La aplicación $f \mapsto \lambda$ define un isomorfismo

$$\ker(\varphi) \cong \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}).$$

Esto concluye la exactitud en el primer término. \square

Observación 4.5. Si $(g, k) = (1, 0)$ entonces $\alpha = 0$ y la condición $g \cdot \alpha = \alpha$ no prohíbe $g = -1$; la inversión $z \mapsto z^{-1}$ puede ocurrir en el núcleo, y además $\langle z \rangle$ deja de ser característico, con lo que la sucesión no es canónica.

De nuevo, la clave es que el subgrupo $\langle z \rangle$ es característico, de modo que desplazar un elemento por una potencia de z es la única libertad que tiene un automorfismo que actúa trivialmente en el cociente.

Corolario 4.1. Sea $g > 1$. El morfismo natural $\varphi : \text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S_g))$ desciende a un morfismo entre automorfismos externos $\bar{\varphi} : \text{Out}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g))$, y existe una sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g)) \rightarrow 1.$$

Demostración. Primero notemos que la restricción de φ a los automorfismos internos es un isomorfismo.

$$\text{Inn}(\pi_1(X_g^k)) = \{ c_u : x \mapsto uxu^{-1} \mid u \in \pi_1(X_g^k) \}.$$

De manera que si $c_u \in \text{Inn}(\pi_1(X_g^k))$ tenemos

$$\varphi(c_u)(p_*(x)) = p_*(uxu^{-1}) = \bar{u} p_*(x) \bar{u}^{-1} = c_{\bar{u}}(p_*(x)).$$

Por lo tanto, $\varphi(c_u) = c_{\bar{u}} \in \text{Inn}(\pi_1(S_g)) = \{ c_{\bar{u}} : a \mapsto \bar{u} a \bar{u}^{-1} \mid \bar{u} \in \pi_1(S_g) \}$. Por otro lado, dado cualquier $c_{\bar{u}} \in \text{Inn}(\pi_1(S_g))$ elegimos un levantamiento $u \in \pi_1(X_g^k)$ con $p_*(u) = \bar{u}$, entonces c_u está en $\text{Inn}(\pi_1(X_g^k))$ y $\varphi(c_u) = c_{\bar{u}}$. Por tanto, la restricción es sobreyectiva.

Y además, $\varphi(c_u) = \text{id}_{\pi_1(S_g)}$ si y sólo si $\bar{u} = 1$, es decir $u \in \langle z \rangle$. Pero para cualquier elemento central z^m la conjugación c_{z^m} es ya la identidad. Cuando $g > 1$ el centro de $\pi_1(X_g^k)$ es $i_*(\mathbb{Z})$, por lo que la restricción φ

$$\varphi|_{\text{Inn}(\pi_1(X_g^k))} : \text{Inn}(\pi_1(X_g^k)) \xrightarrow{\cong} \text{Inn}(\pi_1(S_g))$$

es un isomorfismo. En particular, φ respeta automorfismos internos y pasa al cociente, obteniendo $\bar{\varphi} : \text{Out}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g))$.

Un elemento f en el núcleo de φ se denomina **transvección central** y por la proposición anterior es de la forma $f(x) = x z^{\tau(x)}$ y sólo depende de τ .

Ahora bien, ninguna de estas transvecciones es un automorfismo interno. Si $f(x) = x z^{\tau(x)}$ fuera conjugación por algún $g \in \pi_1(X_g^k)$ entonces g debería vivir en el centro, pero bajo las condiciones de g y k el centro es exactamente $\langle z \rangle$ y $\tau \not\equiv 0$ implica que f desplaza generadores no centrales. En consecuencia,

$$\ker \bar{\varphi} \cong \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}).$$

□

Observación 4.6. Hemos excluido el caso $g = 1$, gracias a una observación del Dr. Jesús Hernández Hernández. En efecto, se tiene que $\text{Inn}(\pi_1(S_1)) \cong \text{Inn}(\mathbb{Z}^2) \cong 0$, pues \mathbb{Z}^2 es abeliano, y por otro lado, $\text{Inn}(\pi_1(X_1^k)) \cong \pi_1(S_1) \cong \mathbb{Z}^2$.

En particular, para un elemento $u = x^a y^b \in \pi_1(X_1^k) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z^k, z \text{ central} \rangle$, se obtiene

$$c_u(x) = u x u^{-1} = x \cdot z^{kb}, \quad c_u(y) = u y u^{-1} = y \cdot z^{-ka}, \quad c_u(z) = z.$$

Esto muestra que la conjugación por u actúa como una *transvección central*, de modo que $\text{Inn}(\pi_1(X_1^k)) \cap \ker \varphi \neq 0$. En consecuencia, al pasar al cociente por automorfismos internos, el núcleo del morfismo

$$\text{Out}(\pi_1(X_1^k)) \longrightarrow \text{Out}(\pi_1(S_1))$$

no se identifica con $\text{Hom}(\pi_1(S_1), \mathbb{Z})$ como sucede en el caso $g > 1$, sino con un cierto cociente de éste.

Cabe señalar que en el trabajo de Bena–Tshishiku se incluye el caso $g = 1$ restringiéndose a los subgrupos de automorfismos (y automorfismos externos) que preservan la orientación. En este trabajo, preferimos excluir este caso para comprenderlo mejor y hacer un análisis más detallado en un proyecto de investigación futura.

El caso del haz trivial sobre el toro

El caso particular $(g, k) = (1, 0)$, corresponde al haz trivial $X_1^0 = S^1 \times T^2 \cong T^3$. Aquí $\pi = \mathbb{Z}^3$, y su centro coincide con todo el grupo. Ya no existe un subgrupo \mathbb{Z} distinguido. En consecuencia $i_*(\mathbb{Z})$ no es característico y, por tanto, no se siguen los argumentos de Conner y Raymond. De hecho, el núcleo de $\text{GL}_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ es mayor que $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$. Sin embargo, se puede establecer un contraste interesante. Notemos que

$$\text{Mod}^\pm(T^3) \cong \text{Out}(\pi_1(T^3)) \cong \text{GL}_3(\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \text{Mod}^\pm(T^2) \cong \text{Out}(\pi_1(T^2)) \cong \text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Existe una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 1,$$

donde la proyección corresponde a tomar la esquina superior izquierda de una matriz 3×3 . Dado que el haz es trivial, existe una sección global canónica, por lo que la extensión anterior escinde y no hay una obstrucción, como sí ocurre cuando $g \geq 2$ y $k \neq 0$.

4.2.3. El subgrupo que preserva la orientación

Recordemos que en la descripción algebraica del grupo modular de la superficie definimos el subgrupo que "preserva la orientación" (véase la Definición 3.5) denotado por $\mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$ como el subgrupo de $\text{Aut}(\pi_1(S_g))$ que consiste en automorfismos que actúan trivialmente sobre $H_2(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

De manera análoga queremos definir una descripción algebraica del grupo modular de los haces de círculos que preserve la noción de preservar la orientación de la 3-variedad.

Definición 4.1. Definimos al grupo $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$ como el subgrupo de $\text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$ que consiste en automorfismos que se proyectan en $\mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$ vía el morfismo natural 4.2 y que además actúan trivialmente sobre el centro $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Estos subgrupos que preservan la orientación contienen los (respectivos) grupos de automorfismos internos, y denotamos los cocientes como $\mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k))$ y $\mathcal{OUT}(\pi_1(S_g))$.

Mostraremos que las condiciones de preservación de la orientación de la base y de la fibra generan una distinción fundamental entre clases de automorfismos y que estas se reflejan en la estructura del grupo modular. En particular, $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$ tiene índice 4 en $\text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$.

Lema 4.1 (Índice del subgrupo de automorfismos orientables). Sea X_g^k la 3-variedad total de un haz de círculos orientado sobre una superficie orientable cerrada S_g , con número de Euler $k \neq 0$ si $g = 1$. Entonces el subgrupo

$$\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)) := \left\{ \varphi \in \text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) \mid \varphi(z) = z \text{ y } \varphi \text{ proyecta en } \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g)) \right\}$$

tiene índice 4 dentro de $\text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$.

Demostración. La proyección natural $\varphi : \text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S_g))$ permite distinguir:

- I. Automorfismos que preservan o invierten la orientación de la base.
- II. Automorfismos que fijan o invierten el generador central $z \mapsto z^{\pm 1}$, correspondiente a la fibra S^1 .

Ambas condiciones son independientes, y cada una define un subgrupo de índice 2. Por lo tanto, la intersección de las dos condiciones, es decir, $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$, tiene índice

$$[\text{Aut}(\pi_1(X_g^k)) : \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))] = 2 \cdot 2 = 4.$$

□

Nota 4.5 (Interpretación topológica de las 4 clases). Desde el punto de vista topológico, estas cuatro clases se corresponden con las distintas formas en que un homeomorfismo de X_g^k puede actuar sobre la orientación de la base S_g y de la fibra S^1 , como se muestra en la siguiente tabla:

Base	Fibra	Representante algebraico	Clase topológica
Preserva	Preserva	$\varphi \in \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$	Orientación preservada
Invierte	Preserva	$\varphi(z) = z, \varphi_* _{\pi_1(S_g)} \notin \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$	Invierte base
Preserva	Invierte	$\varphi(z) = z^{-1}, \varphi_* _{\pi_1(S_g)} \in \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$	Invierte fibra
Invierte	Invierte	$\varphi(z) = z^{-1}, \varphi_* _{\pi_1(S_g)} \notin \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$	Invierte ambas

Así, podemos definir un análogo del grupo modular sobre los haces de círculos que tenga clases de isotopía de homeomorfismos que preserve la orientación total de la 3-variedad.

Definición 4.2. Sea $g \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}$, y asumamos $(g, k) \neq (1, 0)$. Sea $\text{Homeo}^+(X_g^k)$ el grupo de homeomorfismos cuya imagen en $\text{Out}(\pi_1(X_g^k))$ está contenida en $\mathcal{OUT}(\pi_1(S_g))$. Definimos

$$\text{Mod}(X_g^k) := \pi_0 \left(\text{Homeo}^+(X_g^k) \right).$$

Observación 4.7. Dado que $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$ tiene índice 4 en $\text{Aut}(\pi_1(X_g^k))$, se deduce que:

$$[\text{Out}(\pi_1(X_g^k)) : \mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k))] = 4,$$

Luego, del Teorema de Waldhausen, se tiene un isomorfismo $\text{Mod}(X_g^k) \cong \mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k))$ por lo que

$$[\text{Mod}^\pm(X_g^k) : \text{Mod}(X_g^k)] = 4.$$

De acuerdo a la sección anterior, tenemos el siguiente corolario el cual remarca la extensión que queremos analizar.

Corolario 4.2. Sea $g \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}$, y suponga que $(g, k) \neq (1, 0)$. Entonces, existe una extensión de grupos

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g)) \rightarrow 1,$$

donde esta sucesión exacta escinde y además para $g > 1$ desciende a una extensión

$$1 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \mathcal{OUT}(\pi_1(S_g)) \rightarrow 1,$$

Demostración. La aplicación natural $\Phi : \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g))$ es una restricción del morfismo 4.2 con el mismo núcleo. □

De las identificaciones por el Teorema de Waldhausen y Denh-Nielsen-Baer, el isomorfismo $\text{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \cong H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z})$, y el Corolario 4.2 obtenemos la extensión de grupos 4.1 que relaciona los grupos modulares del espacio total y el espacio base,

$$1 \rightarrow H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1.$$

4.3. Descripción algebraica del grupo modular $\text{Mod}(X_g^k)$

Una de las preguntas centrales es determinar cuándo escinde la extensión que relaciona los grupos modulares 4.1, inducida por la estructura del haz de círculos,

$$1 \rightarrow H^1(\pi_1(S_g); \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1.$$

Usando métodos de cohomología de grupos, Chen y Tshishiku [CT24] demostraron que esta extensión escinde sin restricción sobre k cuando $g = 1$ y para $g \geq 2$, escinde si y solo si k es divisible por $2g - 2$. Este resultado se deduce calculando el orden de la clase asociada a la extensión 4.1 en el grupo de cohomología

$$H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g; \mathbb{Z})).$$

La estrategia general consiste en relacionar la clase de cohomología asociada a la extensión (4.1) con la clase de cohomología asociada a la extensión derivada de la sucesión exacta de Birman (3.3) introducida en la Sección 3.4 del Capítulo 3.

$$1 \longrightarrow H_1(S_g; \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Mod}(S_g^1)/\pi' \longrightarrow \text{Mod}(S_g) \longrightarrow 1,$$

donde $\pi' = [\pi_1(S_g), \pi_1(S_g)]$ es el subgrupo conmutador. Recordamos que la extensión (3.3) se obtiene al tomar el cociente de la sucesión de Birman por los conmutadores del grupo fundamental, y su clase asociada tiene orden $2g - 2$ en cohomología, véase Proposición 3.2.

4.3.1. Relación con la sucesión exacta derivada de Birman

En concreto, Chen y Tshishiku determinan la relación entre ambas extensiones bajo el siguiente Teorema.

Teorema 4.6. [CT24, Theorem A] Fijemos $g > 1$ y $k \in \mathbb{Z}$. Existe un morfismo entre las siguientes extensiones

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H_1(S_g; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Mod}(S_g^1)/\pi' & \longrightarrow & \text{Mod}(S_g) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow k\delta & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & H^1(S_g; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Mod}(X_g^k) & \longrightarrow & \text{Mod}(S_g) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Donde el morfismo $k\delta$ es el isomorfismo de dualidad de Poincaré δ , compuesto con la multiplicación por k . En particular, cuando $k = 1$, las dos extensiones son isomorfismos (en el sentido de extensiones).

Observación 4.8. En [CT24] se incluye el caso en que $g = 1$ con $k \neq 0$, suponiendo que la Extensión 4.1 existe bajo esta restricción sobre el género.

En esta sección describimos la demostración del Teorema 4.6. El primer paso para comparar las extensiones (4.1) y la extensión derivada de Birman (3.3) consiste en construir un morfismo

$$\Psi : \text{Mod}(S_g^1) \longrightarrow \text{Mod}(X_g^k)$$

que induzca un “morfismo” entre las extensiones correspondientes. Esto es, que haga conmutativos los dos cuadrados. Así, el segundo cuadrado sugiere que la construcción de este morfismo coincida con el morfismo forget, mientras que el primero sugiere que al ver la imagen del subgrupo Push (salvo conjugación) se vea como una transvección compuesta por el morfismo $k\delta$.

Construcción del morfismo Ψ .

El morfismo Ψ se puede definir tanto desde un punto de vista topológico, como desde el punto de vista algebraico, véase [CT24, §3.1]. Ambas interpretaciones son útiles, en particular la topológica ayuda a mostrar que el segundo cuadrado es conmutativo, y la descripción algebraica ayuda a determinar la conmutatividad del primer cuadrado.

Descripción topológica de Ψ . El morfismo Ψ refleja cómo un homeomorfismo de S_g^1 se puede levantar a un homeomorfismo de X_g^k , el cual es la identidad en la preimagen de una pequeña vecindad sobre el punto marcado. Esta construcción hace visible que el núcleo de $\Psi : \text{Mod}(S_g^1) \longrightarrow \text{Mod}(X_g^k)$ queda contenido en el subgrupo $\text{Push}(\pi_1(S_g)) \subset \text{Mod}(S_g^1)$.

Sea $D \subset S_g$ un pequeño disco que contiene a la ponchadura. El haz $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X_g^k \xrightarrow{p} S_g$ es trivial sobre $S_g \setminus D$ porque $H^2(S_g \setminus D; \mathbb{Z})$ es trivial, Teorema 1.7, entonces podemos fijar una trivialización

$$p^{-1}(S_g \setminus D) \cong^\phi (S_g \setminus D) \times S^1.$$

Por otro lado, dada una clase $[f] \in \text{Mod}(S_g^1)$, siempre podemos dar un representante f que sea la identidad sobre D , ver la prueba de la Proposición 3.1. Luego, levantamos a f al producto

$$f \times \text{id}_{S^1} \text{ en } (S_g \setminus D) \times S^1.$$

Tomamos $\tilde{f} = \phi \circ (f \times \text{id}_{S^1}) \circ \phi^{-1}$. Como $f \times \text{id}_{S^1}$ es la identidad en $\partial(S_g \setminus D) \times S^1 = \partial D \times S^1$, \tilde{f} es la identidad en $\partial p^{-1}(D)$, así extendemos a la identidad sobre $p^{-1}(D)$, produciendo un homeomorfismo global de X_g^k . Entonces, definimos

$$\Psi([f]) := [\tilde{f}] \in \text{Mod}(X_g^k).$$

Si reemplazamos f por otro representante que coincide con f fuera de D (por isotopía rel ∂D) y sólo difiere por una potencia $T_{\partial D}^m$ del giro de Dehn en ∂D , entonces el nuevo levantamiento coincide con \tilde{f} en $X_g^k \setminus p^{-1}(D)$ y, dentro de $p^{-1}(D)$ (un sólido toro), se compone con la rotación uniforme de la fibra

$$\tilde{T}_{\partial D}^m : (x, \theta) \mapsto (x, \theta + m \cdot \frac{2\pi}{k}),$$

una transvección central (vive en el centro de $\text{Mod}(X_g^k)$). Como multiplicar por un elemento central no cambia la clase de isotopía, la imagen de $[f]$ bajo Ψ es independiente del representante. Por lo tanto, Ψ está bien definida.

Observación 4.9. Componiendo con la proyección $\bar{\varphi} : \text{Mod}(X_g^k) \rightarrow \text{Mod}(S_g)$ el morfismo Ψ , esta coincide con el morfismo $\text{Forget} : \text{Mod}(S_g^1) \rightarrow \text{Mod}(S_g)$, es decir, el siguiente cuadrado conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(S_g^1) & \xrightarrow{\text{Forget}} & \text{Mod}(S_g) \\ \downarrow \Psi & & \parallel \\ \text{Mod}(X_g^k) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \text{Mod}(S_g) \end{array}$$

Descripción algebraica de Ψ . Usando las interpretaciones algebraicas de los grupos modulares (como grupos de automorfismos externos), el morfismo Ψ se construye mediante la composición:

$$\Psi : \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1)) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)) \rightarrow \mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k)),$$

donde σ es un levantamiento explícito de automorfismos, mismo que a continuación construiremos.

Construcción de σ . Recordemos que el grupo fundamental del espacio total tienen la siguiente presentación:

$$\pi_1(X_g^k) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, z \mid z \text{ central}, [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = z^k \rangle,$$

y nótese que $\pi_1(S_g^1)$ es isomorfo a un grupo libre de rango $2g$. Con $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ generadores tal que $c = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i]$ representa la clase de conjugación de la curva alrededor de la ponchadura. Defínase el morfismo,

$$\iota : \pi_1(S_g^1) \longrightarrow \pi_1(X_g^k), \quad \text{dada por } \alpha_i \mapsto A_i, \beta_i \mapsto B_i.$$

Dado un elemento $f \in \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1))$, podemos tomar un representante de la clase que deje fijo un punto y en particular, que sea la identidad alrededor del punto, véase la demostración de la Proposición 3.1. Usando este hecho definimos una función en el siguiente Lema.

Lema 4.2. Sea $f \in \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1))$ y elíjase un representante $\tilde{f} \in \mathcal{AUT}(\pi_1(S_g^1))$ con $\tilde{f}(c) = c$. Poniendo

$$\sigma(f)(A_i) = \iota(\tilde{f}(\alpha_i)), \quad \sigma(f)(B_i) = \iota(\tilde{f}(\beta_i)), \quad \sigma(f)(z) = z,$$

entonces $\sigma(f)$ es un automorfismo de $\pi_1(X_g^k)$.

Demostración. Primero, $\sigma(f)$ está definido en los generadores, para ver que se extiende a todo el grupo hay que verificar que respeta la relación central y la potencia z^k . Por la centralidad de z basta comprobar la relación del producto de conmutadores y la potencia z^k , es decir, que

$$\sigma(f)([A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g]) = \prod_{i=1}^g [\sigma(f)(A_i), \sigma(f)(B_i)] = \sigma(f)(z^k).$$

Pero esto se sigue de la definición $\sigma(f)$ en los generadores y el hecho de que $\tilde{f}(c) = c$. Por lo tanto, $\sigma(f)$ es compatible con la presentación. Además, por definición se encuentra en $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$. \square

Lema 4.3. El morfismo $\sigma(f)$ no depende de la elección de \tilde{f} , de este modo la asignación

$$\sigma : \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1)) \rightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$$

dada por $f \mapsto \sigma(f)$ está bien definida y es un morfismo de grupos.

Demostración. Primero veamos que $f \mapsto \sigma(f)$ está bien definida. La aplicación $\sigma(f)$ es independiente de la elección de \tilde{f} , ya que si \tilde{f}' es otro representante de la clase f , entonces $\tilde{f}' = c^m \tilde{f} c^{-m}$ para algún m (pues difieren de una conjugación), y como $\iota(c) = z^k$ es central, las dos definiciones de $\sigma(f)$ coinciden. Finalmente, la ley de composición $\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ \sigma(g)$ se verifica directamente. Notemos que si $w = \iota(w')$, entonces $\sigma(f)(w) = \iota(\tilde{f}(w'))$. Y un representante de la composición $f \circ g$ que fije la palabra c es simplemente $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ (o bien difiere de ello por conjugación por c^m). De lo anterior se sigue

$$\sigma(f \circ g)(w) = \iota(\widetilde{f \circ g}(w')) = \iota(\tilde{f}(\tilde{g}(w'))) = \sigma(f)(\iota(\tilde{g}(w'))) = \sigma(f)(\sigma(g)(w)).$$

Por lo tanto, $\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ \sigma(g)$ y la aplicación es un morfismo de grupos. \square

Núcleo de Ψ . Queremos determinar la conmutatividad del primer cuadrado en el diagrama del Teorema 4.6, que se puede descomponer como sigue;

$$\begin{array}{ccc} H_1(S_g; \mathbb{Z}) \cong^{(ab)} \pi_1(S_g, x)/\pi' & \xrightarrow{\overline{\text{Push}}} & \text{Mod}(S_g^1)/\pi' \\ \downarrow k\delta & & \downarrow \overline{\Psi} \\ H^1(S_g; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{transvecciones}} & \text{Mod}(X_g^k) \end{array}$$

Para determinar la conmutatividad de este cuadrado, describiremos la imagen del subgrupo $\text{Push}(\pi_1(S_g)) \subset \text{Mod}(S_g^1)$ bajo Ψ , la cual se puede reducir en entender la imagen sobre σ , veremos que esta se convierte en la combinación de dos acciones: conjugación por elementos de $\pi_1(X_g^k)$, y una acción por transvecciones determinadas por el isomorfismo de dualidad de Poincaré, véase la Proposición 4.4.

Comenzamos por describir la composición

$$\hat{\delta} : H_1(S_g; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^1(S_g; \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)),$$

donde $\delta : H_1(S_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S_g; \mathbb{Z})$ es el isomorfismo **inverso** de la dualidad de Poincaré y esta dado por el índice de intersección algebraica, es decir, para $\gamma \in H_1(S_g; \mathbb{Z})$ entonces $\delta(\gamma) : * \mapsto \langle *, \gamma \rangle$, esta morfismo se encuentra en $\text{Hom}(H_1(S_g; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H^1(S_g; \mathbb{Z})$. La inyección son las transvecciones centrales de la demostración del Corolario 4.1. De forma explícita, su acción sobre elementos $w \in \pi_1(X_g^k)$ está dada por:

$$\hat{\delta}(\gamma)(w) = w \cdot z^{\langle [\bar{w}], \gamma \rangle},$$

donde \bar{w} es la imagen de w bajo el cociente $\pi_1(X_g^k) \rightarrow \pi_1(S_g)$, y $[\bar{w}] \in H_1(S_g; \mathbb{Z})$ es la clase de homología asociada.

Por otro lado, para entender la imagen del subgrupo Push bajo Ψ , damos una interpretación algebraica del morfismo

$$\text{Push} : \pi_1(S_g, x) \rightarrow \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1, p)),$$

donde $x \in S_g$ es el punto removido en S_g^1 y p el punto base de $\pi_1(S_g^1)$. Basta explicar cómo este morfismo actúa, a nivel algebraico, sobre un conjunto de generadores de los grupos fundamentales.

Tomemos el conjunto generador $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g \subset S_g^1$ basadas en p del grupo fundamental $\pi_1(S_g^1, p)$, de modo que $c = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i]$ bordea el punto removido x . Estas curvas son simples no separantes con solo una intersección en p .

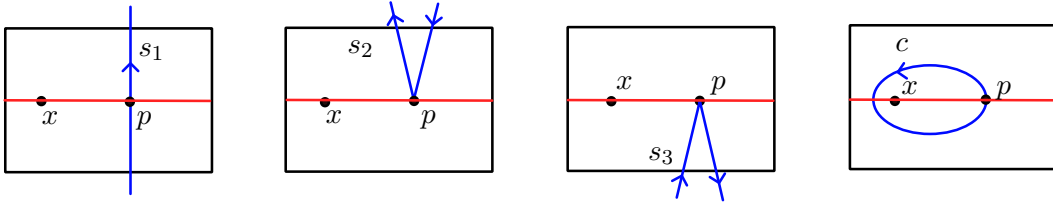


Figura 4.1: Interacción local entre el lazo t y los lazos generadores de $\pi_1(S_g^1, p)$.

Sea t un lazo generador en $\pi_1(S_g, x)$, que es un lazo simple no separante. Hasta homotopía podemos suponer que t pasa por el punto p y cruce transversalmente cada generador exactamente en ese punto como en la Figura 4.1 donde la curva roja es el lazo t y las azules curvas generadoras de $\pi_1(S_g^1, p)$.

Dado que $\mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1, p))$ queda determinado por la imagen de los generadores, describir $\text{Push}(t)$ se reduce a indicar cómo transforma cada generador de $\pi_1(S_g^1, p)$ (que localmente luce como alguno de la Figura 4.1). El análisis se simplifica porque, por construcción, el único contacto entre t y cada generador es un cruce local en p ; así, $\text{Push}(t)$ se expresa como un producto explícito de lazos (conjugaciones y potencias de c) que refleja esa interacción local.

Observación 4.10. Dado el lazo t en $\pi_1(S_g, x)$, le asociamos el lazo $\varepsilon \cdot t \cdot \varepsilon^{-1}$ con base en p . La clase del lazo resultante \tilde{t} se encuentra en $\pi_1(S_g^1, p)$. La asignación $t \mapsto \tilde{t}$ esta bien definida a nivel de clases externas, pues solo depende del camino ε y cambiarlo sólo altera a \tilde{t} por conjugación. A \tilde{t} lo llamaremos el levantamiento de t .

Dado que t no es un elemento de $\pi_1(S_g^1, p)$ consideraremos un levantamiento de t para la descripción algebraica. Así, tomamos $f_t \in \text{Aut}(\pi_1(S_g^1, p))$ el automorfismo dado por

$$f_t(\gamma) = \begin{cases} \tilde{t}^{-1} \gamma \tilde{t} c^{-1} & \text{si } \gamma \simeq s_1 \text{ (localmente),} \\ \tilde{t}^{-1} \gamma \tilde{t} & \text{si } \gamma \simeq s_2 \text{ (localmente),} \\ c \tilde{t}^{-1} \gamma \tilde{t} c^{-1} & \text{si } \gamma \simeq s_3 \text{ (localmente),} \\ \gamma & \text{si } \gamma \simeq c. \end{cases}$$

Esto codifica algebraicamente la misma operación geométrica: empujar el punto base x a lo largo de t y ver el cambio resultante en cada lazo generador. Véase la Figura 4.2 donde se muestra la acción de cada tipo de curva generadora de $\pi_1(S_g^1, p)$.

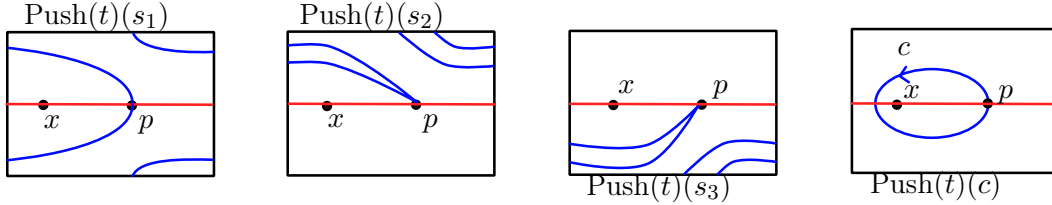


Figura 4.2: Acción del morfismo $\text{Push}(t)$ a cada tipo de lazo generador de $\pi_1(S_g^1, p)$.

El automorfismo f_t preserva la clase de c ; en consecuencia la clase exterior $[f_t]$ pertenece a $\mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1, p))$ y tenemos la descripción de Push como;

$$\text{Push}(t) := [f_t] \in \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1, p)).$$

La siguiente proposición da la formulación precisa del comportamiento del morfismo σ sobre la imagen de Push ;

Proposición 4.4. [CT24, Prop. 3.4] Fijado $t \in \pi_1(S_g, x)$, sea $\text{Push}(t) \in \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1, p))$ la clase del morfismo Push asociada. Si $\tilde{t} \in \pi_1(S_g^1, p)$ es un levantamiento de t , entonces:

$$\sigma(\text{Push}(t)) = C_{\iota(\tilde{t})} \circ \hat{\delta}([kt]),$$

donde C_x denota la conjugación por x . Y el morfismo $\iota : \pi_1(S_g^1) \rightarrow \pi_1(X_g^k)$ como en la definición de $\sigma : \mathcal{OUT}^*(\pi_1(S_g^1)) \rightarrow \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$.

Demostración. Basta demostrar la igualdad para los lazos generadores en $\pi_1(S_g, x)$, pues notemos que $\text{Inn}(\pi_1(X_g^k))$ y $H^1(S_g)$ como subgrupos de $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$ conmutan, pues $H^1(S_g)$ está en el centro, por lo tanto,

$$[C_{\iota(\tilde{t}_1)} \circ \hat{\delta}([kt_1])] \circ [C_{\iota(\tilde{t}_2)} \circ \hat{\delta}([kt_2])] = C_{\iota(\tilde{t}_1 * \tilde{t}_2)} \circ \hat{\delta}([k(t_1 * t_2)]).$$

Dado que $\pi_1(S_g, x)$ está generado por curvas simples cerradas no separantes, nos restringimos a estas.

Por construcción σ sustituye cada generador de $\pi_1(S_g^1, p)$ por su imagen bajo ι y envía c a z^k y de la interpretación algebraica de Push tenemos que

$$\sigma(\text{Push}(t))(\iota s_1) = \iota(\tilde{t})^{-1} \iota(s_1) \iota(\tilde{t}) z^{-k} = C_{\iota(\tilde{t})}[\iota(s_1)z^{(-1 \cdot k)}] = [C_{\iota(\tilde{t})} \circ \hat{\delta}([kt])(\iota(s_1))].$$

La potencia coincide con $z^{k \langle [\tilde{w}], t \rangle}$ porque el número de veces que un lazo w corta a t es precisamente el índice de intersección algebraica entre sus clases de homología. Análogamente, se verifica la igualdad para s_2 y s_3 .

Finalmente, la misma igualdad vale para cualquier elemento de $\pi_1(X_g^k)$ porque los lazos que generan a $\pi_1(S_g^1, p)$ localmente lucen como s_1, s_2, s_3 y ι respeta el producto. De este modo se obtiene la identidad

$$\sigma(\text{Push}(t)) = C_{\iota(\tilde{t})} \circ \hat{\delta}([kt]),$$

lo que completa la demostración. La independencia de la elección del levantamiento \tilde{t} sigue del hecho de que dos levantamientos difieren por una potencia de c , la cual se envía a una potencia central de z^k y, por tanto, sólo altera el resultado por un automorfismo interior. \square

Como consecuencia de la Proposición 4.4, tenemos que el siguiente cuadrado falla en conmutar por una conjugación de un elemento en $\pi_1(X_g^k)$,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S_g) & \xrightarrow{\text{Push}} & \text{Mod}(S_g^1) \\ k\delta \circ (ab) \downarrow & \searrow \hat{\delta} & \downarrow \sigma \\ H^1(S_g; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{transvecciones}} & \mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k)) \end{array}$$

Aplicando el morfismo de proyección de $\mathcal{AUT}(\pi_1(X_g^k))$ a $\mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k))$, obtenemos la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S_g) & \xrightarrow{\text{Push}} & \text{Mod}(S_g^1) \\ k\delta \circ (ab) \downarrow & & \downarrow \Psi \\ H^1(S_g; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{transvecciones}} & \mathcal{OUT}(\pi_1(X_g^k)) = \text{Mod}(X_g^k) \end{array}$$

Y de esto se sigue la demostración del Teorema 4.6.

4.3.2. La clase de Euler y la obstrucción a la escisión

El análisis algebraico anterior permite establecer una correspondencia precisa entre la extensión de los grupos modulares del haz 4.1 y la extensión derivada de la sucesión de Birman 3.2.

Denotemos por $eu_k \in H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g; \mathbb{Z}))$ a la clase asociada a la extensión de grupos,

$$1 \rightarrow H^1(S_g; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \text{Mod}(X_g^k) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1, \quad (4.6)$$

esta clase está representada por un 2-cociclo definido por

$$\tau(f, g) = s(f)s(g)s(fg)^{-1} \in i(H^1(S_g; \mathbb{Z}))$$

donde $s : \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{Mod}(X_g^k)$ es una sección de conjuntos.

Por otro lado, sea $eu \in H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g; \mathbb{Z}))$ la clase asociada a la extensión derivada de la sucesión de Birman,

$$1 \rightarrow H^1(S_g; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \text{Mod}(S_g^1)/\pi' \xrightarrow{[Forget]} \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1.$$

donde el 2-cociclo que representa a la clase está dado por

$$\bar{\tau}(f, g) = \bar{s}(f)\bar{s}(g)\bar{s}(fg)^{-1} \in i(H_1(S_g; \mathbb{Z}))$$

donde $\bar{s} : \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{Mod}(S_g)/\pi'$ es una sección de conjuntos.

Entonces, de acuerdo con el Teorema 4.6, el 2-cociclo $\tau(f, g)$ se obtiene como la imagen del 2-cociclo $\bar{\tau}(f, g)$ bajo el morfismo $k\delta$, donde $\delta : H_1(S_g) \rightarrow H^1(S_g)$ es el isomorfismo de dualidad de Poincaré, entonces

$$[\tau(f, g)] = [k\delta(\bar{\tau}(f, g))] = (k\delta)_*[\bar{\tau}(f, g)],$$

donde $\delta_* : H^2(\text{Mod}(S_g); H_1(S_g; \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g; \mathbb{Z}))$ es un isomorfismo, por lo tanto,

$$eu_k = (k \cdot \delta)_*(eu).$$

En particular, esto implica la relación lineal

$$eu_k = k \cdot eu_1$$

para cada $g \geq 1$ fijo. Combinando este hecho con el cálculo del orden de eu_1 (ver Teorema 3.2), se concluye:

Corolario 4.3. Sea $g \geq 2$ y $k \in \mathbb{Z}$. La extensión (4.1) escinde si y sólo si $k \equiv 0 \pmod{2g-2}$.

Observación 4.11. En caso que la Extensión 1 exista cuando $g = 1$, entonces la extensión escinde para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Cuando existe una escisión, puede preguntarse por su unicidad. Las posibles escisiones (módulo conjugación por $H^1(S_g; \mathbb{Z})$) se parametrizan por el grupo

$$H^1(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g; \mathbb{Z})).$$

Sin embargo, de acuerdo con el cálculo de Morita (Proposición 3.9), este grupo se anula para $g \geq 1$, lo cual implica:

Corolario 4.4. Para todo $g \geq 1$, la escisión de la extensión (4.1), cuando existe, es única.

El caso de haces de círculos sobre el toro

El haz de círculos orientado sobre T^2 con número de Euler k es homeomorfo al toro de aplicación de la k -ésima potencia del giro de Dehn ϕ sobre su curva meridional, es decir,

$$X_1^k \cong M_\phi = T^2 \times [0, 1]/(x, 1) \sim (\phi(x), 0).$$

Recordemos que salvo verificar la existencia de la extensión

$$1 \rightarrow H^1(T^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_1^k) \rightarrow \text{Mod}(T^2) \rightarrow 1$$

entonces, de acuerdo al Corolario 4.3 cada una de estas extensiones escinden, independientemente del valor de $k \in \mathbb{Z}$. En este contexto, el grupo modular de M_ϕ se obtendría como el producto semidirecto:

$$\text{Mod}(X_\phi) \cong H^1(T^2; \mathbb{Z}) \rtimes \text{Mod}(T^2).$$

Aquí, la acción de $\text{Mod}(T^2)$ sobre $H^1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ es la acción usual de matrices en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre vectores.

El haz tangente unitario de una superficie orientable

Un caso representativo y geoméricamente interesante es el del haz tangente unitario $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow US_g \rightarrow S_g$, donde el número de Euler es $k = 2g - 2 = -\chi(S_g)$. Así, este haz es no trivial para $g \geq 2$, y admite una acción natural del grupo modular $\text{Mod}(S_g)$ por homeomorfismos, ya que cada homeomorfismo de la superficie induce un difeomorfismo del haz tangente.

Desde el punto de vista algebraico, esto implica que la acción de $\text{Mod}(S_g)$ levanta a una acción por homeomorfismos del haz US_g , y por tanto:

$$\text{Mod}(X_g^{2-2g}) \rightarrow \text{Mod}(S_g)$$

admite una sección de grupos. Dicho de otra forma, la extensión

$$1 \rightarrow H^1(S_g; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(X_g^{2-2g}) \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow 1$$

escinde, y se tiene:

$$\text{Mod}(X_g^{2-2g}) \cong H^1(S_g; \mathbb{Z}) \rtimes \text{Mod}(S_g),$$

donde la acción del grupo modular sobre el grupo abeliano corresponde a la acción natural de $\text{Mod}(S_g)$ sobre la primera cohomología de la superficie.

Esto coincide con el punto de vista cohomológico, pues como hemos mostrado la clase de Euler $eu_1 \in H^2(\text{Mod}(S_g); H^1(S_g; \mathbb{Z}))$ se anula exactamente cuando $k \equiv 0 \pmod{2g - 2}$, y aquí $k = 2 - 2g$ es mínimo generador de torsión.

Apéndices

Apéndice A

Haces fibrados y su clasificación

En este apéndice introducimos los conceptos esenciales sobre haces fibrados y su clasificación, destacando el papel central de los G -haces principales. El objetivo no es desarrollar la teoría en detalle, sino presentar la terminología y resultados necesarios para su aplicación en el cuerpo del trabajo. Este Apéndice está fundamentado principalmente en la obra clásica de Husemoller [Hu94] y, de forma complementaria, en [Be91].

A.1. Haces fibrados

Comenzamos por dar algunas definiciones principales y estableciendo la notación que usaremos.

Definición A.1. Decimos que la terna $\xi = (\pi, E, B)$ es un **haz** si $\pi : E \rightarrow B$ es una función continua y sobreyectiva entre espacios topológicos que cumple la **propiedad de trivializaciones locales**, esto es, si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de B y existen homeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,$$

tal que si $pr : U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$ es la proyección natural sobre U_α entonces, $\pi|_{U_\alpha} = (pr) \circ \phi_\alpha$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow pr & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

Nos referimos por **espacio base** del haz a B y **espacio total** a E . Cada subespacio $\pi^{-1}(b)$ de E con $b \in B$ es llamado **la fibra del haz** ξ sobre b . Además, a cada par (U_α, ϕ_α) lo llamaremos una **trivialización** del haz ξ .

Los espacios base que consideraremos en todo el trabajo serán conexos, lo cual implica que todas las fibras de un haz sean espacios homeomorfos, por lo tanto, que se hable de un solo espacio como la fibra del haz y tenga sentido la siguiente notación.

Notación A.1. Sea $\xi = (\pi, E, B)$ un haz con fibra F , entonces denotamos de igual manera al haz ξ como

$$F \hookrightarrow E \rightarrow B.$$

Un haz fibrado puede visualizarse localmente como un producto entre la fibra y vecindades del espacio base, aunque su estructura global suele diferir de dicho producto. El caso más sencillo es el del haz trivial:

Ejemplo A.1. El haz trivial sobre B con fibra F está dado por (pr_B, E, B) , donde $E = F \times B$ y $pr_B: F \times B \rightarrow B$ es la proyección.

Determinar si un haz es trivial no siempre es evidente, y distintos haces pueden compartir la misma estructura esencial. Para formalizar cuándo dos haces con la misma fibra son equivalentes, introducimos la siguiente noción:

Definición A.2. Sean $\xi = (\pi, E, B)$ y $\eta = (\pi', E', B')$ dos haces. Decimos que un par de funciones continuas

$$(f, g): (E', B') \longrightarrow (E, B)$$

es un **morfismo de haces** si se cumple $\pi \circ f = g \circ \pi'$ (el siguiente diagrama conmuta).

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Decimos que un morfismo de haces es un **isomorfismo de haces** si existe otro morfismo de haces $(\tilde{f}, \tilde{g}): (E, B) \longrightarrow (E', B')$ tal que

$$f \circ \tilde{f} = Id_{E'}, \quad \tilde{f} \circ f = Id_E, \quad g \circ \tilde{g} = Id_{B'}, \quad \tilde{g} \circ g = Id_B.$$

Grupo estructural de un haz fibrado

El grupo estructural de un haz fibrado describe en cierto sentido cómo se “pegan” localmente las fibras del haz cuando se pasa de una trivialización a otra. Y a la vez describe ciertas características geométricas del haz.

Sea ξ un haz fibrado $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ y sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un sistema de trivializaciones para ξ . Para cualesquiera trivializaciones tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la función

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

dada por $(x, z) \mapsto (x, g_{ij}(x)(z))$ es un homeomorfismo, donde $g_{ij}(x) : F \rightarrow F$ es un homeomorfismo de F definido explícitamente por $pr_2 \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ con $pr_2 : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow F$ la proyección natural sobre F .

Cada g_{ij} es una función continua de $U_i \cap U_j$ a un subgrupo de los automorfismos de F (en el contexto topológico los homeomorfismos de F), las cuales llamaremos **funciones de transición**. Se puede verificar que las funciones de transición satisfacen las siguientes condiciones: $g_{ii}(x) = 1$, $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$ y la condición de cociclo $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Definición A.3. Decimos que ξ tiene **grupo estructural** $G \subseteq \text{Homeo}(F)$ si, tras escoger una familia de trivializaciones $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, todas las funciones de transición toman valores en G . Además, decimos que $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ define una **G -estructura** en ξ .

Observación A.1. En particular, cualquier haz admite siempre el grupo máximo $\text{Homeo}(F)$, pero en la práctica se busca un subgrupo “mínimo” que concentre la información necesaria de la estructura del haz.

El grupo estructural no sólo dicta cómo se “pegan” las fibras, también fija la *geometría* que cada una de ellas conserva. Al exigir que toda identificación entre dos fibras viva en $G \subset \text{Homeo}(F)$, declaramos qué simetrías de la fibra modelo F consideramos legítimas. Cada fibra $\pi^{-1}(b)$ queda así equipada con la misma G -estructura. Este lenguaje permite hablar de haces *vectoriales*, *complejos*, etc., simplemente eligiendo el subgrupo apropiado de $\text{Homeo}(F)$.

Ejemplo A.2 (Haz vectorial). Tomando $F = \mathbb{R}^n$ y $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ obtenemos los haces vectoriales reales; el haz tangente TM de una variedad es el ejemplo clásico. De forma análoga, con $F = \mathbb{C}^n$ y $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ se obtienen los haces vectoriales complejos.

Elegir un subgrupo más pequeño (una *reducción* del grupo estructural) equivale a dotar las fibras de estructura adicional: orientación, métrica, etc.

Definición A.4. Si ξ posee grupo estructural G , decimos que un subgrupo $H \subseteq G$ es una **reducción del grupo estructural** cuando existen nuevas trivializaciones cuyas transiciones caen en H .

Ejemplo A.3. Se dice que un haz vectorial de rango n es **orientable** si su grupo estructural puede reducirse de $O(n)$ a $SO(n)$. Una **orientación** de dicho haz es la elección explícita de esa reducción, y el par resultante se denomina **haz vectorial orientado**.

En otras palabras, la reducción de $O(n)$ a $SO(n)$ equivale a dotar de una orientación coherente a cada fibra, de modo que el haz vectorial refleje localmente la idea de “orientación” en el sentido clásico de la geometría diferencial.

Al considerar haces con grupo estructural G , la noción de morfismo de haces va a respetar la G -estructura de los haces, lo cual queda descrito en la siguiente definición.

Definición A.5 (Trivialización admisible). Dada una G -estructura como arriba, una trivialización $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ se dice **admisible (o compatible con la G -estructura)** si

para cada α existe un mapa $g_\alpha : U \cap U_\alpha \rightarrow G$, tal que en $U \cap U_\alpha$ se cumple

$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}(b, p) = (b, g_\alpha(b)(p)).$$

La familia de todas las trivializaciones admisibles forma el atlas máximo compatible con la G -estructura.

Definición A.6 (Morfismo de haces con grupo estructural G). Sean $\xi_i = (\pi_i, E_i, B_i, G)$, $i = 1, 2$, dos haces con la misma fibra F y el mismo grupo estructural G . Un **morfismo de haces con G -estructura** es un diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

tal que, para trivializaciones admisibles arbitrarias

$$\varphi : \pi_1^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad \psi : \pi_2^{-1}(V) \rightarrow V \times F,$$

la composición

$$\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1} : (U \cap f^{-1}(V)) \times F \longrightarrow (U \cap f^{-1}(V)) \times F$$

es de la forma

$$\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}(b, p) = (f(b), h(b)(p)),$$

donde $h : U \cap f^{-1}(V) \rightarrow G$ es continua. Si, además los haces tienen la misma base $B_1 = B_2$ y $f = \text{id}_B$, se dice que \tilde{f} es un **isomorfismo** de haces con G -estructura.

Haces inducidos

Una manera de construir nuevos haces a partir de un haz dado es a través de la construcción conocida como *pull-back* de una función continua. Esta construcción permite “transferir” la información de un haz con espacio base B a un haz con otro espacio base X por medio de una función $f : X \rightarrow B$.

Definición A.7. Sea $\xi = (\pi, E, B)$ un haz fibrado, y sea $f : X \rightarrow B$ una función continua. El *pull-back* de ξ a lo largo de f se define como el espacio

$$f^*(E) = \{ (p, x) \in E \times X \mid f(x) = \pi(p) \},$$

provisto de la proyección $\pi_f : f^*(E) \rightarrow X$ dada por $\pi_f(p, x) = x$. El par $(\pi_f, f^*(E), X)$ constituye un haz fibrado, llamado el **haz inducido** por f y denotado $f^*(\xi)$.

Proposición A.1. Sea ξ un haz fibrado $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ con grupo estructural G , y sea $f : X \rightarrow B$ una aplicación continua. Entonces $f^*(\xi)$ es un haz fibrado sobre X con el mismo grupo estructural G y fibra F .

Observación A.2. Dado el haz fibrado ξ como en la Definición A.7, la función $g : f^*(E) \rightarrow E$ dada por $g(p, x) = p$ junto con $f : X \rightarrow B$ define un morfismo de haces, es decir, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{g} & E \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Geoméricamente, si ξ describe cierta estructura local sobre un espacio B , el pull-back nos permite “llevar” dicha estructura a un espacio diferente X mediante la función $f : X \rightarrow B$. De esta forma, obtenemos un haz sobre X que refleja la misma configuración local que ξ tenía sobre B , pero ahora *inducida* por la función f .

A.2. G -haces principales

La clasificación de haces fibrados se simplifica notablemente al estudiar los G -haces principales, ya que estos codifican las simetrías y transiciones necesarias para reconstruir cualquier haz asociado. En esta sección fijaremos la terminología y el marco que necesitaremos más adelante.

Definición A.8. Sea G un grupo topológico. Un **G - haz principal** es un haz $\xi_G = (\pi, E, B)$ cuya fibra es homeomorfa a G y tiene grupo estructural $L_G := \{L_g : G \rightarrow G \mid g \in G\}$, donde $L_g(h) = gh$ es una traslación izquierda para todo h en G .

Equivalentemente, ξ_G es un **G - haz principal**, si E es un G -espacio principal¹ libre, es decir, la acción de G es libre, con $\pi(e \cdot g) = \pi(e)$. Y para cada punto $x \in B$ existe un abierto $U \ni x$ y un homeomorfismo G -equivariante $\varphi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, respecto de la acción $(u, g)h = (u, gh)$.

Observación A.3. Estas dos formulaciones son equivalentes: la primera remarca el papel de G como grupo estructural; la segunda es más concreta y resalta la acción libre en la fibra. Con frecuencia simplemente se dice que un G -haz principal es un haz con fibra G y grupo estructural G , implícitamente se identifica G con L_G , pues ambos son isomorfos como grupos topológicos.

Morfismos e isomorfismos. Sean $\pi : E \rightarrow B$ y $\pi' : E' \rightarrow B'$ dos G -haces principales. Un

¹ Para cada G -espacio E existe una función llamada **función de traslación** $\tau : E^* \rightarrow G$ donde $E^* = \{(x, x') \in E \times E \mid x \cdot g = x', g \in G\}$. Diremos que E es un **G -espacio principal** si la función de traslación es continua.

par (u, f) con $u : E \rightarrow E'$ y $f : B \rightarrow B'$ es un morfismo si el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

y u es G -equivariante ($u(e \cdot g) = u(e) \cdot g$). Cuando $B = B'$ todo morfismo es automáticamente un isomorfismo.

Denotaremos por $Prin_B(G)$ al conjunto de G -haces principales con base B . Estos conjuntos junto con los morfismos de G -haces principales definen una categoría. Así, en la categoría $Prin_B(G)$ cada flecha es invertible.

Haces numerables. La clasificación de los G -haces principales que presentaremos se centrará en una clase específica de estos, a los que llamaremos *haces numerables*.

Definición A.9. Un G -haz principal $\xi = (\pi, E, B)$ es **numerable** si existe una cubierta $\{U_i\}_{i \in S}$ numerable² de B tal que $(\pi|_{U_i}, \pi^{-1}(U_i), U_i)$ es un haz trivial para cada $i \in S$.

Si B es paracompacto (por ejemplo, un CW-complejo) toda cubierta admite una subcubierta numerable, de modo que cualquier G -haz sobre un espacio paracompacto es numerable. En lo siguiente y en el desarrollo de esta tesis, todos los haces se asumirán numerables.

A.3. Clasificación de G -haces principales y de haces fibrados

Para un G -haz principal $\xi = (\pi, E, B)$ y un espacio paracompacto X , cualquier función $f : X \rightarrow B$ produce por pull-back un G -haz $f^*\xi_G$ sobre X . El siguiente resultado muestra que el procedimiento depende sólo de la clase de homotopía de f .

Proposición A.2. Si X es paracompacto y $f \simeq g : X \rightarrow B$, entonces $f^*\xi_G \cong g^*\xi_G$.

En consecuencia, se define naturalmente la función entre el conjunto de clases de homotopía de funciones $X \rightarrow B$ y las clases de isomorfismos de G -haces principales con base X .

$$\Phi_{\xi_G} : [X, B] \longrightarrow Prin_G(X), \quad [f] \longmapsto f^*\xi_G.$$

Observación A.4. Esta función no es necesariamente una biyección, pero su comportamiento sugiere la noción central que sigue.

Definición A.10. Un G -haz fibrado **universal** es un G -haz principal $\xi_G = (\pi, EG, BG)$ tal que para todo espacio paracompacto X , la función

$$\Phi_{\xi_G} : [X, BG] \longrightarrow Prin_G(X),$$

² Decimos que una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in S}$ de B un espacio topológico es **numerable** si existe una partición de la unidad $\{u_i\}_{i \in S}$ tal que $cd(u_i^{-1}(0, 1]) \subset U_i$ para cada $i \in S$.

es una biyección. El espacio BG se llama *espacio clasificante* y la función $f : X \rightarrow BG$ que clasifica un haz f^*EG se denomina *función clasificante*.

Universalidad implica unicidad: dos haces universales $EG \rightarrow BG$ y $E'G \rightarrow B'G$ determinan equivalencias $EG \simeq E'G$ y $BG \simeq B'G$ compatibles con la acción de G . De existir un G -haz fibrado universal, este es único hasta homotopía, véase [Ca25], [Hu94].

Teorema A.4. El modelo de EG es único salvo homotopía y es débilmente contráctil.

Ahora queremos garantizar que para cada grupo G existe este haz.

Existencia mediante la construcción de Milnor. La clasificación de G -haces principales requiere la existencia de un G -haz principal universal. Milnor demostró tal existencia mediante una construcción geométrica explícita basada en el producto *join*.

Sea G un grupo topológico. La **construcción de Milnor** define EG como el *join infinito*:

$$EG := G * G * G * \cdots$$

donde el join de $n + 1$ copias de G (denotado G^{*n}) consiste en puntos $t_0g_0 + t_1g_1 + \cdots + t_ng_n$ con $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$, y topología adecuada. El espacio EG se obtiene como límite inductivo de G^{*n} bajo inclusiones canónicas.

Este espacio posee dos propiedades clave: Este es débilmente contráctil y tiene una acción libre de G . La contractibilidad de EG garantiza que cualquier haz principal $P \rightarrow X$ admite una función clasificante única, salvo homotopía. Técnicamente, el pull-back de π a lo largo de $f : X \rightarrow BG$ reconstruye P como $f^*EG \cong P$. Y, por otro lado, la acción libre de G nos permite definir el **espacio clasificante** como el cociente:

$$BG := EG/G$$

y la proyección $\pi : EG \rightarrow BG$ resulta ser un G -haz principal.

Teorema A.5 (Haz universal de Milnor). La proyección cociente $\pi : EG \rightarrow BG$ es un G -haz principal universal.

Corolario A.1 (Clasificación de G -haces principales). Si X es un espacio paracompacto (por ejemplo, X es un CW-complejo), existe una biyección entre clases de isomorfismo de G -haces principales sobre X y clases de homotopía $[X, BG]$.

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi_G} : [X, BG] &\longrightarrow \text{Prin}_G(X), \\ (f : X \rightarrow BG) &\mapsto f^*(EG). \end{aligned}$$

Clasificación de haces fibrados

La relación clave entre los G -haces principales y los haces fibrados radica en que, dado un G -haz principal $\xi_G = (\pi, E, B)$, es posible asociarle haces con fibras arbitrarias mediante construcciones que preservan la acción del grupo.

Construcción de Borel. Esta construcción es especialmente relevante porque nos permite transferir la clasificación de G -haces principales a la de haces fibrados. Es decir, si entendemos la clasificación de los G -haces principales y conocemos la acción de G en F la fibra de los haces fibrados, entonces podemos deducir, mediante la construcción de Borel, una clasificación de los haces fibrados con fibra F y grupo estructural G .

La idea principal es que, dado un G -haz principal y un G -espacio izquierdo F (que puede interpretarse como la fibra “modelo” que se desea utilizar), podemos extender la acción de G al producto $E \times F$ mediante la acción diagonal:

$$(e, f) \cdot g = (e \cdot g, g^{-1} \cdot f), \quad \text{para } e \in E, f \in F \text{ y } g \in G.$$

Esta extensión nos permite definir el espacio cociente $(E \times F)/G$, denotado por $E \times_G F$, al cual llamaremos el **haz fibrado asociado** a ξ_G con fibra F y grupo estructural G . La proyección

$$\pi_F : E \times_G F \rightarrow B, \quad \pi_F([p, f]) = \pi(p)$$

convierte efectivamente a $\xi = (\pi_F, E \times_G F, B)$ en un haz fibrado.

Por otro lado, dado un haz fibrado $p : E \rightarrow B$ con fibra F y grupo estructural G , hay un G -haz fibrado principal asociado. Por definición, G es un subgrupo de $\text{Homeo}(F)$. Por lo tanto, la acción de G en F es efectiva, es decir, si los homeomorfismos $L_g, L_h : F \rightarrow F$ coinciden, entonces $g = h$. Equivalente a esto, el morfismo natural $G \rightarrow \text{Homeo}(F)$ es inyectivo.

Teorema A.6. Dado ξ un haz fibrado $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ con grupo estructural G , existe un G -haz principal ξ_G sobre B tal que $\xi(E)$ es homeomorfo a $E \times_G F$.

Nótese que estas dos construcciones son inversas entre sí, hasta isomorfismo de haces fibrados con G -estructura sobre B , si la acción de G en F es efectiva, ya que tienen las mismas funciones de transición. Así, el Teorema A.6 nos da una biyección entre los haces fibrados y los G -haces principales, por lo que como hemos mencionado, clasificar a los G -haces principales nos ayuda a clasificar los haces fibrados con grupo estructural G .

Apéndice B

Cohomología y homología de grupos

Este apéndice incluye los principales resultados de cohomología de grupos que usamos en la tesis. Para más detalles acerca de estos temas se sugiere consultar [Br82], [Lö17] y [Ca25].

B.1. Álgebra homológica para la cohomología de grupos

Una teoría de homología asocia a cada objeto matemático una sucesión de grupos abelianos, sus grupos de homología y cohomología, con el propósito de caracterizar mediante invariantes algebraicamente propiedades geométricas o topológicas del objeto de estudio.

El puente entre el objeto original y dichos invariantes es un *complejo de cadenas*. En el caso de homología y cohomología de grupos, este complejo de cadenas se construye mediante una resolución proyectiva. En concreto, a partir de un grupo G , se construye una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$ -módulos, a la cual se le aplican funtores denominados de invariantes y coinvariantes para definir la homología y cohomología del grupo como la homología de estos complejos de cadenas.

Resoluciones libres y proyectivas

Recordemos brevemente que un complejo de cadenas sobre un anillo R es un R -módulo graduado $C = (C_n)$ equipado con un operador de frontera $d : C \rightarrow C$ de grado -1 tal que $d^2 = 0$. Sus ciclos $Z(C) = \ker d$ y fronteras $B(C) = \operatorname{im} d$ permiten definir la homología $H(C) = Z(C)/B(C)$. Los morfismos entre complejos son funciones que conmutan con d , y si dos son homotópicos, inducen el mismo morfismo en homología. Con esto en mente definimos

Definición B.1. Sea R un anillo, M un R -módulo. Decimos que una **resolución** de M sobre R es una sucesión exacta de R -módulos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \rightarrow 0.$$

Si cada F_i es un R -módulo proyectivo, decimos que la resolución es **proyectiva**, si cada F_i es un R -módulo libre, decimos que la resolución es **libre**.

Proposición B.1. Para cualquier R -módulo M siempre existe una resolución libre de M sobre R .

Una resolución se puede entender como un complejo de cadena acíclico, es decir, con homología trivial en todos los niveles, donde M está en el grado -1 . En cierta bibliografía, se considera por resolución al complejo de cadena conformado por los módulos F_i , llamando así, complejo de cadena aumentado a la definición previa, y donde $\epsilon = \partial_0 : F_0 \rightarrow M$ es llamado, el morfismo de aumentación.

Nuestro anillo de interés es construido como sigue. A partir del grupo G , el *anillo de grupo* $\mathbb{Z}G$ está dado por sumas finitas $\sum a_g g$ con a_g un número entero, y g un elemento de G . La acción trivial de G convierte a \mathbb{Z} en un $\mathbb{Z}G$ -módulo; nuestros invariantes se calculan precisamente a partir de resoluciones de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$.

Funtores de coinvariantes e invariantes

Ahora definiremos dos módulos que definen los funtores que aplicaremos a las resoluciones proyectivas para obtener el complejo de cadenas necesario para calcular homología y cohomología de grupos.

Definición B.2. Sea G un grupo y M un $\mathbb{Z}G$ -módulo. Definimos el **grupo de coinvariantes** de M como el cociente

$$M_G := M / \{gm - m : g \in G, m \in M\}$$

y definimos el **grupo de invariantes** de M dado por el submódulo

$$M^G := \{m \in M \mid \forall g \in G, g \cdot m = m\}.$$

Observación B.1. El término “co-invariantes” surge del hecho de que M_G es el mayor cociente de M en el cual G actúa de manera trivial, mientras que M^G , el grupo de invariantes, es el mayor submódulo de M en el cual G actúa trivialmente.

Ambos módulos construyen funtores aditivos entre la categoría de G -módulos y la categoría de grupos abelianos, $GMod \rightarrow Ab$. De hecho, teniendo a \mathbb{Z} con estructura trivial de $\mathbb{Z}G$ -módulo, tenemos los morfismos de \mathbb{Z} -módulos

$$M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M, \quad M^G \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M),$$

Además, se puede mostrar que M_G es un functor *derecho exacto* (envía epimorfismos a epimorfismos) y que M^G es *izquierdo exacto* y llevan módulos libres a libres. Esta definición alternativa de los funtores de coinvariantes e invariantes permite definir, los complejos de cadenas y co-cadenas que calculan la homología y la cohomología de G con coeficientes no triviales en M .

Dado que el complejo de cadenas que usemos para calcular homología o cohomología no debe depender de la resolución elegida, necesitamos que dos resoluciones proyectivas cualesquiera sobre el mismo módulo conduzcan a complejos homotópicamente equivalentes. El *Teorema fundamental del álgebra homológica* [Br82, Lema I.7.4] afirma que si

$$P_* \rightarrow M \quad \text{y} \quad P'_* \rightarrow M$$

son dos resoluciones proyectivas de un R -módulo M , entonces existe un único morfismo de complejos $\phi: P_* \rightarrow P'_*$, único salvo homotopía, que sobre M es la identidad. De ello se sigue que, al aplicar los funtores de coinvariantes ($- \otimes_R M'$) o de invariantes ($\text{Hom}_R(-, M')$), los grupos de homología y cohomología así obtenidos son bien definidos e independientes de la resolución escogida.

B.2. Definición de homología y cohomología de grupos

En las dos secciones anteriores se dieron las herramientas básicas para definir tanto los grupos de homología como los de cohomología de grupos, en esta sección además daremos algunas interpretaciones de la homología y cohomología en grados bajos, basados en el [Br82] y [Lö17].

Definición B.3. Sea G un grupo, M un G -módulo y $F \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ una resolución proyectiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$, entonces definimos el n -ésimo grupo de homología de G con coeficientes en M como:

$$H_n(G; M) := H_n(F \otimes_G M)$$

y definimos el n -ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes en M como:

$$H^n(G; M) := H^n(\text{Hom}_G(F, M))$$

El cálculo explícito de grupos de cohomología para un grupo G arbitrario requiere elegir resoluciones libres de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}G$. Si bien la Proposición B.1 garantiza su existencia teórica, en la práctica se necesitan construcciones específicas que faciliten los cálculos. Entre estas destaca la **resolución barra** (también llamada resolución estándar), que proporciona un modelo combinatorio explícito para los grupos de cohomología. Véase [Br82, I.5].

La resolución barra se construye como el complejo de $\mathbb{Z}G$ -módulos libres:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}G[G \times G] \rightarrow \mathbb{Z}G[G] \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow 0$$

donde $\mathbb{Z}G[G]$ es el módulo libre generado por $\mathbb{Z}G$ e indexado por G y los operadores frontera se definen mediante fórmulas canónicas. Al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$ a esta resolución, se obtiene un complejo cohomológico inhomogéneo:

$$0 \rightarrow \text{Map}(G, A) \xrightarrow{\delta^0} \text{Map}(G \times G, A) \rightarrow \cdots$$

El operador cofrontera δ^0 actúa sobre una función $d : G \rightarrow A$ mediante:

$$\delta^0(d)(g, h) = d(g) + g \cdot d(h) - d(gh)$$

En la Sección 2.1 describimos interpretaciones explícitas los grupos de cohomología en grados uno $H^1(G; A)$ y dos $H^2(G; A)$.

B.3. Cohomología de grupos y cohomología singular

Dado un grupo discreto G siempre existe un espacio $K(G, 1)$ que sea CW-complejo y, por tanto, su cubriente universal sea contráctil. Para cualquier $\mathbb{Z}G$ -módulo A y todo entero $n \geq 0$

$$H_n(G; A) \cong H_n(K(G, 1); A), \quad H^n(G; A) \cong H^n(K(G, 1); A).$$

En otras palabras, la homología (y cohomología) de grupos recupera la homología ordinaria del correspondiente espacio topológico $K(G, 1)$, los cuales son un modelo de espacio clasificante del grupo, ya que son discretos. Esta correspondencia motiva las definiciones algebraicas precedentes y justifica su relevancia en topología algebraica. Con estas herramientas podemos pasar al cálculo explícito de $H^*(G; A)$ y $H_*(G; A)$ en situaciones concretas.

Construcción del isomorfismo en cohomología: Sea $X = K(G, 1)$ un modelo de espacio clasificante para G , y sea \tilde{X} su cubriente universal.

- I. Recordemos que, el grupo G actúa por transformaciones de Deck sobre el cubriente universal.

$$G \curvearrowright \tilde{X}, \quad x \mapsto g \cdot x,$$

lo que permite relacionar cociclos en la cohomología del grupo con cociclos singulares.

- II. Elijamos un dominio fundamental $F \subset \tilde{X}$ para esta acción. Para cada $x \in \tilde{X}$ existe un único $g_x \in G$ con $x \in g_x F$.
- III. En la resolución barra, un n -cociclo $\varphi : G^n \rightarrow A$ es una función que verifica la regla de cociclo. Definimos el **morfismo de comparación**

$$r_F : C^*(G, A) \rightarrow C_{\text{sing}}^*(\tilde{X}, A)$$

dado por

$$\varphi \mapsto r_F(\varphi)(s) = \varphi(g_{s(e_0)}^{-1} g_{s(e_1)}, \dots, g_{s(e_{n-1})}^{-1} g_{s(e_n)}), \quad (\text{B.1})$$

para todo n -símplice singular $s : \Delta^n \rightarrow \tilde{X}$ con vértices $s(e_0), \dots, s(e_n)$. El operador r_F conmuta con los diferenciales: $r_F \circ \delta = \delta_{\text{sing}} \circ r_F$.

- IV. Paso al cociente X . La acción de G es libre, de modo que

$$C_{\text{sing}}^*(\tilde{X}, A)^G \cong C_{\text{sing}}^*(X, A).$$

El morfismo inducido en cohomología

$$r = (r_F)_* : H^*(G; A) \longrightarrow H^*(X; A)$$

no depende del dominio fundamental elegido: si F' es otro, existe una homotopía entre los morfismos correspondientes, $r_F \simeq r_{F'}$.

Teorema B.1 (Teorema de comparación). Si X es un CW-complejo esférico (por ejemplo un $K(G, 1)$), el morfismo anterior es un isomorfismo:

$$r : H^*(G; A) \xrightarrow{\cong} H^*(X; A)$$

La demostración usa la exactitud de la sucesión de Gysin asociada al cubriente $\tilde{X} \rightarrow X$ y el hecho de que \tilde{X} es contráctil. En homología se obtiene un resultado análogo trabajando con coinvariantes $C_*(\tilde{X})_G$.

B.4. La sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

Brevemente, recordamos algunas nociones de sucesiones espectrales que se pueden consultar con más detalle en [Br82], [MC00] y [NSW].

- I. Una **sucesión espectral de cohomología** es una sucesión de R -módulos graduados $E_r^{p,q}$, con $r \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, junto con diferenciales

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1},$$

es decir, $d_r \circ d_r = 0$. Además, cada página está relacionada con la anterior por

$$E_{r+1}^{p,q} \cong \ker(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}).$$

- II. Decimos que la sucesión espectral **converge** a el R -módulo graduado M , lo cual denotamos por

$$E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$$

si para cada (p, q) existe un r_0 tal que el morfismo $d_r^{p,q}$ es cero para $r \geq r_0$. Y además, existe una *filtración de M* , es decir, es una sucesión de submódulos

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F_{p+1} M \subseteq F_p M \subseteq \cdots \subseteq M = \bigcup_n F_n M,$$

tal que para cada $p + q$

$$E_\infty^{p,q} := \text{colim}_r E_r^{p,q} \cong F_p M / F_{p-1} M.$$

La **sucesión espectral en cohomología de Lyndon-Hochschild-Serre (LHS)** se construye a partir de una sucesión exacta de grupos

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

y un G -módulo A . Su página E_2 es $E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(N; A))$ y converge a $H^{p+q}(G; A)$.

La construcción explícita de esta sucesión espectral puede consultarse en [Br82, §VII . 6], [NSW, Teo. 2.4.1], alternativamente véase [MC00, Teo. 5.2].

Sucesión exacta de 5 términos

Una consecuencia importante de la sucesión espectral de LHS es la sucesión exacta de cinco términos, que proporciona información sobre los grupos de cohomología en grados bajos, véase [Br82, §VII Cor. 6.4] y [NSW, 2.4.2].

Corolario B.1. Dada una sucesión exacta de grupos

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

y un G -módulo A , existe la sucesión exacta de grupos

$$0 \rightarrow H^1(Q, A^N) \rightarrow H^1(G, A) \rightarrow H^1(N, A)^Q \xrightarrow{\text{tg}} H^2(Q, A^N) \rightarrow H^2(G, A).$$

El morfismo tg , llamado **morfismo de transgresión** es un morfismo natural que aparece en la página E_2 de la sucesión espectral de Lyndon–Hochschild–Serre asociada a la extensión de grupos, véase [NSW, Prop. 1.6.6] y [NSW, Teo 2.4.3]. Para los cálculos de esta tesis, nos será útil tener una descripción más concreta de este.

Construcción general del morfismo de transgresión. El morfismo de transgresión

$$\text{tg} : H^1(N; A)^Q \rightarrow H^2(Q; A^N).$$

se puede definir como a continuación se describe. Para un cociclo $x \in Z^1(N; A)^Q$, podemos definir explícitamente la transgresión del siguiente modo:

Lema B.1. [NSW, Prop. 1.6.6] Sea x un 1-cociclo (una derivación) Q -invariante en la clase $[x] \in H^1(N, A)^Q$, es decir, $x^\sigma(\tau) := \sigma \cdot x(\sigma^{-1}\tau\sigma) = x(\tau)$ para todo $\sigma \in G$. Entonces, existe $y : G \rightarrow A$ una 1-cocadena que se restringe a x , tal que el 2-cociclo $\partial y : G \rightarrow A$ (donde ∂ es el morfismo del complejo barra)

$$\partial y(g_1, g_2) = g_1 y(g_2) - y(g_1 g_2) + y(g_1)$$

solo depende de las clases $g_1 H, g_2 H$ y toma valores en $A^H = A$. Por tanto, puede verse como elemento de $Z^2(Q, A)$.

Así, definimos el morfismo transgresión como

$$\text{tg}[x] = [\partial y] \in H^2(Q, A).$$

Observación B.2. Si N actúa trivialmente en A , La 1-cocadena $y : G \rightarrow A$ que extiende a x se puede definir como sigue; elegimos una sección de conjuntos (no es necesario que sea homomorfismo) $s : Q \rightarrow G$ que sea normalizada, $s(1) = 1$. Para cada $g \in G$ entonces, $g = s(q)i(n)$ para $q \in Q$ y $n \in N$, así definimos,

$$y(g) = s(q) \cdot x(n).$$

Interpretación mediante el producto cup. El morfismo de transgresión se puede simplificar notoriamente cuando N actúa trivialmente en el G -módulo A . En particular, tienen una interpretación mediante el producto cup. Consideremos la extensión

$$1 \rightarrow N^{\text{ab}} \rightarrow G/N' \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

donde N' es el conmutador de N y la clase de cohomología asociada a esta extensión es $u \in H^2(Q; N^{\text{ab}})$. En particular, el cociclo que representa a la clase de cohomología u asociada a la extensión es

$$\tau(q_1, q_2) = \bar{s}(q_1) \bar{s}(q_2) \bar{s}(q_1 q_2)^{-1} \in N^{\text{ab}},$$

donde \bar{s} es la composición $Q \xrightarrow{s} G \twoheadrightarrow G/N'$. Si N actúa trivialmente sobre A , un cálculo directo muestra que

$$\partial y(q_1, q_2) = -x(\tau(q_1, q_2)). \quad (\text{B.2})$$

Entonces, $\text{tg}[x] = [-x \circ \tau]$.

Por otro lado, como N actúa trivialmente sobre A , tenemos el siguiente isomorfismo

$$H^1(N; A)^Q \cong H^0(Q, \text{Hom}(N^{\text{ab}}, A))$$

pues $H^1(N; A) \cong \text{Hom}(N, A) \cong \text{Hom}(N^{\text{ab}}, A)$ y podemos definir el producto cup:

$$\smile : H^2(Q; N^{\text{ab}}) \times H^0(Q, \text{Hom}(N^{\text{ab}}, A)) \rightarrow H^2(Q; A).$$

Donde $N^{\text{ab}} \oplus \text{Hom}(N^{\text{ab}}, A) \rightarrow A$ está dada por $(n, f) \mapsto f(n)$. Así, induce un morfismo de

$$u \smile (-) : H^1(N; A)^Q \rightarrow H^2(Q; A)$$

definido por $[x] \mapsto (u \smile [x])$. vía la igualdad B.2 se demuestra que este morfismo coincide con el morfismo de transgresión por un factor negativo, es decir, el morfismo de transgresión puede expresarse como

$$\text{tg}([x]) = -u \smile [x]. \quad (\text{B.3})$$

Esto proporciona una herramienta útil para cálculos explícitos del morfismo de transgresión.

Bibliografía

- [ACT23] A. Al Beaini, L. Chen, and B. Tshishiku, *Surface mapping class group actions on 3-manifolds*. Groups Geom. Dyn. (2025) DOI10.4171/GGD/901
- [AHHW25] N. Andrew, S. Hensel, S. Hughes, and R. D. Wade, *Problems on handlebody groups*, <https://arxiv.org/abs/2502.21177> (2025).
- [Baetal] P. Bader, R. Boyd, G. Carfora, D. Galvin, R. Giannini, C. Nagy, J. Nicholson, W. Niu, I. Nonino, M. Pencovitch, and M. Powell, *Mapping class groups of 3-manifolds*. Notas en progreso. https://www.maths.gla.ac.uk/~mpowell/MCGs_3_manifolds-notes.pdf
- [Be91] D. J. Benson. *Representations and Cohomology. Vol. 2: Cohomology of Groups and Modules*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Bo83] F. Bonahon, *Difféotopies des espaces lenticulaires*. Topology, 22(3):305–314, 1983.
- [Br07] M. G. Brin, *Seifert Fibered Spaces: Notes for a course given in the Spring of 1993*. <https://arxiv.org/abs/0711.1346> (2007).
- [Br82] K.S. Brown. *Cohomology of Groups*. Springer-Verlag New York, Inc., 1982.
- [Ca25] J. Cantarero *Lecture notes on classifying spaces*. Libro en progreso (2025).
- [Ce59] J. Cerf, *Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3*. Bull. Soc. Math. Fr., 87:319–329, 1959.
- [Ce68] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 53, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.
- [CT24] L. Chen and B. Tshishiku, *Mapping class groups of circle bundles over a surface*. Michigan Math. J. Advance Publication 1-14 (2024). DOI: 10.1307/mmj/20236382.
- [CR77] P. E. Conner and F. Raymond, *Deforming homotopy equivalences to homeomorphisms in aspherical manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 83(1):36–85, 1977.
- [CA20] A. Cruz Aguilera, *Sobre la homología de los grupos modulares de superficies*. Tesina de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, 2020.

- [El92] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*. Ann. Inst. Fourier, 42(1-2):165–192, 1992.
- [FM12] B. Farb and D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton Mathematical Series **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Gl61] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*. Bull. Amer. Math. Soc., 67:586–589, 1961.
- [Gl62] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*. Trans. Amer. Math. Soc., 104:308–333, 1962.
- [Gh01] E. Ghys, *Groups acting on the circle*. Enseignement Mathématique 47 (2001), no. 3/4, 329–408.
- [Ha66] M.-E. Hamstrom. *Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold* Illinois J. Math., 10:563–573, 1966.
- [Ha83] J. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **72** (1983), 221–239.
- [Ha02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
Disponible en <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Hat80] A. Hatcher. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Cornell University. 1980.
Disponible en <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>.
- [Hu94] D. Husemoller. *Fiber Bundles*. 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics **20**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Jo83] D. Johnson, *The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for \mathcal{I}* , Ann. of Math. **118** (1983), 423–442.
- [Lö17] C. Löh. *Cohomology of Groups*. Lecture notes, Universität Regensburg, 2017. Disponible en <https://loeh.app.uni-regensburg.de/teaching/WS2017-18/GTaCS/skript.pdf>
- [MC00] J. McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge University Press (2000).
- [MS79] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of Mathematics Studies **76**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [Mor86] S. Morita, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles. I*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), 777–810.
- [Mo87] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), no. 3, 551–577.

-
- [Mu84] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in *Arithmetic and geometry*, Vol. II, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser, 1983, pp. 271–328.
- [Mor01] S. Morita. *Geometry of Differential Forms*. Translations of Mathematical Monographs **201**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [NSW] Neukirch, J., Schmidt, A., and Wingberg, K. *Cohomology of number fields*. Springer Berlin, Heidelberg, segunda edición. (2008). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-37889-1>
- [TD08] T. T. Dieck. *Algebraic Topology*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2008.
- [Sm59] S. Smale. *Diffeomorphisms of the 2-sphere*. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 621–626.
- [Sc56] H. Schubert. *Knoten mit zwei brücken*. Mathematische Zeitschrift, 65:133–170, 1956.
- [Vi16] G. Viaggi. *Actions of surface groups on the circle*. Tesi di Laurea Magistrale. Università di Pisa (2016). Disponible en <https://core.ac.uk/download/79622112.pdf>
- [Wal68] F. Waldhausen, *On Irreducible 3-Manifolds Which are Sufficiently Large*. Annals of Mathematics, Vol. 87, No. 1, 1968.