UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

UN PUENTE EPIMÓRFICO ENTRE EL CÁLCULO ENVOLVENTE UNIVERSAL Y EL CÁLCULO TRENZADO SOBRE UNA ÁLGEBRA DE HOPF

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JAIME IVÁN CARLOS FÉLIX

DIRECTOR
DR. GUSTAVO AMILCAR SALDAÑA MONCADA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, GUANAJUATO

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO, 2025

Dedicado a
mis padres Dora Félix Castillo, Jaime Carlos Villegas y
mi hermana Marianna Carlos Félix
de los cuales soy una extensión y
un reflejo de su grandeza.

Dedicatoria especial a
mi novia Fernanda Carmona Martínez
la cual me ha apoyado incondicionalmente
a pesar de todos los retos que se han presentado.

Esta tesis siempre será para ellos.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mi tutor de tesis de maestría, Gustavo Amilcar Saldaña Moncada, por aceptarme como su primer alumno, compartirme su sabiduría y contagiarme su resiliencia. También extiendo mi gratitud al profesor Micho Durdevich, por sus enseñanzas e inspiración para seguir profundizando en este bello arte matemático. También agradezco a mis sinodales: el Dr. Elmar Wagner, el Dr. Fredy Díaz García, la Dra. Perla Cecilia Lucio Peña y el Dr. Gustavo Amilcar Saldaña Mocada por nutrir este trabajo con sus valiosos comentarios e ideas. Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular al Instituto de Matemáticas y a la Facultad de Ciencias, por brindarme un entorno académico excepcional. Destaco el apoyo económico de una beca otorgada por SECIHTI durante 4 semestres, sin la cual este trabajo no habría sido posible. Finalmente, quiero agradecer a todos los familiares y amigos que me han acompañado en este trayecto sinuoso pero emocionante, sus nombres son demasiados para ser contenidos en un solo párrafo.

Índice

Resumen

En el presente trabajo se estudia una generalización del concepto de cálculo diferencial para álgebras no conmutativas. Dicha estructura se puede definir sobre cualquier álgebra asociativa unitaria, un A-bimódulo y un mapeo lineal llamado diferencial que genera al A-bimódulo y satisface la regla de Leibniz. Esta estructura se puede extender de manera envolvente a órdenes superiores. Primero, se estudia la teoría de cálculos diferenciales de alto orden del profesor Đurđević construyendo el cálculo diferencial de alto orden envolvente universal como una álgebra cociente graduada del álgebra tensorial y el ideal izquierdo y derecho de elementos cuadráticos. Después, se estudia la teoría de cálculos diferenciales de alto orden del profesor Woronowicz construyendo el cálculo diferencial de alto orden trenzado como una álgebra cociente graduada del álgebra tensorial y el kernel del operador de antitrenzado. Con esto, se demuestra la existencia de un epimorfismo entre el cálculo diferencial de alto orden envolvente universal y el cálculo diferencial de alto orden trenzado. Finalmente, se presentan dos ejemplos para ilustrar la teoría.

1. Introducción

A principios del siglo XX nació la mecánica cuántica y con ella también apareció una nueva área de las matemáticas, la geometría cuántica. Es el resultado de la unificación de ideas y métodos de cuatro áreas de las matemáticas: la topología, la geometría, el álgebra no conmutativa y el análisis complejo aplicado a dimensiones infinitas. Dos de los más importantes fundadores de la geometría cuántica son los profesores Alain Connes y Stanisław Woronowicz. El primero generalizó el concepto de variedad de Riemann basándose en operadores de Dirac, con el objetivo de describir la geometría del modelo estándar de partículas. El segundo generalizó la idea de grupo de Lie matricial compacto basándose en álgebras de Hopf, con el objetivo de describir simetrías cuánticas. [Woronowicz, 1987] [Connes, 1994]

Ahora, se puede pensar que cada geometría estudia un espacio, en el caso de geometría clásica siempre se puede entender al espacio clásico como una colección de puntos equipada con una estructura, ya sea topológica (con conjuntos abiertos), de variedad (con atlas) o medible (con sigma-álgebras). Sin embargo, en geometría cuántica el espacio deja de ser clásico y se vuelve cuántico, en el sentido de que algunos de estos espacios ni siquiera tienen puntos. Al principio esto parece desconcertante, pero al relajar las hipótesis del Teorema de Gelfand-Naimark todo se aclara.

Se sabe que a toda C^*-álgebra B conmutativa unitaria o no unitaria le corresponde un único espacio clásico X que es un espacio topológico compacto o localmente compacto respectivamente tal que $C(X)$ y $C_0(X)$ son isomorfas a B respectivamente. Si se relajan las hipótesis, tenemos que para todo C^*-álgebra B no conmutativa unitaria o no unitaria no existe espacio clásico X tal que $C(X)$ o $C_0(C)$ sean isomorfas a B respectivamente. Esto indica que ahora tenemos un espacio cuántico compacto o no compacto respectivamente, sin puntos, donde sus propiedades geométricas se estudian puramente a través de la estructura algebraica de B. Así, la visión clásica de un espacio estructurado con puntos se rompe y es reemplazada por una estructura unificada que requiere de un enfoque completamente nuevo y holístico. [Đurđević, 2001]

La geometría cuántica tiene un enorme valor conceptual para el estudio de espacios clásicos, ya que las demostraciones de muchos teoremas son más elegantes y transparentes, esto es porque las diferentes estructuras de puntos clásicos a veces dejan ocultas las simetrías más profundas. Esto no pasa en geometría cuántica, ya que se acepta trabajar *a priori* con objetos globales, las álgebras, que están entrelazadas con la estructura geométrica más natural del espacio y codifican sus simetrías.

Para estudiar un espacio clásico en geometría no conmutativa se realizan dos pasos. El primer paso consiste en expresar la estructura geométrica de un espacio clásico en términos de una $*$-álgebra conmutativa de funciones complejas sobre dicho espacio clásico. Nótese que la definición del $*$-álgebra de funciones depende del nivel geométrico en el que estemos trabajando, ya sea teoría de la medida (funciones medibles), topología (funciones continuas), geometría diferencial (funciones suaves) o geometría algebraica (funciones polinomiales). El segundo paso consiste en cuantizar esta $*$-álgebra de funciones conmutativas introduciendo un parámetro de deformación en el producto del álgebra.

Notemos que cuando este parámetro se vuelve el elemento unitario recuperamos la estructura clásica.

Por ejemplo, dado un grupo de Lie matricial compacto, su álgebra de funciones continuas es una C^*-álgebra conmutativa que contiene una $*$-subálgebra densa que es una $*$-álgebra de Hopf conmutativa. Dicha $*$-subálgebra es el álgebra de funciones polinomiales sobre el grupo de Lie matricial compacto. De esta manera se define a un grupo matricial compacto cuántico como un espacio cuyo álgebra de funciones continuas es una C^*-álgebra (conmutativa o no conmutativa) que contiene una $*$-subálgebra de Hopf densa. Si pensamos en geometría diferencial, esto cobra más sentido ya que un grupo de Lie es un caso particular de una variedad diferenciable y un grupo cuántico es un caso particular de un espacio cuántico.

Ahora, se sabe que una simetría clásica en un espacio clásico X es una acción de un grupo de Lie G sobre X, a su vez, esta acción tiene una representación dual en el álgebra de funciones $C(X)$, que induce una coacción de $C(G)$ sobre $C(X)$. Así, una simetría cuántica en un espacio cuántico X es la coacción de una álgebra de Hopf sobre X.

El siguiente párrafo es una descripción general pero detallada de todos los capítulos de este trabajo y tiene el objetivo de guiar al lector. El Capítulo 2 introduce el concepto de una álgebra de Hopf. Se define la coacción de una álgebra de Hopf sobre un espacio vectorial o bimódulo en general. Se explica cómo funciona la notación de Sweedler, la cual es utilizada en la mayoría de los cálculos del trabajo. Luego, en el Capítulo 3 se define el concepto de cálculo diferencial de primer orden sobre una álgebra de Hopf para introducir el cálculo diferencial de primer orden universal. Después, se definen los bimódulos covariantes izquierdos, derechos y bicovariantes sobre una álgebra de Hopf para demostrar la existencia de una base para estos espacios a través de sus elementos invariantes derechos e izquierdos respectivamente. También se definen los cálculos diferenciales de primer orden covariantes izquierdos, derechos y bicovariantes para demostrar la existencia de tres modelos universales. Se definen los mapeos de gérmenes cuánticos que relacionan el álgebra de Hopf con los espacios invariantes de bimódulos bicovariantes. En el Capítulo 4 se define el mapeo de virado y las álgebras bicovariantes graduadas utilizadas para definir los cálculos diferenciales de alto orden. En el Capítulo 5 se define al cálculo diferencial de alto orden envolvente universal como el cociente del álgebra tensorial de un bimódulo bicovariante y el ideal generado por elementos cuadráticos. En el Capítulo 6 se introducen los grupos trenzados para construir el álgebra exterior trenzada. Así, se define el cálculo diferencial de alto orden trenzado como el cociente del álgebra tensorial de un bimódulo bicovariante y el kernel del operador de antitrenzado. Se presenta la demostración de la existencia de un epimorfismo entre el cálculo diferencial de alto orden envolvente universal y el cálculo diferencial de alto orden trenzado. En el Capítulo 7 se presentan dos ejemplos que indican que dicho epimorfismo puede ser un isomorfismo o puede no ser un isomorfismo. El primer ejemplo consiste en calcular el álgebra de Hopf de un grupo de Lie matricial compacto, su cálculo diferencial de primer orden, así como su cálculo diferencial de alto orden envolvente universal y trenzado, demostrando que son isomorfos. El segundo ejemplo consiste en calcular el álgebra de Hopf del grupo de enteros módulo 2, su cálculo diferencial de primer orden, así como su cálculo diferencial de alto orden envolvente universal y trenzado, demostrando que no son isomorfos.

En el presente trabajo solo se usará la notación original del profesor Woronowicz para grupos cuánticos. Para realizar cálculos únicamente se usará la notación de Sweedler de un solo dígito. Además, el producto tensorial siempre será sobre $\mathbb{C}$ a menos que se indique lo contrario.

2. Álgebras de Hopf

Definición 1 Sea A un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Llamamos a la tercia $(A, \tilde{\mu}, 1_A)$ una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa unitaria si el mapeo $\tilde{\mu} : A \times A \to A$ dado por $\tilde{\mu}(a,b) = ab$ satisface las siguientes propiedades:

i) $\tilde{\mu}(\alpha a, \beta b) = \alpha a \beta b = \alpha\beta ab = \alpha\beta\tilde{\mu}(a,b)\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\forall\ a, b \in A$.

ii) $\tilde{\mu}(ab, c) = (ab)c = a(bc) = \tilde{\mu}(a, bc)\ \forall\ a, b, c \in A$.

iii) $1_A \in A$ es el único elemento que satisface $\tilde{\mu}(1_A, a) = 1_A a = a 1_A = \tilde{\mu}(a, 1_A)\ \forall\ a \in A$.

Además, por la propiedad universal del producto tensorial existe un único mapeo lineal $\mu : A \otimes A \to A$ dado por $\mu(a \otimes b) = ab$. Más aún, como $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ es una base para $\mathbb{C}$, al evaluarlo bajo un mapeo lineal $\tilde{\eta} : \mathbb{C} \to A$ dado por $\tilde{\eta}(1_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathbb{C}} 1_A = 1_A$ y aplicar la linealidad se induce un único mapeo lineal $\eta : \mathbb{C} \to A$ dado por $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$.

Por lo anterior, a partir de este momento llamamos a la tercia (A, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa unitaria si el mapeo lineal $\mu : A \otimes A \to A$ llamado producto de álgebra y el mapeo lineal $\eta : \mathbb{C} \to A$ llamado elemento unitario hacen que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

Asociatividad

$(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))(a \otimes b \otimes c) = \mu(a \otimes bc) = a(bc) = (ab)c = \mu(ab \otimes c) = (\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}))(a \otimes b \otimes c)\ \forall\ a, b, c \in A.$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[d, "\cong"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & A & A \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Elemento Unitario

$(\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}))(\alpha \otimes a) = \mu(\alpha 1_A \otimes a) = \alpha a \cong \alpha \otimes a$ y
$(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \eta))(a \otimes \alpha) = \mu(a \otimes \alpha 1_A) = a\alpha \cong a \otimes \alpha\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 2 Sean (A_1, μ_1, η_1) y (A_2, μ_2, η_2) $\mathbb{C}$-álgebras. Llamamos al mapeo lineal $f : A_1 \to A_2$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras si preserva el producto de álgebra y el elemento unitario. Es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A_1 \otimes A_1 \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_1"'] & A_2 \otimes A_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\ A_1 \arrow[r, "f"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

Preservación del Producto

$(f \circ \mu_1)(a \otimes b) = f(ab) = f(a)f(b) = \mu_2(f(a) \otimes f(b)) = (\mu_2 \circ (f \otimes f))(a \otimes b)\ \forall\ a, b \in A_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\eta_1"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\eta_2"] \\ A_1 \arrow[r, "f"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

Preservación del Elemento Unitario

$(f \circ \eta_1)(\alpha) = f(\alpha 1_{A_1}) = \alpha 1_{A_2} = \eta_2(\alpha) = (\eta_2 \circ \mathrm{id})(\alpha)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 3 Sea C un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Llamamos a la tercia (C, ϕ, ε) una $\mathbb{C}$-coálgebra coasociativa counitaria si el mapeo lineal $\phi : C \to C \otimes C$ llamado coproducto y el mapeo lineal $\varepsilon : C \to \mathbb{C}$ llamado elemento counitario hacen que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\phi"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\phi\otimes\mathrm{id}"] & C \arrow[l, "\phi"] \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Coasociatividad

$((\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \phi)(a) = (\mathrm{id} \otimes \phi)(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} = (\phi \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = ((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a)\ \forall$ $a \in C$.

$$\begin{tikzcd} C \otimes \mathbb{C} & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] & \mathbb{C} \otimes C \\ C \arrow[u, "\cong"] & C \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\phi"'] & C \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Elemento Counitario

$((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \phi)(a) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = a^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(2)}) \cong a = \mathrm{id}(a)$ y
$((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} \cong a = \mathrm{id}(a)\ \forall\ a \in C$.

Definición 4 Sean $(C_1, \phi_1, \varepsilon_1)$ y $(C_2, \phi_2, \varepsilon_2)$ $\mathbb{C}$-coálgebras. Llamamos al mapeo lineal $f : C_1 \to C_2$ un morfismo de $\mathbb{C}$-coálgebras si preserva el coproducto y el elemento counitario. Es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
C_1 \otimes C_1 \arrow[r, "f\otimes f"] & C_2 \otimes C_2 \\
C_1 \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "f"'] & C_2 \arrow[u, "\phi_2"']
\end{tikzcd}$$

Preservación del Coproducto

$$((f \otimes f) \circ \phi_1)(a) = (f \otimes f)(a_1^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) = f(a_1^{(1)}) \otimes f(a_1^{(2)}) = \phi_2(f(a)) = (\phi_2 \circ f)(a) \ \forall \ a \in C_1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{C} \\
C_1 \arrow[u, "\varepsilon_1"] \arrow[r, "f"'] & C_2 \arrow[u, "\varepsilon_2"']
\end{tikzcd}$$

Preservación del Elemento Counitario

$$(\mathrm{id} \circ \varepsilon_1)(a) = \varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(f(a)) = (\varepsilon_2 \circ f)(a) \ \forall \ a \in C_1.$$

Definición 5 Sean (B, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa unitaria y (B, ϕ, ε) una $\mathbb{C}$-coálgebra coasociativa counitaria. Llamamos a la péntada $(B, \mu, \eta, \phi, \varepsilon)$ una $\mathbb{C}$-biálgebra asociativa unitaria coasociativa counitaria si $\phi : B \to B \otimes B$ y $\varepsilon : B \to \mathbb{C}$ son homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras. Es decir, se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $(\varepsilon \circ \mu_B)(a \otimes b) = \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = (\mu_{\mathbb{C}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon))(a \otimes b) \ \forall \ a, b \in B.$

ii) $(\varepsilon \circ \eta_B)(\alpha) = \varepsilon(\alpha 1_B) = \alpha 1_{\mathbb{C}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(\alpha) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}.$

iii) $(\phi \circ \mu_B)(a \otimes b) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = (\mu_{B\otimes B} \circ (\phi \otimes \phi))(a \otimes b) \ \forall \ a, b \in B.$

iv) $(\phi \circ \eta_B)(\alpha) = \phi(\alpha 1_B) = \alpha 1_B \otimes \alpha 1_B = \eta_{B\otimes B}(\alpha) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}.$

Definición 6 Sea (A, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa unitaria. Llamamos al mapeo lineal $\sigma_A : A \otimes A \to A \otimes A$ dado por $\sigma_A(a \otimes b) = b \otimes a$ mapeo de virado algebraico.

Definición 7 Sea $(A, \mu, \eta, \phi, \varepsilon)$ una $\mathbb{C}$-biálgebra asociativa unitaria coasociativa counitaria. Llamamos a la héxada $(A, \mu, \eta, \phi, \varepsilon, \kappa)$ una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf asociativa unitaria coasociativa counitaria antipodal si el mapeo lineal $\kappa : A \to A$ llamado coinverso o antípoda satisface las siguientes propiedades:

i) $(\kappa \circ \mu)(a \otimes b) = \kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a) = (\mu \circ (\kappa \otimes \kappa))(b \otimes a) = (\mu \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \sigma_A)(a \otimes b) \ \forall \ a, b \in A.$

ii) $(\kappa \circ \eta)(\alpha) = \kappa(\alpha 1_A) = \eta(\alpha)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

iii) $(\phi \circ \kappa)(a) = \phi(\kappa(a)) = \kappa(a^{(2)}) \otimes \kappa(a^{(1)}) = \sigma_A(\kappa(a^{(1)}) \otimes \kappa(a^{(2)}))) = (\sigma_A \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \phi)(a)\ \forall\ a \in A$.

iv) $(\varepsilon \circ \kappa)(a) = \varepsilon(\kappa(a)) = \varepsilon(a)\ \forall\ a \in A$.

v) κ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "="'] & A \otimes A \arrow[r, "\kappa\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[d, "="] \\
A \arrow[rr, "\varepsilon"'] & & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$(\mu \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = \mu(\kappa(a^{(1)}) \otimes a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})a^{(2)} = \varepsilon(a)1_A = \eta(\varepsilon(a)) = (\eta \circ \varepsilon)(a)\ \forall\ a \in A.$$

vi) κ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "="'] & A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\kappa"] & A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[d, "="] \\
A \arrow[rr, "\varepsilon"'] & & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa) \circ \phi)(a) = \mu(a^{(1)} \otimes \kappa(a^{(2)})) = a^{(1)}\kappa(a^{(2)}) = \varepsilon(a)1_A = \eta(\varepsilon(a)) = (\eta \circ \varepsilon)(a)\ \forall\ a \in A.$$

Notación de Sweedler para el Coproducto Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. La imagen de $a \in A$ bajo ϕ se denotará por $\phi(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)}$, lo cual indica la existencia de una suma finita implícita debido a la aparición de a en el primer y segundo término. A esto se le conoce como notación de Sweedler para el coproducto. Debido a la coasociatividad esto se puede generalizar para n-coproductos. Por ejemplo, para n=3 $((\phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes a^{(4)} = ((\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \phi) \circ (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \phi)(a)$.

Definición 8 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Llamamos coacción izquierda de A sobre V a un mapeo lineal $\Phi_V : V \to A \otimes V$ que hace que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Phi_V"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & A \otimes V \arrow[d, "\phi\otimes\mathrm{id}"] \\
A \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Phi_V"'] & A \otimes A \otimes V
\end{tikzcd}$$

$((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_V)(v) = (\phi \otimes \mathrm{id})(v^{(-1)} \otimes v^{(0)}) = v^{(-11)} \otimes v^{(-12)} \otimes v^{(0)} = v^{(-1)} \otimes v^{(0-1)} \otimes v^{(00)} =$
$(\mathrm{id} \otimes \Phi_V)(v^{(-1)} \otimes v^{(0)}) = ((\mathrm{id} \otimes \Phi_V) \circ \Phi_V)(v)\ \forall\ v \in V.$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi_V"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \otimes V \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ V \arrow[r, "\cong"'] & \mathbb{C} \otimes V \end{tikzcd}$$

$((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_V)(v) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(v^{-1} \otimes v^{0}) = \varepsilon(v^{-1}) \otimes v^{0} \cong v = \mathrm{id}(v)\ \forall\ v \in V.$

Sea W un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de V. Llamamos a W invariante bajo Φ_V si $\Phi_V(W) \subset A \otimes W$. Más aún, $\Phi_V|_W : W \to A \otimes W$ es una coacción izquierda de A sobre W.

Notación de Sweedler para la Coacción Izquierda de una Álgebra de Hopf sobre un Espacio Vectorial Sea $\Phi_V : V \to A \otimes V$ una coacción izquierda dada por $\Phi_V(v) = \sum_i a_i \otimes v_i$ con $a_i \in A$ y $v_i \in V$. En notación de Sweedler esto se expresa como $\Phi_V(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$.

Definición 9 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Llamamos coacción derecha de A sobre V a un mapeo lineal ${}_V\Phi : V \to V \otimes A$ que hace que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "{}_V\Phi"] \arrow[d, "{}_V\Phi"'] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\phi"] \\ V \otimes A \arrow[r, "{}_V\Phi\otimes\mathrm{id}"'] & V \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes \phi) \circ {}_V\Phi)(v) = (\mathrm{id} \otimes \phi)(v^{(0)} \otimes v^{(1)}) = v^{(0)} \otimes v^{(11)} \otimes v^{(12)} = v^{(00)} \otimes v^{(01)} \otimes v^{(1)} =$
$({}_V\Phi \otimes \mathrm{id})(v^{(0)} \otimes v^{(1)}) = (({}_V\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ {}_V\Phi)(v)\ \forall\ v \in V.$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "{}_V\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\ V \arrow[r, "\cong"'] & V \otimes \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ {}_V\Phi)(v) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(v^{(0)} \otimes v^{(1)}) = v^{(0)} \otimes \varepsilon(v^{(1)}) \cong v = \mathrm{id}(v)\ \forall\ v \in V.$

Sea W un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de V. Llamamos a W invariante bajo ${}_V\Phi$ si ${}_V\Phi(W) \subset W \otimes A$. Más aún, ${}_V\Phi|_W : W \to W \otimes A$ es una coacción derecha de A sobre W.

Notación de Sweedler para la Coacción Derecha de una Álgebra de Hopf sobre un Espacio Vectorial Sea ${}_V\Phi : V \to V \otimes A$ una coacción derecha dada por ${}_V\Phi(v) = \sum_i v_i \otimes a_i$ con $v_i \in V$ y $a_i \in A$. En notación de Sweedler esto se expresa como ${}_V\Phi(v) = v^{(0)} \otimes v^{(1)}$.

Proposición 1 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\phi(\kappa(a^{(1)}))(a^{(2)} \otimes 1_A) = 1_A \otimes \kappa(a)\ \forall\ a \in A$.

ii) $(1_A \otimes a^{(1)})\phi(\kappa(a^{(2)})) = \kappa(a) \otimes 1_A\ \forall\ a \in A$.

iii) $(((\eta \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = 1_A \otimes a\ \forall\ a \in A$.

iv) $((\mathrm{id} \otimes (\eta \circ \varepsilon)) \circ \phi)(a) = a \otimes 1_A\ \forall\ a \in A$.

Demostración

i) Sea $a \in A$ se calcula $\phi(\kappa(a^{(1)}))(a^{(2)} \otimes 1_A) = (\kappa(a^{(2)}) \otimes \kappa(a^{(1)}))(a^{(3)} \otimes 1_A) = \kappa(a^{(2)})a^{(3)} \otimes \kappa(a^{(1)}) = \varepsilon(a^{(2)}) \otimes \kappa(a^{(1)}) = 1_A \otimes \kappa(a^{(1)})\varepsilon(a^{(2)}) = 1_A \otimes \kappa(a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)})) = 1_A \otimes \kappa(a)$.

De donde $\phi(\kappa(a^{(1)}))(a^{(2)} \otimes 1_A) = 1_A \otimes \kappa(a)\ \forall\ a \in A$.

ii) Análoga a la demostración del inciso i).

iii) Sea $a \in A$ se calcula $(((\eta \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = ((\eta \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = (\eta \circ \varepsilon)(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} = \eta(\varepsilon(a^{(1)})) \otimes a^{(2)} = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} = 1_A \otimes \varepsilon(a^{(1)})a^{(2)} = 1_A \otimes a$.

De donde $(((\eta \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = 1_A \otimes a\ \forall\ a \in A$.

iv) Análoga a la demostración del inciso iii).

Definición 10 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $g : A \to \mathbb{C}$ un mapeo lineal. Llamamos a $g * a = ((\mathrm{id} \otimes g) \circ \phi)(a) = (\mathrm{id} \otimes g)(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = a^{(1)} \otimes g(a^{(2)}) \cong a^{(1)}g(a^{(2)})$ convolución de g sobre $a \in A$.

Definición 11 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $f : A \to \mathbb{C}$ un mapeo lineal. Llamamos a $a * f = ((f \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(a) = (f \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = f(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} \cong f(a^{(1)})a^{(2)}$ convolución de $a \in A$ sobre f.

Definición 12 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $g : A \to \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ mapeos lineales. Llamamos al mapeo lineal $f * g : A \to \mathbb{C}$ dado por $(f * g)(a) = ((f \otimes g) \circ \phi)(a) = (f \otimes g)(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) = f(a^{(1)}) \otimes g(a^{(2)}) \cong f(a^{(1)})g(a^{(2)})$ convolución de f y g.

Proposición 2 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $g : A \to \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ mapeos lineales. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\varepsilon(g * a) = g(a)\ \forall\ a \in A$.

ii) $\varepsilon(a * f) = f(a)\ \forall\ a \in A$.

iii) $g * (a * f) = (g * a) * f\ \forall\ a \in A$.

iv) $(f * g) * a = f * (g * a)\ \forall\ a \in A$.

v) $a * (f * g) = (a * f) * g\ \forall\ a \in A$.

Demostración

i) Sea $a \in A$ se calcula $\varepsilon(g * a) = \varepsilon(a^{(1)}g(a^{(2)})) = \varepsilon(a^{(1)})g(a^{(2)}) = g(\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)}) = g(a)$.
De donde $\varepsilon(g * a) = g(a)\ \forall\ a \in A$.

ii) Análoga a la demostración del inciso i).

iii) Sea $a \in A$.
Por un lado, se calcula $g * (a * f) = g * (f(a^{(1)})a^{(2)}) = f(a^{(1)})(g * a^{(2)}) = f(a^{(1)})a^{(2)}g(a^{(3)})$.
Por otro lado, se calcula $(g * a) * f = (a^{(1)}g(a^{(2)})) * f = (a^{(1)} * f)g(a^{(2)}) = f(a^{(1)})a^{(2)}g(a^{(3)})$.
De donde $g * (a * f) = (g * a) * f\ \forall\ a \in A$.

iv) Sea $a \in A$.
Por un lado, se calcula $(f * g) * a = a^{(1)}(f * g)(a^{(2)}) = a^{(1)}f(a^{(2)})g(a^{(3)})$.
Por otro lado, se calcula $f * (g * a) = f * (a^{(1)}g(a^{(2)})) = (f * a^{(1)})g(a^{(2)}) = a^{(1)}f(a^{(2)})g(a^{(3)})$.
De donde $(f * g) * a = f * (g * a)\ \forall\ a \in A$.

v) Análoga a la demostración del inciso iv).

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Woronowicz, 1989].

Proposición 3 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $r : A \otimes A \to A \otimes A$, $r^{-1} : A \otimes A \to A \otimes A$, $s : A \otimes A \to A \otimes A$ y $s^{-1} : A \otimes A \to A \otimes A$ biyecciones dadas por $r(a \otimes b) = (\mu \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \phi)(a \otimes b) = (a \otimes 1_A)\phi(b) = ab^{(1)} \otimes b^{(2)}$, $r^{-1}(a \otimes b) = (\mu \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \kappa \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \phi)(a \otimes b) = (a \otimes 1_A)((\kappa \otimes \mathrm{id})\phi(b)) = a\kappa(b^{(1)}) \otimes b^{(2)}$, $s(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \mu)(\sigma_A \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \phi)(a \otimes b) = (1_A \otimes a)\phi(b) = b^{(1)} \otimes ab^{(2)}$ y $s^{-1}(a \otimes b) = \sigma_A(\mathrm{id} \otimes \mu)(\mathrm{id} \otimes \sigma_A)(\mathrm{id} \otimes \kappa^{-1} \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \mathrm{id})(a \otimes b) = (b \otimes 1_A)(\sigma_A(\mathrm{id} \otimes \kappa^{-1})\phi(a)) = b\kappa^{-1}(a^{(2)}) \otimes a^{(1)}$ respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $r((a \otimes 1_A)q) = (a \otimes 1_A)r(q)\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ q \in A \otimes A$.

ii) $r(q(1_A \otimes a)) = r(q)\phi(a)\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ q \in A \otimes A$.

iii) $s((a \otimes 1_A)q) = (1_A \otimes a)s(q)\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ q \in A \otimes A$.

iv) $s(q(1_A \otimes a)) = s(q)\phi(a)\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ q \in A \otimes A$.

v) $(\mu \circ r^{-1})(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(a \otimes b)\ \forall\ a, b \in A$.

vi) $(\mu \circ s^{-1})(a \otimes b) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(a \otimes b)\ \forall\ a, b \in A$.

vii) $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ r^{-1})(a \otimes b) = \varepsilon(a)b\ \forall\ a, b \in A$.

viii) $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ s^{-1})(a \otimes b) = \varepsilon(b)a\ \forall\ a, b \in A$.

Definición 13 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Llamamos a los mapeos lineales $ad_L : A \to A \otimes A$ y $ad_R : A \to A \otimes A$ dados por $ad_L(a) = a^{(1)}\kappa(a^{(3)}) \otimes a^{(2)}$ y $ad_R(a) = a^{(2)} \otimes \kappa(a^{(1)})a^{(3)}$ coacción izquierda y derecha adjunta respectivamente.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Sontz, 2015].

Proposición 4 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $ad_L : A \to A \otimes A$ y $ad_R : A \to A \otimes A$ las coacciones izquierda y derecha adjunta respectivamente. Sean $r : A \otimes A \to A \otimes A$, $r^{-1} : A \otimes A \to A \otimes A$, $s : A \otimes A \to A \otimes A$ y $s^{-1} : A \otimes A \to A \otimes A$ las biyecciones de la Proposición 3. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) El mapeo lineal $ad_L : A \to A \otimes A$ es una coacción izquierda de A sobre A.

ii) El mapeo lineal $ad_R : A \to A \otimes A$ es una coacción derecha de A sobre A.

iii) $ad_L(a) = r(s^{-1}(a \otimes 1_A))\ \forall\ a \in A$.

iv) $ad_R(a) = s(r^{-1}(1_A \otimes a))\ \forall\ a \in A$.

3. Cálculo Diferencial de Primer Orden

Definición 14 Sea (A, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra. Sea Γ un A-bimódulo y $d : A \to \Gamma$ un mapeo lineal. Llamamos al par (Γ, d) cálculo diferencial de primer orden (CDPO) sobre A si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $d(ab) = d(a)b + ad(b)\ \forall\ a, b \in A$.

ii) $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)\ \forall\ w \in \Gamma$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Llamamos a d diferencial de (Γ, d).

Definición 15 Sean (Γ, d) y (Γ', d') CDPO sobre A. Llamamos a un homomorfismos de A-bimódulos $f : \Gamma \to \Gamma'$ morfismo de CDPO si $f \circ d = d'$. Además, si f es inyectiva, suprayectiva o biyectiva llamamos a f un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo de CDPO respectivamente.

Proposición 5 Sea (A, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra. Sea $U = \ker(\mu)$ y $D : A \to A \otimes A$ el mapeo lineal dado por $D(a) = (1_A \otimes a) - (a \otimes 1_A)$. Entonces (U, D) es un CDPO sobre A llamado CDPO universal.

Demostración Primero, se verificará que $D : A \to U \ \forall \ a \in A$.

Sea $a \in A$ se calcula $\mu(D(a)) = \mu((1_A \otimes a) - (a \otimes 1_A)) = \mu(1_A \otimes a) - \mu(a \otimes 1_A) = a - a = 0$.

Entonces $D(a) \in \ker(\mu) \ \forall \ a \in A$.

De donde $D : A \to U \ \forall \ a \in A$.

Luego, se verificará que (U, D) satisface i) y ii) de la Definición 14.

i) Sean $a, b \in A$ se calcula $D(a)b + aD(b) = ((1_A \otimes a) - (a \otimes 1_A))b + a((1_A \otimes b) - (b \otimes 1_A)) = (1_A \otimes ab) - (a \otimes b) + (a \otimes b) - (ab \otimes 1_A) = (1_A \otimes ab) - (ab \otimes 1_A) = D(ab)$.

   De donde $D(a)b + aD(b) = D(ab) \ \forall \ a, b \in A$.

ii) Sea $w \in U$.

   Primero, notemos que $U \subset A \otimes A$ entonces existen $a_k, b_k \in A$ con $k \in \{1, \ldots, K\}$ y $K > 0$ tales que $w = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k$.

   Luego, notemos que $\mu(w) = \mu(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k) = \sum_{k=1}^{K} \mu(a_k \otimes b_k) = \sum_{k=1}^{K} a_k b_k = 0$.

   Así, se calcula $\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) = \sum_{k=1}^{K} a_k((1_A \otimes b_k) - (b_k \otimes 1_A)) = \sum_{k=1}^{K}((a_k \otimes b_k) - (a_k b_k \otimes 1_A)) = \sum_{k=1}^{K}(a_k \otimes b_k) - (\sum_{k=1}^{K} a_k b_k) \otimes 1_A = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k = w$.

   De donde $w = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) \ \forall \ w \in U$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Proposición 6 Sea (A, μ, η) una $\mathbb{C}$-álgebra y (U, D) el CDPO universal sobre A. Sea N un A-subbimódulo de U definimos $\Gamma_N = \frac{U}{N}$. Sea $\pi_N : U \to \Gamma_N$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_N = \pi_N \circ D : A \to \Gamma_N$. Entonces (Γ_N, d_N) es un CDPO sobre A. Más aún, cualquier CDPO sobre A, (Γ, d), es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

Demostración Primero, se verificará que (Γ_N, d_N) satisface i) y ii) de la Definición 14.

i) Sean $a, b \in A$ se calcula $d_N(ab) = \pi_N(D(ab)) = \pi_N(D(a)b + aD(b)) = \pi_N(D(a)b) + \pi_N(aD(b)) = \pi_N(D(a))b + a\pi_N(D(b)) = d_N(a)b + ad_N(b)$.

   De donde $d_N(ab) = d_N(a)b + ad_N(b) \ \forall \ a, b \in A$.

ii) Sea $r \in \Gamma_N$.

   Primero, notemos que π_N es un epimorfismo entonces $\forall \ r \in \Gamma_N$ existe $w \in U$ tal que $r = \pi_N(w)$.

   Luego, notemos que (U, D) es un CDPO sobre A entonces $w = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) \ \forall \ w \in U$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

   Así, se calcula $r = \pi_N(w) = \pi_N(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \pi_N(a_k D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k \pi_N(D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)$.

   De donde $r = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k) \ \forall \ r \in \Gamma_N$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Ahora, se verificará que cualquier CDPO sobre A, (Δ, δ), es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

Así, se define $\pi' : U \to \Delta$ dado por $\pi'(w) = (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(w)$ con $L : A \otimes \Delta \to \Delta$ la acción izquierda de A sobre Δ dada por $L(a \otimes b) = ab$.

Primero, se verificará que π' está bien definida.

Primero, notemos que dados $w_1, w_2 \in U$ tales que $w_1 = \sum_{k=1}^{K_2} a_{1k} \otimes b_{1k} = \sum_{k=1}^{K_2} a_{2k} \otimes b_{2k} = w_2$ con $a_{1k}, b_{1k}, a_{2k}, b_{2k} \in A$ y $K_1, K_2 > 0$ entonces $w_1 - w_2 = \sum_{k=1}^{K_2} a_{1k} \otimes b_{1k} - \sum_{k=1}^{K_2} a_{2k} \otimes b_{2k} = 0 \otimes 0$.

Luego, notemos que para que π' esté bien definida basta demostrar que si $0 \otimes 0 = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(b_k)$.

Así, sea $0 \otimes 0 = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\pi'(0 \otimes 0) = \pi'(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k)$ entonces $(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(0 \otimes 0) = (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k)$ de donde $L(0 \otimes 0) = \sum_{k=1}^{K} L(a_k \otimes \delta(b_k))$ por lo que $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(b_k)$.

De esta manera, se ha demostrado que π' está bien definida.

Notemos que como L y δ son mapeos lineales entonces π' es lineal.

Luego, se verificará que π' es un homomorfismo de A-bimódulos.

Primero, se verificará que π' es un homomorfismo A-módulos izquierdo.

Así, sea $c \in A$ y $w = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\pi'(cw) = \pi'(c(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k)) = (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(\sum_{k=1}^{K} ca_k \otimes b_k) = \sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(ca_k \otimes b_k) = \sum_{k=1}^{K} ca_k\delta(b_k) = c\sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k) = c\sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a_k \otimes b_k) = c(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k) = c\pi'(w)$.

Esto demuestra que π' es un homomorfismo de A-módulos izquierdo.

Luego, se verificará que π' es un homomorfismo de A-módulos derecho.

Así, sea $c \in A$ y $w = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\pi'(wc) = \pi'((\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k)c) = (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k c) = \sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a_k \otimes b_k c) = \sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k c) = \sum_{k=1}^{K} a_k(\delta(b_k)c + b_k\delta(c)) = \sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k)c + \sum_{k=1}^{K} a_k b_k\delta(c) = (\sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k))c + (\sum_{k=1}^{K} a_k b_k)\delta(c) = (\sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k))c = (\sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a_k \otimes b_k))c = ((L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k))c = \pi'(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k)c = \pi'(w)c$.

Esto demuestra que π' es un homomorfismo de A-módulos derecho.

De esta manera, se ha demostrado que π' es un homomorfismo de A-bimódulos.

Después, se verificará que π' es un epimorfismo de A-bimódulos.

Sea $\sigma \in \Delta$.

Primero, notemos que (Δ, δ) es un CDPO sobre A entonces $\sigma = \sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k)$ $\forall$ $\sigma \in \Delta$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Luego, definimos $u = \sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k - \sum_{k=1}^{K} a_kb_k \otimes 1_A$ y notemos que $\mu(u) = \mu(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k - \sum_{k=1}^{K} a_kb_k \otimes 1_A) = \mu(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k) - \mu(\sum_{k=1}^{K} a_kb_k \otimes 1_A) = \sum_{k=1}^{K} \mu(a_k \otimes b_k) - \sum_{k=1}^{K} \mu(a_kb_k \otimes 1_A) = \sum_{k=1}^{K} a_kb_k - \sum_{k=1}^{K} a_kb_k1_A = 0$ entonces $u \in U$.

Así, se calcula $\pi'(u) = \pi'(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k - \sum_{k=1}^{K} a_kb_k \otimes 1_A) = \pi'(\sum_{k=1}^{K} a_k \otimes b_k) - \pi'(\sum_{k=1}^{K} a_kb_k \otimes 1_A) = \sum_{k=1}^{K} \pi'(a_k \otimes b_k) - \sum_{k=1}^{K} \pi'(a_kb_k \otimes 1_A) = \sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a_k \otimes b_k) - \sum_{k=1}^{K}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a_kb_k \otimes 1_A) = \sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k) - \sum_{k=1}^{K} a_kb_k\delta(1_A) = \sum_{k=1}^{K} a_k\delta(b_k) = \sigma$.

De esta manera, se ha demostrado que π' es un epimorfismo de A-bimódulos.

Finalmente, se verificará que (Δ, δ) es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

Primero, se verificará que existe un isomorfismo de A-bimódulos $\tilde{\pi}' : \Gamma_N \to \Delta$ para algún A-subbimódulo N de U.

Así, definimos $N = \ker(\pi')$ y notemos que por el Primer Teorema de Isomorfismos de A-bimódulos entonces N es un A-subbimódulo de U y π' induce un isomorfismo de A-bimódulos $\tilde{\pi}' : \Gamma_N \to \Delta$.

Esto demuestra que existe un isomorfismo de A-bimódulos $\tilde{\pi}' : \Gamma_N \to \Delta$ para algún A-subbimódulo N de U.

Luego, se verificará que $(\tilde{\pi}' \circ d_N)(a) = \delta(a)$ $\forall$ $a \in A$.

Así, sea $a \in A$ se calcula $(\tilde{\pi}' \circ d_N)(a) = (\tilde{\pi}' \circ \pi_N \circ D)(a) = (\pi' \circ D)(a) = \pi'((1_A \otimes a) - (a \otimes 1_A)) = \pi'(1_A \otimes a) - \pi'(a \otimes 1_A) = (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(1_A \otimes a) - (L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta))(a \otimes 1_A) = 1_A\delta(a) - a\delta(1_A) = \delta(a)$.

Esto demuestra que $(\tilde{\pi}' \circ d_N)(a) = \delta(a)$ $\forall$ $a \in A$.

De esta manera, se ha demostrado que (Δ, δ) es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

3.1. Cálculo Diferencial de Primer Orden sobre una Álgebra de Hopf

Definición 16 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Llamamos a (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A si dado $\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k) = 0$.

Proposición 7 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Entonces existe un único mapeo lineal $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ dado por $\Phi_\Gamma(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\Phi_\Gamma(cw) = \phi(c)\Phi_\Gamma(w)$ y $\Phi_\Gamma(wc) = \Phi_\Gamma(w)\phi(c)$ $\forall\, c \in A$ y $\forall\, w \in \Gamma$.

ii) $((\mathrm{id} \otimes \Phi_\Gamma) \circ \Phi_\Gamma)(w) = ((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(w)$ y $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(w) \cong \mathrm{id}(w)$ $\forall\, w \in \Gamma$.

iii) $\Phi_\Gamma(d(c)) = (\mathrm{id} \otimes d)\phi(c) = c^{(1)} \otimes d(c^{(2)})$ $\forall\, c \in A$.

Recíprocamente, si $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ es un mapeo lineal que satisface las propiedades i), ii) y iii) entonces estará dado por $\Phi_\Gamma(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$. Más aún, se tendrá que dado $\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k) = 0$.

Demostración Primero, se verificará el recíproco.

Así, sea $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ un mapeo lineal que satisface las propiedades i), ii) y iii).

Ahora, sea $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\Phi_\Gamma(w) = \Phi_\Gamma(\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_\Gamma(a_k d(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)\Phi_\Gamma(d(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k)$.

Luego, sea $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\Phi_\Gamma(w) = \Phi_\Gamma(0)$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k) = 0$.

De esta manera, se ha demostrado el recíproco.

Luego, se verificará que si (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A entonces existe un único mapeo lineal $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ dado por $\Phi_\Gamma(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ que satisface i), ii) y ii).

Primero, notemos que dados los mapeos lineales $\phi : A \to A \otimes A$ y $d : A \to \Gamma$ entonces $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ existe, es único y lineal dado por $\Phi_\Gamma(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

i) Sea $c \in A$ y $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Primero, se calcula $\Phi_\Gamma(cw) = \Phi_\Gamma(c(\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k))) = \Phi_\Gamma(\sum_{k=1}^{K} ca_k d(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \phi(ca_k)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(c)\phi(a_k)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b_k) = \phi(c)(\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b_k)) = \phi(c)\Phi_\Gamma(w)$.

Esto demuestra que $\Phi_\Gamma(cw) = \phi(c)\Phi_\Gamma(w)\ \forall\ c \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

Ahora, notemos que $ad(b)$ con $a, b \in A$ generan a Γ y que $d(bc) = d(b)c + bd(c)$ entonces $ad(bc) = ad(b)c + abd(c)$ de donde $ad(b)c = ad(bc) - abd(c)$.

Luego, se calcula $\Phi_\Gamma(ad(b)c) = \Phi_\Gamma(ad(bc) - abd(c)) = \Phi_\Gamma(ad(bc)) - \Phi_\Gamma(abd(c)) = \phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(bc) - \phi(ab)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = \phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)(\phi(b)\phi(c)) - \phi(a)\phi(b)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = \phi(a)((\mathrm{id}\otimes d)\phi(b))\phi(c) + \phi(a)\phi(b)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) - \phi(a)\phi(b)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = \phi(a)((\mathrm{id}\otimes d)\phi(b))\phi(c) = (\phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b))\phi(c) = \Phi_\Gamma(ad(b))\phi(c)$.

Esto demuestra que $\Phi_\Gamma(wc) = \Phi_\Gamma(w)\phi(c)\ \forall\ c \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

ii) Sea $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Ahora, notemos que $ad(b)$ con $a, b \in A$ generan a Γ.

Por un lado, se calcula $((\phi\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\Gamma)(ad(b)) = (\phi\otimes\mathrm{id})(\phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b)) = (\phi\otimes\mathrm{id})((a^{(1)}\otimes a^{(2)})(b^{(1)}\otimes d(b^{(2)}))) = (\phi\otimes\mathrm{id})(a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}d(b^{(2)})) = \phi(a^{(1)}b^{(1)})\otimes a^{(2)}d(b^{(2)}) = \phi(a^{(1)})\phi(b^{(1)})\otimes a^{(2)}d(b^{(2)}) = (a^{(1)}\otimes a^{(2)})(b^{(1)}\otimes b^{(2)})\otimes a^{(3)}d(b^{(3)}) = (a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}b^{(2)})\otimes a^{(3)}d(b^{(3)}) = (a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes a^{(3)})(b^{(1)}\otimes b^{(2)}\otimes d(b^{(3)})) = (a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes a^{(3)})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes d)(b^{(1)}\otimes b^{(2)}\otimes b^{(3)}) = (\phi\otimes\mathrm{id})\phi(a)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes d)(\phi\otimes\mathrm{id})\phi(b)$.

Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)\circ\Phi_\Gamma)(ad(b)) = (\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)(\phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b)) = (\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)((a^{(1)}\otimes a^{(2)})(b^{(1)}\otimes d(b^{(2)}))) = (\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)(a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}d(b^{(2)})) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes\Phi_\Gamma(a^{(2)}d(b^{(2)})) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes(\phi(a^{(2)})(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b^{(2)})) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes((a^{(2)}\otimes a^{(3)})(\mathrm{id}\otimes d)(b^{(2)}\otimes b^{(3)})) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes((a^{(2)}\otimes a^{(3)})(b^{(2)}\otimes d(b^{(3)}))) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes(a^{(2)}b^{(2)}\otimes a^{(3)}d(b^{(3)})) = (a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes a^{(3)})(b^{(1)}\otimes b^{(2)}\otimes d(b^{(3)})) = (a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes a^{(3)})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes d)(b^{(1)}\otimes b^{(2)}\otimes b^{(3)}) = (\mathrm{id}\otimes\phi)\phi(a)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes d)(\mathrm{id}\otimes\phi)\phi(b)$.

Entonces $((\phi\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\Gamma)(ad(b)) = ((\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)\circ\Phi_\Gamma)(ad(b))\ \forall\ a, b \in A$.

Esto demuestra que $((\mathrm{id}\otimes\Phi_\Gamma)\circ\Phi_\Gamma)(w) = ((\phi\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\Gamma)(w)\ \forall\ w \in \Gamma$.

Luego, se calcula $((\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\Gamma)(ad(b)) = (\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\phi(a)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(b)) = (\varepsilon\otimes\mathrm{id})((a^{(1)}\otimes a^{(2)})(b^{(1)}\otimes d(b^{(2)}))) = (\varepsilon\otimes\mathrm{id})(a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}d(b^{(2)})) = \varepsilon(a^{(1)}b^{(1)})\otimes a^{(2)}d(b^{(2)}) = \varepsilon(a^{(1)})\varepsilon(b^{(1)})\otimes a^{(2)}d(b^{(2)}) = \varepsilon(a^{(1)})a^{(2)}d(\varepsilon(b^{(1)})b^{(2)}) = ad(b)$.

Esto demuestra que $((\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\Gamma)(w) \cong \mathrm{id}(w)\ \forall\ w \in \Gamma$.

iii) Sea $c \in A$.

Así, se calcula $\Phi_\Gamma(d(c)) = \Phi_\Gamma(1_A d(c)) = \phi(1_A)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = (1_A\otimes 1_A)(\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = (\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = (\mathrm{id}\otimes d)(c^{(1)}\otimes c^{(2)}) = c^{(1)}\otimes d(c^{(2)})$.

Esto demuestra que $\Phi_\Gamma(d(c)) = (\mathrm{id}\otimes d)\phi(c) = c^{(1)}\otimes d(c^{(2)})\ \forall\ c \in A$.

Definición 17 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Llamamos a (Γ, d) un CDPO covariante derecho sobre A si dado $\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d\otimes\mathrm{id})\phi(b_k) = 0$.

Proposición 8 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante derecho sobre A. Entonces existe un único mapeo lineal ${}_\Gamma\Phi : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ dado por ${}_\Gamma\Phi(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ que satisface las siguientes propiedades:

i) ${}_\Gamma\Phi(cw) = \phi(c){}_\Gamma\Phi(w)$ y ${}_\Gamma\Phi(wc) = {}_\Gamma\Phi(w)\phi(c)$ $\forall$ $c \in A$ y $\forall$ $w \in \Gamma$.

ii) $({}_\Gamma\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi = (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ {}_\Gamma\Phi$ y $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ {}_\Gamma\Phi \cong \mathrm{id}$ $\forall$ $w \in \Gamma$.

iii) ${}_\Gamma\Phi(d(c)) = (d \otimes \mathrm{id})\phi(c) = d(c^{(1)}) \otimes c^{(2)}$ $\forall$ $c \in A$.

Recíprocamente, si ${}_\Gamma\Phi : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ es un mapeo lineal que satisface las propiedades i), ii) y iii) entonces estará dado por ${}_\Gamma\Phi(w) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$ con $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$. Más aún, se tendrá que dado $\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = 0$.

Demostración Análoga a la demostración de la proposición anterior.

Definición 18 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Llamamos a (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A si dado $\sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k) = 0$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b_k) = 0$ y $\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = 0$. Es decir, es covariante izquierdo y derecho respectivamente.

Proposición 9 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sean $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ y ${}_\Gamma\Phi : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ las coacciones izquierda y derecha de las Proposiciones 7 y 8 respectivamente. Entonces ${}_\Gamma\Phi$ y Φ_Γ son compatibles. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\Phi_\Gamma"] \arrow[d, "{}_\Gamma\Phi"'] & A \otimes \Gamma \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{}_\Gamma\Phi"] \\
\Gamma \otimes A \arrow[r, "\Phi_\Gamma\otimes\mathrm{id}"'] & A \otimes \Gamma \otimes A
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(w) = ((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w)$ $\forall$ $w \in \Gamma$.

Demostración Sea $w = \sum_{k=1}^{K} a_k d(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Ahora, notemos que $ad(b)$ con $a, b \in A$ generan a Γ.

Por un lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(ad(b)) = (\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi)(\phi(a)(\mathrm{id} \otimes d)\phi(b)) =$
$(\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi)((a^{(1)} \otimes a^{(2)})(b^{(1)} \otimes d(b^{(2)}))) = (\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi)(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)}d(b^{(2)})) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes {}_\Gamma\Phi(a^{(2)}d(b^{(2)})) =$
$a^{(1)}b^{(1)} \otimes \phi(a^{(2)})({}_\Gamma\Phi(d(b^{(2)}))) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes \phi(a^{(2)})((d \otimes \mathrm{id})\phi(b^{(2)})) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes (a^{(2)} \otimes a^{(3)})(d(b^{(2)}) \otimes b^{(3)}) =$
$a^{(1)}b^{(1)} \otimes (a^{(2)}d(b^{(2)}) \otimes a^{(3)}b^{(3)}) = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)})(b^{(1)} \otimes d(b^{(2)}) \otimes b^{(3)}) =$
$(\phi \otimes \mathrm{id})\phi(a)(\mathrm{id} \otimes d \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \mathrm{id})\phi(b)$.

Por otro lado, se calcula $((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(ad(b)) = (\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id})(\phi(a)(d \otimes \mathrm{id})\phi(b)) =$
$(\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id})((a^{(1)} \otimes a^{(2)})(d(b^{(1)}) \otimes b^{(2)})) = (\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id})(a^{(1)}d(b^{(1)}) \otimes a^{(2)}b^{(2)}) =$
$\Phi_\Gamma(a^{(1)}d(b^{(1)})) \otimes a^{(2)}b^{(2)} = (\phi(a^{(1)})\Phi_\Gamma(d(b^{(1)}))) \otimes a^{(2)}b^{(2)} = (\phi(a^{(1)})((\mathrm{id} \otimes d)\phi(b^{(1)}))) \otimes a^{(2)}b^{(2)} =$
$((a^{(1)} \otimes a^{(2)})(b^{(1)} \otimes d(b^{(2)}))) \otimes a^{(3)}b^{(3)} = (a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)}d(b^{(2)})) \otimes a^{(3)}b^{(3)} =$
$(a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)})(b^{(1)} \otimes d(b^{(2)}) \otimes b^{(3)}) = (\mathrm{id} \otimes \phi)\phi(a)(\mathrm{id} \otimes d \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \phi)\phi(b).$

Entonces $((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(ad(b)) = ((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(ad(b)) \ \forall \ a, b \in A$.

De esta manera, se ha demostrado que $((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(w) = ((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) \ \forall \ w \in \Gamma$.

3.2. Bimódulos Covariantes sobre una Álgebra de Hopf

Es importante mencionar que los A-bimódulos estudiados en esta sección no son los de un CDPO sobre una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf, (Γ, d), pero podrían serlo. De esta manera, todos los resultados de esta sección se pueden aplicar a dichos A-bimódulos.

Definición 19 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sea Γ un A-bimódulo y $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ un mapeo lineal. Llamamos a (Γ, Φ_Γ) un A-bimódulo covariante izquierdo si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\Phi_\Gamma(aw) = \phi(a)\Phi_\Gamma(w)$ y $\Phi_\Gamma(wa) = \Phi_\Gamma(w)\phi(a) \ \forall \ a \in A$ y $\forall \ w \in \Gamma$.

ii) $((\mathrm{id} \otimes \Phi_\Gamma) \circ \Phi_\Gamma)(w) = ((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(w)$ y $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(w) \cong \mathrm{id}(w) \ \forall \ w \in \Gamma$.

Definición 20 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sea Γ un A-bimódulo y ${}_\Gamma\Phi : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ un mapeo lineal. Llamamos a $(\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo covariante derecho si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) ${}_\Gamma\Phi(wa) = {}_\Gamma\Phi(w)\phi(a)$ y ${}_\Gamma\Phi(aw) = \phi(a){}_\Gamma\Phi(w) \ \forall \ a \in A$ y $\forall \ w \in \Gamma$.

ii) $(({}_\Gamma\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) = ((\mathrm{id} \otimes \phi) \circ {}_\Gamma\Phi)(w)$ y $((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) \cong \mathrm{id}(w) \ \forall \ w \in \Gamma$.

Definición 21 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y Γ un A-bimódulo. Llamamos a $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo bicovariante si Φ_Γ y ${}_\Gamma\Phi$ son compatibles. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\Phi_\Gamma"] \arrow[d, "{}_\Gamma\Phi"'] & A \otimes \Gamma \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi"] \\
\Gamma \otimes A \arrow[r, "\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes \Gamma \otimes A
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(w) = ((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) \ \forall \ w \in \Gamma$.

Definición 22 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, Φ_Γ) un A-bimódulo covariante izquierdo. Llamamos a $w \in \Gamma$ un elemento invariante izquierdo bajo Φ_Γ si $\Phi_\Gamma(w) = 1_A \otimes w$. Más aún, ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = \{w \in \Gamma \mid \Phi_\Gamma(w) = 1_A \otimes w\}$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de Γ.

Definición 23 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo covariante derecho. Llamamos a $w \in \Gamma$ un elemento invariante derecho bajo ${}_\Gamma\Phi$ si ${}_\Gamma\Phi(w) = w \otimes 1_A$. Más aún, $\Gamma_{\text{inv}} = \{w \in \Gamma \mid {}_\Gamma\Phi(w) = w \otimes 1_A\}$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de Γ.

Proposición 10 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, Φ_Γ) un A-bimódulo covariante izquierdo. Entonces existe un único mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $P(bw) = \varepsilon(b)P(w)\ \forall\ b \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

ii) $w = w^{(-1)}P(w^{(0)})\ \forall\ w \in \Gamma$.

Demostración Primero, se verificará que el mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ existe.

Así, sea $w \in \Gamma$ se define el mapeo lineal $P(w) = \kappa(w^{(-1)})w^{(0)}$ con $\Phi_\Gamma(w) = w^{(-1)} \otimes w^{(0)}$ y se calcula $\Phi_\Gamma(P(w)) = \Phi_\Gamma(\kappa(w^{(-1)})w^{(0)}) = \phi(\kappa(w^{(-1)}))\Phi_\Gamma(w^{(0)}) = \phi(\kappa(w^{(-1)}))(w^{(0-1)} \otimes w^{(00)}) = \phi(\kappa(w^{(-11)}))(w^{(-12)} \otimes w^{(0)}) = \phi(\kappa(w^{(-11)}))(w^{(-12)} \otimes 1_A)(1_A \otimes w^{(0)}) = (1_A \otimes \kappa(w^{-1}))(1_A \otimes w^{(0)}) = 1_A \otimes \kappa(w^{(-1)})w^{(0)} = 1_A \otimes P(w)$.

De donde $P(w) \in {}_{\text{inv}}\Gamma\ \forall\ w \in \Gamma$.

Ahora, sea $w \in {}_{\text{inv}}\Gamma$ entonces $\Phi_\Gamma(w) = 1_A \otimes w$ y se calcula $P(w) = \kappa(1_A)w = 1_A w = w$.

Entonces P actúa como la identidad en ${}_{\text{inv}}\Gamma$.

Esto demuestra que el mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ existe.

Ahora, se verificará que el mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ dado por $P(w) = \kappa(w^{(-1)})w^{(0)}$ satisface i) y ii).

i) Sea $b \in A$ y $w \in \Gamma$.

   Primero, notemos que $\Phi_\Gamma(bw) = \phi(b)\Phi_\Gamma(w) = (b^{(1)} \otimes b^{(2)})(w^{(-1)} \otimes w^{(0)}) = b^{(1)}w^{(-1)} \otimes b^{(2)}w^{(0)}$.

   Así, se calcula $P(bw) = \kappa(b^{(1)}w^{(-1)})b^{(2)}w^{(0)} = \kappa(w^{(-1)})\kappa(b^{(1)})b^{(2)}w^{(0)} = \kappa(w^{(-1)})\eta(\varepsilon(b))w^{(0)} = \kappa(w^{(-1)})\varepsilon(b)w^{(0)} = \varepsilon(b)\kappa(w^{(-1)})w^{(0)} = \varepsilon(b)P(w)$.

   De donde $P(bw) = \varepsilon(b)P(w)\ \forall\ b \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

ii) Sea $w \in \Gamma$.

   Así, se calcula $w^{(-1)}P(w^{(0)}) = w^{(-1)}\kappa(w^{(0-1)})w^{(00)} = w^{(-11)}\kappa(w^{(-12)})w^{(0)} = \eta(\varepsilon(w^{(-1)}))w^{(0)} = \varepsilon(w^{(-1)})w^{(0)} = w$.

   De donde $w = w^{(-1)}P(w^{(0)})\ \forall\ w \in \Gamma$.

Finalmente, se verificará que el mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ dado por $P(w) = \kappa(w^{(-1)})w^{(0)}$ es único.

Así, sea $P' : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ otro mapeo proyección izquierdo suprayectivo que satisface i) y ii) se calcula $P'(w) = P'(w^{(-1)}P(w^{(0)})) = \varepsilon(w^{(-1)})P'(P(w^{(0)})) = \varepsilon(w^{(-1)})P(w^{(0)}) = P(\varepsilon(w^{(-1)})w^{(0)}) = P(w)$.

Esto demuestra que el mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ es único.

Proposición 11 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, Φ_Γ) un A-bimódulo covariante izquierdo. Sea $\{w_i\}_{i\in I}$ una base para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial ${}_{\text{inv}}\Gamma = \{w \in \Gamma \mid \Phi_\Gamma(w) = 1_A \otimes w\} \subset \Gamma$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Γ es un A-módulo izquierdo libre con base $\{w_i\}_{i\in I}$.

ii) Γ es un A-módulo derecho libre con base $\{w_i\}_{i\in I}$.

iii) Existe mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C} \text{ es lineal}\}$ determinados de manera única por las siguientes ecuaciones:

   1) $w_i b = \sum_{j\in I}(f_{ij} * b)w_j \ \forall\ i \in I$ y $\forall\ b \in A$.
   2) $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a) \ \forall\ i \in I$ y $\forall\ a \in A$.
   3) $f_{ij}(ab) = \sum_{k\in I} f_{ik}(a)f_{kj}(b) \ \forall\ i, j \in I$ y $\forall\ a, b \in A$.
   4) $f_{ij}(1_A) = \delta_{ij} \ \forall\ i, j \in I$.

   Notemos que 3) y 4) se pueden escribir matricialmente como $f(ab) = f(a)f(b)$ y $f(1_A) = \text{id}$. Es decir, f es un homomorfismo de álgebras, el cual es llamado representación de estructura del A-bimódulo covariante izquierdo, (Γ, Φ_Γ), respecto a la base $\{w_i\}_{i\in I}$ de ${}_{\text{inv}}\Gamma$.

Demostración

i) Sea $w \in \Gamma$.

   Primero, se verificará que existe una expansión $w = \sum_{i\in I} a_i w_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero.

   Así, notemos que por la Proposición 10 existe un único mapeo proyección izquierdo $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ tal que $w = w^{(-1)}P(w^{(0)})$ con $w^{(-1)} \in A$ y $P(w^{(0)}) \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

   Luego, notemos que como $\{w_i\}_{i\in I}$ es una base para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial ${}_{\text{inv}}\Gamma$ entonces $w = w^{(-1)} \sum_{i\in I} c_i w_i$ con $c_i \in \mathbb{C}$ únicos y casi todos cero.

   Ahora, se calcula $w = \sum_{i\in I} c_i w^{(-1)} w_i = \sum_{i\in I} a_i w_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero.

   Esto demuestra que existe una expansión $w = \sum_{i\in I} a_i w_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero.

   Luego, se verificará que la expansión $w = \sum_{i\in I} a_i w_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero es única.

   Primero, definimos el mapeo lineal $((\text{id} \otimes P) \circ \Phi_\Gamma) : \Gamma \to A \otimes {}_{\text{inv}}\Gamma$ y notemos que $A \otimes {}_{\text{inv}}\Gamma$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Luego, notemos que dados $w_1, w_2 \in \Gamma$ tales que $w_1 = \sum_{i\in I} a_{1i}w_i$ y $w_2 = \sum_{i\in I} a_{2i}w_i$ con $a_{1i}, a_{2i} \in A$ casi todos cero entonces $w_1 - w_2 = \sum_{i\in I}(a_{1i} - a_{2i})w_i = 0$.

Así, se calcula $((\mathrm{id}\otimes P)\circ\Phi_\Gamma)(w_1 - w_2) = (\mathrm{id}\otimes P)(\Phi_\Gamma(\sum_{i\in I}(a_{1i} - a_{2i})w_i)) =$
$(\mathrm{id}\otimes P)(\sum_{i\in I}\phi(a_{1i} - a_{2i})\Phi_\Gamma(w_i)) = (\mathrm{id}\otimes P)(\sum_{i\in I}(\phi(a_{1i}) - \phi(a_{2i}))(1_A\otimes w_i)) =$
$\sum_{i\in I}(\mathrm{id}\otimes P)((\phi(a_{1i}) - \phi(a_{2i}))(1_A\otimes w_i)) = \sum_{i\in I}(\mathrm{id}\otimes P)((a_{1i}^{(1)}\otimes a_{1i}^{(2)}w_i) - (a_{2i}^{(1)}\otimes a_{2i}^{(2)}w_i)) =$
$\sum_{i\in I}((a_{1i}^{(1)}\otimes P(a_{1i}^{(2)}w_i)) - (a_{2i}^{(1)}\otimes P(a_{2i}^{(2)}w_i))) = \sum_{i\in I}((a_{1i}^{(1)}\otimes\varepsilon(a_{1i}^{(2)})P(w_i)) - (a_{2i}^{(1)}\otimes\varepsilon(a_{2i}^{(2)})P(w_i))) =$
$\sum_{i\in I}((a_{1i}^{(1)}\otimes\varepsilon(a_{1i}^{(2)})) - (a_{2i}^{(1)}\otimes\varepsilon(a_{2i}^{(2)})))P(w_i) = \sum_{i\in I}(a_{1i} - a_{2i})\otimes w_i = 0$.

Entonces $a_{1i} - a_{2i} = 0$ de donde $a_{1i} = a_{2i}$.

Esto demuestra que la expansión $w = \sum_{i\in I} a_iw_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero es única.

De esta manera, se ha demostrado que Γ es un A-módulo izquierdo libre con base $\{w_i\}_{i\in I}$.

iii) 3) Sean $i, j \in I$ y $a, b \in A$.
Primero, notemos que si $w_j \in \{w_i\}_{i\in I}$ entonces por el inciso i), $w_jb = \sum_{i\in I} F_{ji}(b)w_i$ con $F_{ji}(b) \in A$ únicos y casi todos cero dados por el mapeo lineal $F_{ji} : A \to A$.
Por un lado, se calcula $w_jab = \sum_{i\in I} F_{ji}(ab)w_i$.
Por otro lado, se calcula $(w_ja)b = (\sum_{k\in I} F_{jk}(a)w_k)b = \sum_{k\in I} F_{jk}(a)(w_kb) =$
$\sum_{k\in I} F_{jk}(a)(\sum_{i\in I} F_{ki}(b)w_i) = \sum_{i\in I}(\sum_{k\in I} F_{jk}(a)F_{ki}(b))w_i$.
Entonces $\sum_{i\in I} F_{ji}(ab)w_i = \sum_{i\in I}(\sum_{k\in I} F_{jk}(a)F_{ki}(b))w_i$ de donde $F_{ji}(ab) = \sum_{k\in I} F_{jk}(a)F_{ki}(b)$.
Ahora, definimos el mapeo lineal $f_{ji} : A \to \mathbb{C}$ dado por $f_{ji}(a) = (\varepsilon\circ F_{ji})(a)$ y se calcula
$f_{ji}(ab) = (\varepsilon\circ F_{ji})(ab) = \varepsilon(\sum_{k\in I} F_{jk}(a)F_{ki}(b)) = \sum_{k\in I}\varepsilon(F_{jk}(a)F_{ki}(b)) =$
$\sum_{k\in I}\varepsilon(F_{jk}(a))\varepsilon(F_{ki}(b)) = \sum_{k\in I} f_{jk}(a)f_{ki}(b)$.
De esta manera, se ha demostrado que $f_{ij}(ab) = \sum_{k\in I} f_{ik}(a)f_{kj}(b)\ \forall\ i, j \in I$ y $\forall\ a, b \in A$.

4) Sean $i, j \in I$.
Primero, notemos que si $w_j \in \{w_i\}_{i\in I}$ entonces por el inciso i), $w_j = w_j1_A = \sum_{i\in I} F_{ji}(1_A)w_i$ con $F_{ji}(1_A) \in A$ únicos y casi todos cero dados por el mapeo lineal $F_{ji} : A \to A$.
Entonces $F_{ji}(1_A) = \delta_{ji}1_A$ y se calcula $f_{ji}(1_A) = \varepsilon(F_{ji}(1_A)) = \varepsilon(\delta_{ji}1_A) = \delta_{ji}1_{\mathbb{C}} = \delta_{ji}$.
De esta manera, se ha demostrado que $f_{ij}(1_A) = \delta_{ij}\ \forall\ i, j \in I$.

1) Sean $i \in I$ y $b \in A$.
Primero, notemos que si $w_j \in \{w_i\}_{i\in I}$ entonces por el inciso i), $w_jb = \sum_{i\in I} F_{ji}(b)w_i$ con $F_{ji}(b) \in A$ únicos y casi todos cero dados por el mapeo lineal $F_{ji} : A \to A$.
Por un lado, se calcula $\Phi_\Gamma(w_jb) = \Phi_\Gamma(\sum_{i\in I} F_{ji}(b)w_i) = \sum_{i\in I}\phi(F_{ji}(b))\Phi_\Gamma(w_i) =$
$\sum_{i\in I}\phi(F_{ji}(b))(1_A\otimes w_i)$.
Por otro lado, se calcula $\Phi_\Gamma(w_jb) = \Phi_\Gamma(w_j)\phi(b) = (1_A\otimes w_j)\phi(b) = (1_A\otimes w_j)(b^{(1)}\otimes b^{(2)}) =$
$b^{(1)}\otimes w_jb^{(2)} = b^{(1)}\otimes\sum_{i\in I} F_{ji}(b^{(2)})w_i = \sum_{i\in I} b^{(1)}\otimes F_{ji}(b^{(2)})w_i =$
$\sum_{i\in I}(\mathrm{id}\otimes F_{ji})(b^{(1)}\otimes b^{(2)})(1_A\otimes w_i) = \sum_{i\in I}(\mathrm{id}\otimes F_{ji})\phi(b)(1_A\otimes w_i)$.
De donde $\phi(F_{ji}(b)) = (\mathrm{id}\otimes F_{ji})\phi(b)$ y se calcula $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\phi(F_{ji}(b)) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\mathrm{id}\otimes F_{ji})\phi(b)$ entonces $F_{ji}(b) = (\mathrm{id}\otimes f_{ji})\phi(b)$ por lo que $F_{ji}(b) = f_{ji} * b$.
Entonces $w_jb = \sum_{i\in I}(f_{ji} * b)w_i$.
De esta manera se ha demostrado que $w_ib = \sum_{j\in I}(f_{ij} * b)w_j\ \forall\ i \in I$ y $\forall\ b \in A$.

2) Sean $i \in I$ y $a \in A$.

Primero, se verificarán las condiciones bajo las cuales se satisface $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * a)$.

Notemos que si $w_j \in \{w_i\}_{i\in I}$ entonces por el inciso 1), $w_j((f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * a) = \sum_{k\in I}(f_{jk} * ((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a))w_k$.

Así, se calcula $aw_i = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I}(f_{jk}*((f_{ij}\circ\kappa^{-1})*a))w_k = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I}((f_{jk}*(f_{ij}\circ\kappa^{-1}))*a)w_k$.

Entonces $\sum_{j\in I}(f_{jk}*(f_{ij}\circ\kappa^{-1}))*a = \delta_{ki}a = \delta_{ki}((\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\phi)(a) = ((\mathrm{id}\otimes\delta_{ki}\varepsilon)\circ\phi)(a) = (\delta_{ki}\varepsilon)*a$.

Luego, notemos que para que se satisfaga $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * a)$ basta demostrar que $\sum_{j\in I}(f_{jk} * (f_{ij} \circ \kappa^{-1})) = \delta_{ki}\varepsilon$.

Así, notemos que $\kappa : A \to A$ es suprayectiva y se calcula $\sum_{j\in I}(f_{jk} * (f_{ij} \circ \kappa^{-1}))\kappa(a) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \otimes (f_{ij} \circ \kappa^{-1}))\phi(\kappa(a)) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \otimes (f_{ij} \circ \kappa^{-1}))(\sigma_A \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \phi)(a) = \sum_{j\in I}((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) \otimes f_{jk})(\kappa \otimes \kappa)\phi(a) = \sum_{j\in I}(f_{ij} \otimes f_{jk})(\kappa^{-1} \otimes \mathrm{id})(\kappa \otimes \kappa)\phi(a) = \sum_{j\in I}(f_{ij} \otimes f_{jk})(\mathrm{id} \otimes \kappa)\phi(a) = (f_{ik} \circ \mu)(\mathrm{id} \otimes \kappa)\phi(a) = (f_{ik} \circ \eta \circ \varepsilon)(a) = f_{ik}(\varepsilon(a)1_A) = \varepsilon(a)f_{ik}(1_A) = \varepsilon(a)\delta_{ik} = \delta_{ki}\varepsilon(\kappa(a))$.

De esta manera, se ha demostrado que $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a)$ $\forall\ i \in I$ y $\forall\ a \in A$.

Hasta este punto solo se ha demostrado la existencia de mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C}\}$ que satisfacen 1), 2), 3) y 4).

Ahora, se verificará que los mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C}\}$ que satisfacen 1), 2), 3) y 4) son únicos.

Primero, notemos que si $w_j \in \{w_i\}_{i\in I}$ entonces por el inciso i), $w_jb = \sum_{i\in I} F_{ji}(b)w_i$ con $F_{ji}(b) \in A$ únicos y casi todos cero dados por el mapeo lineal $F_{ji} : A \to A$.

Así, sea $g_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C}\}$ otro mapeo lineal que satisface 1), 2), 3) y 4).

Por un lado, se calcula $w_jb = \sum_{i\in I}(g_{ij} * b)w_i$ con $g_{ij} * b \in A$ casi todos cero.

Por otro lado, se calcula $w_jb = \sum_{i\in I}(f_{ij} * b)w_i$ con $f_{ij} * b \in A$ casi todos cero.

Entonces $g_{ij} * b = f_{ij} * b$ de donde $\varepsilon(g_{ij} * b) = \varepsilon(f_{ij} * b)$ por lo que $g_{ij}(b) = f_{ij}(b)$.

De esta manera se ha demostrado que los mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C}\}$ que satisfacen 1), 2), 3) y 4) son únicos.

ii) Sea $w \in \Gamma$.

Primero, se verificará que existe una expansión $w = \sum_{i\in I} w_ia_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero.

Notemos que por el inciso 1) y ii), $w = \sum_{i\in I} a_iw_i = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} w_j((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a_i) = \sum_{j\in I} w_ja_j$ con $a_j \in A$ casi todos cero.

Esto demuestra que existe una expansión $w = \sum_{i\in I} w_ia_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero.

Luego, se verificará que la expansión $w = \sum_{i\in I} w_ia_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero es única.

Primero, notemos que dados $w_1, w_2 \in \Gamma$ tales que $w_1 = \sum_{i\in I} w_ia_{1i}$ y $w_2 = \sum_{i\in I} w_ia_{2i}$ con $a_{1i}, a_{2i} \in A$ casi todos cero entonces $w_1 - w_2 = \sum_{i\in I} w_i(a_{1i} - a_{2i}) = 0$.

Así, sea $0 = \sum_{k\in I} w_k(a_{1k} - a_{2k})$ entonces por el inciso 1), $0 = \sum_{k\in I}(\sum_{j\in I}(f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k}))w_j) = \sum_{j\in I}(\sum_{k\in I}(f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k})))w_j$.

Notemos que por el inciso i), $\sum_{k\in I}(f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k})) = 0$.

Por un lado, se calcula $\sum_{j\in I}(f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * \sum_{k\in I}(f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k})) = 0$.

Ahora, se verificará que $\sum_{j\in I}((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * f_{jk}) = \delta_{ki}\varepsilon$.

Así, notemos que $\kappa : A \to A$ es suprayectiva y se calcula $\sum_{j\in I}((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * f_{jk})\kappa(a) = \sum_{j\in I}((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) \otimes f_{jk})\phi(\kappa(a)) = \sum_{j\in I}((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) \otimes f_{jk})(\sigma_A \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \phi)(a) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \otimes (f_{ij} \circ \kappa^{-1}))(\kappa \otimes \kappa)\phi(a) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \otimes f_{ij})(\mathrm{id} \otimes \kappa^{-1})(\kappa \otimes \kappa)\phi(a) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \otimes f_{ij})(\kappa \otimes \mathrm{id})\phi(a) = (f_{ki} \circ \mu)(\kappa \otimes \mathrm{id})\phi(a) = (f_{ki} \circ \eta \circ \varepsilon)(a) = f_{ki}(\varepsilon(a)1_A) = \varepsilon(a)f_{ki}(1_A) = \varepsilon(a)\delta_{ki} = \delta_{ki}\varepsilon(\kappa(a))$.

Por otro lado, se calcula $\sum_{j\in I}(f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * \sum_{k\in I}(f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k})) = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I}(f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * (f_{kj} * (a_{1k} - a_{2k})) = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I}(f_{ji} \circ \kappa^{-1}) * f_{kj}) * (a_{1k} - a_{2k}) = \sum_{k\in I}(\delta_{ik}\varepsilon) * (a_{1k} - a_{2k}) = \varepsilon * (a_{1i} - a_{2i}) = ((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \phi)(a_{1i} - a_{2i}) = a_{1i} - a_{2i}$.

Entonces $a_{1i} - a_{2i} = 0$ de donde $a_{1i} = a_{2i}$.

Esto demuestra que la expansión $w = \sum_{i\in I} w_i a_i$ con $a_i \in A$ casi todos cero es única.

De esta manera, se ha demostrado que Γ es un A-módulo derecho libre con base $\{w_i\}_{i\in I}$.

Proposición 12 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo covariante derecho. Entonces existe un único mapeo proyección derecho $\tilde{P} : \Gamma \to \Gamma_{\mathrm{inv}}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\tilde{P}(wb) = \tilde{P}(w)\varepsilon(b)\ \forall\ b \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

ii) $w = \tilde{P}(w^{(0)})w^{(1)}\ \forall\ w \in \Gamma$.

Demostración Análoga a la demostración de la Proposición 10.

Proposición 13 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo covariante derecho. Sea $\{\eta_i\}_{i\in J}$ una base para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial $\Gamma_{\mathrm{inv}} = \{\eta \in \Gamma \mid {}_\Gamma\Phi(\eta) = \eta \otimes 1_A\} \subset \Gamma$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Γ es un A-módulo izquierdo libre con base $\{\eta_i\}_{i\in J}$.

ii) Γ es un A-módulo derecho libre con base $\{\eta_i\}_{i\in J}$.

iii) Existen mapeos lineales $g_{ij} \in \{g \mid g : A \to \mathbb{C}$ es lineal$\}$ determinados de manera única por las siguientes ecuaciones:

   1) $\eta_i b = \sum_{j\in J}(b * g_{ij})\eta_j\ \forall\ i \in J$ y $\forall\ b \in A$.
   2) $a\eta_i = \sum_{j\in J}\eta_j(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))\ \forall\ i \in J$ y $\forall\ a \in A$.
   3) $g_{ij}(ab) = \sum_{k\in J} g_{ik}(a)g_{kj}(b)\ \forall\ i, j \in J$ y $\forall\ a, b \in A$.

4) $g_{ij}(1_A) = \delta_{ij} \ \forall \ i, j \in J$.

Notemos que 3) y 4) se pueden escribir matricialmente como $g(ab) = g(a)g(b)$ y $g(1_A) = \mathrm{id}$. Es decir, g es un homomorfismo de álgebras, el cual es llamado representación de estructura del A-bimódulo covariante derecho, $(\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$, respecto a la base $\{\eta_i\}_{i\in J}$ de Γ_{inv}.

Demostración Análoga a la demostración de la Proposición 11.

Proposición 14 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo bicovariante. Sea $\{w_i\}_{i\in I}$ una base para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = \{w \in \Gamma \mid \Phi_\Gamma(w) = 1_A \otimes w\} \subset \Gamma$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) ${}_\Gamma\Phi(w_i) = \sum_{j\in I} w_j \otimes R_{ji} \ \forall \ i \in I$ donde $R_{ji} \in A$ satisface las siguientes propiedades:

1) $\phi(R_{ji}) = \sum_{k\in I} R_{jk} \otimes R_{ki} \ \forall \ i, j \in I$.
2) $\varepsilon(R_{ji}) = \delta_{ji} \ \forall \ i, j \in I$.

ii) Existe una base $\{\eta_i\}_{i\in J}$ con $J = I$ para el $\mathbb{C}$-subespacio vectorial $\Gamma_{\mathrm{inv}} = \{\eta \in \Gamma \mid {}_\Gamma\Phi(\eta) = \eta \otimes 1_A\} \subset \Gamma$ que satisface las siguientes propiedades:

1) $w_i = \sum_{j\in I} \eta_j R_{ji} \ \forall \ i \in I$.
2) $\dim(\Gamma_{\mathrm{inv}}) = \dim({}_{\mathrm{inv}}\Gamma)$.

iii) Si $\{\eta_i\}_{i\in I}$ es la base del inciso ii). Entonces los mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C} \text{ es lineal}\}$ y $g_{ij} \in \{g \mid g : A \to \mathbb{C} \text{ es lineal}\}$ que están determinados de manera única por las siguientes ecuaciones:

1) $w_i b = \sum_{j\in I}(f_{ij} * b)w_j$ y $\eta_i b = \sum_{j\in J}(b * g_{ij})\eta_j \ \forall \ i \in I, \forall \ i \in J$ y $\forall \ b \in A$.
2) $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a)$ y $a\eta_i = \sum_{j\in J} \eta_j(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1})) \ \forall \ i \in I, \forall \ i \in J$ y $\forall \ a \in A$.
3) $f_{ij}(ab) = \sum_{k\in I} f_{ik}(a)f_{kj}(b)$ y $g_{ij}(ab) = \sum_{k\in J} g_{ik}(a)g_{kj}(b) \ \forall \ i, j \in I, \forall \ i, j \in J$ y $\forall \ a, b \in A$.
4) $f_{ij}(1_A) = \delta_{ij}$ y $g_{ij}(1_A) = \delta_{ij} \ \forall \ i, j \in I$ y $\forall \ i, j \in J$.

Son iguales. Es decir, $f_{ij}(a) = g_{ij}(a) \ \forall \ i, j \in I$ y $\forall \ a \in A$.

iv) $\sum_{i\in I} R_{ij}(a * f_{ik}) = \sum_{i\in I}(f_{ji} * a)R_{ki} \ \forall \ j, k \in I$ y $\forall \ a \in A$.

v) Si $\{\eta_i\}_{i\in I}$ es la base del inciso ii). Entonces $\Phi_\Gamma(\eta_j) = \sum_{i\in I} \kappa(R_{ij}) \otimes \eta_i \ \forall \ j \in I$.

Demostración

i) Sea $w_i \in \{w_j\}_{j\in I}$.

Primero, se verificará que existe una expansión ${}_\Gamma\Phi(w_i) = \sum_{j\in I} w_j \otimes R_{ji}$.

Ahora, sea $w \in \Gamma$ notemos que $\Gamma \otimes A$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ${}_\Gamma\Phi(w) \in \Gamma \otimes A$.

Así, sea $\{a_j\}_{j\in I'}$ una base de A se calcula ${}_\Gamma\Phi(w) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I'} c_{ij}(w)(w_i \otimes a_j) = \sum_{j\in I'}(\sum_{i\in I} c_{ij}(w)w_i) \otimes a_j = \sum_{j\in I'} \eta_j \otimes a_j$.

Por un lado, se calcula $((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) = (\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id})\sum_{j\in I'}(\eta_j \otimes a_j) = \sum_{j\in I'} \Phi_\Gamma(\eta_j) \otimes a_j$.

Por otro lado, se calcula $((\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_\Gamma\Phi)(w) = ((\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi) \circ \Phi_\Gamma)(w) = (\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi)(1_A \otimes w) = 1_A \otimes {}_\Gamma\Phi(w) = 1_A \otimes \sum_{j\in I'}(\eta_j \otimes a_j) = \sum_{j\in I'} 1_A \otimes \eta_j \otimes a_j$.

Entonces $\Phi_\Gamma(\eta_j) = 1_A \otimes \eta_j$ de donde $\eta_j \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ por lo que ${}_\Gamma\Phi(w) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \otimes A$.

Luego, notemos que ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma \otimes A$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ${}_\Gamma\Phi(w_i) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \otimes A$.

Así, se calcula ${}_\Gamma\Phi(w_i) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I'} c_{jk}(w_i)(w_j \otimes a_k)$ entonces ${}_\Gamma\Phi(w_i) = \sum_{j\in I} w_j \otimes (\sum_{k\in I'} c_{jk}(w_i)a_k) = \sum_{j\in I} w_j \otimes R_{ji}$.

Esto demuestra que existe una expansión ${}_\Gamma\Phi(w_i) = \sum_{j\in I} w_j \otimes R_{ji}$.

1) Sea $w_i \in \{w_j\}_{j\in I}$.
Por un lado, se calcula $((\mathrm{id}\otimes\phi)\circ{}_\Gamma\Phi)(w_i) = (({}_\Gamma\Phi\otimes\mathrm{id})\circ{}_\Gamma\Phi)(w_i) = \sum_{k\in I}({}_\Gamma\Phi\otimes\mathrm{id})(w_k\otimes R_{ki}) = \sum_{k\in I} {}_\Gamma\Phi(w_k) \otimes R_{ki} = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} w_j \otimes R_{jk} \otimes R_{ki} = \sum_{j\in I} w_j \otimes (\sum_{k\in I} R_{jk} \otimes R_{ki})$.
Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \phi) \circ {}_\Gamma\Phi)(w_i) = \sum_{j\in I}(\mathrm{id} \otimes \phi)(w_j \otimes R_{ji}) = \sum_{j\in I} w_j \otimes \phi(R_{ji})$.
Entonces $\phi(R_{ji}) = \sum_{k\in I} R_{jk} \otimes R_{ki}$.
Esto demuestra que $\phi(R_{ji}) = \sum_{k\in I} R_{jk} \otimes R_{ki}\ \forall\ i, j \in I$.

2) Sea $w_i \in \{w_j\}_{j\in I}$.
Por un lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ {}_\Gamma\Phi)(w_i) = w_i$.
Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ {}_\Gamma\Phi)(w_i) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\sum_{j\in I}(w_j \otimes R_{ji}) = \sum_{j\in I} w_j \otimes \varepsilon(R_{ji})$.
Entonces $\sum_{j\in I} w_j\varepsilon(R_{ji}) = w_i$ de donde $\varepsilon(R_{ji}) = \delta_{ji}$.
Esto demuestra que $\varepsilon(R_{ji}) = \delta_{ji}\ \forall\ i, j \in I$.

ii) Sean $i, j \in I$ y $R_{ji} \in A$ los coeficientes del inciso i).

Primero, se verificará que $\sum_{k\in I} \kappa(R_{jk})R_{ki} = \delta_{ji}1_A\ \forall\ i, j \in I$.

Por un lado, se calcula $(\mu \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) \circ \phi)(R_{ji}) = (\eta \circ \varepsilon)(R_{ji}) = \varepsilon(R_{ji})1_A = \delta_{ji}1_A$.

Por otro lado, se calcula $(\mu\circ(\kappa\otimes\mathrm{id})\circ\phi)(R_{ji}) = \sum_{k\in I}(\mu\circ(\kappa\otimes\mathrm{id}))(R_{jk}\otimes R_{ki}) = \sum_{k\in I} \kappa(R_{jk})R_{ki}$.

Entonces $\sum_{k\in I} \kappa(R_{jk})R_{ki} = \delta_{ji}1_A\ \forall\ i, j \in I$.

Luego, se verificará que $\sum_{k\in I} R_{jk}\kappa(R_{ki}) = \delta_{ji}1_A\ \forall\ i, j \in I$.

Por un lado, se calcula $(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa) \circ \phi)(R_{ji}) = (\eta \circ \varepsilon)(R_{ji}) = \varepsilon(R_{ji})1_A = \delta_{ji}1_A$.

Por otro lado, se calcula $(\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\kappa)\circ\phi)(R_{ji}) = \sum_{k\in I}(\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\kappa))(R_{jk}\otimes R_{ki}) = \sum_{k\in I} R_{jk}\kappa(R_{ki})$.

De donde $\sum_{k\in I} R_{jk}\kappa(R_{ki}) = \delta_{ji}1_A\ \forall\ i, j \in I$.

1) Sea $i \in I$.

   Sea $j \in I$ se define $\eta_j = \sum_{i\in I} w_i\kappa(R_{ij})$.

   Ahora, se verificará que $\{\eta_j\}_{j\in I}$ es una base para el $\mathbb{C}$-espacio vectorial Γ_{inv}.

   Primero, se verificará que existe una expansión $w_i = \sum_{j\in I} \eta_j R_{ji}$.

   Así, se calcula $\sum_{j\in I} \eta_j R_{ji} = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} w_k\kappa(R_{kj})R_{ji} = \sum_{k\in I} w_k \sum_{j\in I}\kappa(R_{kj})R_{ji} = \sum_{k\in I} w_k\delta_{ki} = w_i$.

   Esto demuestra que existe una expansión $w_i = \sum_{j\in I} \eta_j R_{ji}$.

   Luego, se verificará que $\eta_j \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

   Así, se calcula ${}_{\Gamma}\Phi(\eta_j) = \sum_{i\in I} {}_{\Gamma}\Phi(w_i\kappa(R_{ij})) = \sum_{i\in I} {}_{\Gamma}\Phi(w_i)\phi(\kappa(R_{ij})) = \sum_{i\in I}(\sum_{m\in I} w_m \otimes R_{mi})(\sigma_A \circ (\kappa\otimes\kappa)\circ\phi)(R_{ij}) = \sum_{i\in I}\sum_{m\in I}(w_m \otimes R_{mi})(\sigma_A \circ (\kappa\otimes\kappa))(\sum_{l\in I} R_{il}\otimes R_{lj}) = \sum_{i\in I}\sum_{m\in I}\sum_{l\in I}(w_m \otimes R_{mi})(\kappa(R_{lj})\otimes\kappa(R_{il})) = \sum_{i\in I}\sum_{m\in I}\sum_{l\in I}(w_m\kappa(R_{lj})\otimes R_{mi}\kappa(R_{il})) = \sum_{l\in I}\sum_{m\in I} w_m\kappa(R_{lj})\otimes(\sum_{i\in I} R_{mi}\kappa(R_{il})) = \sum_{l\in I}\sum_{m\in I} w_m\kappa(R_{lj})\otimes\delta_{ml} = \sum_{l\in I} w_l\kappa(R_{lj})\otimes 1_A = \eta_j \otimes 1_A$.

   Esto demuestra que $\eta_j \in \Gamma_{\text{inv}}$.

   Sea $\eta \in \Gamma_{\text{inv}}$.

   Ahora, se verificará que la expansión $\eta = \sum_{k\in I}\eta_k a_k$ con $a_k \in A$ es única.

   Así, se calcula $\eta = \sum_{k\in I}\eta_k a_k = \sum_{k\in I}\sum_{l\in I} w_l\kappa(R_{lk})a_k = \sum_{l\in I} w_l\sum_{k\in I}\kappa(R_{lk})a_k$.

   Ahora, notemos que si $\eta = 0$ entonces $\sum_{k\in I}\kappa(R_{lk})a_k = 0$ de donde $\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} R_{jl}\kappa(R_{lk})a_k = \sum_{k\in I}\delta_{jk}a_k = a_j = 0$.

   Esto demuestra que la expansión $\eta = \sum_{k\in I}\eta_k a_k$ con $a_k \in A$ es única.

   Ahora, se verificará que $a_k \in \mathbb{C}1_A$ en la expansión única $\eta = \sum_{k\in I}\eta_k a_k$.

   Por un lado, se calcula $\eta\otimes 1_A = {}_{\Gamma}\Phi(\eta) = \sum_{k\in I} {}_{\Gamma}\Phi(\eta_k a_k) = \sum_{k\in I} {}_{\Gamma}\Phi(\eta_k)\phi(a_k) = \sum_{k\in I}(\eta_k\otimes 1_A)\phi(a_k)$.

   Por otro lado, se calcula $\eta\otimes 1_A = \sum_{k\in I}\eta_k a_k \otimes 1_A = \sum_{k\in I}(\eta_k\otimes 1_A)(a_k\otimes 1_A)$.

   Entonces $\phi(a_k) = a_k \otimes 1_A$.

   Por un lado, se calcula $((\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ\phi)(a_k) = a_k$.

   Por otro lado, se calcula $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(a_k\otimes 1_A) = \varepsilon(a_k)\otimes 1_A$.

   Entonces $a_k = \varepsilon(a_k)1_A$ de donde $a_k \in \mathbb{C}1_A$.

   Esto demuestra que $a_k \in \mathbb{C}1_A$ en la expansión única $\eta = \sum_{k\in I}\eta_k a_k$.

   De esta manera, se ha demostrado que $\{\eta_j\}_{j\in I}$ es una base para el $\mathbb{C}$-espacio vectorial Γ_{inv}.

2) Sea $i, j \in I$.

   Primero, notemos que por el inciso 1) de ii), $\{\eta_j\}_{j\in I}$ es una base para el $\mathbb{C}$-espacio vectorial Γ_{inv}.

   Luego, notemos que por hipótesis $\{w_i\}_{i\in I}$ es una base para el $\mathbb{C}$-espacio vectorial ${}_{\text{inv}}\Gamma$.

   Así, notemos que ambas bases tienen la misma cardinalidad I.

   Esto demuestra que $\dim(\Gamma_{\text{inv}}) = \dim({}_{\text{inv}}\Gamma)$.

iii) Sean $i, j \in I$ y $a \in A$.

Primero, notemos que por el inciso 1) de ii), $\eta_j = \sum_{i\in I} w_i\kappa(R_{ij})$ y por el inciso 2) del inciso iii), $aw_i = \sum_{j\in I} w_j((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) * a)$ y $a\eta_i = \sum_{j\in J} \eta_j(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))$.

Por un lado, se calcula $a\eta_i = a\sum_{j\in I} w_j\kappa(R_{ji}) = \sum_{j\in I} aw_j\kappa(R_{ji}) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} w_k((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji})$.

Por otro lado, se calcula $a\eta_i = \sum_{j\in I} \eta_j(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1})) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} w_k\kappa(R_{kj})(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))$.

Entonces $\sum_{j\in I}\sum_{k\in I} w_k((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji}) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} w_k\kappa(R_{kj})(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))$ de donde $\sum_{k\in I} w_k(\sum_{j\in I}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji})) = \sum_{k\in I} w_k(\sum_{j\in I} \kappa(R_{kj})(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1})))$ por lo que $\sum_{j\in I}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji}) = \sum_{j\in I} \kappa(R_{kj})(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))$.

Por un lado, se calcula $\varepsilon(\sum_{j\in I}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji})) = \sum_{j\in I} \varepsilon(((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a))\varepsilon(\kappa(R_{ji})) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \circ \kappa^{-1})(a)\varepsilon(R_{ji}) = \sum_{j\in I}(f_{jk} \circ \kappa^{-1})(a)\delta_{ji} = (f_{ik} \circ \kappa^{-1})(a)$.

Por otro lado, se calcula $\varepsilon(\sum_{j\in I} \kappa(R_{kj})(a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))) = \sum_{j\in I} \varepsilon(\kappa(R_{kj}))\varepsilon((a * (g_{ij} \circ \kappa^{-1}))) = \sum_{j\in I} \varepsilon(R_{kj})(g_{ij} \circ \kappa^{-1})(a) = \sum_{j\in I} \delta_k j(g_{ij} \circ \kappa^{-1})(a) = (g_{ik} \circ \kappa^{-1})(a)$.

Entonces $f_{ik}(\kappa^{-1}(a)) = g_{ik}(\kappa^{-1}(a))$.

Ahora, notemos que $\kappa : A \to A$ es suprayectiva entonces $f_{ik}(a) = g_{ik}(a)$.

De esta manera, se ha demostrado que los mapeos lineales $f_{ij} \in \{f \mid f : A \to \mathbb{C} \text{ es lineal}\}$ y $g_{ij} \in \{g \mid g : A \to \mathbb{C} \text{ es lineal}\}$ que están determinados de manera única por las ecuaciones 1), 2), 3) y 4) del inciso iii), son iguales.

iv) Sean $j, k \in I$ y $a \in A$.

Primero, notemos que por el inciso iii), $\sum_{j\in I}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji}) = \sum_{j\in I} \kappa(R_{kj})(a * (f_{ij} \circ \kappa^{-1}))$.

Así, se calcula $\kappa^{-1}(\sum_{j\in I}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)\kappa(R_{ji})) = \kappa^{-1}(\sum_{j\in I} \kappa(R_{kj})(a * (f_{ij} \circ \kappa^{-1})))$ entonces $\sum_{j\in I} \kappa^{-1}(\kappa(R_{ji}))\kappa^{-1}(((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)) = \sum_{j\in I} \kappa^{-1}((a * (f_{ij} \circ \kappa^{-1})))\kappa^{-1}(\kappa(R_{kj}))$ de donde $\sum_{j\in I} R_{ji}\kappa^{-1}(((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a)) = \sum_{j\in I} \kappa^{-1}((a * (f_{ij} \circ \kappa^{-1})))R_{kj}$.

Por un lado, se calcula $\kappa^{-1}((f_{jk} \circ \kappa^{-1}) * a) = \kappa^{-1}((\mathrm{id} \otimes (f_{jk} \circ \kappa^{-1}))\phi(a)) = \kappa^{-1}((\mathrm{id} \otimes f_{jk})(\mathrm{id} \otimes \kappa^{-1})\phi(a)) = (\mathrm{id} \otimes f_{jk})(\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1})\phi(a) = (\mathrm{id} \otimes f_{jk})\sigma_A\sigma_A(\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1})\phi(a) = (\mathrm{id} \otimes f_{jk})\sigma_A\phi(\kappa^{-1}(a)) = (f_{jk} \otimes \mathrm{id})\phi(\kappa^{-1}(a)) = \kappa^{-1}(a) * f_{jk}$.

Por otro lado, se calcula $\kappa^{-1}(a * (f_{ij} \circ \kappa^{-1})) = \kappa^{-1}(((f_{ij} \circ \kappa^{-1}) \otimes \mathrm{id})\phi(a)) = \kappa^{-1}((f_{ij} \otimes \mathrm{id})(\kappa^{-1} \otimes \mathrm{id})\phi(a)) = (f_{ij} \otimes \mathrm{id})(\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1})\phi(a) = (f_{ij} \otimes \mathrm{id})\sigma_A\sigma_A(\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1})\phi(a) = (f_{ij} \otimes \mathrm{id})\sigma_A\phi(\kappa^{-1}(a)) = (\mathrm{id} \otimes f_{ij})\phi(\kappa^{-1}(a)) = f_{ij} * \kappa^{-1}(a)$.

De donde $\sum_{j\in I} R_{ji}(\kappa^{-1}(a) * f_{jk}) = \sum_{j\in I}(f_{ij} * \kappa^{-1}(a))R_{kj}$.

Ahora, notemos que como $\kappa : A \to A$ es suprayectiva entonces $\forall\ a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a = \kappa(b)$ y se calcula $\sum_{j\in I} R_{ji}(\kappa^{-1}(\kappa(b)) * f_{jk}) = \sum_{j\in I}(f_{ij} * \kappa^{-1}(\kappa(b)))R_{kj}$.

Por lo que $\sum_{j\in I} R_{ji}(b * f_{jk}) = \sum_{j\in I}(f_{ij} * b)R_{kj}$.

De esta manera, se ha demostrado que $\sum_{i\in I} R_{ij}(a * f_{ik}) = \sum_{i\in I}(f_{ji} * a)R_{ki}\ \forall\ j, k \in I$ y $\forall\ a \in A$.

v) Sea $\{\eta_i\}_{i\in I}$ la base del inciso ii).

Primero, notemos que por el inciso 1) de ii), $\eta_j = \sum_{i\in I} w_i\kappa(R_{ij})$.

Así, se calcula $\Phi_\Gamma(\eta_j) = \sum_{i\in I}\Phi_\Gamma(w_i\kappa(R_{ij})) = \sum_{i\in I}\Phi_\Gamma(w_i)\phi(\kappa(R_{ij})) =$
$\sum_{i\in I}(1_A\otimes w_i)(\sigma_A\circ(\kappa\otimes\kappa)\circ\phi)(R_{ij}) = \sum_{i\in I}(1_A\otimes w_i)((\sigma_A\circ(\kappa\otimes\kappa))\sum_{l\in I}(R_{il}\otimes R_{lj})) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{l\in I}(1_A\otimes w_i)(\kappa(R_{lj})\otimes\kappa(R_{il})) = \sum_{i\in I}\sum_{l\in I}\kappa(R_{lj})\otimes w_i\kappa(R_{il}) =$
$\sum_{l\in I}\kappa(R_{lj})\otimes(\sum_{i\in I} w_i\kappa(R_{il})) = \sum_{l\in I}\kappa(R_{lj})\otimes\eta_l$.

De esta manera, se ha demostrado que $\Phi_\Gamma(\eta_j) = \sum_{i\in I}\kappa(R_{ij})\otimes\eta_i\ \forall\ j\in I$.

Demostraciones alternativas de las Proposiciones 11, 13 y 14 se pueden encontrar en [Klimyk y Schmüdgen, 1997].

3.3. Cálculos Diferenciales de Primer Orden Covariantes sobre una Álgebra de Hopf

Proposición 15 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U, D) el CDPO universal sobre A. Sean $\Phi_L : (A\otimes A)\to A\otimes(A\otimes A)$ y ${}_R\Phi : (A\otimes A)\to(A\otimes A)\otimes A$ mapeos lineales dados por $\Phi_L(a\otimes b) = (\mu\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\sigma_A\otimes\mathrm{id})(\phi\otimes\phi)(a\otimes b) = a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes b^{(2)}$ y ${}_R\Phi(a\otimes b) = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mu)(\mathrm{id}\otimes\sigma_A\otimes\mathrm{id})(\phi\otimes\phi)(a\otimes b) = a^{(1)}\otimes b^{(1)}\otimes a^{(2)}b^{(2)}$ respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $((A\otimes A), \Phi_L, {}_R\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante donde la estructura de A-bimódulo en $(A\otimes A)$ está dada por $c(a\otimes b) = (ca\otimes b)$ y $(a\otimes b)c = (a\otimes bc)\ \forall\ a, b, c\in A$.

ii) $U\subset(A\otimes A)$ es un A-subbimódulo invariante bajo Φ_L y ${}_R\Phi$.

iii) $(U, \Phi_U, {}_U\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante donde $\Phi_U = \Phi_L|_U$ y ${}_U\Phi = {}_R\Phi|_U$.

iv) (U, D) es un CDPO bicovariante sobre A con respecto a Φ_U y ${}_U\Phi$.

Demostración

i) Primero, se verificará que $((A\otimes A), \Phi_L)$ satisface i) y ii) de la Definición 19 excepto el axioma de la counidad.

Por un lado, se calcula $\Phi_L(c(a\otimes b)) = \Phi_L(ca\otimes b) = (ca)^{(1)}b^{(1)}\otimes(ca)^{(2)}\otimes b^{(2)} =$
$c^{(1)}a^{(1)}b^{(1)}\otimes c^{(2)}a^{(2)}\otimes b^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $\phi(c)\Phi_L(a\otimes b) = (c^{(1)}\otimes c^{(2)})(a^{(1)}b^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes b^{(2)}) =$
$c^{(1)}a^{(1)}b^{(1)}\otimes c^{(2)}a^{(2)}\otimes b^{(2)}$.

Entonces $\Phi_L(c(a\otimes b)) = \phi(c)\Phi_L(a\otimes b)$.

Por un lado, se calcula $\Phi_L((a\otimes b)c) = \Phi_L(a\otimes bc) = a^{(1)}(bc)^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes(bc)^{(2)} =$
$a^{(1)}b^{(1)}c^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes b^{(2)}c^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $\Phi_L(a \otimes b)\phi(c) = (a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)})(c^{(1)} \otimes c^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)}c^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}c^{(2)}$.

Entonces $\Phi_L((a \otimes b)c) = \Phi_L(a \otimes b)\phi(c)$.

Por un lado, se calcula $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_L(a \otimes b) = (\phi \otimes \mathrm{id})(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = \phi(a^{(1)}b^{(1)}) \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)} = \phi(a^{(1)})\phi(b^{(1)}) \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)} = (a^{(1)} \otimes a^{(2)})(b^{(1)} \otimes b^{(2)}) \otimes a^{(3)} \otimes b^{(3)} = (a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) \otimes a^{(3)} \otimes b^{(3)} = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes 1_A)(b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes 1_A \otimes b^{(3)})$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \Phi_L) \circ \Phi_L(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \Phi_L)(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes \Phi_L(a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes b^{(3)} = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes 1_A)(b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes 1_A \otimes b^{(3)})$.

Entonces $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_L(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \Phi_L) \circ \Phi_L(a \otimes b)$.

Esto demuestra que $((A \otimes A), \Phi_L)$ es un A-bimódulo covariante izquierdo.

Luego, se verificará que $((A \otimes A), {}_R\Phi)$ satisface i) y ii) de la Definición 20 excepto el axioma de la counidad.

Por un lado, se calcula ${}_R\Phi((a \otimes b)c) = {}_R\Phi(a \otimes bc) = a^{(1)} \otimes (bc)^{(1)} \otimes a^{(2)}(bc)^{(2)} = a^{(1)} \otimes b^{(1)}c^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}c^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula ${}_R\Phi(a \otimes b)\phi(c) = (a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)})(c^{(1)} \otimes c^{(2)}) = a^{(1)} \otimes b^{(1)}c^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}c^{(2)}$.

Entonces ${}_R\Phi((a \otimes b)c) = {}_R\Phi(a \otimes b)\phi(c)$.

Por un lado, se calcula ${}_R\Phi(c(a \otimes b)) = {}_R\Phi(ca \otimes b) = (ca)^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes (ca)^{(2)}b^{(2)} = c^{(1)}a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes c^{(2)}a^{(2)}b^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $\phi(c){}_R\Phi(a \otimes b) = (c^{(1)} \otimes c^{(2)})(a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) = c^{(1)}a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes c^{(2)}a^{(2)}b^{(2)}$.

Entonces ${}_R\Phi(c(a \otimes b)) = \phi(c){}_R\Phi(a \otimes b)$.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \phi)_R \circ \Phi(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \phi)(a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) = a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes \phi(a^{(2)})\phi(b^{(2)}) = a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes (a^{(2)} \otimes a^{(3)})(b^{(2)} \otimes b^{(3)}) = a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes (a^{(2)}b^{(2)} \otimes a^{(3)}b^{(3)}) = (a^{(1)} \otimes 1_A \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)})(1_A \otimes b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes b^{(3)})$.

Por otro lado, se calcula $({}_R\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ {}_R\Phi(a \otimes b) = ({}_R\Phi \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) = {}_R\Phi(a^{(1)} \otimes b^{(1)}) \otimes a^{(2)}b^{(2)} = a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes (a^{(2)}b^{(2)} \otimes a^{(3)}b^{(3)}) = (a^{(1)} \otimes 1_A \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)})(1_A \otimes b^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes b^{(3)})$.

Entonces $(\mathrm{id} \otimes \phi) \circ {}_R\Phi(a \otimes b) = ({}_R\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ {}_R\Phi(a \otimes b)$.

Esto demuestra que $((A \otimes A), {}_R\Phi)$ es un A-bimódulo covariante derecho.

Ahora, se verificará que $((A \otimes A), \Phi_L, {}_R\Phi)$ satisface la Definición 21.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes {}_R\Phi) \circ \Phi_L(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes {}_R\Phi)(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes {}_R\Phi(a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)} \otimes a^{(3)}b^{(3)} = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes 1_A \otimes a^{(3)})(b^{(1)} \otimes 1_A \otimes b^{(2)} \otimes b^{(3)})$.

Por otro lado, se calcula $(\Phi_L \otimes \mathrm{id}) \circ {}_R\Phi(a \otimes b) = (\Phi_L \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) = \Phi_L(a^{(1)} \otimes b^{(1)}) \otimes a^{(2)}b^{(2)} = a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)} \otimes a^{(3)}b^{(3)} = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes 1_A \otimes a^{(3)})(b^{(1)} \otimes 1_A \otimes b^{(2)} \otimes b^{(3)})$.

Entonces $(\mathrm{id} \otimes {}_R\Phi) \circ \Phi_L(a \otimes b) = (\Phi_L \otimes \mathrm{id}) \circ {}_R\Phi(a \otimes b)$.

De esta manera, se ha demostrado que $((A \otimes A), \Phi_L, {}_R\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

ii) Sea $U \subset (A \otimes A)$.

Primero, se verificará que U es un A-subbimodulo de $(A \otimes A)$.

Notemos que por definición, $U \neq \emptyset$.

Así, sea $u, v \in U$ entonces $\mu(u + v) = \mu(u) + \mu(v) = 0$.

Ahora, sea $u \in U$ entonces $u = \sum_{k \in I} a_k \otimes b_k$ con $a_k, b_k \in A$ y se calcula $\mu(u) = \sum_{k \in I} \mu(a_k \otimes b_k) = \sum_{k \in I} a_k b_k = 0$.

Sea $c \in A$.

Por un lado, se calcula $\mu(cu) = c \sum_{k \in I} \mu(a_k \otimes b_k) = c \sum_{k \in I} a_k b_k = 0$.

Por otro lado, se calcula $\mu(uc) = (\sum_{k \in I} \mu(a_k \otimes b_k))c = (\sum_{k \in I} a_k b_k)c = 0$.

Esto demuestra que U es un A-subbimódulo de $(A \otimes A)$.

Luego, se verificará que U es invariante bajo bajo Φ_L y ${}_R\Phi$.

Primero, notemos que $(\mathrm{id} \otimes \mu) \circ \Phi_L = (\mathrm{id} \otimes \mu)(\mu \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma_A \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \phi) = \mu_{A \otimes A}(\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu$.

Así, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \mu)\Phi_L(u) = \phi(\mu(u)) = 0$.

De donde $\Phi_L(u) \in A \otimes U$.

Después, notemos que $(\mu \otimes \mathrm{id}) \circ {}_R\Phi = (\mu \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mu)(\mathrm{id} \otimes \sigma_A \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \phi) = \mu_{A \otimes A}(\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu$.

Ahora, se calcula $(\mu \otimes \mathrm{id})_R\Phi(u) = \phi(\mu(u)) = 0$.

De donde ${}_R\Phi(u) \in U \otimes A$.

Esto demuestra que U es invariante bajo Φ_L y ${}_R\Phi$.

iii) Primero, notemos que por el inciso i), $((A \otimes A), \Phi_L, {}_R\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

Luego, notemos que U es un A-subbimódulo de $(A \otimes A)$ invariante bajo Φ_L y ${}_R\Phi$.

Entonces $\Phi_U = \Phi_L|_U : U \to A \otimes U$ y ${}_U\Phi = {}_R\Phi|_U : U \to U \otimes A$.

Esto demuestra que $(U, \Phi_U, {}_U\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

iv) Primero, se verificará que (U, D) satisface la Definición 16.

Notemos que dado $u \in U$ entonces D satisface $u = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ y se calcula $\Phi_U(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)\Phi_U(D(b_k))$.

Por un lado, se calcula $\Phi_U(D(b_k)) = \Phi_U((1_A \otimes b_k) - (b_k \otimes 1_A)) = \Phi_U(1_A \otimes b_k) - \Phi_U(b_k \otimes 1_A) = b_k^{(1)} \otimes 1_A \otimes b_k^{(2)} - b_k^{(1)} \otimes b_k^{(2)} \otimes 1_A$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k) = b_k^{(1)} \otimes D(b_k^{(2)}) = b_k^{(1)} \otimes ((1_A \otimes b_k^{(2)}) - (b_k^{(2)} \otimes 1_A)) = b_k^{(1)} \otimes 1_A \otimes b_k^{(2)} - b_k^{(1)} \otimes b_k^{(2)} \otimes 1_A$.

Entonces $\Phi_U(D(b_k)) = (\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k)$ de donde $\Phi_U(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k)$.

Ahora, si $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$ entonces $\Phi_U(0) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k) = 0$.

Esto demuestra que (U, D) es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Luego, se verificará que (U, D) satisface la Definición 17.

Notemos que dado $u \in U$ entonces D satisface $u = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ y se calcula ${}_U\Phi(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k) {}_U\Phi(D(b_k))$.

Por un lado, se calcula ${}_U\Phi(D(b_k)) = {}_U\Phi((1_A \otimes b_k) - (b_k \otimes 1_A)) = {}_U\Phi(1_A \otimes b_k) - {}_U\Phi(b_k \otimes 1_A) = 1_A \otimes b_k^{(1)} \otimes b_k^{(2)} - b_k^{(1)} \otimes 1_A \otimes b_k^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = D(b_k^{(1)}) \otimes b_k^{(2)} = ((1_A \otimes b_k^{(1)}) - (b_k^{(1)} \otimes 1_A)) \otimes b_k^{(2)} = 1_A \otimes b_k^{(1)} \otimes b_k^{(2)} - b_k^{(1)} \otimes 1_A \otimes b_k^{(2)}$.

Entonces ${}_U\Phi(D(b_k)) = (D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$ de donde ${}_U\Phi(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$.

Ahora, si $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$ entonces ${}_U\Phi(0) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = 0$.

Esto demuestra que (U, D) es un CDPO covariante derecho sobre A.

De esta manera, se ha demostrado que (U, D) es un CDPO bicovariante sobre A.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Sontz, 2015] [Woronowicz, 1989].

Proposición 16 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean (Γ, d) y (Γ', d') CDPO sobre A isomorfos. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades equivalentes:

i) (Γ, d) es covariante izquierdo si y solo si (Γ', d') es covariante izquierdo.

ii) (Γ, d) es covariante derecho si y solo si (Γ', d') es covariante derecho.

iii) (Γ, d) es bicovariante si y solo si (Γ', d') es bicovariante.

Proposición 17 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U, D) el CDPO universal sobre A. Sea N un A-subbimódulo de U definimos $\Gamma_N = \frac{U}{N}$. Sea $\pi_N : U \to \Gamma_N$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_N = \pi_N \circ D : A \to \Gamma_N$. Sea (Γ_N, d_N) el CDPO sobre A de la Proposición 6. Sean $\Phi_U : U \to A \otimes U$ y ${}_U\Phi : U \to U \otimes A$ los mapeos lineales de la Proposición 15. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades equivalentes:

i) (Γ_N, d_N) es covariante izquierdo si y solo si N es invariante bajo Φ_U.

ii) (Γ_N, d_N) es covariante derecho si y solo si N es invariante bajo ${}_U\Phi$.

iii) (Γ_N, d_N) es bicovariante si y solo si N es invariante bajo Φ_U y ${}_U\Phi$.

Demostración

i) Primero, se verificará la implicación directa.

Sea (Γ_N, d_N) un CDPO covariante izquierdo.

Primero, notemos que por la Proposición 7 existe un único mapeo lineal $\Phi_{\Gamma_N} : \Gamma_N \to A \otimes \Gamma_N$ dado por $\Phi_{\Gamma_N}([u]_N) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d_N)\phi(b_k)$ con $[u]_N = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Ahora, definimos el mapeo lineal $(\mathrm{id} \otimes \pi_N) \circ \Phi_U : U \to A \otimes \Gamma_N$ y notemos que por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal $\tilde{\Phi}_{\Gamma_N} : \Gamma_N \to A \otimes \Gamma_N$ tal que $\tilde{\Phi}_{\Gamma_N} \circ \pi_N = (\mathrm{id} \otimes \pi_N) \circ \Phi_U$.

Así, se verificará que $\tilde{\Phi}_{\Gamma_N} = \Phi_{\Gamma_N}$.

Sea $u \in U$.

Notemos que como (U, D) es un CDPO sobre A entonces $u = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$.

Por un lado, se calcula $(\Phi_{\Gamma_N} \circ \pi_N)(u) = (\Phi_{\Gamma_N} \circ \pi_N)(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = \Phi_{\Gamma_N}(\sum_{k=1}^{K} a_k (\pi_N \circ D)(b_k)) = \Phi_{\Gamma_N}(\sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)) = \Phi_{\Gamma_N}([u]_N) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d_N)\phi(b_k)$.

Notemos que por el inciso iv) de la Proposición 15, $\Phi_U(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k)$.

Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \pi_N) \circ \Phi_U)(u) = (\mathrm{id} \otimes \pi_N)(\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes (\pi_N \circ D))\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d_N)\phi(b_k)$.

Entonces $(\Phi_{\Gamma_N} \circ \pi_N)(u) = ((\mathrm{id} \otimes \pi_N) \circ \Phi_U)(u)$.

Esto demuestra que $\tilde{\Phi}_{\Gamma_N}(u) = \Phi_{\Gamma_N}(u) \ \forall \ u \in U$.

Sea $\alpha \in N$.

Por un lado, se calcula $(\Phi_{\Gamma_N} \circ \pi_N)(\alpha) = \Phi_{\Gamma_N}(0) = 0$.

Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \pi_N) \circ \Phi_U)(\alpha) = (\mathrm{id} \otimes \pi_N)\Phi_U(\alpha)$.

Entonces $(\mathrm{id} \otimes \pi_N)\Phi_U(\alpha) = 0$ de donde $\Phi_U(\alpha) \in \ker(\mathrm{id} \otimes \pi_N)$.

Ahora, notemos que $\ker(\mathrm{id} \otimes \pi_N) = A \otimes N$ por lo que $\Phi_U(\alpha) \in A \otimes N$.

Esto demuestra que N es invariante bajo Φ_U.

Después, se verificará la implicación inversa.

Sea $\Phi_U(N) \subset A \otimes N$.

Ahora, sea $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\pi_N(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k \pi_N(D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k) = 0$.

Entonces $\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) \in N$ de donde $\Phi_U(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) \in A \otimes N$.

Así, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \pi_N)\Phi_U(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = (\mathrm{id} \otimes \pi_N) \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes D)\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes (\pi_N \circ D))\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(\mathrm{id} \otimes d_N)\phi(b_k) = 0$.

Esto demuestra que (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante izquierdo.

ii) Primero, se verificará la implicación directa.

Sea (Γ_N, d_N) un CDPO covariante derecho.

Primero, notemos que por la Proposición 7 existe un único mapeo lineal ${}_{\Gamma_N}\Phi : \Gamma_N \to \Gamma_N \otimes A$ dado por ${}_{\Gamma_N}\Phi([u]_N) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d_N \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$ con $[u]_N = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Ahora, definimos el mapeo lineal $(\pi_N \otimes \mathrm{id}) \circ {}_U\Phi : U \to \Gamma_N \otimes A$ y notemos que por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal ${}_{\Gamma_N}\tilde{\Phi} : \Gamma_N \to \Gamma_N \otimes A$ tal que ${}_{\Gamma_N}\tilde{\Phi} \circ \pi_N = (\pi_N \otimes \mathrm{id}) \circ {}_U\Phi$.

Así, se verificará que ${}_{\Gamma_N}\tilde{\Phi} = {}_{\Gamma_N}\Phi$.

Sea $u \in U$.

Notemos que como (U, D) es un CDPO sobre A entonces $u = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)$.

Por un lado, se calcula $({}_{\Gamma_N}\Phi \circ \pi_N)(u) = ({}_{\Gamma_N}\Phi \circ \pi_N)(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = {}_{\Gamma_N}\Phi(\sum_{k=1}^{K} a_k (\pi_N \circ D)(b_k)) = {}_{\Gamma_N}\Phi(\sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)) = {}_{\Gamma_N}\Phi([u]_N) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d_N \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$.

Notemos que por el inciso iv) de la Proposición 15, ${}_U\Phi(u) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$.

Por otro lado, se calcula $((\pi_N \otimes \mathrm{id}) \circ {}_U\Phi)(u) = (\pi_N \otimes \mathrm{id})(\sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)((\pi_N \circ D) \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d_N \otimes \mathrm{id})\phi(b_k)$.

Entonces $({}_{\Gamma_N}\Phi \circ \pi_N)(u) = ((\pi_N \otimes \mathrm{id}) \circ {}_U\Phi)(u)$.

Esto demuestra que ${}_{\Gamma_N}\tilde{\Phi}(u) = {}_{\Gamma_N}\Phi(u)\ \forall\ u \in U$.

Sea $\alpha \in N$.

Por un lado, se calcula $({}_{\Gamma_N}\Phi \circ \pi_N)(\alpha) = {}_{\Gamma_N}\Phi(0) = 0$.

Por otro lado, se calcula $((\pi_N \otimes \mathrm{id}) \circ {}_U\Phi)(\alpha) = (\pi_N \otimes \mathrm{id}){}_U\Phi(\alpha)$.

Entonces $(\pi_N \otimes \mathrm{id}){}_U\Phi(\alpha) = 0$ de donde ${}_U\Phi(\alpha) \in \ker(\pi_N \otimes \mathrm{id})$.

Ahora, notemos que $\ker(\pi_N \otimes \mathrm{id}) = N \otimes A$ por lo que ${}_U\Phi(\alpha) \in N \otimes A$.

Esto demuestra que N es invariante bajo ${}_U\Phi$.

Después, se verificará la implicación inversa.

Sea ${}_U\Phi(N) \subset N \otimes A$.

Ahora, sea $0 = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k)$ donde $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$ se calcula $\pi_N(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k \pi_N(D(b_k)) = \sum_{k=1}^{K} a_k d_N(b_k) = 0$.

Entonces $\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) \in N$ de donde ${}_U\Phi(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) \in N \otimes A$.

Así, se calcula $(\pi_N \otimes \mathrm{id}){}_U\Phi(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k)) = (\pi_N \otimes \mathrm{id}) \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(D \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)((\pi_N \circ D) \ \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = \sum_{k=1}^{K} \phi(a_k)(d_N \otimes \mathrm{id})\phi(b_k) = 0$.

Esto demuestra que (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante derecho.

iii) Primero, se verificará la implicación directa.

Sea (Γ_N, d_N) un CDPO bicovariante.

Entonces (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante izquierdo y derecho.

Notemos que por el inciso i) y ii), N es invariante bajo Φ_U y ${}_U\Phi$.

Después, se verificará la implicación inversa.

Sea $\Phi_U(N) \subset A \otimes N$ y ${}_U\Phi(N) \subset N \otimes A$.

Notemos que por el inciso i) y ii), (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante izquierdo y derecho.

De donde (Γ_N, d_N) es un CDPO bicovariante.

Proposición 18 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Definimos $\Gamma = A \otimes V$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) El mapeo lineal $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ dado por $\Phi_\Gamma = (\phi \otimes \mathrm{id})$ es una coacción izquierda de A sobre Γ.

ii) ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = \{\alpha \in A \otimes V \mid \Phi_\Gamma(\alpha) = 1_A \otimes \alpha\} = 1_A \otimes V$.

Demostración

i) Primero, se verificará la Definición 8.

Sea $a \otimes v \in \Gamma$.

Por un lado, se calcula $((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v) = (\phi \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \mathrm{id})(a \otimes v) = (\phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes v) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes v$.

Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \Phi_\Gamma) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v) = (\mathrm{id} \otimes (\phi \otimes \mathrm{id}))(\phi \otimes \mathrm{id})(a \otimes v) =$
$(\mathrm{id} \otimes \phi \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes v) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)} \otimes v$.

Entonces $((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v) = ((\mathrm{id} \otimes \Phi_\Gamma) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v)$.

Por un lado, se calcula $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\phi \otimes \mathrm{id})(a \otimes v) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes v) = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} \otimes v$.

Por otro lado, se calcula $\mathrm{id}(a \otimes v) = a \otimes v = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} \otimes v$.

De donde $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi_\Gamma)(a \otimes v) = \mathrm{id}(a \otimes v)$.

Esto demuestra que Φ_Γ es una coacción izquierda de A sobre Γ.

ii) Primero, se verificará que $1_A \otimes V \subset {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$.

Así, sea $1_A \otimes v \in 1_A \otimes V$ se calcula $\Phi_\Gamma(1_A \otimes v) = (\phi \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes v) = 1_A \otimes v$.

Entonces $1_A \otimes v \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$.

Esto demuestra que $1_A \otimes V \subset {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$.

Luego, se verificará que ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma \subset 1_A \otimes V$.

Ahora, sea $\alpha \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ entonces $\alpha = \sum_{k \in I} a_k \otimes v_k$ con $a_k \in A$, $v_k \in V$ y $k > 0$.

Por un lado, se calcula $\Phi_\Gamma(\alpha) = \Phi_\Gamma(\sum_{k\in I} a_k \otimes v_k) = 1_A \otimes (\sum_{k\in I} a_k \otimes v_k) = \sum_{k\in I} 1_A \otimes a_k \otimes v_k$.

Por otro lado, se calcula $\Phi_\Gamma(\alpha) = (\phi \otimes \mathrm{id})(\sum_{k\in I} a_k \otimes v_k) = \sum_{k\in I} \phi(a_k) \otimes v_k$.

Entonces $\sum_{k\in I} 1_A \otimes a_k \otimes v_k = \sum_{k\in I} \phi(a_k) \otimes v_k$.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id}) \sum_{k\in I}(1_A\otimes a_k\otimes v_k) = \sum_{k\in I}(1_A\otimes\varepsilon(a_k)\otimes v_k) = \sum_{k\in I} \varepsilon(a_k)1_A\otimes v_k$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id}) \sum_{k\in I}(\phi(a_k)\otimes v_k) = \sum_{k\in I}(((\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\phi(a_k))\otimes v_k) = \sum_{k\in I} a_k\otimes v_k$.

De donde $\varepsilon(a_k)1_A = a_k$ por lo que $\alpha = \sum_{k\in I} \varepsilon(a_k)1_A\otimes v_k = \sum_{k\in I} 1_A\otimes\varepsilon(a_k)v_k = 1_A\otimes\sum_{k\in I}\varepsilon(a_k)$.

Entonces $\alpha \in 1_A \otimes V$.

Esto demuestra que ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma \subset 1_A \otimes V$.

De esta manera, se ha demostrado que ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = 1_A \otimes V$.

Proposición 19 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Definimos $\Gamma = V \otimes A$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) El mapeo lineal ${}_\Gamma\Phi : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ dado por ${}_\Gamma\Phi = (\mathrm{id} \otimes \phi)$ es una coacción derecha de A sobre Γ.

ii) $\Gamma_{\mathrm{inv}} = \{\alpha \in V \otimes A \mid {}_\Gamma\Phi(\alpha) = \alpha \otimes 1_A\} = V \otimes 1_A$.

Demostración Análoga a la demostración de la Proposición 18.

Proposición 20 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $A \otimes \ker(\varepsilon) \subset A \otimes A$ y $\ker(\varepsilon) \otimes A \subset A \otimes A$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un A-bimódulo con las operaciones $c(a \otimes b) = ca \otimes b$ y $(a \otimes b)c = (a \otimes b)\phi(c)$ $\forall\ a, c \in A$ y $\forall\ b \in \ker(\varepsilon)$.

ii) $\ker(\varepsilon) \otimes A$ es un A-bimódulo con las operaciones $c(a \otimes b) = a \otimes cb$ y $(a \otimes b)c = (a \otimes b)\phi(c)$ $\forall\ a, c \in A$ y $\forall\ b \in \ker(\varepsilon)$.

Demostración

i) Sean $a, c \in A$ y $b \in \ker(\varepsilon)$.

Primero, notemos que por definición, $A \otimes \ker(\varepsilon) \neq \emptyset$.

Ahora, sea $u, v \in A \otimes \ker(\varepsilon)$ entonces $u = \sum_{k\in I} a_{1k} \otimes b_{1k}$ y $v = \sum_{k\in I} a_{2k} \otimes b_{2k}$ con $a_{1k}, a_{2k} \in A$ y $b_{1k}, b_{2k} \in \ker(\varepsilon)$.

Así, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(u + v) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\sum_{k\in I} a_{1k} \otimes b_{1k}) + (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\sum_{k\in I} a_{2k} \otimes b_{2k}) =$
$\sum_{k\in I} a_{1k} \otimes \varepsilon(b_{1k}) + \sum_{k\in I} a_{2k} \otimes \varepsilon(b_{2k}) = 0$.

Luego, se verificará que $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es cerrado bajo la acción izquierda.

Así, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(c(a \otimes b)) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(ca \otimes b) = ca \otimes \varepsilon(b) = 0$.

Después, se verificará que $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es cerrado bajo la acción derecha.

Ahora, se calcula $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)((a\otimes b)c) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)((a\otimes b)\phi(c)) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(ac^{(1)}\otimes bc^{(2)}) = ac^{(1)}\otimes\varepsilon(bc^{(2)}) = ac^{(1)}\otimes\varepsilon(b)\varepsilon(c^{(2)}) = 0$.

Finalmente, se verificará que las acciones izquierda y derecha son compatibles.

Sea $d \in A$.

Por un lado, se calcula $(c(a\otimes b))d = (ca\otimes b)d = (ca\otimes b)\phi(d) = cad^{(1)}\otimes bd^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $c((a\otimes b)d) = c((a\otimes b)\phi(d)) = c(ad^{(1)}\otimes bd^{(2)}) = cad^{(1)}\otimes bd^{(2)}$.

Entonces $(c(a\otimes b))d = c((a\otimes b)d)$.

ii) Análoga a la demostración del inciso i).

Proposición 21 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $r: A\otimes A\to A\otimes A$, $r^{-1}: A\otimes A\to A\otimes A$, $s: A\otimes A\to A\otimes A$ y $s^{-1}: A\otimes A\to A\otimes A$ las biyecciones de la Proposición 3. Sean $\Phi_L: (A\otimes A)\to A\otimes(A\otimes A)$ y ${}_R\Phi: (A\otimes A)\to(A\otimes A)\otimes A$ los mapeos lineales de la Proposición 15. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $r|_U$ está dado por $r|_U: U\to A\otimes\ker(\varepsilon)$ y es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

ii) $r|_U$ es un isomorfismo de A-bimódulos.

iii) $r|_U: U\to A\otimes\ker(\varepsilon)$ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "r|_U"] \arrow[d, "\Phi_U"'] & A\otimes\ker(\varepsilon) \arrow[d, "\phi\otimes\mathrm{id}"] \\ A\otimes U \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes r|_U"'] & A\otimes A\otimes\ker(\varepsilon) \end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id}\otimes r|_U)\circ\Phi_U)(u) = ((\phi\otimes\mathrm{id})\circ r|_U)(u)\ \forall\ u\in U$.

iv) $s|_U$ está dado por $s|_U: U\to\ker(\varepsilon)\otimes A$ y es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

v) $s|_U$ es un isomorfismo de A-bimódulos.

vi) $s|_U$ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s|_U"] \arrow[d, "{}_U\Phi"'] & \ker(\varepsilon)\otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\phi"] \\ U\otimes A \arrow[r, "s|_U\otimes\mathrm{id}"'] & \ker(\varepsilon)\otimes A\otimes A \end{tikzcd}$$

$((s|_U\otimes\mathrm{id})\circ{}_U\Phi)(u) = ((\mathrm{id}\otimes\phi)\circ s|_U)(u)\ \forall\ u\in U$.

Demostración

i) Primero, notemos que como $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ es un mapeo lineal entonces $\ker(\varepsilon)$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de A.

Luego, notemos que como A es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial entonces $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Ahora, se verificará que $r|_U$ está dado por $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$.

Notemos que por el inciso v) de la Proposición 3, $\mu \circ r^{-1} = \mathrm{id} \otimes \varepsilon$.

Así, sea $u \in U$ se calcula $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(r(u)) = \mu(r^{-1}(r(u))) = \mu(u) = 0$ entonces $r(u) \in A \otimes \ker(\varepsilon)$.

Esto demuestra que $r|_U$ está dado por $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$.

Después, se verificará que $r|_U$ es inyectiva y suprayectiva.

Notemos que $r|_U$ es inyectiva ya que es la restricción de una biyección.

Ahora, sea $a \in A$ y $b \in \ker(\varepsilon)$ se calcula $\mu(r^{-1}(a \otimes b)) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(a \otimes b) = a \otimes \varepsilon(b) = 0$ de donde $r^{-1}(a \otimes b) \in U$.

Esto demuestra que $r|_U$ es inyectiva y suprayectiva.

De esta manera, se ha demostrado que $r|_U$ está dado por $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ y es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

ii) Primero, notemos que por el inciso i) de la Proposición 15, U es un A-subbimódulo de $(A \otimes A)$.

Luego, notemos que por el inciso i) de la Proposición 20, $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un A-bimódulo.

Ahora, se verificará que $r|_U$ es un isomorfismo de A-bimódulos.

Notemos que basta con demostrar que $r|_U$ preserva las estructuras de A-bimódulos.

Sea $a \in A$ y $q \in A \otimes \ker(\varepsilon)$.

Notemos que por el inciso i) y ii) de la Proposición 3, $r|_U((a \otimes 1_A)q) = (a \otimes 1_A)r|_U(q)$ y $r|_U(q(1_A \otimes a)) = r|_U(q)\phi(a)$.

Esto demuestra que $r|_U$ es un isomorfismo de A-bimódulos.

iii) Primero, notemos que al restringir el siguiente diagrama a U se obtiene el diagrama original:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\Phi_R"'] & A \otimes A \arrow[d, "\phi \otimes \mathrm{id}"] \\
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes r"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes r) \circ \Phi_R)(a \otimes b) = ((\phi \otimes \mathrm{id}) \circ r)(a \otimes b) \ \forall \ a, b \in A$.

Así, basta demostrar que dicho diagrama conmuta.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes r)\Phi_R(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes r)(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes r(a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes (a^{(2)} \otimes 1_A)\phi(b^{(2)}) = (a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes 1_A)(b^{(1)} \otimes \phi(b^{(2)})) = (\phi(a) \otimes 1_A)(b^{(1)} \otimes \phi(b^{(2)}))$.

Por otro lado, se calcula $(\phi \otimes \mathrm{id})r(a \otimes b) = (\phi \otimes \mathrm{id})(ab^{(1)} \otimes b^{(2)}) = \phi(a)\phi(b^{(1)}) \otimes b^{(2)} = (\phi(a) \otimes 1_A)(\phi(b^{(1)}) \otimes b^{(2)})$.

Entonces $(\mathrm{id} \otimes r)\Phi_R(a \otimes b) = (\phi \otimes \mathrm{id})r(a \otimes b)$.

De donde $(\mathrm{id} \otimes r|_U)\Phi_U(a \otimes b) = (\phi \otimes \mathrm{id})r|_U(a \otimes b)$.

iv) Análoga a la demostración del inciso i).

v) Análoga a la demostración del inciso ii).

vi) Análoga a la demostración del inciso iii).

Corolario 1 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sean $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$, $r|_U^{-1} : A \otimes \ker(\varepsilon) \to U$, $s|_U : U \to \ker(\varepsilon) \otimes A$ y $s|_U^{-1} : \ker(\varepsilon) \otimes A \to U$ los isomorfismos de A-bimódulos de la Proposición 21. Sean $\Phi_U : U \to A \otimes U$ y ${}_U\Phi : U \to U \otimes A$ los mapeos lineales de la Proposición 15. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $u \in U$ es izquierdo invariante bajo Φ_U si y solo si $u = r|_U^{-1}(1_A \otimes a)$ para algún $a \in \ker(\varepsilon)$.

ii) $u \in U$ es derecho invariante bajo ${}_U\Phi$ si y solo si $u = s|_U^{-1}(a \otimes 1_A)$ para algún $a \in \ker(\varepsilon)$.

Demostración

i) Primero, se verificará la implicación directa.

Así, sea $u \in U$ derecho invariante bajo Φ_U se calcula $\Phi_U(u) = 1_A \otimes u$.

Ahora, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 21, $(\mathrm{id} \otimes r|_U)\Phi_U(u) = (\phi \otimes \mathrm{id})r|_U(u)$.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes r|_U)\Phi_U(u) = (\mathrm{id} \otimes r|_U)(1_A \otimes u) = 1_A \otimes r|_U(u)$.

Por otro lado, se calcula $(\phi \otimes \mathrm{id})r|_U(u)$.

Entonces $(\phi \otimes \mathrm{id})r|_U(u) = 1_A \otimes r|_U(u)$.

Ahora, si $\Gamma = A \otimes \ker(\varepsilon)$ notemos que por la Proposición 18,
${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = \{\alpha \in A \otimes \ker(\varepsilon) \mid \Phi_\Gamma(\alpha) = 1_A \otimes \alpha\} = 1_A \otimes \ker(\varepsilon)$ con $\Phi_\Gamma = (\phi \otimes \mathrm{id})$.

De donde $r|_U(u) \in 1_A \otimes \ker(\varepsilon)$ por lo que $r|_U(u) = 1_A \otimes a$ para algún $a \in \ker(\varepsilon)$.

Así, se calcula $r|_U^{-1}(r|_U(u)) = r|_U^{-1}(1_A \otimes a)$.

Por lo que $u = r|_U^{-1}(1_A \otimes a)$ para algún $a \in \ker(\varepsilon)$.

Luego, se verificará la implicación inversa.

Sea $u = r|_U^{-1}(1_A \otimes a)$ para algún $a \in \ker(\varepsilon)$.

Ahora, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 21, $\Phi_U(r|_U^{-1}(u)) = (\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(\phi \otimes \mathrm{id})(u)$.

Por un lado, se calcula $\Phi_U(u) = \Phi_U(r|_U^{-1}(1_A \otimes a))$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(\phi \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes a)$.

Entonces $\Phi_U(u) = (\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(\phi \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes a)$ de donde $\Phi_U(u) = (\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(1_A \otimes (1_A \otimes a))$ por lo que $\Phi_U(u) = 1_A \otimes r|_U^{-1}(1_A \otimes a)$.

De donde $\Phi_U(u) = 1_A \otimes u$.

ii) Análoga a la demostración del inciso i).

Proposición 22 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U, D) el CDPO universal sobre A. Sea $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ el isomorfismo de A-bimódulos de la Proposición 21. Definimos $U_L = A \otimes \ker(\varepsilon)$ y $D_L = r|_U \circ D : A \to U_L$ dado por $D_L(a) = \phi(a) - (a \otimes 1_A)$. Entonces (U_L, D_L) es un CDPO sobre A llamado CDPO universal izquierdo.

Demostración Primero, se verificará que $D_L : A \to U_L \ \forall \ a \in A$.

Sea $a \in A$ se calcula $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(D_L(a)) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\phi(a)-(a\otimes 1_A)) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(a^{(1)}\otimes a^{(2)})-(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(a\otimes 1_A) = a^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(2)}) - a \otimes 1_A = a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)}) \otimes 1_A - a \otimes 1_A = a \otimes 1_A - a \otimes 1_A = 0$.

Entonces $D_L(a) \in A \otimes \ker(\mu) \ \forall \ a \in A$.

De donde $D_L : A \to U_L \ \forall \ a \in A$.

Luego, se verificará que (U_L, D_L) satisface i) y ii) de la Definición 14.

Notemos que por el inciso i) de la Proposición 20, $A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un A-bimódulo con las operaciones $c(a \otimes b) = ca \otimes b$ y $(a \otimes b)c = (a \otimes b)\phi(c) \ \forall \ a, c \in A$ y $\forall \ b \in \ker(\varepsilon)$.

i) Sean $a, b \in A$ se calcula $D_L(a)b + aD_L(b) = (\phi(a) - (a \otimes 1_A))b + a(\phi(b) - (b \otimes 1_A)) = \phi(a)\phi(b)-(a\otimes 1_A)\phi(b)+a\phi(b)-(ab\otimes 1_A) = \phi(ab)-a\phi(b)+a\phi(b)-(ab\otimes 1_A) = \phi(ab)-(ab\otimes 1_A) = D_L(ab)$.

De donde $D_L(a)b + aD_L(b) = D_L(ab) \ \forall \ a, b \in A$.

ii) Sea $w \in U_L$.

Primero, notemos que como (U, D) es un CDPO sobre A entonces $u = \sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k) \ \forall \ u \in U$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Luego, notemos que $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un isomorfismo de A-bimódulos.

Así, definimos $w = r|_U(u)$ y se calcula $r|_U(u) = r|_U(\sum_{k=1}^{K} a_k D(b_k))$ entonces $r|_U(u) = \sum_{k=1}^{K} a_k r|_U(D(b_k))$ de donde $r|_U(u) = \sum_{k=1}^{K} a_k D_L(b_k)$.

Por lo que $w = \sum_{k=1}^{K} a_k D_L(b_k) \ \forall \ w \in U_L$ con $a_k, b_k \in A$ y $K > 0$.

Proposición 23 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U_L, D_L) el CDPO universal izquierdo sobre A. Sea N un A-subbimódulo de U_L definimos $\Gamma_{L,N} = \frac{U_L}{N}$. Sea $\pi_{L,N} : U_L \to \Gamma_{L,N}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{L,N} = \pi_{L,N} \circ D_L : A \to \Gamma_{L,N}$. Entonces $(\Gamma_{L,N}, d_{L,N})$ es un CDPO sobre A. Más aún, cualquier CDPO sobre A, (Γ, d), es isomorfo a $(\Gamma_{L,N}, d_{L,N})$ para algún A-subbimódulo N de U_L.

Demostración Se sigue de aplicar adecuadamente el isomorfismo de A-bimódulos $r|_U : U \to U_L$ a la Proposición 6.

Proposición 24 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U, D) el CDPO universal sobre A. Sea $s|_U : U \to \ker(\varepsilon) \otimes A$ el isomorfismo de A-bimódulos de la Proposición 21. Definimos $U_R = \ker(\varepsilon) \otimes A$ y $D_R = s|_U \circ D : A \to U_R$ dado por $D_R(a) = \phi(a) - (1_A \otimes a)$. Entonces (U_R, D_R) es un CDPO sobre A llamado CDPO universal derecho.

Demostración Análoga a la demostración de la Proposición 22.

Proposición 25 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U_R, D_R) el CDPO universal derecho sobre A. Sea N un A-subbimódulo de U_R definimos $\Gamma_{R,N} = \frac{U_R}{N}$. Sea $\pi_{R,N} : U_R \to \Gamma_{R,N}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{R,N} = \pi_{R,N} \circ D_R : A \to \Gamma_{R,N}$. Entonces $(\Gamma_{R,N}, d_{R,N})$ es un CDPO sobre A. Más aún, cualquier CDPO sobre A, (Γ, d), es isomorfo a $(\Gamma_{R,N}, d_{R,N})$ para algún A-subbimódulo N de U_R.

Demostración Se sigue de aplicar adecuadamente el isomorfismo de A-bimódulos $s|_U : U \to U_R$ a la Proposición 6.

De esta manera, se tienen tres modelos de CDPO universales. Esto permite utilizar el más conveniente según el contexto en el que se trabaje.

Proposición 26 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U_L, D_L) el CDPO universal izquierdo sobre A. Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho en A. Definimos $N_R = A \otimes R$ y $\Gamma_{L,N_R} = \frac{U_L}{N_R}$. Sea $\pi_{L,N_R} : U_L \to \Gamma_{L,N_R}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{L,N_R} = \pi_{L,N_R} \circ D_L : A \to \Gamma_{L,N_R}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) N_R es un A-subbimódulo de U_L.

ii) $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

iii) Cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A, (Γ, d), es isomorfo a $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ para algún A-subbimódulo N_R de U_L.

Demostración

i) Sea $a, c \in A$ y $b \in R$.

Primero, notemos que por definición, $A \otimes R \neq \emptyset$.

Ahora, sea $u, v \in A$ entonces $u = \sum_{k \in I} a_{1k} \otimes b_{1k}$ y $v = \sum_{k \in I} a_{2k} \otimes b_{2k}$ con $a_{1k}, a_{2k} \in A$ y $b_{1k}, b_{2k} \in R$.

Así, se calcula $(u+v)c = (\sum_{k \in I} a_{1k} \otimes b_{1k})c + (\sum_{k \in I} a_{2k} \otimes b_{2k})c =$
$\sum_{k \in I}(a_{1k} \otimes b_{1k})\phi(c) + \sum_{k \in I}(a_{2k} \otimes b_{2k})\phi(c) = \sum_{k \in I}(a_{1k}c^{(1)} \otimes b_{1k}c^{(2)}) + \sum_{k \in I}(a_{2k}c^{(1)} \otimes b_{2k}c^{(2)})$.

Notemos que como R es un ideal derecho en A entonces $b_{1k}c^{(2)} \in R$ y $b_{2k}c^{(2)} \in R$.

De donde $(u+v)c \in A \otimes R$.

Luego, se verificará que $A \otimes R$ es cerrado bajo la acción izquierda.

Así, se calcula $c(a \otimes b) = ca \otimes b$.

De donde $c(a \otimes b) \in A \otimes R$.

Después, se verificará que $A \otimes R$ es cerrado bajo la acción derecha.

Así, se calcula $(a \otimes b)c = (a \otimes b)\phi(c) = ac^{(1)} \otimes bc^{(2)}$.

Notemos que como R es un ideal derecho en A entonces $bc^{(2)} \in R$.

De donde $(a \otimes b)c \in A \otimes R$.

Notemos que por el inciso i) de la Proposición 20, las acciones izquierda y derecha son compatibles.

ii) Primero, notemos que si $\Gamma = A \otimes R$ entonces por el inciso i) de la Proposición 18, el mapeo lineal $\Phi_\Gamma : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ dado por $\Phi_\Gamma = (\phi \otimes \mathrm{id})$ es una coacción izquierda de A sobre Γ.

Así, sea $u = \sum_{k \in I} a_k \otimes b_k$ con $a_k \in A$ y $b_k \in R$ se calcula $\Phi_\Gamma(u) = \sum_{k \in I}(\phi \otimes \mathrm{id})(a_k \otimes b_k) = \sum_{k \in I}(\phi(a_k) \otimes b_k) = \sum_{k \in I}(a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b_k)$ de donde $\Phi_\Gamma(u) \in A \otimes A \otimes R$.

Por lo que N_R es invariante bajo Φ_Γ.

Notemos que por el inciso i) de la Proposición 17, $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

iii) Sea (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Primero, notemos que por la Proposición 23, (Γ, d) es isomorfo a $(\Gamma_{L,N}, d_{L,N})$ para algún A-subbimódulo N de U_L.

Ahora, como $N \subset U_L$ entonces $N = A \otimes V$ para algún $V \subset \ker(\varepsilon)$.

Así, notemos que por el inciso i) de la Proposición 18, el mapeo lineal $\Phi_N : N \to A \otimes N$ dado por $\Phi_N = (\phi \otimes \mathrm{id})$ es una coacción izquierda de A sobre N.

Luego, notemos que por el inciso i) de la Proposición 16, $(\Gamma_{L,N}, d_{L,N})$ es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Después, notemos que por el inciso i) de la Proposición 17, $N = A \otimes V$ es invariante bajo $\Phi_N = (\phi \otimes \mathrm{id})$.

Ahora, sea $w \in N$ notemos que por el inciso i) de la Proposición 11, $w = \sum_{k \in I} a_k b_k$ con $a_k \in A$ y $b_k \in {}_{\text{inv}}N$.

Así, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 18, ${}_{\text{inv}}N = \{\alpha \in A \otimes V \mid \Phi_N(\alpha) = 1_A \otimes \alpha\} = 1_A \otimes V$.

Entonces $w = \sum_{k \in I} a_k(1 \otimes c_k)$ con $a_k \in A$ y $c_k \in V$.

Así, definimos $R = \text{generado}(c_k)$ entonces $N = A \otimes R$.

Ahora, notemos que como $\varepsilon(c_k) = 0$ entonces $R \subset \ker(\varepsilon)$.

Ahora, si $a \in A$ y $b \in R$ entonces $(1_A \otimes b) \in A \otimes R$ y se calcula $(1_A \otimes b)a = (1_A \otimes b)\phi(a) = a^{(1)} \otimes ba^{(2)}$ de donde $(1_A \otimes b)a \in A \otimes R$.

Así, se calcula $(\varepsilon \otimes \text{id})((1_A \otimes b)a) = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes ba^{(2)} = 1_A \otimes b\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)} = 1_A \otimes ba$ de donde $1_A \otimes ba \in \mathbb{C} \otimes R$.

Por lo que $ba \in R$.

Notemos que $\Gamma_{L,N_R} = \frac{A \otimes \ker(\varepsilon)}{A \otimes R} = A \otimes (\frac{\ker(\varepsilon)}{R})$ e ${}_{\text{inv}}\Gamma_{L,N_R} = 1_A \otimes (\frac{\ker(\varepsilon)}{R}) = \frac{\ker(\varepsilon)}{R}$.

Proposición 27 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U_R, D_R) el CDPO universal derecho sobre A. Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho en A. Definimos $M_R = R \otimes A$ y $\Gamma_{R,M_R} = \frac{U_R}{M_R}$. Sea $\pi_{R,M_R} : U_R \to \Gamma_{R,M_R}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{R,M_R} = \pi_{R,M_R} \circ D_R : A \to \Gamma_{R,M_R}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) M_R es un A-subbimódulo de U_R.

ii) $(\Gamma_{R,M_R}, d_{R,M_R})$ es un CDPO covariante derecho sobre A.

iii) Cualquier CDPO covariante derecho sobre A, (Γ, d), es isomorfo a $(\Gamma_{R,M_R}, d_{R,M_R})$ para algún A-subbimódulo M de U_R.

Demostración Análoga a la demostración de la Proposición 26.

Notemos que $\Gamma_{R,M_R} = \frac{\ker(\varepsilon) \otimes A}{R \otimes A} = (\frac{\ker(\varepsilon)}{R}) \otimes A$ e $(\Gamma_{R,M_R})_{\text{inv}} = (\frac{\ker(\varepsilon)}{R}) \otimes 1_A = \frac{\ker(\varepsilon)}{R}$.

Proposición 28 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U, D) el CDPO universal. Sean $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ y $s|_U : U \to \ker(\varepsilon) \otimes A$ los isomorfismos de A-bimódulos de la Proposición 21. Sean $\Phi_U : U \to A \otimes U$ y ${}_U\Phi : U \to U \otimes A$ los mapeos lineales de la Proposición 15. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $r|_U(a \otimes b) = (\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})\Phi_U(a \otimes b) \ \forall \ (a \otimes b) \in U$.

ii) $s|_U(a \otimes b) = (\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})_U\Phi(a \otimes b) \ \forall \ (a \otimes b) \in U$.

Demostración

i) Sea $(a \otimes b) \in U$.

Por un lado, se calcula $r|_U(a \otimes b) = ab^{(1)} \otimes b^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})\Phi_U(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(a^{(1)}b^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(2)}) \otimes b^{(2)} = a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)})b^{(1)} \otimes 1_A \otimes b^{(2)} = ab^{(1)} \otimes 1_A \otimes b^{(2)} = ab^{(1)} \otimes b^{(2)}$.

De donde $r|_U(a \otimes b) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})\Phi_U(a \otimes b)\ \forall\ (a \otimes b) \in U$.

ii) Sea $(a \otimes b) \in U$.

Por un lado, se calcula $s|_U(a \otimes b) = b^{(1)} \otimes ab^{(2)}$.

Por otro lado, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})_U\Phi(a \otimes b) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)}) = \varepsilon(a^{(1)}) \otimes b^{(1)} \otimes a^{(2)}b^{(2)} = 1_A \otimes b^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(1)})a^{(2)}b^{(2)} = 1_A \otimes b^{(1)} \otimes ab^{(2)} = b^{(1)} \otimes ab^{(2)}$.

De donde $s|_U(a \otimes b) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})_U\Phi(a \otimes b)\ \forall\ (a \otimes b) \in U$.

Proposición 29 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (U_L, D_L) el CDPO universal izquierdo sobre A. Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho en A. Definimos $M_R = A \otimes R$ y $\Gamma_{L,M_R} = \frac{U_L}{M_R}$. Sea $\pi_{L,M_R} : U_L \to \Gamma_{L,M_R}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{L,M_R} = \pi_{L,M_R} \circ D_L : A \to \Gamma_{L,M_R}$. Entonces $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es bicovariante si y solo si R es invariante bajo la coacción derecha adjunta.

Demostración Primero, se verificará la implicación inversa.

Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ invariante bajo $ad_R : A \to A \otimes A$.

Notemos que por el inciso i) y ii) de la Proposición 26, M_R es un A-subbimódulo de U_L y $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Luego, notemos que por la Proposición 6, $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

Ahora, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 21, $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un isomorfismo de A-bimódulos entonces $N = r|_U^{-1}(M_R)$.

Así, notemos que por el inciso i) de la Proposición 16, (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Después, notemos que por el inciso i) de la Proposición 17, $N = r|_U^{-1}(M_R)$ es invariante bajo Φ_U.

Ahora, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 18, ${}_{\mathrm{inv}}N = \{\alpha \in r|_U^{-1}(A \otimes R) \mid \Phi_N = 1_A \otimes \alpha\} = r|_U^{-1}(1_A \otimes R)$.

Así, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 15, $(U, \Phi_U, {}_U\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

Sea $a \in R$ definimos el mapeo lineal $\Phi_U \otimes \mathrm{id} : U \otimes A \to A \otimes U \otimes A$ y se calcula $(\Phi_U \otimes \mathrm{id})_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = (\mathrm{id} \otimes {}_U\Phi)\Phi_U(r|_U^{-1}(1_A \otimes a))$.

Notemos que por el inciso iii) de la Proposición 21, $\Phi_U(r|_U^{-1}(u)) = (\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(\phi \otimes \mathrm{id})(u)$.

Entonces $(\Phi_U \otimes \mathrm{id})_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = (\mathrm{id} \otimes {}_U\Phi)(\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(\phi \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes a) =$ $(\mathrm{id} \otimes {}_U\Phi)(\mathrm{id} \otimes r|_U^{-1})(1_A \otimes 1_A \otimes a) = (\mathrm{id} \otimes {}_U\Phi)(1_A \otimes r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = 1_A \otimes {}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a))$ de donde ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) \in U \otimes A$.

Por lo que ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a))$ es invariante bajo $\Phi_U \otimes \mathrm{id}$.

Ahora, notemos que $U \otimes A = r|_U^{-1}(A \otimes \ker(\varepsilon)) \otimes A = (r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(A \otimes \ker(\varepsilon) \otimes A)$ entonces ${}_{\mathrm{inv}}(U \otimes A) =$ $(r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes \ker(\varepsilon) \otimes A)$.

Por lo que ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = (r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes q)$ para algún $q \in \ker(\varepsilon) \otimes A$.

Así, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 28, $s|_U(a \otimes b) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})_U\Phi(a \otimes b)$.

Luego, notemos que por el inciso iv) de la Proposición 4, $ad_R(a) = s(r^{-1}(1_A \otimes a))$.

Por un lado, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = s|_U(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = ad_R(a)$.

Ahora, notemos que como $q \in \ker(\varepsilon) \otimes A$ entonces $q = \sum_{i \in I} q_i' \otimes q_i''$ con $q_i' \in \ker(\varepsilon)$ y $q_i'' \in A$.

Luego, notemos que por el inciso vii) de la Proposición 3, $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ r^{-1})(a \otimes b) = \varepsilon(a)b$.

Por otro lado, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes q) = \sum_{i \in I}(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes q_i' \otimes q_i'') =$ $\sum_{i \in I}((\varepsilon \otimes \mathrm{id})r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes q_i' \otimes q_i'') = \sum_{i \in I}(\varepsilon \otimes \mathrm{id})r|_U^{-1}(1_A \otimes q_i') \otimes q_i'' = \sum_{i \in I} \varepsilon(1_A)q_i' \otimes q_i'' = \sum_{i \in I} q_i' \otimes q_i'' = q$.

Entonces $q = ad_R(a)$ de donde ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = (r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes ad_R(a))$.

Ahora, como $ad_R(a) \in R \otimes A$ entonces ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) \in (r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes R \otimes A)$.

Así, se calcula $(r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes R \otimes A) = r|_U^{-1}(1_A \otimes R) \otimes A = {}_{\mathrm{inv}}(A \otimes R) \otimes A = {}_{\mathrm{inv}}N \otimes A$.

De donde ${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) \in {}_{\mathrm{inv}}N \otimes A$ por lo que ${}_U\Phi({}_{\mathrm{inv}}N) \subset {}_{\mathrm{inv}}N \otimes A$.

Luego, notemos que por el inciso i) de la Proposición 11, $\forall\ w \in N$ se tiene que $w = \sum_{k \in I} c_k w_k$ con $c_k \in A$ y $w_k \in {}_{\mathrm{inv}}N$.

De donde ${}_U\Phi(N) \subset N \otimes A$.

Ahora, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 17, (Γ_N, d_N) es un CDPO covariante derecho.

Después, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 16, $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es un CDPO covariante derecho sobre A.

Ahora, se verificará la implicación directa.

Sea $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ un CDPO bicovariante sobre A.

Por un lado, notemos que por el inciso i) y ii) de la Proposición 26, M_R es un A-subbimódulo de U_L y $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es un CDPO covariante izquierdo sobre A.

Luego, notemos que por la Proposición 6, $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es isomorfo a (Γ_N, d_N) para algún A-subbimódulo N de U.

Ahora, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 21, $r|_U : U \to A \otimes \ker(\varepsilon)$ es un isomorfismo de A-bimódulos entonces $N = r|_U^{-1}(M_R)$.

Por otro lado, notemos que por el inciso iii), i) y ii) de la Proposición 27, existe un ideal derecho $S \subset \ker(\varepsilon)$ tal que $(\Gamma_{L,M_R}, d_{L,M_R})$ es isomorfo a $(\Gamma_{R,M_S}, d_{R,M_S})$, $M_S = S \otimes A$ es un A-subbimódulo de U_R y $(\Gamma_{R,M_S}, d_{R,M_S})$ es un CDPO covariante derecho sobre A.

Después, notemos que por la Proposición 6, $(\Gamma_{R,M_S}, d_{R,M_S})$ es isomorfo a (Γ'_N, d'_N) para algún A-subbimódulo N' de U.

Ahora, notemos que por el inciso v) de la Proposición 21, $s|_U : U \to \ker(\varepsilon) \otimes A$ es un isomorfismo de A-bimódulos entonces $N' = s|_U^{-1}(M_S)$.

De donde $N' = N$ por lo que $r|_U^{-1}(M_R) = s|_U^{-1}(M_S)$.

Notemos que por el inciso vii) y viii) de la Proposición 3, $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ r^{-1})(a \otimes b) = \varepsilon(a)b$ y $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ s^{-1})(a \otimes b) = \varepsilon(b)a$.

Por un lado, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})r|_U^{-1}(A \otimes R) = R$.

Por otro lado, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})s|_U^{-1}(S \otimes A) = S$.

Entonces $R = S$ de donde $r|_U^{-1}(A \otimes R) = s|_U^{-1}(R \otimes A)$ por lo que $s|_U(r|_U^{-1}(A \otimes R)) = R \otimes A$.

Ahora, notemos que por el inciso iv) de la Proposición 4, $ad_R(a) = s(r^{-1}(1_A \otimes a))$.

De donde $ad_R(R) = s|_U(r|_U^{-1}(1_A \otimes R))$ por lo que $ad_R(R) \subset R \otimes A$.

Proposición 30 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sea $ad_R : A \to A \otimes A$ la coacción derecha adjunta. Entonces $\ker(\varepsilon)$ un ideal izquierdo y derecho invariante bajo ad_R.

Demostración Primero, notemos que como $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ es un mapeo lineal entonces $\ker(\varepsilon)$ es un ideal izquierdo y derecho.

Ahora, sea $a \in \ker(\varepsilon)$ se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})ad_R(a) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(a^{(2)} \otimes \kappa(a^{(1)})a^{(3)}) = \varepsilon(a^{(2)}) \otimes \kappa(a^{(1)})a^{(3)} = 1_A \otimes \kappa(a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)}))a^{(3)} = 1_A \otimes \kappa(a^{(1)})a^{(2)} = 1_A \otimes \eta(\varepsilon(a)) = 1_A \otimes \varepsilon(a)1_A = 0$.

Entonces $ad_R(a) \in \ker(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$.

Notemos que $\ker(\varepsilon \otimes A) = \ker(\varepsilon) \otimes A$.

Por lo que $ad_R(a) \in \ker(\varepsilon) \otimes A$.

Proposición 31 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sea $ad_R : A \to A \otimes A$ la coacción derecha adjunta y $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho en A invariante bajo ad_R. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "ad_R"'] & 1_A \otimes R \arrow[r, "r|_U^{-1}"] & {}_{\mathrm{inv}}U_L \arrow[d, "{}_U\Phi"] \\
R \otimes A \arrow[r, "\cong"'] & 1_A \otimes R \otimes A \arrow[r, "r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id}"'] & {}_{\mathrm{inv}}U_L \otimes A
\end{tikzcd}$$

${}_U\Phi(r|_U^{-1}(1_A \otimes a)) = (r|_U^{-1} \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes ad_R(a)) \ \forall \ a \in R$.

Definición 24 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho de A. Definimos el epimorfismo canónico $\pi_R : \ker(\varepsilon) \to \frac{\ker(\varepsilon)}{R}$. Llamamos coacción derecha adjunta cociente al mapeo lineal $Ad_R : \frac{\ker(\varepsilon)}{R} \to (\frac{\ker(\varepsilon)}{R}) \otimes A$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
\ker(\varepsilon) \arrow[r, "ad_R"] \arrow[d, "\pi_R"'] & \ker(\varepsilon) \otimes A \arrow[d, "\pi_R \otimes \mathrm{id}"] \\
\frac{\ker(\varepsilon)}{R} \arrow[r, "Ad_R"'] & (\frac{\ker(\varepsilon)}{R}) \otimes A
\end{tikzcd}$$

$(Ad_R \circ \pi_R)(a) = (\pi_R \otimes \mathrm{id})ad_R(a) \ \forall \ a \in A$.

Definición 25 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ el CDPO covariante izquierdo sobre A de la Proposición 26. Definimos $(\Gamma, d) = (\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$. Llamamos al mapeo lineal $\pi : A \to \Gamma$ dado por $\pi(a) = 1_A \otimes [a - \varepsilon(a)1_A]_R$ mapeo de gérmenes cuántico de Γ.

Notemos que $(a - \varepsilon(a)1_A) \in \ker(\varepsilon)$ para todo $a \in A$ entonces π está bien definida. Más aún, $\pi(a) = 1_A \otimes [a]_R$ para todo $a \in \ker(\varepsilon)$.

Proposición 32 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ el CDPO covariante izquierdo sobre A de la Proposición 26. Definimos $(\Gamma, d) = (\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$. Sea $\pi : A \to \Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico de Γ. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\pi(a) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \ \forall \ a \in A$.

ii) $\pi|_{\ker(\varepsilon)} : \ker(\varepsilon) \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ y $\pi : A \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ son suprayectivas.

iii) $\pi(1_A) = 0$.

iv) $\ker(\pi) = R + \mathbb{C}1_A$.

v) $Ad_R(\pi(a)) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a) \ \forall \ a \in A$.

vi) $d(a) = a^{(1)}\pi(a^{(2)}) \ \forall \ a \in A$.

vii) $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) \ \forall \ a \in A$.

viii) $\pi(a) = -d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)} \ \forall \ a \in A$.

ix) $d(\kappa(a)) = -\pi(a^{(1)})\kappa(a^{(2)}) \ \forall \ a \in A$.

Demostración

i) Sea $a \in A$.

Primero, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 18, ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = 1_A \otimes (\frac{\ker(\varepsilon)}{R})$.

Así, se calcula $\pi(a) = 1_A \otimes [a - \varepsilon(a)1_A]_R$ entonces $\pi(a) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$.

Esto demuestra que $\pi(a) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \ \forall \ a \in A$.

ii) Sea $1_A \otimes [b]_R \in 1_A \otimes (\frac{\ker(\varepsilon)}{R})$.

Entonces $b \in \ker(\varepsilon)$ de donde $\varepsilon(b) = 0$.

Por lo que $\pi(b) = 1_A \otimes [b]_R$.

Esto demuestra que $\pi|_{\ker(\varepsilon)} : \ker(\varepsilon) \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ es suprayectiva.

Notemos que como $\pi|_{\ker(\varepsilon)} : \ker(\varepsilon) \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ es una restricción de $\pi : A \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ entonces $\pi : A \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ es suprayectiva.

iii) Sea $a = 1_A$.

Se calcula $\pi(a) = 1_A \otimes [1_A - \varepsilon(1_A)1_A]_R = 1_A \otimes [0]_R = 0$.

Esto demuestra que $\pi(1_A) = 0$.

iv) Primero, se verificará que $R + \mathbb{C}1_A \subset \ker(\varphi)$.

Así, sea $a \in R + \mathbb{C}1_A$ entonces $a = r + \lambda 1_A$ con $r \in R$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ahora, se calcula $\pi(a) = \pi(r + \lambda 1_A) = \pi(r) + \lambda\pi(1_A) = \pi(r) = 1_A \otimes [r]_R = 0$ de donde $a \in \ker(\pi)$.

Por lo que $R + \mathbb{C}1_A \subset \ker(\pi)$.

Luego, se verificará que $\ker(\pi) \subset R + \mathbb{C}1_A$.

Ahora, sea $a \in \ker(\varepsilon)$ entonces $\pi(a) = 0$ de donde $a - \varepsilon(a)1_A \in R$ por lo que $a \in R + \varepsilon(a)1_A$.

Notemos que $R + \varepsilon(a)1_A \subset R + \mathbb{C}1_A$.

Entonces $a \in R + \mathbb{C}1_A$.

Esto demuestra que $\ker(\pi) = R + \mathbb{C}1_A$.

v) Sea $a \in A$.

Notemos que $a = (a - \varepsilon(a)1_A) + \varepsilon(a)1_A$.

Así, se calcula $Ad_R(\pi(a)) = Ad_R(\pi(a - \varepsilon(a)1_A)) + \varepsilon(a)Ad_R(\pi(1_A)) = Ad_R(\pi(a - \varepsilon(a)1_A))$.

Ahora, notemos que $(a - \varepsilon(a)1_A) \in \ker(\varepsilon)$.

Entonces $Ad_R(\pi(a)) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a - \varepsilon(a)1_A) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a) - \varepsilon(a)(\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(1_A) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a) - \varepsilon(a)(\pi \otimes \mathrm{id})(1_A \otimes 1_A) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a) - \varepsilon(a)(\pi(1_A) \otimes 1_A) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a)$.

Esto demuestra que $Ad_R(\pi(a)) = (\pi \otimes \mathrm{id})ad_R(a)\ \forall\ a \in A$.

vi) Sea $a \in A$.

Primero, notemos que $\pi_{L,N_R} : U_L \to \Gamma_{L,N_R}$ es el epimorfismo canónico de A-bimódulos y $d_{L,N_R} = \pi_{L,N_R} \circ D_L : A \to \Gamma_{L,N_R}$.

Así, basta demostrar que (U_L, D_L) satisface $D_L(a) = a^{(1)}\pi_{U_L}(a^{(2)})$ con $\pi_{U_L} : A \to U_L$ el mapeo de gérmenes cuántico de U_L.

Ahora, se calcula $a^{(1)} \otimes \pi_{U_L}(a^{(2)}) = a^{(1)} \otimes (1_A \otimes (a^{(2)} - \varepsilon(a^{(2)})1_A)) =$
$a^{(1)} \otimes (1_A \otimes (a^{(2)} - \varepsilon(a^{(2)})1_A)) = a^{(1)} \otimes ((1_A \otimes a^{(2)}) - (1_A \otimes \varepsilon(a^{(2)})1_A)) =$
$(a^{(1)} \otimes 1_A \otimes a^{(2)}) - (a^{(1)} \otimes 1_A \otimes \varepsilon(a^{(2)})1_A) = (a^{(1)} \otimes a^{(2)}) - (a^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(2)})1_A) =$
$\phi(a) - (a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)}) \otimes 1_A) = \phi(a) - (a \otimes 1_A) = D_L(a)$.

vii) Sea $a \in A$.

Primero, notemos que $d_{L,N_R}(a) = \pi_{L,N_R}(D_L(a)) = \pi_{L,N_R}((a^{(1)} \otimes a^{(2)}) - (a \otimes 1_A)) =$
$(a^{(1)} \otimes [a^{(2)}]_R) - (a \otimes [1_A]_R)$.

Entonces $\kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})((a^{(2)} \otimes [a^{(3)}]_R) - (a^{(2)} \otimes [1_A]_R)) = (\kappa(a^{(1)})a^{(2)} \otimes [a^{(3)}]_R) - (\kappa(a^{(1)})a^{(2)} \otimes [1_A]_R)$.

De donde $\kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = (\varepsilon(a^{(1)})1_A \otimes [a^{(2)}]_R) - (\varepsilon(a)1_A \otimes [1_A]_R) = (1_A \otimes [\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)}]_R) - (1_A \otimes [\varepsilon(A)1_A]_R) = (1_A \otimes [a]_R) - (1_A \otimes [\varepsilon(a)1_A]_R) = 1_A \otimes ([a]_R - [\varepsilon(a)1_A]_R) = 1_A \otimes [a - \varepsilon(a)1_A]_R = \pi(a)$.

Esto demuestra que $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})\ \forall\ a \in A$.

viii) Sea $a \in A$.

Primero, notemos que $\kappa(a^{(1)})a^{(2)} = \varepsilon(a)1_A$ y se calcula $d(\kappa(a^{(1)})a^{(2)}) = d(\varepsilon(a)1_A)$ entonces $d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)} + \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = d(\varepsilon(a))1_A + \varepsilon(a)d(1_A)$.

De donde $d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)} + \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = \varepsilon(a)d(1_A)1_A$ por lo que $d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)} + \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = 0$.

Luego, notemos que por el inciso vii), $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})$.

Entonces $\kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}) = -d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)}$ de donde $\pi(a) = -d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)}$.

Esto demuestra que $\pi(a) = -d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)}\ \forall\ a \in A$.

ix) Sea $a \in A$.

Notemos que por el inciso viii), $\pi(a) = -d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)}$.

Así, se calcula $-\pi(a^{(1)})\kappa(a^{(2)}) = d(\kappa(a^{(1)}))a^{(2)}\kappa(a^{(3)}) = d(\kappa(a^{(1)}))\varepsilon(a^{(2)})1_A = d(\kappa(a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)}))) = d(\kappa(a))$.

Esto demuestra que $d(\kappa(a)) = -\pi(a^{(1)})\kappa(a^{(2)})\ \forall\ a \in A$.

Notemos que si (Γ, d) es cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A entonces por el inciso viii) de la proposición anterior, se define $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})$ como el mapeo de gérmenes cuántico de Γ. Más aún, la proposición anterior se satisface para cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A, (Γ, d).

Definición 26 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ el CDPO covariante izquierdo sobre A de la Proposición 26. Definimos $(\Gamma, d) = (\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$. Llamamos acción derecha de A sobre ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ a $(1_A \otimes [b]_R) \circ a = 1_A \otimes [ba]_R$.

Proposición 33 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$ el CDPO covariante izquierdo sobre A de la Proposición 26. Definimos $(\Gamma, d) = (\Gamma_{L,N_R}, d_{L,N_R})$. Sea $\pi : A \to \Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico de Γ. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b)\ \forall\ a, b \in A$.

ii) $\pi(ab) = \varepsilon(a)\pi(b) + \pi(a) \circ b\ \forall\ a, b \in A$.

Demostración

i) Sean $a, b \in A$.

Se calcula $\pi(a) \circ b = (1_A \otimes [a - \varepsilon(a)1_A]_R) \circ b = 1_A \otimes [(a - \varepsilon(a)1_A)b]_R = 1_A \otimes [ab - \varepsilon(a)b]_R$.

Notemos que $(ab - \varepsilon(a)b) \in \ker(\varepsilon)$.

De donde $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b) \ \forall \ a, b \in A$.

ii) Sean $a, b \in A$.

Notemos que por el inciso i), $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b)$.

Así, se calcula $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b) = \pi(ab) - \varepsilon(a)\pi(b)$.

De donde $\pi(ab) = \varepsilon(a)\pi(b) + \pi(a) \circ b \ \forall \ a, b \in A$.

Notemos que si (Γ, d) es cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A entonces por el inciso i) de la proposición anterior, se define $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b)$ como la acción derecha de A sobre ${}_{\text{inv}}\Gamma$. Más aún, la proposición anterior se satisface para cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A, (Γ, d).

Proposición 34 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Sea $\pi : A \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico de Γ y $\pi(a) \circ b = \pi(ab - \varepsilon(a)b)$ la acción derecha de A sobre ${}_{\text{inv}}\Gamma$. Entonces $\theta \circ a = \kappa(a^{(1)})\theta a^{(2)}$ para todo $a \in A$ y para todo $\theta \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

Demostración Sea $a \in A$ y $\theta \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

Notemos que como $\pi : A \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ es suprayectiva entonces $\theta = \pi(b)$ para alguna $b \in \ker(\varepsilon)$.

Luego, notemos que por el inciso vii) de la Proposición 32, $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})$.

Así, se calcula $\theta \circ a = \pi(b) \circ a = \pi(ba - \varepsilon(b)a) = \pi(ba) = \kappa((ba)^{(1)})d((ba)^{(2)}) = \kappa(b^{(1)}a^{(1)})d(b^{(2)}a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})\kappa(b^{(1)})(d(b^{(2)})a^{(2)} + b^{(2)}d(a^{(2)})) = \kappa(a^{(1)})\kappa(b^{(1)})d(b^{(2)})a^{(2)} + \kappa(a^{(1)})\kappa(b^{(1)})b^{(2)}d(a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})\pi(b)a^{(2)} + \kappa(a^{(1)})\varepsilon(b)d(a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})\pi(b)a^{(2)} = \kappa(a^{(1)})\theta a^{(2)}$.

Esto demuestra que $\theta \circ a = \kappa(a^{(1)})\theta a^{(2)} \ \forall \ a \in A$ y $\forall \ \theta \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

Proposición 35 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Sea $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo proyección izquierdo de la Proposición 10. Definimos $\pi_{\text{inv}} : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ dada por $\pi_{\text{inv}} = \varepsilon \otimes \text{id}$. Entonces $\pi_{\text{inv}} = P$.

Demostración Primero, se verificará que $\pi_{\text{inv}} : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ es una proyección izquierda suprayectiva.

Así, sea $\eta \in {}_{\text{inv}}\Gamma$ se calcula $\pi_{\text{inv}}(1_A \otimes \eta) = (\varepsilon \otimes \text{id})(1_A \otimes \eta) = \varepsilon(1_A) \otimes \eta = 1_A \otimes \eta = \eta$.

Entonces π_{inv} es suprayectiva y actúa como la identidad en ${}_{\text{inv}}\Gamma$.

Esto demuestra que π_{inv} es una proyección izquierda suprayectiva.

Ahora, se verificará que $\pi_{\text{inv}}(bw) = \varepsilon(b)\pi_{\text{inv}}(w)$.

Así, sean $b \in A$ y $w \in \Gamma$ entonces $w = a \otimes \eta$ con $a \in A$ y $\eta \in {}_{\text{inv}}\Gamma$.

Se calcula $\pi_{\text{inv}}(bw) = \pi_{\text{inv}}(b(a \otimes \eta)) = \pi_{\text{inv}}(ba \otimes \eta) = (\varepsilon \otimes \text{id})(ba \otimes \eta) = \varepsilon(ba) \otimes \eta = \varepsilon(b)\varepsilon(a) \otimes \eta = \varepsilon(b)(\varepsilon(a) \otimes \eta) = \varepsilon(b)(\varepsilon \otimes \text{id})(a \otimes \eta) = \varepsilon(b)\pi_{\text{inv}}(w)$.

Ahora, notemos que por la Proposición 10, $P : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ es única.

De donde $\pi_{\text{inv}} = P$.

Corolario 2 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Definimos $\pi_{\text{inv}} : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ dada por $\pi_{\text{inv}} = \varepsilon \otimes \text{id}$. Entonces satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\pi_{\text{inv}}(aw) = \varepsilon(a)\pi_{\text{inv}}(w)\ \forall\ a \in A$ y $\forall\ w \in \Gamma$.

ii) $\pi_{\text{inv}}(w) = \kappa(w^{(-1)})w^{(0)}\ \forall\ w \in \Gamma$.

Proposición 36 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Sea $\pi : A \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico de Γ y $\pi_{\text{inv}} : \Gamma \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo proyección izquierdo de la Proposición 35. Entonces $\pi_{\text{inv}}(d(a)) = \pi(a)$ para todo $a \in A$.

Demostración Sea $a \in A$.

Se calcula $\Phi_\Gamma(d(a)) = (\text{id} \otimes d)\phi(a) = a^{(1)} \otimes d(a^{(2)}) \in A \otimes \Gamma$ entonces $\pi_{\text{inv}}(d(a)) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})$.

Notemos que por el inciso vii) de la Proposición 32, $\pi(a) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})$.

De donde $\pi_{\text{inv}}(d(a)) = \pi(a)\ \forall\ a \in A$.

Notemos que si (Γ, d) es cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A entonces por la proposición anterior se define $\pi(a) = \pi_{\text{inv}}(d(a))$ como el mapeo de gérmenes cuántico de Γ. Más aún, la proposición anterior se satisface para cualquier CDPO covariante izquierdo sobre A, (Γ, d).

4. Álgebras Bicovariantes Graduadas

4.1. Mapeo de Virado

Definición 27 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y Γ un A-bimódulo. Definimos $\otimes_A^0\Gamma = \Gamma^{\otimes 0} = A$ y $\otimes_A^k\Gamma = \Gamma^{\otimes k} = \Gamma \otimes_A \ldots \otimes_A \Gamma$ con $k \geq 1$. Más aún, $\Gamma^{\otimes k}$ es un A-bimódulo con las operaciones $a(w^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^k) = aw^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^k$ y $(w^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^k)a = w^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^k a$ para todo $a \in A$ y para todo $w^i \in \Gamma$ con $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Definición 28 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y Γ un A-bimódulo. Llamamos a $\otimes_A\Gamma = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\otimes_A^k\Gamma)$ álgebra tensorial de Γ. Más aún, $\otimes_A\Gamma$ es una álgebra graduada con el producto $w\eta = (w^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^n)(\eta^1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta^m) = w^1 \otimes_A \ldots \otimes_A w^n \otimes_A \eta^1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta^m$ para todo $w \in \Gamma^{\otimes n}$ y para todo $\eta \in \Gamma^{\otimes m}$.

Proposición 37 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sean $\{w_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_i\}_{i\in I}$ las bases de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales Γ_{inv} y ${}_{\text{inv}}\Gamma$ de la Proposición 14. Sea $\gamma \in \Gamma^{\otimes 2}$. Entonces existen únicos $a_{ij}, b_{ij} \in A$ casi todos cero tales que $\gamma = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j$ y $\gamma = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} b_{ij}\eta_i \otimes_A w_j$.

Demostración Se sigue de que Γ es un A-bimódulo libre con bases $\{w_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_i\}_{i\in I}$.

Definición 29 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sean $\{w_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_i\}_{i\in I}$ las bases de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales Γ_{inv} y ${}_{\text{inv}}\Gamma$ de la Proposición 14. Sea $\gamma = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j$. Llamamos al mapeo lineal $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ dado por $\sigma(\gamma) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\eta_j \otimes_A w_i$ mapeo de virado del 2-álgebra tensorial $\Gamma^{\otimes 2}$.

Definición 30 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Definimos el mapeo lineal $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} : \Gamma^{\otimes n} \to A \otimes \Gamma^{\otimes n}$ dado por $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})$ con $n \geq 2$ donde $\theta_j \in \Gamma$ y $\Phi_\Gamma(\theta_j) = a_j^{(-1)} \otimes \theta_j^{(0)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, $\Phi_{\Gamma^{\otimes 0}} = \phi$ y $\Phi_{\Gamma^{\otimes 1}} = \Phi_\Gamma$.

Definición 31 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Definimos el mapeo lineal ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\otimes n} \otimes A$ dado por ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})$ con $n \geq 2$ donde $\theta_j \in \Gamma$ y ${}_\Gamma\Phi(\theta_j) = \theta_j^{(0)} \otimes a_j^{(1)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, ${}_{\Gamma^{\otimes 0}}\Phi = \phi$ y ${}_{\Gamma^{\otimes 1}}\Phi = {}_\Gamma\Phi$.

Proposición 38 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} : \Gamma^{\otimes n} \to A \otimes \Gamma^{\otimes n}$ con $n \geq 2$ el mapeo lineal de la Definición 30. Entonces $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}$ es una coacción izquierda de A sobre $\Gamma^{\otimes n}$.

Demostración Se verificará que $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}$ satisface la Definición 8.

Sea $(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) \in \Gamma^{\otimes n}$.

Primero, notemos que $(\phi \otimes \mathrm{id})\Phi_\Gamma(\theta_j) = a_j^{(-11)} \otimes a_j^{(-12)} \otimes \theta_j^{(0)} = a_j^{(-1)} \otimes a_j^{(0-1)} \otimes \theta_j^{(00)} = (\mathrm{id} \otimes \Phi_\Gamma)\Phi_\Gamma(\theta_j)$.

Por un lado, se calcula $(\phi \otimes \mathrm{id})\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (\phi \otimes \mathrm{id})((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})) =$
$\phi(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) = (\phi(a_1^{(-1)}) \ldots \phi(a_n^{(-1)})) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$((a_1^{(-11)} \otimes a_1^{(-12)}) \ldots (a_n^{(-11)} \otimes a_n^{(-12)})) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$((a_1^{(-11)} \ldots a_n^{(-11)}) \otimes (a_1^{(-12)} \ldots a_n^{(-12)})) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})$.

Por otro lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) =$
$(\mathrm{id} \otimes \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes \Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes ((a_1^{(0-1)} \ldots a_n^{(0-1)}) \otimes (\theta_1^{(00)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(00)})) =$
$((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (a_1^{(0-1)} \ldots a_n^{(0-1)})) \otimes (\theta_1^{(00)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(00)})$.

Entonces $(\phi \otimes \mathrm{id})\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (\mathrm{id} \otimes \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n)$.

Luego, notemos que $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Phi_\Gamma(\theta_j) = \varepsilon(a_j^{(-1)})\theta_j^{(0)} = \theta_j$.

Así, se calcula $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})) =$
$\varepsilon(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) = (\varepsilon(a_1^{(-1)}) \ldots \varepsilon(a_n^{(-1)})) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$1_A \otimes (\varepsilon(a_1^{(-1)})\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \varepsilon(a_n^{(-1)})\theta_n^{(0)}) = 1_A \otimes (\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = \theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n$.

Proposición 39 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\otimes n} \otimes A$ con $n \geq 2$ el mapeo lineal de la Definición 31. Entonces ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi$ es una coacción derecha de A sobre $\Gamma^{\otimes n}$.

Demostración Análoga a la demostración de la proposición anterior.

Proposición 40 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sean $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} : \Gamma^{\otimes n} \to A \otimes \Gamma^{\otimes n}$ y ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\otimes n} \otimes A$ las coacciones izquierda y derecha de A sobre $\Gamma^{\otimes n}$. Entonces $(\Gamma^{\otimes n}, \Phi_{\Gamma^{\otimes n}}, {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

Demostración Se verificará que $(\Gamma^{\otimes n}, \Phi_{\Gamma^{\otimes n}}, \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})$ satisface la Definición 21.

Sea $(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) \in \Gamma^{\otimes n}$.

Primero, notemos que $(\mathrm{id} \otimes {}_\Gamma\Phi)\Phi_\Gamma(\theta_j) = a_j^{(-1)} \otimes \theta_j^{(00)} \otimes a_j^{(01)} = a_j^{(0-1)} \otimes \theta_j^{(00)} \otimes a_j^{(1)} = (\Phi_\Gamma \otimes \mathrm{id}){}_\Gamma\Phi(\theta_j)$.

Por un lado, se calcula $(\mathrm{id} \otimes {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) =$
$(\mathrm{id} \otimes {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes ((\theta_1^{(00)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(00)}) \otimes (a_1^{(01)} \ldots a_n^{(01)}))$.

Por otro lado, se calcula $(\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \otimes \mathrm{id})_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) =$
$(\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \otimes \mathrm{id})((\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)}) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(0)})) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)}) =$
$((a_1^{(0-1)} \ldots a_n^{(0-1)}) \otimes (\theta_1^{(00)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(00)})) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)}) =$
$(a_1^{(0-1)} \ldots a_n^{(0-1)}) \otimes ((\theta_1^{(00)} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n^{(00)}) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)}))$.

Entonces $(\mathrm{id} \otimes {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \otimes \mathrm{id})_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n)$.

Proposición 41 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el mapeo de virado del 2-álgebra tensorial $\Gamma^{\otimes 2}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) σ es un isomorfismo de A-bimódulos.

ii) $\sigma(w \otimes_A \eta) = \eta \otimes_A w \; \forall \; w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ y $\forall \; \eta \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$.

iii) σ hace que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{\otimes 2} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}"'] & \Gamma^{\otimes 2} \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}"] \\
A \otimes \Gamma^{\otimes 2} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\sigma"'] & A \otimes \Gamma^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes 2}})(a \otimes b) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}} \circ \sigma)(a \otimes b) \; \forall \; a, b \in \Gamma$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{\otimes 2} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "{}_{\Gamma^{\otimes 2}}\Phi"'] & \Gamma^{\otimes 2} \arrow[d, "{}_{\Gamma^{\otimes 2}}\Phi"] \\
\Gamma^{\otimes 2} \otimes A \arrow[r, "\sigma\otimes\mathrm{id}"'] & \Gamma^{\otimes 2} \otimes A
\end{tikzcd}$$

$((\sigma \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes 2}}\Phi)(a \otimes b) = ({}_{\Gamma^{\otimes 2}}\Phi \circ \sigma)(a \otimes b) \; \forall \; a, b \in \Gamma$.

iv) Sea $\sigma_{12} : \Gamma^{\otimes 3} \to \Gamma^{\otimes 3}$ dado por $\sigma_{12} = \sigma \otimes_A \mathrm{id}$ y $\sigma_{23} : \Gamma^{\otimes 3} \to \Gamma^{\otimes 3}$ dado por $\sigma_{23} = \mathrm{id} \otimes_A \sigma$ entonces $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23} = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$.

Esta ecuación es llamada ecuación de Yang-Baxter.

Demostración

i) Primero, notemos que por definición, σ es lineal.

Luego, notemos que por la Proposición 37, σ es biyectiva.

Así, basta demostrar que σ es un homomorfismo de A-bimódulos.

Sea $\alpha \in \Gamma^{\otimes 2}$ entonces $\alpha = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j$ con $a_{ij} \in A$, $w_i \in \{w_i\}_{i\in I}$ y $\eta_j \in \{\eta_i\}_{i\in I}$.

Ahora, se calcula $\sigma(c\alpha) = \sigma(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} ca_{ij} w_i \otimes_A \eta_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} ca_{ij}\sigma(w_i \otimes_A \eta_j) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} ca_{ij}\eta_j \otimes_A w_i = c(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\eta_j \otimes_A w_i) = c\sigma(\alpha)$.

Luego, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 13, $\eta_i b = \sum_{j\in J}(b * g_{ij})\eta_j$.

Después, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 11, $w_i b = \sum_{j\in I}(f_{ij} * b)w_j$.

Así, se calcula $\sigma(\alpha c) = \sigma(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j c) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\sigma(w_i \otimes_A \eta_j c) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\sigma(w_i \otimes_A \sum_{k\in I}(c * f_{jk})\eta_k) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I} a_{ij}\sigma(w_i(c * f_{jk}) \otimes_A \eta_k) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I} a_{ij}\sigma(\sum_{l\in I}(f_{il} * (c * f_{jk}))w_l \otimes_A \eta_k) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}\sigma((f_{il} * (c * f_{jk}))w_l \otimes_A \eta_k) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}\sigma(((f_{il} * c) * f_{jk})w_l \otimes_A \eta_k) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}((f_{il} * c) * f_{jk})\sigma(w_l \otimes_A \eta_k) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}((f_{il} * c) * f_{jk})(\eta_k \otimes_A w_l) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}(((f_{il} * c) * f_{jk})\eta_k \otimes_A w_l) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}((\sum_{k\in I}((f_{il} * c) * f_{jk})\eta_k) \otimes_A w_l) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}(\eta_j(f_{il} * c) \otimes_A w_l) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{l\in I} a_{ij}(\eta_j \otimes_A (f_{il} * c)w_l) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}(\eta_j \otimes_A (\sum_{l\in I}(f_{il} * c)w_l)) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}(\eta_j \otimes_A w_i c) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}(a_{ij}\eta_j \otimes_A w_i)c = (\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\eta_j \otimes_A w_i)c = \sigma(\alpha)c$.

ii) Sean $w \in {}_{\text{inv}}\Gamma$ y $\eta \in \Gamma_{\text{inv}}$.

Primero, notemos que como ${}_{\text{inv}}\Gamma$ y Γ_{inv} son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales con bases $\{w_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_i\}_{i\in I}$ entonces $w = \sum_{i\in I}\alpha_i w_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$ y $\eta = \sum_{j\in I}\beta_j\eta_j$ con $\beta_j \in \mathbb{C}$.

Así, se calcula $\sigma(w \otimes_A \eta) = \sigma((\sum_{i\in I}\alpha_i w_i) \otimes_A (\sum_{j\in I}\beta_j\eta_j)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\alpha_i\beta_j\sigma(w_i \otimes_A \eta_j) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\alpha_i\beta_j(\eta_j \otimes_A w_i) = (\sum_{j\in I}\beta_j\eta_j) \otimes_A (\sum_{i\in I}\alpha_i w_i) = \eta \otimes_A w$.

iii) Sea $\alpha \in \Gamma^{\otimes 2}$.

Solo se verificará que $((\text{id} \otimes \sigma) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes 2}})(a \otimes b) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}} \circ \sigma)(a \otimes b)$.

Notemos que $\Phi_\Gamma(w_i) = 1_A \otimes w_i$ y por el inciso v) de la Proposición 14, $\Phi_\Gamma(\eta_j) = \sum_{i\in I}\kappa(R_{ij}) \otimes \eta_i$.

Por un lado, se calcula $((\text{id} \otimes \sigma) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes 2}})(\alpha) = (\text{id} \otimes \sigma)(\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j)) =$
$(\text{id} \otimes \sigma)(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\phi(a_{ij})\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(w_i \otimes_A \eta_j)) =$
$(\text{id} \otimes \sigma)(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\phi(a_{ij})(\sum_{k\in I}(1_A\kappa(R_{kj})) \otimes (w_i \otimes_A \eta_k))) =$
$(\text{id} \otimes \sigma)(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\phi(a_{ij})(\kappa(R_{kj}) \otimes (w_i \otimes_A \eta_k))) =$
$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\phi(a_{ij})(\kappa(R_{kj}) \otimes \sigma(w_i \otimes_A \eta_k)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\phi(a_{ij})(\kappa(R_{kj}) \otimes (\eta_k \otimes_A w_i))$.

Por otro lado, se calcula $(\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}} \circ \sigma)(\alpha) = \Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(\sigma(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij} w_i \otimes_A \eta_j)) =$
$\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_{ij}\eta_j \otimes_A w_i) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(a_{ij}(\eta_j \otimes_A w_i)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\phi(a_{ij})\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(\eta_j \otimes_A w_i) =$

$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\phi(a_{ij})(\sum_{k\in I}(\kappa(R_{kj})1_A)\otimes(\eta_k\otimes_A w_i)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\phi(a_{ij})(\kappa(R_{kj})\otimes(\eta_k\otimes_A w_i))$.
Entonces $((\mathrm{id}\otimes\sigma)\circ\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}})(\alpha) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}\circ\sigma)(\alpha)$.

iv) Primero, notemos que Γ es un A-bimódulo libre con bases $\{w_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_i\}_{i\in I}$.

Así, basta demostrar que $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23} = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ para elementos de ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma^{\otimes 3}$.

Sean $w_1, w_2 \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$.

Se calcula $\Phi_\Gamma(w_1) = 1_A\otimes w_1$ y $\Phi_\Gamma(w_2) = 1_A\otimes w_2$ entonces $\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}}(w_1\otimes_A w_2) =$ $(1_A 1_A)\otimes(w_1\otimes_A w_2) = 1_A\otimes(w_1\otimes_A w_2)$ de donde $(w_1\otimes_A w_2)\in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma^{\otimes 2}$ por lo que $\sigma(w_1\otimes_A w_2)\in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma^{\otimes 2}$.

Luego, notemos que $\{w_j\otimes_A w_k\}_{j,k\in I}$ es una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma^{\otimes 2}$ de donde $\sigma(w_1\otimes_A w_2) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} c_{jk}(w_j\otimes_A w_k)$ con $c_{jk}\in\mathbb{C}$.

Ahora, si $\eta\in\Gamma_{\mathrm{inv}}$ entonces $w_1\otimes_A w_2\otimes_A \eta\in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma^{\otimes 3}$.

Por un lado, se calcula $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta) = \sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{id}\otimes\sigma)(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta) =$ $\sigma_{23}\sigma_{12}(w_1\otimes_A\eta\otimes_A w_2) = \sigma_{23}(\sigma\otimes\mathrm{id})(w_1\otimes_A\eta\otimes_A w_2) = \sigma_{23}(\eta\otimes_A w_1\otimes_A w_2) =$ $(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\eta\otimes_A w_1\otimes_A w_2) = \eta\otimes_A\sigma(w_1\otimes_A w_2) = \eta\otimes_A(\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A w_k)) =$ $\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(\eta\otimes_A w_j\otimes_A w_k)$.

Por otro lado, se calcula $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta) = \sigma_{12}\sigma_{23}(\sigma\otimes\mathrm{id})(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta) =$ $\sigma_{12}\sigma_{23}(\sigma(w_1\otimes_A w_2)\otimes_A\eta) = \sigma_{12}\sigma_{23}((\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A w_k))\otimes_A\eta) =$ $\sigma_{12}\sigma_{23}(\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A w_k\otimes_A\eta)) = \sigma_{12}(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A w_k\otimes_A\eta)) =$ $\sigma_{12}(\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A\eta\otimes_A w_k)) = (\sigma\otimes\mathrm{id})(\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(w_j\otimes_A\eta\otimes_A w_k)) =$ $\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}c_{jk}(\eta\otimes_A w_j\otimes_A w_k)$.

Entonces $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta) = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(w_1\otimes_A w_2\otimes_A\eta)$.

4.2. Álgebras Bicovariantes Graduadas

Definición 32 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y G una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa unitaria. Sean $\Phi_G : G\to A\otimes G$ y ${}_G\Phi : G\to G\otimes A$ mapeos lineales. Llamamos a la tercia $(G,\Phi_G,{}_G\Phi)$ álgebra bicovariante sobre A si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Φ_G es una coacción izquierda de A sobre G y un homomorfismo de álgebras.

ii) ${}_G\Phi$ es una coacción derecha de A sobre G y un homomorfismo de álgebras.

iii) Φ_G y ${}_G\Phi$ son compatibles. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_G"] \arrow[d, "{}_G\Phi"'] & A\otimes G \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{}_G\Phi"] \\ G\otimes A \arrow[r, "\Phi_G\otimes\mathrm{id}"'] & A\otimes G\otimes A \end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id}\otimes{}_G\Phi)\circ\Phi_G)(g) = ((\Phi_G\otimes\mathrm{id})\circ{}_G\Phi)(g)\ \forall\ g\in G$.

Definición 33 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ una álgebra bicovariante sobre A. Llamamos a la tercia $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ álgebra bicovariante graduada sobre A si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) G es una álgebra graduada.

ii) $\Phi_G(G^k) \subset A \otimes G^k$.

iii) ${}_G\Phi(G^k) \subset G^k \otimes A$.

Definición 34 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ una álgebra bicovariante graduada sobre A. Llamamos a la tercia $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ álgebra bicovariante graduada conexa sobre A si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $G^0 = A$.

ii) $\Phi_{G^k} = \Phi_G|_{G^k} : G^k \to A \otimes G^k$ con $\Phi_{G^0} = \phi$.

iii) ${}_{G^k}\Phi = {}_G\Phi|_{G^k} : G^k \to G^k \otimes A$ con ${}_{G^0}\Phi = \phi$.

Definición 35 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ un A-bimódulo bicovariante. Sea $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ una álgebra bicovariante graduada sobre A. Decimos que $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ está basada en $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $(G, \Phi_G, {}_G\Phi)$ es una álgebra bicovariante graduada conexa sobre A.

ii) $(G^1, \Phi_{G^1}, {}_{G^1}\Phi) = (\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$ como A-bimódulos bicovariantes.

iii) $\text{generado}_{\mathbb{C}}((G^1)^k) = G^k$ con $(G^1)^k = \{g_1 \dots g_k \mid g_i \in G^1 \ \forall\ i \in \{1, \dots, k\}\}$.

5. Cálculo Diferencial de Alto Orden Envolvente Universal

El material de este capítulo está basado en el trabajo del profesor Ðurđević. [Ðurđević, 1996] [Ðurđević, 1997].

Definición 36 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Sea $\otimes_A\Gamma$ el álgebra tensorial de Γ. Definimos $\mathcal{Q} = \text{generado}(Q = \sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i) \mid a_i, b_i \in A \text{ y } \sum_i a_i d(b_i) = 0)$ como el ideal izquierdo y derecho graduado generado por Q en $\otimes_A\Gamma$. Llamamos a $\Gamma^\wedge = \frac{\otimes_A\Gamma}{\mathcal{Q}}$ cálculo diferencial de alto orden (CDAO) envolvente universal de (Γ, d).

Notemos que como $\otimes_A\Gamma$ es una álgebra graduada y $\mathcal{Q}$ es un ideal izquierdo y derecho graduado en $\otimes_A\Gamma$ entonces $\Gamma^\wedge$ es una álgebra graduada. Más aún, $\Gamma^{\wedge 0} = \frac{\otimes_A^0\Gamma}{\mathcal{Q}^0} = \frac{A}{0} = A$, $\Gamma^{\wedge 1} = \frac{\otimes_A^1\Gamma}{\mathcal{Q}^1} = \frac{\Gamma}{0} = \Gamma$ y $d : \Gamma^{\wedge 0} \to \Gamma^{\wedge 1}$.

Proposición 42 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Sea $\Gamma^{\wedge}$ el CDAO envolvente universal de (Γ, d). Entonces existen únicos mapeos lineales $\tilde{d}_n : \Gamma^{\wedge n} \to \Gamma^{\wedge n+1}$ con $n \geq 0$ que satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\tilde{d}_0 = d : A \to \Gamma$.

ii) $\tilde{d}_n \circ \tilde{d}_{n-1} = 0 \ \forall \ n \geq 1$.

iii) $\tilde{d}_{k+l}(\rho\sigma) = \tilde{d}_k(\rho)\sigma + (-1)^k \rho \tilde{d}_l(\sigma) \ \forall \ \rho \in \Gamma^{\wedge k}$ y $\forall \ \sigma \in \Gamma^{\wedge l}$.

Demostración

i) Sea $\tilde{d}_0 : \Gamma^{\wedge 0} \to \Gamma^{\wedge 1}$.

Primero, notemos que $\Gamma^{\wedge 0} = A$ y $\Gamma^{\wedge 1} = \Gamma$ entonces $\tilde{d}_0 : A \to \Gamma$.

Luego, notemos que como (Γ, d) es un CDPO sobre A entonces $d : A \to \Gamma$.

Así, definimos $\tilde{d}_0 = d : A \to \Gamma$.

iii) Primero, se verificará para $k = 0$ y $l = 0$.

Sean $a \in A$ y $b \in A$.

Se calcula $d_{0+0}(ab) = d(ab) = d(a)b + ad(b) = \tilde{d}_0(a)b + (-1)^0 a\tilde{d}_0(b)$.

Ahora, definimos la proyección canónica $[\cdot]_{\mathcal{Q}} : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\wedge n}$ dada por $[t]_{\mathcal{Q}}$.

Sea $\theta \in \Gamma^{\wedge 1}$.

Notemos que como (Γ, d) es un CDPO sobre A entonces $\theta = \sum_i a_i d(b_i)$ con $a_i, b_i \in A$.

Ahora, se define el mapeo lineal $\tilde{d}_1 : \Gamma^{\wedge 1} \to \Gamma^{\wedge 2}$ dado por $\tilde{d}_1(\theta) = [\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}}$ con $\tilde{d}_1(\theta) \in \Gamma^{\wedge 2}$.

Así, se verificará que el mapeo lineal $\tilde{d}_1 : \Gamma^{\wedge 1} \to \Gamma^{\wedge 2}$ está bien definido.

Sea $0 = \sum_i a_i d(b_i)$ con $a_i, b_i \in A$.

Se calcula $\tilde{d}_1(0) = [\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}}$.

Ahora, notemos que por definición, $\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i) \in \mathcal{Q}$.

Entonces $\tilde{d}_1(0) = 0$ en $\Gamma^{\wedge 2}$.

Después, se verificará para $k = 0$ y $l = 1$.

Notemos que como la proyección canónica $[\cdot]_{\mathcal{Q}}$ es un homomorfismo de álgebras graduadas entonces $[t \otimes_A u]_{\mathcal{Q}} = [t]_{\mathcal{Q}}[u]_{\mathcal{Q}}$.

Así, se calcula $d_{0+1}(a\theta) = \tilde{d}_1(a \sum_i a_i d(b_i)) = [\sum_i d(aa_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} =$
$[\sum_i (d(a)a_i + ad(a_i)) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} = [\sum_i d(a)a_i \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} + [\sum_i ad(a_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} =$
$[d(a) \otimes_A \sum_i a_i d(b_i)]_{\mathcal{Q}} + a[\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} = [d(a)]_{\mathcal{Q}}[\theta]_{\mathcal{Q}} + a\tilde{d}_1(\theta) =$
$[\tilde{d}_0(a)]_{\mathcal{Q}}[\theta]_{\mathcal{Q}} + (-1)^0 [a]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_1(\theta)]_{\mathcal{Q}}$.

Luego, se verificará para $k = 1$ y $l = 0$.

Ahora, se calcula $d_{1+0}(\theta a) = \tilde{d}_1(\sum_i a_i d(b_i)a) = \tilde{d}_1(\sum_i a_i(d(b_i a) - b_i d(a))) =$
$\tilde{d}_1(\sum_i a_i d(b_i a)) - \tilde{d}_1(\sum_i a_i b_i d(a)) = [\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i a)]_{\mathcal{Q}} - [\sum_i d(a_i b_i) \otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} =$
$[\sum_i d(a_i) \otimes_A (d(b_i)a + b_i d(a))]_{\mathcal{Q}} - [\sum_i (d(a_i)b_i + a_i d(b_i)) \otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} =$
$[\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)a]_{\mathcal{Q}} + [\sum_i d(a_i) \otimes_A b_i d(a)]_{\mathcal{Q}} - [\sum_i d(a_i)b_i \otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} - [\sum_i a_i d(b_i) \otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} =$
$[\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} a - [\sum_i a_i d(b_i) \otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} = \tilde{d}_1(\theta)a - [\theta]_{\mathcal{Q}}[d(a)]_{\mathcal{Q}} =$
$[\tilde{d}_1(\theta)]_{\mathcal{Q}}[a]_{\mathcal{Q}} + (-1)^1[\theta]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_0(a)]_{\mathcal{Q}}$.

Sea $t = \theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_j \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Así, se define el mapeo lineal $d_n : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\wedge n+1}$ dado por
$d_n(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}$ con $d_n(t) \in \Gamma^{\wedge n+1}$.

Sea $u = \eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_k \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m$ con $k \in \{1, \ldots, m\}$ donde $u \in \Gamma^{\otimes m}$.

Después, se verificará para $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

Ahora, se calcula $d_{n+m}(t \otimes_A u) = d_{n+m}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_j \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n \otimes_A \eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_k \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m) =$
$\sum_{j=1}^{n+m}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots \tilde{d}_1(\theta_j) \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots \tilde{d}_1(\theta_j) \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$\sum_{j=n+1}^{n+m}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots \tilde{d}_1(\eta_{j-n}) \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} =$
$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots \tilde{d}_1(\theta_j) \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+n-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots \tilde{d}_1(\eta_k) \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} =$
$(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}})[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^n[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}(\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_{k-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\eta_k)[\eta_{k+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}}) = d_n(t)[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^n[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}} d_m(u) = d_n(t)[\eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n]_{\mathcal{Q}} d_m(u) =$
$[d_n(t)]_{\mathcal{Q}}[u]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[t]_{\mathcal{Q}}[d_m(u)]_{\mathcal{Q}}$.

Luego, se verificará para $n = 0$ y $m \geq 1$.

Así, se calcula $d_{0+m}(au) = d_m(a\eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_k \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m) = \tilde{d}_1(a\eta_1)[\eta_2]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k-1}[a\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_{k-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\eta_k)[\eta_{k+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} = (\tilde{d}_0(a)\eta_1 + a\tilde{d}_1(\eta_1))[\eta_2]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k-1}[a\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_{k-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\eta_k)[\eta_{k+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} = \tilde{d}_0(a)[\eta_1]_{\mathcal{Q}}[\eta_2]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} +$
$a\tilde{d}_1(\eta_1)[\eta_2]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} + \sum_{k=2}^{m}(-1)^{k-1}[a\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_{k-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\eta_k)[\eta_{k+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} =$
$\tilde{d}_0(a)[\eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m]_{\mathcal{Q}} + a\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}[\eta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_{k-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\eta_k)[\eta_{k+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\eta_m]_{\mathcal{Q}} = \tilde{d}_0(a)[u]_{\mathcal{Q}} +$
$ad_m(u) = [\tilde{d}_0(a)]_{\mathcal{Q}}[u]_{\mathcal{Q}} + (-1)^0[a]_{\mathcal{Q}}[d_m(u)]_{\mathcal{Q}}$.

Después, se verificará para $n \geq 1$ y $m = 0$.

Así, se calcula $d_{n+0}(ta) = d_n(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_j \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n a) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n a]_{\mathcal{Q}} + (-1)^{n-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_n a) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n a]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^{n-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}(\tilde{d}_1(\theta_n)a - \theta_n \tilde{d}_0(a)) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n a]_{\mathcal{Q}} + (-1)^{n-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_n)a +$
$(-1)^n[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}[\theta_n]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_0(a) = (\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \ldots [\theta_n]_{\mathcal{Q}})a +$
$(-1)^n[\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_0(a) = d_n(t)a + (-1)^n[t]_{\mathcal{Q}} \tilde{d}_0(a) = [d_n(t)]_{\mathcal{Q}}[a]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[t]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_0(a)]_{\mathcal{Q}}$.

Esto demuestra que los mapeos $d_n : \Gamma^{\otimes n} \to \Gamma^{\wedge n+1}$ satisfacen la regla de Leibniz.

Luego, se verificará que $\mathcal{Q} \subset \ker(d_n)$.

Sean $Q = \sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i) \in \mathcal{Q}$ y $\rho \in \Gamma^{\otimes n}$.

Por un lado, se calcula $d_{2+n}(Q\otimes_A\rho) = d_{2+n}((\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i))\otimes_A\rho) = d_2(\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i))[\rho]_{\mathcal{Q}} + (-1)^2[\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} d_n(\rho) = (\sum_i d_{1+1}(\tilde{d}_0(a_i)\otimes_A \tilde{d}_0(b_i)))[\rho]_{\mathcal{Q}} + [\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} d(\rho) = (\sum_i(\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(a_i))d(b_i) + (-1)^1 d(a_i)\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(b_i))))[\rho]_{\mathcal{Q}} + [\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} d(\rho) = 0.$

Por otro lado, se calcula $d_{n+2}(\rho\otimes_A Q) = d_{n+2}(\rho\otimes_A (\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i))) = d_n(\rho)[\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[\rho]_{\mathcal{Q}} d_2(\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)) = d_n(\rho)[\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[\rho]_{\mathcal{Q}}(\sum_i d_{1+1}(\tilde{d}_0(a_i)\otimes_A \tilde{d}_0(b_i))) = d_n(\rho)[\sum_i d(a_i)\otimes_A d(b_i)]_{\mathcal{Q}} + (-1)^n[\rho]_{\mathcal{Q}}(\sum_i(\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(a_i))d(b_i) + (-1)^1 d(a_i)\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(b_i)))) = 0.$

Entonces $Q\otimes_A\rho\in\ker(d)$ y $\rho\otimes_A Q\in\ker(d)$ de donde $\mathcal{Q}\subset\ker(d)$.

Ahora, notemos que por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal $\tilde{d}_n : \Gamma^{\wedge n}\to\Gamma^{\wedge n+1}$ tal que $\tilde{d}_n\circ[\cdot]_{\mathcal{Q}} = d_n$.

Finalmente, notemos que $\tilde{d}_n$ satisface la regla de Leibniz.

ii) Primero, se verificará para $n = 1$.

Sea $a\in A$.

Se calcula $\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(a)) = \tilde{d}_1(1_A d(a)) = [d(1_A)\otimes_A d(a)]_{\mathcal{Q}} = 0$.

Sea $t = \theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_j\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}$ con $t\in\Gamma^{\otimes n-1}$.

Luego, se verificará para $n\geq 2$.

Así, se calcula $\tilde{d}_n(\tilde{d}_{n-1}(t)) = \tilde{d}_n(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}) =$
$\tilde{d}_n(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A(\sum_i\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij}))\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}\tilde{d}_n([\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}d_n(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}d_{j+(n-j)}(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}(d_j(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij}))[\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^j[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})]_{\mathcal{Q}} d_{n-j}(\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1})) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}(d_{(j-1)+1}([\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})])[\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^j[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})]_{\mathcal{Q}} d_{1+(n-j-1)}([\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}})) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}((d_{j-1}(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1})\tilde{d}_0(a_{ij}) +$
$(-1)^{j-1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(a_{ij})))[\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^j[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})]_{\mathcal{Q}}(\tilde{d}_1(\tilde{d}_0(b_{ij}))[\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^1\tilde{d}_0(b_{ij})d_{n-j-1}(\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}))) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}(d_{j-1}(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1})\tilde{d}_0(a_{ij})[\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^{j+1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A d_0(a_{ij})]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_0(b_{ij})d_{n-j-1}(\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1})) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}(d_{j-1}(\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1})[\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$
$(-1)^{j+1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A d_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})]_{\mathcal{Q}} d_{n-j-1}(\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1})) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i(-1)^{j-1}(\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}$
$[\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} + (-1)^{j+1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})]_{\mathcal{Q}}$
$\sum_{l=j+1}^{n-1}(-1)^{l-j-1}[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_l)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}) =$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k-2}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})\otimes_A\theta_{j+1}\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}} +$

$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i\sum_{l=j+1}^{n-1}(-1)^{j+l-1}[\theta_1\otimes_A\ldots\otimes_A\theta_{j-1}\otimes_A\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})]_{\mathcal{Q}}[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_l)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}=$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j+k}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})]_{\mathcal{Q}}[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}-$
$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i\sum_{l=j+1}^{n-1}(-1)^{j+l}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}[\tilde{d}_0(a_{ij})\otimes_A\tilde{d}_0(b_{ij})]_{\mathcal{Q}}[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_l)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}=$
$\sum_{1\leq k<j\leq n-1}(-1)^{j+k}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}-$
$\sum_{1\leq j<l\leq n-1}(-1)^{j+l}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots[\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_l)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}=$
$\sum_{1\leq k<j\leq n-1}(-1)^{k+j}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots\tilde{d}_1(\theta_j)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}-$
$\sum_{1\leq k<j\leq n-1}(-1)^{k+j}[\theta_1]_{\mathcal{Q}}\ldots\tilde{d}_1(\theta_k)\ldots\tilde{d}_1(\theta_j)\ldots[\theta_{n-1}]_{\mathcal{Q}}=0.$

Esto demuestra que $\tilde{d}_n\circ\tilde{d}_{n-1}=0\ \forall\ n\geq 1$.

Notemos que los incisos i), ii) y iii) de la proposición anterior definen de manera única los mapeos $\tilde{d}_n$.

Proposición 43 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ,d) un CDPO sobre A. Sea $\Gamma^\wedge$ el CDAO envolvente universal de (Γ,d). Sea (Ω,d_Ω) una álgebra diferencial. Sean $\varphi^0:\Gamma^{\wedge 0}\to\Omega$ un homomorfismo de álgebras y $\varphi^1:\Gamma^{\wedge 1}\to\Omega$ un mapeo lineal tales que $\varphi^1(ad(b))=\varphi^0(a)d_\Omega(\varphi^0(b))$ con $a,b\in A$. Entonces existen únicos mapeos lineales $\varphi^n:\Gamma^{\wedge n}\to\Omega$ con $n\geq 2$ tales que $\varphi=\bigoplus_{n=0}^\infty\varphi^n:\bigoplus_{n=0}^\infty\Gamma^{\wedge n}\to\Omega$ es un homomorfismo de álgebras diferenciales.

Demostración Sea $a\in A$ y $w\in\Gamma$.

Notemos que Ω es un A-módulo izquierdo con la operación $aw=\varphi^0(a)w$.

Primero, se verificará que φ^0 y φ^1 satisfacen $\varphi^1(a\rho)=\varphi^0(a)\varphi^1(\rho)$ y $\varphi^1(d(a))=d_\Omega(\varphi^0(a))\ \forall\ a\in A$ y $\forall\ \rho\in\Gamma$ si y solo si $\varphi^1(ad(b))=\varphi^0(a)d_\Omega(\varphi^0(b))\ \forall\ a,b\in A$.

Ahora, se verificará la implicación directa.

Así, se calcula $\varphi^1(ad(b))=\varphi^0(a)\varphi^1(d(b))=\varphi^0(a)d_\Omega(\varphi^0(b))$.

Esto demuestra que $\varphi^1(ad(b))=\varphi^0(a)d_\Omega(\varphi^0(b))\ \forall\ a,b\in A$.

Luego, se verificará la implicación inversa.

Ahora, se calcula $\varphi^1(d(b))=\varphi^1(1_Ad(b))=\varphi^0(1_A)d_\Omega(\varphi^0(b))=1_\Omega d_\Omega(\varphi^0(b))=d_\Omega(\varphi^0(b))$.

Notemos que $\varphi^0(1_A)=1_\Omega$.

Esto demuestra que $\varphi^1(d(a))=d_\Omega(\varphi^0(a))\ \forall\ a\in A$.

Notemos que $bd(c)$ con $b,c\in A$ generan a Γ.

Así, se calcula $\varphi^1(abd(c))=\varphi^0(ab)d_\Omega(\varphi^0(c))=\varphi^0(a)\varphi^0(b)d_\Omega(\varphi^0(c))=\varphi^0(a)\varphi^1(bd(c))$.

Esto demuestra que $\varphi^1(a\rho) = \varphi^0(a)\varphi^1(\rho)$ $\forall$ $a \in A$ y $\forall$ $\rho \in \Gamma$.

Sea $a \in \Gamma^{\wedge 0}$.

Ahora, se define $\varphi^{\otimes 0} : \Gamma^{\wedge 0} \to \Omega$ dada por $\varphi^{\otimes 0}(a) = \varphi^0(a)$.

Sea $\theta \in \Gamma^{\wedge 1}$.

Luego, se define $\varphi^{\otimes 1} : \Gamma^{\wedge 1} \to \Omega$ dada por $\varphi^{\otimes 1}(\theta) = \varphi^1(\theta)$.

Sea $t = \theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_j \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Después, se define $\varphi^{\otimes n} : \Gamma^{\otimes n} \to \Omega$ dada por $\varphi^{\otimes n}(t) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \ldots \varphi^{\otimes 1}(\theta_n)$ con $n \geq 2$.

Así, se define $\varphi^{\otimes} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \varphi^{\otimes n} : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\otimes n} \to \Omega$.

Sea $u = \eta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_k \otimes_A \ldots \otimes_A \eta_m$ con $k \in \{1, \ldots, m\}$ donde $u \in \Gamma^{\otimes m}$.

Ahora, se verificará que $\varphi^{\otimes}$ preserva la suma.

Así, se calcula $\varphi^{\otimes}(t + u) = \varphi^{\otimes n}(t) + \varphi^{\otimes m}(u) = \varphi^{\otimes}(t) + \varphi^{\otimes}(u)$.

Esto demuestra que $\varphi^{\otimes}$ preserva la suma.

Luego, se verificará que $\varphi^{\otimes}$ preserva la multiplicación por escalar.

Ahora, sea $c \in \mathbb{C}$ se calcula $\varphi^{\otimes}(ct) = \varphi^{\otimes n}(ct) = \varphi^{\otimes 1}(c\theta_1) \ldots \varphi^{\otimes 1}(\theta_n) = c(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \ldots \varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) = c\varphi^{\otimes n}(t) = c\varphi^{\otimes}(t)$.

Esto demuestra que $\varphi^{\otimes}$ preserva la multiplicación por escalar.

Después, se verificará que $\varphi^{\otimes}$ preserva el producto de álgebra.

Ahora, se verificará para $n = 0$ y $m = 0$.

Así, se calcula $\varphi^{\otimes}(a)\varphi^{\otimes}(b) = \varphi^{\otimes 0}(a)\varphi^{\otimes 0}(b) = \varphi^0(a)\varphi^0(b) = \varphi^0(ab)$.

Luego, se verificará para $n \geq 2$ y $m \geq 2$.

Ahora, se calcula $\varphi^{\otimes}(t)\varphi^{\otimes}(u) = \varphi^{\otimes n}(t)\varphi^{\otimes m}(u) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \ldots \varphi^{\otimes 1}(\theta_n)\varphi^{\otimes 1}(\eta_1) \ldots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) = \varphi^{\otimes n+m}(t \otimes_A u) = \varphi^{\otimes}(t \otimes_A u)$.

Después, se verificará para $n = 0$ y $m \geq 2$.

Así, se calcula $\varphi^{\otimes}(au) = \varphi^{\otimes 1}(a\eta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) = \varphi^{\otimes 1}(abd(c))\varphi^{\otimes 1}(\eta_2) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) =$
$\varphi^{\otimes 0}(ab)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(c))\varphi^{\otimes 1}(\eta_2) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) = \varphi^{\otimes 0}(a)\varphi^{\otimes 0}(b)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(c))\varphi^{\otimes 1}(\eta_2) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) =$
$\varphi^{\otimes 0}(a)\varphi^{\otimes 1}(bd(c))\varphi^{\otimes 1}(\eta_2) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) = \varphi^{\otimes 0}(a)\varphi^{\otimes 1}(\eta_1)\varphi^{\otimes 1}(\eta_2) \dots \varphi^{\otimes 1}(\eta_m) = \varphi^{\otimes 0}(a)\varphi^{\otimes m}(u) =$
$\varphi^{\otimes}(a)\varphi^{\otimes}(u)$.

Luego, se verificará para $n \geq 2$ y $m = 0$.

Ahora, se calcula $\varphi^{\otimes}(ta) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_n a) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 1}(bd(c)a) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 1}(bd(ca) - bcd(a)) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})(\varphi^{\otimes 1}(bd(ca)) - \varphi^{\otimes 1}(bcd(a))) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})(\varphi^{\otimes 0}(b)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(ca)) - \varphi^{\otimes 0}(bc)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a))) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})(\varphi^{\otimes 0}(b)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(c)\varphi^{\otimes 0}(a)) - \varphi^{\otimes 0}(b)\varphi^{\otimes 0}(c)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a))) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 0}(b)(d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(c))\varphi^{\otimes 0}(a) + \varphi^{\otimes 0}(c)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a)) - \varphi^{\otimes 0}(c)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a))) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 0}(b)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(c))\varphi^{\otimes 0}(a) = \varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 1}(bd(c))\varphi^{\otimes 0}(a) =$
$\varphi^{\otimes 1}(\theta_1) \dots \varphi^{\otimes 1}(\theta_{n-1})\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)\varphi^{\otimes 0}(a) = \varphi^{\otimes n}(t)\varphi^{\otimes 0}(a) = \varphi^{\otimes}(t)\varphi^{\otimes}(a)$.

Esto demuestra que $\varphi^{\otimes}$ preserva el producto de álgebra.

De esta manera, se ha demostrado que $\varphi^{\otimes}$ es un homomorfismo de álgebras.

Ahora, se verificará que $\mathcal{Q} \subset \ker(\varphi^{\otimes})$.

Sea $Q = \sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i) \in \mathcal{Q}$ con $\sum_i a_i d(b_i) = 0$.

Se calcula $\varphi^{\otimes}(Q) = \sum_i \varphi^{\otimes 2}(d(a_i) \otimes_A d(b_i)) = \sum_i \varphi^{\otimes 1}(d(a_i))\varphi^{\otimes 1}(d(b_i)) =$
$\sum_i \varphi^{\otimes 1}(1_A d(a_i))\varphi^{\otimes 1}(1_A d(b_i)) = \sum_i \varphi^{\otimes 0}(1_A)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a_i))\varphi^{\otimes 0}(1_A)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_i)) =$
$\sum_i d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a_i))d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_i)) = \sum_i d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a_i)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_i))) = d_\Omega(\sum_i \varphi^{\otimes 0}(a_i)d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_i))) =$
$d_\Omega(\sum_i \varphi^{\otimes 1}(a_i d(b_i))) = d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(\sum_i a_i d(b_i))) = 0$.

Entonces $Q \in \ker(\varphi^{\otimes})$ de donde $\mathcal{Q} \subset \ker(\varphi^{\otimes})$.

Ahora, notemos que por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal
$\varphi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \varphi^n : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\wedge n} \to \Omega$ tal que $\varphi \circ [\cdot]_{\mathcal{Q}} = \varphi^{\otimes}$.

Luego, notemos que φ es un homomorfismo de álgebras.

Después, se verificará que $(\varphi^{n+1} \circ \tilde{d}_n)([t]_{\mathcal{Q}}) = (d_\Omega \circ \varphi^n)([t]_{\mathcal{Q}})$ con $n \geq 2$.

Por un lado, se calcula $(\varphi^{n+1} \circ \tilde{d}_n)([t]_{\mathcal{Q}}) = \varphi^{n+1}(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}[\theta_1]_{\mathcal{Q}} \dots [\theta_{j-1}]_{\mathcal{Q}}\tilde{d}_1(\theta_j)[\theta_{j+1}]_{\mathcal{Q}} \dots [\theta_n]_{\mathcal{Q}}) =$
$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\varphi^{n+1}([\theta_1 \otimes_A \dots \otimes_A \theta_{j-1} \otimes_A (\sum_i \tilde{d}_0(a_{ij}) \otimes_A \tilde{d}_0(b_{ij})) \otimes \theta_{j+1} \otimes_A \dots \otimes_A \theta_n]_{\mathcal{Q}}) =$

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}\varphi^{\otimes n+1}(\theta_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_{j-1} \otimes_A \tilde{d}_0(a_{ij}) \otimes_A \tilde{d}_0(b_{ij}) \otimes \theta_{j+1} \otimes_A \ldots \otimes_A \theta_n) =$
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})\varphi^{\otimes 1}(\tilde{d}_0(a_{ij}))\varphi^{\otimes 1}(\tilde{d}_0(b_{ij}))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) =$
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a_{ij}))d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_{ij}))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) =$
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(a_{ij})d_\Omega(\varphi^{\otimes 0}(b_{ij})))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) =$
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(a_{ij}\tilde{d}_0(b_{ij})))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)).$

Por otro lado, se calcula $(d_\Omega \circ \varphi^n)([t]_{\mathcal{Q}}) = d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_j)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) =$
$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(\theta_j))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n) =$
$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(\sum_i a_{ij}\tilde{d}_0(b_{ij})))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)) =$
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i}(-1)^{j-1}(\varphi^{\otimes 1}(\theta_1)\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j-1})d_\Omega(\varphi^{\otimes 1}(a_{ij}\tilde{d}_0(b_{ij})))\varphi^{\otimes 1}(\theta_{j+1})\ldots\varphi^{\otimes 1}(\theta_n)).$

Entonces $(\varphi^{n+1} \circ \tilde{d}_n)([t]_{\mathcal{Q}}) = (d_\Omega \circ \varphi^n)([t]_{\mathcal{Q}})\ \forall\ n \geq 2.$

De esta manera, se ha demostrado que φ es un homomorfismo de álgebras diferenciales.

Finalmente, notemos que por construcción los mapeos φ^n son únicos.

Proposición 44 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO covariante izquierdo sobre A. Sea $\pi : A \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico de Γ. Entonces $d(\pi(a)) = -\pi(a^{(1)})\pi(a^{(2)})$ para todo $a \in A$.

Demostración Sea $a \in A$.

Se calcula $\pi(a^{(1)})\pi(a^{(2)}) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})\kappa(a^{(3)})d(a^{(4)}) = \kappa(a^{(1)})(d(a^{(2)}\kappa(a^{(3)})) -$
$a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)})))d(a^{(4)}) = \kappa(a^{(1)})d(a^{(2)}\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) - \kappa(a^{(1)})a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) =$
$\kappa(a^{(1)})d(\eta(\varepsilon(a^{(2)})))d(a^{(3)}) - \kappa(a^{(1)})a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) = \kappa(a^{(1)})d(\varepsilon(a^{(2)})1_A)d(a^{(3)}) -$
$\kappa(a^{(1)})a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) = \kappa(a^{(1)})\varepsilon(a^{(2)})d(1_A)d(a^{(3)}) - \kappa(a^{(1)})a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) =$
$-\kappa(a^{(1)})a^{(2)}d(\kappa(a^{(3)}))d(a^{(4)}) = -\eta(\varepsilon(a^{(1)}))d(\kappa(a^{(2)}))d(a^{(3)}) = -\varepsilon(a^{(1)})d(\kappa(a^{(2)}))d(a^{(3)}) =$
$-d(\varepsilon(a^{(1)})\kappa(a^{(2)}))d(a^{(3)}) = -d(\kappa(\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)}))d(a^{(3)}) = -d(\kappa(a^{(1)}))d(a^{(2)}) = -d(\kappa(a^{(1)})d(a^{(2)})) =$
$-d(\pi(a)).$

Esto demuestra que $d(\pi(a)) = -\pi(a^{(1)})\pi(a^{(2)})\ \forall\ a \in A.$

6. Cálculo Diferencial de Alto Orden Trenzado

6.1. Álgebra Exterior Trenzada

A continuación se presentarán definiciones y proposiciones relacionadas con grupos trenzados. Estos juegan un papel fundamental en la construcción del CDAO trenzado. Debido a que el objetivo del presente trabajo no es ampliar la teoría de grupos trenzados, algunas proposiciones se presentan sin demostración. Estas se pueden consultar en la bibliografía indicada.

Definición 37 Sea $\{1,\ldots,k\}$ un conjunto con $k \geq 0$. Llamamos a $S_k = \{\tau : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\} \mid \tau \text{ es biyectiva}\}$ grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$. Más aún, $S_0 = \{e\}$ y $S_1 = \{e\}$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Hungerford, 1974] [Moore, 1897].

Proposición 45 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$ con $k \geq 0$. Definimos $\tau_j \in S_k$ dada por $\tau_j = (j, j+1)$ que intercambia el elemento $j \in \{1,\ldots,k\}$ por el elemento $j+1 \in \{1,\ldots,k\}$ con $1 \leq j < k$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i \ \forall\ |i-j| > 2$.

ii) $\tau_i\tau_j\tau_i = \tau_j\tau_i\tau_j \ \forall\ |i-j| = 1$.

iii) $\tau_i^2 = e \ \forall\ i \in \{1,\ldots,k-1\}$.

iv) S_k es isomorfo al grupo generado por el conjunto de k-1 símbolos $\tau_1,\ldots,\tau_{k-1}$.

v) S_k es un grupo finito con $k!$ elementos.

vi) S_k es un grupo no abeliano $\forall\ k \geq 3$.

vii) $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ es un grupo cíclico, finito y abeliano.

viii) S_k es generado por $k-1$ elementos.

Definición 38 Sean $\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1}$ k-1 símbolos tales que $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ para todo $|i-j| > 2$ y $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$ para todo $|i-j| = 1$. Llamamos a B_k con $k \geq 2$ grupo trenzado si es generado por $\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1}$. Más aún, $B_0 = \{e\}$ y $B_1 = \{e\}$.

Las demostraciones de las siguientes tres proposiciones se pueden encontrar en [Kassel y Turaev, 2008].

Proposición 46 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Existe un único epimorfismo de grupos $p_k : B_k \to S_k$ dado por $p_k(\sigma_i) = \tau_i \ \forall \ i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

ii) B_k es un grupo infinito y no abeliano $\forall \ k \geq 3$.

iii) $B_2 \cong \mathbb{Z}$ es un grupo cíclico, infinito y abeliano.

iv) B_k es generado por $k-1$ elementos.

Proposición 47 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el mapeo de virado del 2-álgebra tensorial $\Gamma^{\otimes 2}$. Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Entonces la asignación $\sigma_1 \to \sigma$ induce un homomorfismo de grupos $\phi_2 : B_2 \to \mathrm{GL}(\Gamma^{\otimes 2})$ llamado representación de B_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$. Además, $\phi_2 = \psi_2 \circ p_2$ si y solo si $\ker(p_2) \subset \ker(\phi_2)$ con $\psi_2 : S_2 \to \mathrm{GL}(\Gamma^{\otimes 2})$ una representación de S_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$. Más aún, $\mathrm{Ran}(\phi_2) \subset R$ donde $R \subset \mathrm{GL}(\Gamma^{\otimes 2})$ es el subgrupo de homomorfismos de A-bimódulos que conmutan con las coacciones izquierda y derecha de A sobre $\Gamma^{\otimes 2}$.

Definición 39 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ con $k \geq 0$. Llamamos número de inversiones de pares inducido por $\tau \in S_k$ a $I(\tau) = \mathrm{card}\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq k \text{ y } \tau(j) < \tau(i)\}$.

Proposición 48 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ con $k \geq 0$. Sea $\tau \in S_k$ e $I(\tau) = m$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Existen índices $s_1, \ldots, s_m \in \{1, \ldots, k-1\}$ tales que $\tau = \tau_{s_1} \ldots \tau_{s_m}$.

ii) Los índices son únicos si y solo si $k \in \{1, 2\}$.

iii) $\tau = e$ si y solo si $I(\tau) = 0$.

Proposición 49 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Definimos el mapeo $\pi_k : S_k \to B_k$ dado por $\pi_k(\tau) = \sigma_{s_1} \ldots \sigma_{s_m}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Si $I(\tau) = 1$ entonces $\pi_k(\tau^2) = e$.

ii) Si $I(\tau) = 1$ entonces $\pi_k^2(\tau) \neq e$.

iii) Si $\alpha, \beta \in S_k$ satisfacen $I(\alpha\beta) = I(\alpha) + I(\beta)$ entonces $\pi_k(\alpha\beta) = \pi_k(\alpha)\pi_k(\beta)$.

Demostración

i) Sea $I(\tau) = 1$.

Primero, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 48, existe un único índice s_1 tal que $\tau = \tau_{s_1}$.

Así, se calcula $\pi_k(\tau^2) = \pi(e)$.

Notemos que por el inciso iii) de la Proposición 48, $I(\tau^2) = 0$ entonces $\{s_1, \ldots, s_m\} = \emptyset$.

De donde $\pi_k(\tau^2) = e$.

ii) Sea $I(\tau) = 1$.

Primero, notemos que por el inciso ii) de la Proposición 48, existe un único índice s_1 tal que $\tau = \tau_{s_1}$ de donde $\pi_k(\tau) = \sigma_{s_1}$.

Ahora, se calcula $\pi_k^2(\tau) = \sigma_{s_1}^2$.

Notemos que los generadores del grupo trenzado tienen orden infinito.

Entonces $\pi_k^2(\tau) \neq e$.

iii) Sea $I(\alpha) = m$ y $I(\beta) = n$.

Notemos que por el inciso i) de la Proposición 48, $\alpha = \tau_{t_1} \ldots \tau_{t_m}$ y $\beta = \tau_{s_1} \ldots \tau_{s_n}$ entonces $\alpha\beta = \tau_{t_1} \ldots \tau_{t_m} \tau_{s_1} \ldots \tau_{s_n}$.

Así, se calcula $I(\alpha\beta) = I(\alpha) + I(\beta) = m + n$.

De donde $\pi_k(\alpha\beta) = \sigma_{t_1} \ldots \sigma_{t_m} \sigma_{s_1} \ldots \sigma_{s_n} = \pi_k(\alpha)\pi_k(\beta)$.

Notemos que la definición de $\pi_k(\tau) = \sigma_{s_1} \ldots \sigma_{s_m}$ no depende de la factorización $\tau = \tau_{s_1} \ldots \tau_{s_m}$. Además, $\pi_k : S_k \to B_k$ es inyectiva y $p_k \circ \pi_k = \mathrm{id}$. Más aún, $\pi_k(\tau^2) \neq \pi_k^2(\tau)$ por lo que π_k no es un homomorfismo de grupos.

Definición 40 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Llamamos operador de antitrenzado al mapeo lineal $A_k : \Gamma^{\otimes k} \to \Gamma^{\otimes k}$ dado por $A_k = \sum_{\alpha \in S_k} \mathrm{sign}(\alpha)\phi_k(\pi_k(\alpha))$ donde $\mathrm{sign} : S_k \to \{1, -1\}$ está dado por $\mathrm{sign}(\alpha) = (-1)^{I(\alpha)}$. Más aún, $A_0 = \mathrm{id}_A$ y $A_1 = \mathrm{id}_\Gamma$.

Definición 41 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ con $k \geq 0$. Llamamos a $SH_{k,h} = \{\tau \in S_k \mid \tau(i) < \tau(j)$ siempre que $1 \leq i < j \leq h$ o $h < i < j \leq k$ con $0 \leq h \leq k\}$ conjunto de todos los h-barajeos en S_k.

Notemos que si $\tau \in S_k$ con $\tau \neq e$ es un h-barajeo entonces h es único. Además, $\mathrm{card}\{SH_{k,h}\} = \binom{k}{h} = \frac{k!}{h!(k-h)!}$ y $SH_{k,h}$ no es un subgrupo de S_k. Más aún, $SH_{k,0} = \{e\}$ y $SH_{k,k} = \{e\}$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Sontz, 2015].

Proposición 50 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$ y $SH_{k,h}$ el conjunto de todos los h-barajeos en S_k con $k \geq 0$. Sea $\tau \in S_k$. Entonces para todo $0 \leq h \leq k$ existen únicos $\alpha, \beta \in S_k$ y un único $\nu \in SH_{k,h}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\tau = \nu\alpha\beta$.

ii) α deja fijo $\{h+1,\ldots,k\}$. Es decir, $\alpha \in S_h \times \{e\} \cong S_h$.

iii) β deja fijo $\{1,\ldots,h\}$. Es decir, $\beta \in \{e\} \times S_{k-h} \cong S_{k-h}$.

Corolario 3 Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$ y $SH_{k,h}$ el conjunto de todos los h-barajeos en S_k con $k \geq 0$. Sea $\tau \in S_k$ y $0 \leq h \leq k$. Sean $\alpha, \beta \in S_k$ y $\nu \in SH_{k,h}$ de la Proposición 50. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $I(\tau) = I(\nu) + I(\alpha) + I(\beta)$.

ii) $\pi_k(\tau) = \pi_k(\nu)\pi_k(\alpha)\pi_k(\beta)$.

Definición 42 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Llamamos operador de antitrenzado h-barajeo al mapeo lineal $A_{k,h} : \Gamma^{\otimes k} \to \Gamma^{\otimes k}$ dado por $A_{k,h} = \sum_{\alpha \in SH_{k,h}} \mathrm{sign}(\alpha)\phi_k(\pi_k(\alpha))$. Más aún, $A_{k,0} = \mathrm{id}_{\Gamma^{\otimes k}}$ y $A_{k,k} = \mathrm{id}_{\Gamma^{\otimes k}}$.

Proposición 51 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea S_k el grupo de todas las permutaciones de $\{1,\ldots,k\}$ y B_k el grupo trenzado con $k \geq 0$. Sea A_k el operador de antitrenzado y $A_{k,h}$ el operador de antitrenzado h-barajeo. Entonces $A_k = A_{k,h}(A_h \otimes_A A_{k-h})$ para todo $0 \leq h \leq k$.

Demostración Primero, notemos que A_k mapea linealmente $\Gamma^{\otimes k}$ a $\Gamma^{\otimes k}$.

Luego, notemos que $\Gamma^{\otimes h} \otimes_A \Gamma^{\otimes k-h} \cong \Gamma^{\otimes k}$ entonces $A_h \otimes_A A_{k-h}$ mapea linealmente $\Gamma^{\otimes k}$ a $\Gamma^{\otimes k}$.

Entonces $A_{k,h}(A_h \otimes_A A_{k-h})$ mapea linealmente $\Gamma^{\otimes k}$ a $\Gamma^{\otimes k}$.

Sea $0 \leq h \leq k$.

Así, se calcula $A_h \otimes_A A_{k-h} = \sum_{\alpha \in S_h} \mathrm{sign}_h(\alpha)\phi_h(\pi_h(\alpha)) \otimes_A \sum_{\beta \in S_{k-h}} \mathrm{sign}_{k-h}(\beta)\phi_{k-h}(\pi_{k-h}(\beta)) =$
$\sum_{\alpha \in S_h} \sum_{\beta \in S_{k-h}} \mathrm{sign}_h(\alpha)\mathrm{sign}_{k-h}(\beta)(\phi_h(\pi_h(\alpha)) \otimes_A \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes_A \phi_{k-h}(\pi_{k-h}(\beta))) =$
$\sum_{\alpha \in S_h} \sum_{\beta \in S_{k-h}} \mathrm{sign}_k(\alpha \times e)\mathrm{sign}_k(e \times \beta)\phi_k(\pi_k(\alpha \times e))\phi_k(\pi_k(e \times \beta)) =$
$\sum_{\alpha \in S_h \times e} \sum_{\beta \in e \times S_{k-h}} \mathrm{sign}_k(\alpha)\mathrm{sign}_k(\beta)\phi_k(\pi_k(\alpha))\phi_k(\pi_k(\beta)) = \sum_{\alpha \in S_h \times e} \sum_{\beta \in e \times S_{k-h}} \mathrm{sign}_k(\alpha\beta)\phi_k(\pi_k(\alpha\beta))$.

Ahora, se calcula $A_{k,h}(A_h \otimes_A A_{k-h}) =$
$\sum_{\nu \in SH_{k,h}} \mathrm{sign}_k(\nu)\phi_k(\pi_k(\nu)) \sum_{\alpha \in S_h \times e} \sum_{\beta \in e \times S_{k-h}} \mathrm{sign}_k(\alpha\beta)\phi_k(\pi_k(\alpha\beta)) =$
$\sum_{\nu \in SH_{k,h}} \sum_{\alpha \in S_h \times e} \sum_{\beta \in e \times S_{k-h}} \mathrm{sign}_k(\nu\alpha\beta)\phi_k(\pi_k(\nu\alpha\beta)) = \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sign}_k(\tau)\phi_k(\pi_k(\tau)) = A_k$.

Esto demuestra que $A_k = A_{k,h}(A_h \otimes_A A_{k-h})\ \forall\ 0 \leq h \leq k$.

Notemos que $A_{n+m} = A_{n+m,n}(A_n \otimes_A A_m) = A_{n+m,m}(A_m \otimes_A A_n)$.

Proposición 52 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea A_k el operador de antitrenzado con $k \geq 0$. Definimos $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \ker(A_n)$. Entonces K es un ideal izquierdo y derecho graduado en $\otimes_A \Gamma$.

Demostración Primero, se verificará que K_n es subespacio vectorial de $\Gamma^{\otimes n}$ con $n \geq 0$.

Notemos que como A_n es un mapeo lineal entonces $\ker(A_n)$ es subespacio vectorial de $\Gamma^{\otimes n}$.

De donde K es subespacio vectorial graduado de $\otimes_A \Gamma$.

Luego, se verificará que K_n es cerrado bajo la multiplicación izquierda.

Sea $w \in K_n$ y $\eta \in \Gamma^{\otimes m}$.

Notemos que por la Proposición 51, $A_{n+m} = A_{n+m,m}(A_m \otimes_A A_n)$.

Así, se calcula $A_{n+m}(\eta \otimes_A w) = A_{n+m,m}(A_m \otimes_A A_n)(\eta \otimes_A w) = A_{n+m,m}(A_m(\eta) \otimes_A A_n(w)) = A_{n+m,m}(A_m(\eta) \otimes_A 0) = 0$.

Después, se verificará que K_n es cerrado bajo la multiplicación derecha.

Notemos que por la Proposición 51, $A_{n+m} = A_{n+m,n}(A_n \otimes_A A_m)$.

Ahora, se calcula $A_{n+m}(w \otimes_A \eta) = A_{n+m,n}(A_n \otimes_A A_m)(w \otimes_A \eta) = A_{n+m,n}(A_n(w) \otimes_A A_m(\eta)) = A_{n+m,n}(0 \otimes_A A_m(\eta)) = 0$.

Esto demuestra que K es un ideal izquierdo y derecho graduado en $\otimes_A \Gamma$.

Notemos que $K_0 = \ker(A_0) = \ker(\mathrm{id}_A) = 0$ y $K_1 = \ker(A_1) = \ker(\mathrm{id}_\Gamma) = 0$.

Definición 43 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\otimes_A \Gamma$ el álgebra tensorial de Γ. Sea K el ideal izquierdo y derecho graduado en $\otimes_A \Gamma$. Llamamos a $\wedge \Gamma = \frac{\otimes_A \Gamma}{K}$ álgebra exterior trenzada de Γ.

Notemos que por el Primer Teorema de Isomorfismos de A-bimódulos $\wedge^k \Gamma \cong \mathrm{Ran}(A_k)$. Más aún, $\wedge^0 \Gamma = \frac{\Gamma^{\otimes 0}}{\ker(A_0)} = \frac{A}{\ker(\mathrm{id}_A)} = \frac{A}{0} = A$ y $\wedge^1 \Gamma = \frac{\Gamma^{\otimes 1}}{\ker(A_1)} = \frac{\Gamma}{\ker(\mathrm{id}_\Gamma)} = \frac{\Gamma}{0} = \Gamma$.

Proposición 53 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\wedge\Gamma$ el álgebra exterior trenzada de Γ. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\wedge\Gamma$ es una álgebra graduada con el producto cuña trenzado $\wedge : \wedge^k\Gamma \times \wedge^l\Gamma \to \wedge^{k+l}\Gamma$ dado por $w_1 \wedge w_2 = [t_1 \otimes_A t_2]_K$ con $w_1 = [t_1]_K$ y $w_2 = [t_2]_K$ donde $t_1 \in \Gamma^{\otimes k}$ y $t_2 \in \Gamma^{\otimes l}$.

ii) $\wedge\Gamma$ es generada por $\wedge^1\Gamma$. Es decir, si $w \in \wedge^k\Gamma$ entonces $w = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$ con $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \wedge^1\Gamma$.

iii) $w_1 \wedge w_2 = A_{k+l,k}(w_1 \otimes_A w_2)$ $\forall$ $w_1 \in \wedge^k\Gamma$ y $\forall$ $w_2 \in \wedge^l\Gamma$.

Demostración

i) Se sigue de la definición del producto cuña trenzado.

ii) Se sigue de que $\otimes_A\Gamma$ es generada por $\Gamma^{\otimes 1}$.

iii) Sean $w_1 \in \wedge^k\Gamma$ y $w_2 \in \wedge^l\Gamma$.

Entonces $w_1 = A_k\eta_1$ con $\eta_1 \in \Gamma^{\otimes k}$ y $w_2 = A_l\eta_2$ con $\eta_2 \in \Gamma^{\otimes l}$.

Así, se calcula $w_1 \wedge w_2 = \eta_1 \otimes_A \eta_2 + \ker(A_{k+l})$ con $w_1 \wedge w_2 \in \wedge^{k+l}\Gamma$.

De donde $w_1 \wedge w_2 = A_{k+l}(\eta_1 \otimes_A \eta_2) = A_{k+l,k}(A_k \otimes_A A_l)(\eta_1 \otimes_A \eta_2) = A_{k+l,k}(A_k\eta_1 \otimes_A A_l\eta_2) = A_{k+l,k}(w_1 \otimes_A w_2)$.

Proposición 54 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea A_k el operador de antitrenzado con $k \geq 0$. Sea $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}$ la coacción izquierda de A sobre $\Gamma^{\otimes n}$ de la Proposición 38. Entonces A_n hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{\otimes n} \arrow[r, "A_n"] \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}"'] & \Gamma^{\otimes n} \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}"] \\
A \otimes \Gamma^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes A_n"'] & A \otimes \Gamma^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes A_n) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(t) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \circ A_n)(t)$ $\forall$ $t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Demostración Primero, notemos que basta verificar que A_n hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{\otimes n} \arrow[r, "\phi_n(\sigma_j)"] \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}"'] & \Gamma^{\otimes n} \arrow[d, "\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}"] \\
A \otimes \Gamma^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\phi_n(\sigma_j)"'] & A \otimes \Gamma^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

$((\mathrm{id} \otimes \phi_n(\sigma_j)) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(t) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \circ \phi_n(\sigma_j))(t)\ \forall\ t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Sea $t = \theta_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_j \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Notemos que por el inciso iii) de la Proposición 41, $((\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes 2}})(a \otimes b) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes 2}} \circ \sigma)(a \otimes b)$ $\forall\ a, b \in \Gamma$.

Por un lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \phi_n(\sigma_j)) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(t) =$
$(\mathrm{id} \otimes \phi_n(\sigma_j))\left((a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n^{(0)})\right) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes \phi_n(\sigma_j)(\theta_1^{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n^{(0)}) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A \sigma(\theta_j^{(0)} \otimes \theta_{j+1}^{(0)}) \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n^{(0)})$.

Por otro lado, se calcula $(\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \circ \phi_n(\sigma_j))(t) = \Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\theta_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \sigma(\theta_j \otimes_A \theta_{j+1}) \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_{j-1}^{(-1)} a_j^{(-1)} a_{j+1}^{(-1)} a_{j+2}^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A \sigma(\theta_j^{(0)} \otimes_A \theta_{j+1}^{(0)}) \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n^{(0)}) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A \sigma(\theta_j^{(0)} \otimes_A \theta_{j+1}^{(0)}) \otimes_A \cdots \otimes_A \theta_n^{(0)})$.

Entonces $((\mathrm{id} \otimes \phi_n(\sigma_j)) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(t) = (\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \circ \phi_n(\sigma_j))(t)$.

Proposición 55 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea A_k el operador de antitrenzado con $k \geq 0$. Sea ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi$ la coacción derecha de A sobre $\Gamma^{\otimes n}$ de la Proposición 39. Entonces A_n hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{\otimes n} \arrow[r, "A_n"] \arrow[d, "{}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi"'] & \Gamma^{\otimes n} \arrow[d, "{}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi"] \\
\Gamma^{\otimes n} \otimes A \arrow[r, "A_n \otimes \mathrm{id}"'] & \Gamma^{\otimes n} \otimes A
\end{tikzcd}$$

$((A_n \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)(t) = ({}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi \circ A_n)(t)\ \forall\ t \in \Gamma^{\otimes n}$.

Demostración Análoga a la demostración de la proposición anterior.

Definición 44 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Definimos el mapeo lineal $\Phi_{\wedge^n\Gamma} : \wedge^n\Gamma \to A \otimes \wedge^n\Gamma$ dado por $\Phi_{\wedge^n\Gamma}(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_n^{(0)})$ con $n \geq 2$ donde $\theta_j \in \Gamma$ y $\Phi_\Gamma(\theta_j) = a_j^{(-1)} \otimes \theta_j^{(0)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, $\Phi_{\wedge^0} = \phi$ y $\Phi_{\wedge^1} = \Phi_\Gamma$.

Notemos que por la Proposición 54 si $\alpha \in \ker(A_n)$. Por un lado, se calcula $A_n(\alpha) = 0$ entonces $(\Phi_{\Gamma^{\otimes n}} \circ A_n)(\alpha) = 0$. Por otro lado, se calcula $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\alpha) = (a_1^{(-1)} \ldots a_n^{(-1)}) \otimes (\alpha_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_n^{(0)})$ de donde $((\mathrm{id} \otimes A_n) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(\alpha) = 0$. Por lo que $\Phi_{\Gamma^{\otimes n}}(\alpha) \in \ker(\mathrm{id} \otimes A_n) = A \otimes \ker(A_n)$ si y solo si $((\mathrm{id} \otimes [\cdot]_K) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})(\alpha) = 0$ entonces $\alpha \in \ker((\mathrm{id} \otimes [\cdot]_K) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})$ de donde $\ker(A_n) \subset \ker((\mathrm{id} \otimes [\cdot]_K) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}})$. Así, por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal $\Phi_{\wedge^n\Gamma} : \wedge^n\Gamma \to A \otimes \wedge^n\Gamma$ tal que $\Phi_{\wedge^n\Gamma} \circ [\cdot]_K = (\mathrm{id} \otimes [\cdot]_K) \circ \Phi_{\Gamma^{\otimes n}}$. Además, $\Phi_{\wedge^n\Gamma}$ es una coacción izquierda de A sobre $\wedge^n\Gamma$.

Definición 45 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Definimos el mapeo lineal ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi : \wedge^n\Gamma \to \wedge^n\Gamma \otimes A$ dado por ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) = (\theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_n^{(0)}) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})$ con $n \geq 2$ donde $\theta_j \in \Gamma$ y ${}_{\Gamma}\Phi(\theta_j) = \theta_j^{(0)} \otimes a_j^{(1)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, ${}_{\wedge^0}\Phi = \phi$ y ${}_{\wedge^1}\Phi = {}_{\Gamma}\Phi$.

Notemos que por la Proposición 55 si $\alpha \in \ker(A_n)$. Por un lado, se calcula $A_n(\alpha) = 0$ entonces $({}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi \circ A_n)(\alpha) = 0$. Por otro lado, se calcula ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\alpha) = (\alpha_1^{(0)} \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_n^{(0)}) \otimes (a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})$ de donde $((A_n \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)(\alpha) = 0$. Por lo que ${}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi(\alpha) \in \ker(A_n \otimes \mathrm{id}) = \ker(A_n) \otimes A$ si y solo si $(([\cdot]_K \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)(\alpha) = 0$ entonces $\alpha \in \ker(([\cdot]_K \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)$ de donde $\ker(A_n) \subset \ker(([\cdot]_K \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi)$. Así, por la propiedad universal del cociente existe un único mapeo lineal ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi : \wedge^n\Gamma \to \wedge^n\Gamma \otimes A$ tal que ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi \circ [\cdot]_K = ([\cdot]_K \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\Gamma^{\otimes n}}\Phi$. Además, ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi$ es una coacción derecha de A sobre $\wedge^n\Gamma$.

Corolario 4 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sean $\Phi_{\wedge^n\Gamma}$ y ${}_{\wedge^n\Gamma}\Phi$ las coacciones izquierda y derecha de A sobre $\wedge^n\Gamma$. Definimos los mapeos lineales $\Phi_{\wedge\Gamma} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Phi_{\wedge^n\Gamma}$ y ${}_{\wedge\Gamma}\Phi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} {}_{\wedge^n\Gamma}\Phi$. Entonces $(\wedge\Gamma, \Phi_{\wedge\Gamma}, {}_{\wedge\Gamma}\Phi)$ es una álgebra bicovariante graduada sobre A basada en $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$. Llamamos a $(\wedge\Gamma, \Phi_{\wedge\Gamma}, {}_{\wedge\Gamma}\Phi)$ álgebra bicovariante graduada trenzada.

6.2. Cálculo Diferencial de Alto Orden Trenzado

Proposición 56 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $(\wedge\Gamma, \Phi_{\wedge\Gamma}, {}_{\wedge\Gamma}\Phi)$ el álgebra bicovariante graduada trenzada. Entonces existe un único mapeo lineal $\tilde{d} : \wedge\Gamma \to \wedge\Gamma$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\tilde{d}_k : \wedge^k\Gamma \to \wedge^{k+1}\Gamma \;\forall\; k \geq 0$.

ii) $\tilde{d}_0 = d : A \to \Gamma$.

iii) $\tilde{d}_{k+l}(w_1 \wedge w_2) = \tilde{d}_k(w_1) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge \tilde{d}_l(w_2) \;\forall\; w_1 \in \wedge^k\Gamma$ y $\forall\; w_2 \in \wedge^l\Gamma$.

iv) $\tilde{d}_k \circ \tilde{d}_{k-1} = 0 \;\forall\; k \geq 1$.

v) $(\Phi_{\wedge\Gamma} \circ \tilde{d}_k)(\theta) = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{d}_k) \circ \Phi_{\wedge\Gamma})(\theta)$ y $({}_{\wedge\Gamma}\Phi \circ \tilde{d}_k)(\theta) = ((\tilde{d}_k \otimes \mathrm{id}) \circ {}_{\wedge\Gamma}\Phi)(\theta) \;\forall\; \theta \in \wedge^k\Gamma$.

Llamamos a $\wedge\Gamma$ con la diferencial $\tilde{d}$ de la proposición anterior CDAO trenzado.

Demostración Primero, notemos que como A y Γ son A-módulos izquierdos entonces $\Gamma' = A \oplus \Gamma$ es un A-módulo izquierdo.

Así, definimos $X = (1_A, 0)$ con $X \in \Gamma'$.

Entonces $w' = cX + w = (c, w) \;\forall\; w' \in \Gamma'$ con $c \in A$ y $w \in \Gamma$ únicos.

Ahora, definimos la acción izquierda de A sobre Γ' $aw' = a(cX + w) = acX + aw = a(c, w) = (ac, aw)$ con $a \in A$.

Luego, definimos el mapeo inclusión $i : \Gamma \to \Gamma'$ dado por $i(w) = (0, w)$.

Después, definimos la operación $w'b = (cX + w)b = cbX + cd(b) + wb = (c, w)b = (cb, cd(b) + wb)$ con $b \in A$.

Ahora, se verificará que $w'b$ es una acción derecha de A sobre Γ'.

Así, se calcula $(c, w)1_A = (c1_A, cd(1_A) + w1_A) = (c, w)$.

Luego, se calcula $((c, w)b_1)b_2 = (cb_1, cd(b_1) + wb_1)b_2 = ((cb_1)b_2, (cb_1)d(b_2) + (cd(b_1) + wb_1)b_2) = (c(b_1b_2), c(b_1d(b_2)) + (cd(b_1))b_2 + (wb_1)b_2) = (c(b_1b_2), c(b_1d(b_2)) + c(d(b_1)b_2) + w(b_1b_2)) = (c(b_1b_2), cd(b_1b_2) + w(b_1b_2)) = (c, w)(b_1b_2)$.

Después, se calcula $((c_1, w_1)+(c_2, w_2))b = (c_1+c_2, w_1+w_2)b = ((c_1+c_2)b, (c_1+c_2)d(b)+(w_1+w_2)b) = (c_1b + c_2b, c_1d(b) + c_2d(b) + w_1b + w_2b) = (c_1b + c_2b, c_1d(b) + w_1b + c_2d(b) + w_2b) = (c_1b, c_1d(b) + w_1b) + (c_2b, c_2d(b) + w_2b) = (c_1, w_1)b + (c_2, w_2)b$.

Ahora, se calcula $(c, w)(a + b) = (c(a + b), cd(a + b) + w(a + b)) = (ca + cb, cd(a) + cd(b) + wa + wb) = (ca + cb, cd(a) + wa + cd(b) + wb) = (ca, cd(a) + wa) + (cb, cd(b) + wb) = (c, w)a + (c, w)b$.

Luego, se verificará que las acciones izquierda y derecha de A sobre Γ' son compatibles.

Así, se calcula $a(w'b) = a(cb, cd(b) + wb) = (a(cb), a(cd(b) + wb)) = (a(cb), a(cd(b)) + a(wb)) = ((ac)b, (ac)d(b) + (aw)b) = (ac, aw)b = (a(c, w))b = (aw')b$.

Entonces $\Gamma' = A \oplus \Gamma$ es un A-bimódulo.

Ahora, se calcula $Xa - aX = (1_A, 0)a - a(1_A, 0) = (1_Aa, 1_Ad(a) + 0a) - (a, 0) = (a, d(a)) - (a, 0) = (0, d(a)) = d(a)$.

De donde $d(a) = Xa - aX$.

Así, definimos la coacción izquierda de A sobre Γ' $\Phi_{\Gamma'} : \Gamma' \to A \otimes \Gamma'$ dada por $\Phi_{\Gamma'}(w') = \Phi_{\Gamma'}(c, w) = \phi(c)(1_A \otimes X) + \Phi_\Gamma(w)$.

Ahora, definimos la coacción derecha de A sobre Γ' ${}_{\Gamma'}\Phi : \Gamma' \to \Gamma' \otimes A$ dada por ${}_{\Gamma'}\Phi(w') = {}_{\Gamma'}\Phi(c, w) = \phi(c)(X \otimes 1_A) + {}_\Gamma\Phi(w)$.

Notemos que $(\Gamma', \Phi_{\Gamma'}, {}_{\Gamma'}\Phi)$ es un A-bimódulo bicovariante.

Así, definimos a $(\wedge\Gamma', \Phi_{\wedge\Gamma'}, {}_{\wedge\Gamma'}\Phi)$ como el álgebra bicovariante graduada trenzada sobre A basada en $(\Gamma', \Phi_{\Gamma'}, {}_{\Gamma'}\Phi)$.

Notemos que como Γ genera $\wedge\Gamma$ y Γ' genera $\wedge\Gamma'$ entonces el mapeo inclusión $i : \Gamma \to \Gamma'$ induce un mapeo incusión $I : \wedge\Gamma \to \wedge\Gamma'$.

Ahora, definimos el mapeo lineal $\tilde{d}_k : \wedge^k\Gamma' \to \wedge^{k+1}\Gamma'$ dado por $\tilde{d}_k(\theta) = X \wedge \theta - (-1)^k\theta \wedge X$ con $X \in \wedge^1\Gamma'$ y $\theta \in \wedge^k\Gamma'$.

Luego, definimos $[\rho, \theta] = \rho \wedge \theta - (-1)^{jk}\theta \wedge \rho$ con $\rho \in \wedge^j\Gamma'$ y $\theta \in \wedge^k\Gamma'$.

Así, se calcula $[X, \theta] = X \wedge \theta - (-1)^k\theta \wedge X = \tilde{d}_k(\theta)$.

De donde $\tilde{d}_k(\theta) = [X, \theta]$.

Sea $w \in \Gamma$.

Por un lado, se calcula $\Phi_{\Gamma'}(w) = \Phi_{\Gamma'}(0, w) = \phi(0)(1_A \otimes X) + \Phi_\Gamma(w) = \Phi_\Gamma(w)$.

Por otro lado, se calcula ${}_{\Gamma'}\Phi(w) = {}_{\Gamma'}\Phi(0, w) = \phi(0)(X \otimes 1_A) + {}_\Gamma\Phi(w) = {}_\Gamma\Phi(w)$.

Entonces Γ es invariante bajo $\Phi_{\Gamma'}$ y ${}_{\Gamma'}\Phi$ de donde $\Phi_{\Gamma'}|_\Gamma = \Phi_\Gamma$ y ${}_{\Gamma'}\Phi|_\Gamma = {}_\Gamma\Phi$.

Sea $X \in \Gamma'$.

Por un lado, se calcula $\Phi_{\Gamma'}(X) = \Phi_{\Gamma'}(1_A, 0) = \phi(1_A)(1_A \otimes X) + \Phi_\Gamma(0) = 1_A \otimes X$.

Por otro lado, se calcula ${}_{\Gamma'}\Phi(X) = {}_{\Gamma'}\Phi(1_A, 0) = \phi(1_A)(X \otimes 1_A) + {}_\Gamma\Phi(0) = X \otimes 1_A$.

Entonces X es invariante bajo $\Phi_{\Gamma'}$ y ${}_{\Gamma'}\Phi$.

Ahora, definimos el mapeo $\sigma' : \Gamma'^{\otimes 2} \to \Gamma'^{\otimes 2}$ dado por $\sigma'(X \otimes_A X) = X \otimes_A X$.

Notemos que $S_2 = \{e, \tau\}$ con $\mathrm{sign}(e) = 1$, $\mathrm{sign}(\tau) = -1$ y $\pi_2 : S_2 \to B_2$ con $\pi_2(e) = e$, $\pi_2(\tau) = \sigma'$.

Así, se calcula $A_2(X \otimes_A X) = \sum_{\alpha \in S_2} \mathrm{sign}(\alpha)\phi_2(\pi_2(\alpha))(X \otimes_A X) =$
$\mathrm{sign}(e)\phi_2(\pi_2(e))(X \otimes_A X) + \mathrm{sign}(\tau)\phi_2(\pi_2(\tau))(X \otimes_A X) = \phi_2(e)(X \otimes_A X) - \phi_2(\sigma')(X \otimes_A X) = (X \otimes_A X) - (X \otimes_A X) = 0$.

De donde $X \otimes_A X \in \ker(A_2)$ por lo que $X \wedge X = 0$ en $\wedge^2\Gamma'$.

i) Sean $X \in \wedge^1\Gamma'$ y $\theta \in \wedge^k\Gamma'$.
Se calcula $\tilde{d}_k(\theta) = X \wedge \theta - (-1)^k\theta \wedge X$.
Entonces $\tilde{d}_k(\theta) \in \wedge^{k+1}\Gamma'$.

ii) Sea $a \in \wedge^0\Gamma$.

Se calcula $\tilde{d}_0(a) = X \wedge a - (-1)^0 a \wedge X = Xa - aX$.

Entonces $\tilde{d}_0(a) = d(a)$.

iii) Sean $w_1 \in \wedge^k\Gamma$ y $w_2 \in \wedge^l\Gamma$.

Se calcula $\tilde{d}_k(w_1) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge \tilde{d}_l(w_2) =$
$(X \wedge w_1 - (-1)^k w_1 \wedge X) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge (X \wedge w_2 - (-1)^l w_2 \wedge X) =$
$X \wedge w_1 \wedge w_2 - (-1)^k w_1 \wedge X \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge X \wedge w_2 - (-1)^{k+l} w_1 \wedge w_2 \wedge X =$
$X \wedge w_1 \wedge w_2 - (-1)^{k+l} w_1 \wedge w_2 \wedge X = \tilde{d}_{k+l}(w_1 \wedge w_2)$.

iv) Sea $\theta \in \wedge^{k-1}\Gamma$.

Se calcula $\tilde{d}_k(\tilde{d}_{k-1}(\theta)) = X \wedge \tilde{d}_{k-1}(\theta) - (-1)^k \tilde{d}_{k-1}(\theta) \wedge X =$
$X \wedge (X \wedge \theta - (-1)^{k-1}\theta \wedge X) - (-1)^k (X \wedge \theta - (-1)^{k-1}\theta \wedge X) \wedge X =$
$X \wedge X \wedge \theta - (-1)^{k-1} X \wedge \theta \wedge X - (-1)^k X \wedge \theta \wedge X + (-1)^{2k-1}\theta \wedge X \wedge X =$
$X \wedge X \wedge \theta + (-1)^k X \wedge \theta \wedge X - (-1)^k X \wedge \theta \wedge X - \theta \wedge X \wedge X = X \wedge X \wedge \theta - \theta \wedge X \wedge X = 0$.

v) Sea $\theta = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$ con $\theta \in \wedge^k\Gamma$ donde $\theta_j \in \Gamma$ y $\Phi_\Gamma(\theta_j) = a_j^{(-1)} \wedge \theta_j^{(0)}\ \forall\ j \in \{1, \ldots, k\}$.

Solo se verificará que $(\Phi_{\wedge\Gamma} \circ \tilde{d}_k)(\theta) = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{d}_k) \circ \Phi_{\wedge\Gamma})(\theta)$.

Por un lado, se calcula $(\Phi_{\wedge\Gamma} \circ \tilde{d}_k)(\theta) = \Phi_{\wedge\Gamma}(X \wedge \theta - (-1)^k \theta \wedge X) =$
$\Phi_{\wedge\Gamma}(X \wedge \theta) - (-1)^k \Phi_{\wedge\Gamma}(\theta \wedge X) = \Phi_{\wedge\Gamma}(X \wedge \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k) - (-1)^k \Phi_{\wedge\Gamma}(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k \wedge X) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes (X \wedge \theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)}) - (-1)^k (a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)} \wedge X) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes (X \wedge \theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)} - (-1)^k \theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)} \wedge X) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes [X, \theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)}]$.

Por otro lado, se calcula $((\mathrm{id} \otimes \tilde{d}_k) \circ \Phi_{\wedge\Gamma})(\theta) = (\mathrm{id} \otimes \tilde{d}_k)((a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes (\theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)})) =$
$(a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes \tilde{d}_k(\theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)}) = (a_1^{(-1)} \ldots a_k^{(-1)}) \otimes [X, \theta_1^{(0)} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{(0)}]$.

Entonces $(\Phi_{\wedge\Gamma} \circ \tilde{d}_k)(\theta) = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{d}_k) \circ \Phi_{\wedge\Gamma})(\theta)$.

Ahora, se verificará que $\tilde{d} : \wedge\Gamma \to \wedge\Gamma$.

Sea $\theta \in \wedge\Gamma$.

Entonces $\theta = \sum_{k=0}^{K} c_k w_k$ con $c_k \in \mathbb{C}$ y $w_k \in \wedge^k\Gamma$.

Notemos que $w_k = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$ con $\theta_j \in \Gamma\ \forall\ j \in \{0, \ldots k\}$.

Luego, notemos que $bd(a)$ con $b, a \in A$ generan a Γ.

Así, basta tomar $\theta = a_0 d(a_1) \wedge \cdots \wedge d(a_k)$ con $a_j \in A\ \forall\ j \in \{0, \ldots k\}$.

Ahora, se calcula $\tilde{d}(\theta) = d(a_0) \wedge \cdots \wedge d(a_k) + (-1)^0 a_0 \wedge \tilde{d}(d(a_1) \wedge \cdots \wedge d(a_k)) = d(a_0) \wedge \cdots \wedge d(a_k)$.

Entonces $\tilde{d}(\theta) \in \wedge^{k+1}\Gamma$ con $\wedge^{k+1}\Gamma \subset \wedge\Gamma$ por lo que $\wedge\Gamma$ es invariante bajo $\tilde{d}$.

Notemos que los incisos i), ii), iii), iv) y v) de la proposición anterior definen de manera única el mapeo $\tilde{d}$.

Teorema 1 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO bicovariante sobre A. Sea $\Gamma^\wedge$ el CDAO envolvente universal y $\wedge\Gamma$ el CDAO trenzado de (Γ, d). Entonces existe un único homomorfismo de álgebras diferenciales $\varphi : \Gamma^\wedge \to \wedge\Gamma$ que es la identidad en grado 0 y 1. Más aún, φ es un epimorfismo.

Demostración Primero, notemos que $(\wedge\Gamma, \tilde{d})$ es una álgebra diferencial.

Así, definimos el homomorfismo de álgebras $\varphi^0 : \Gamma^{\wedge 0} \to \wedge\Gamma$ dado por $\varphi^0 = \mathrm{id}_A$.

Ahora, definimos el mapeo lineal $\varphi^1 : \Gamma^{\wedge 1} \to \wedge\Gamma$ dado por $\varphi^1 = \mathrm{id}_\Gamma$.

Notemos que φ^0 y φ^1 satisfacen $\varphi^1(ad(b)) = \varphi^0(a)\tilde{d}(\varphi^0(b))\ \forall\ a, b \in A$.

Así, por la Proposición 43 existen únicos mapeos lineales $\varphi^n : \Gamma^{\wedge n} \to \wedge\Gamma$ con $n \geq 2$ tales que $\varphi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \varphi^n : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\wedge n} \to \wedge\Gamma$ es un homomorfismo de álgebras diferenciales.

Ahora, se verificará que $\varphi : \Gamma^\wedge \to \wedge\Gamma$ dada por $\varphi([t]_{\mathcal{Q}}) = [t]_K$ está bien definido.

Notemos que φ está bien definida si y solo si $\mathcal{Q} \subset K$.

Sea $Q = \sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i) \in \mathcal{Q}$ con $\sum_i a_i d(b_i) = 0$.

Se calcula $\varphi([Q]_{\mathcal{Q}}) = [\sum_i d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_K = \sum_i [d(a_i) \otimes_A d(b_i)]_K = \sum_i d(a_i) \wedge d(b_i) =$
$\sum_i (\tilde{d}(a_i) \wedge d(b_i) + (-1)^0 a_i \wedge \tilde{d}(d(b_i))) = \sum_i \tilde{d}(a_i d(b_i)) = \tilde{d}(\sum_i a_i d(b_i)) = 0$.

Entonces $Q \in K$ de donde $\mathcal{Q} \subset K$.

Esto demuestra que φ está bien definido.

Luego, se verificará que φ es suprayectiva.

Sea $u \in \wedge\Gamma$ entonces $u = [t]_K$ para algún $t \in \Gamma^\otimes$.

Así, se calcula $\varphi([t]_{\mathcal{Q}}) = [t]_K = u$.

Esto demuestra que φ es suprayectiva.

7. Dos Ejemplos Importantes

En esta sección, el producto tensorial será sobre un conjunto adecuado, que dependerá del contexto en el que se trabaje.

7.1. Grupo de Lie Matricial Compacto

Esta sección se ha dedicado a mostrar un ejemplo en el que el epimorfismo del Teorema 1 puede ser un isomorfismo. Para conveniencia del lector esta sección es autocontenida y está basada en su mayoría en el siguiente artículo del Dr. Saldaña [Saldaña, 2025].

Definición 46: Sea B una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach y $* : B \to B$ el mapeo involución. Llamamos a B una C^*-álgebra si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $a^{**} = a \; \forall \; a \in B$.

ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$ y $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \; \forall \; a, b \in B$ y $\forall \; \lambda \in \mathbb{C}$.

iii) $(ab)^* = b^* a^* \; \forall \; a, b \in B$.

iv) $\|a^* a\| = \|a\|^2 \; \forall \; a \in B$.

Si B satisface i), ii) y iii) la llamamos $*$-álgebra.

Definición 47: Sea G un espacio topológico. Llamamos a G un grupo de Lie matricial compacto si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) G es un espacio topológico compacto.

ii) G es una variedad suave de dimensión n.

iii) G es un grupo.

iv) La multiplicación de grupo es suave. Es decir, infinitamente diferenciable.

v) La inversión de grupo es suave. Es decir, infinitamente diferenciable.

vi) $G \subset M_n(\mathbb{C})$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

Definición 48: Sea B una C^*-álgebra y $U \subset M_n(B)$. Llamamos al par $\mathcal{G} = (B, U)$ un grupo cuántico matricial compacto si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $P(\mathcal{G}) =$ generado $(u_{ij} \mid u_{ij} \in B \; \forall \; i, j \in \{1, \ldots, n\})$ es una $*$-subálgebra densa en B.

ii) Existe un homomorfismo de C^*-álgebras $\phi : B \to B \otimes B$ tal que $\phi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}$ $\forall \; i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

iii) Existe un mapeo lineal antimultiplicativo $\kappa : P(\mathcal{G}) \to P(\mathcal{G})$ tal que $\kappa(\kappa(p^*)^*) = p \ \forall \ p \in P(\mathcal{G})$, $\sum_{k=1}^{n} \kappa(u_{ik})u_{kj} = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\kappa(u_{kj}) = \delta_{ij} \ \forall \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Woronowicz, 1987].

Proposición 57: Sea G un grupo de Lie matricial compacto y $\mathcal{G} = (C^\infty(G), U)$ el grupo matricial compacto cuántico asociado a G. Sea $P(\mathcal{G}) = (A, \mu, \eta, \phi, \varepsilon, \kappa)$ la $*$-subálgebra de Hopf densa en $C^\infty(G)$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $A =$ generado $(w_{ij} : G \to \mathbb{C} \mid w_{ij}(A) = a_{ij} \ \forall \ A \in G$ y $w_{ij} \in C^\infty(G) \ \forall \ i, j \in \{1, \ldots, n\})$ es una $*$-álgebra.

ii) El coproducto $\phi(a) : G \times G \to \mathbb{C}$ está dado por $\phi(a)(M, N) = a(MN) \ \forall \ a \in A$ y $\forall \ M, N \in G$.

iii) La counidad $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ está dada por $\varepsilon(a) = a(e) \ \forall \ a \in A$ con $e \in G$.

iv) La antípoda $\kappa(a) : G \to \mathbb{C}$ está dada por $\kappa(a)(M) = a(M^{-1}) \ \forall \ a \in A$ y $\forall \ M \in G$.

Definición 49: Sean T, B variedades suaves de dimensión n. Sea $p : T \to B$ un mapeo suave suprayectivo. Llamamos a la tétrada (T, B, p, F) un haz vectorial de rango k con T el espacio total, B el espacio base, p una proyección y F una fibra si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\forall \ b \in B$ existe una vecindad abierta $U(b) \subset B$ y un difeomorfismo $\varphi : p^{-1}(U(b)) \to U(b) \times \mathbb{R}^k$ tales que $p = q \circ \varphi$ donde $q : U(b) \times \mathbb{R}^k \to U(b)$ es la proyección al primer factor.

ii) Si $b \in U_1(b) \cap U_2(b)$, $\varphi_1 : p^{-1}(U_1(b)) \to U_1(b) \times \mathbb{R}^k$ y $\varphi_2 : p^{-1}(U_2(b)) \to U_2(b) \times \mathbb{R}^k$ entonces el mapeo de transición $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : U_2(b) \times \mathbb{R}^k \to U_1(b) \times \mathbb{R}^k$ es lineal y suave.

iii) La fibra sobre b, $T_b = p^{-1}(b) = \{t \in T \mid p(t) = b\} \cong F$ es un espacio vectorial con $\dim(T_b) = k$.

Llamamos a $\{(U_i, \varphi_i)\}$ una trivialización local de (T, B, p, F).

Definición 50: Sea (T, B, p) un haz con T el espacio total, B el espacio base y p una proyección. Sea $T_b = p^{-1}(b) = \{t \in T \mid p(t) = b\}$ la fibra sobre b. Llamamos sección suave de (T, B, p) a un mapeo continuo suave $s : B \to T$ tal que $p(s(b)) = b$ para todo $b \in B$.

Definición 51: Sea M una variedad suave de dimensión n y $p \in M$. Llamamos al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $T_pM = \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{C} \mid v \text{ es lineal y } v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \ \forall \ f, g \in C^\infty(M)\}$ espacio tangente de M en p. Además, llamamos a la variedad suave de dimensión 2n,
$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M \text{ y } v \in T_pM\}$ haz tangente de M. Más aún, (TM, M, π, F) es un haz vectorial con $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$ y $T_p = \pi^{-1}(p) = \{t \in TM \mid \pi(t) = p\} \cong F$.

Notemos que los elementos de T_pM se pueden pensar como combinaciones lineales de derivadas parciales con base $\{(\frac{\partial}{\partial m_i})_p\}_{i=1}^n$ donde $\{(m_i)_p\}_{i=1}^n$ son las coordenadas locales en una vecindad de p.

Definición 52: Sea M una variedad suave de dimensión n y $p \in M$. Llamamos al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $T_p^*M = \{w : T_pM \to \mathbb{C} \mid w \text{ es lineal}\}$ espacio cotangente de M en p. Además, llamamos a la variedad suave de dimensión 2n, $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M = \{(p,w) \mid p \in M \text{ y } w \in T_p^*M\}$ haz cotangente de M. Más aún, (T^*M, M, π, F) es un haz vectorial con $\pi : T^*M \to M$ dada por $\pi(p,w) = p$ y $T_p = \pi^{-1}(p) = \{t \in T^*M \mid \pi(t) = p\} \cong F$.

Notemos que los elementos de T_p^*M se pueden pensar como combinaciones lineales de diferenciales con base $\{d(m_i)_p\}_{i=1}^n$ donde $\{(m_i)_p\}_{i=1}^n$ son las coordenadas locales en una vecindad de p.

Definición 53: Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea $V^{\otimes k}$ la k-potencia tensorial de V e $I = \text{generado}(w = v \otimes v \mid v \in V)$ el ideal izquierdo y derecho graduado generado por w en $\otimes V$. Sea $I^k = \{\sum_{i=1}^m x_i \otimes (v_i \otimes v_i) \otimes y_i \mid v_i \in V, x_i \in V^{\otimes a_i}, y_i \in V^{\otimes b_i} \text{ con } a_i + 2 + b_i = k \ \forall\ i \in \{1,\ldots,m\}\} \subset I$ la k-ésima componente de I. Llamamos a $\wedge V = \frac{\otimes V}{I}$ álgebra exterior de V con $\wedge^k V$ la k-potencia exterior de V.

Definición 54: Sea M una variedad suave de dimensión n. Decimos que M es derecho paralelizable si existe un difeomorfismo $t : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ tal que $\pi = f \circ t$ donde $\pi : TM \to M$ está dada por $\pi(p,v) = p$ y $f : M \times \mathbb{R}^n \to M$ está dada por $f(p,r) = p$. Además, decimos que M es izquierdo paralelizable si existe un difeomorfismo $t : TM \to \mathbb{R}^n \times M$ tal que $\pi = f \circ t$ donde $\pi : TM \to M$ está dada por $\pi(p,v) = p$ y $f : \mathbb{R}^n \times M \to M$ está dada por $f(r,p) = p$.

Definición 55: Sea G un grupo de Lie matricial compacto. Llamamos al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G \ \forall\ t \in \mathbb{R}\} = T_eG$ álgebra de Lie de G. Además, llamamos complexificación de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{A \mid A = B + iC \text{ con } B, C \in \mathfrak{g}\}$.

Definición 56: Sea G un grupo de Lie matricial compacto. Llamamos al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}^* = \{f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\} = T_e^*G$ espacio dual del álgebra de Lie de G. Además, llamamos complexificación de $\mathfrak{g}^*$ a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \{f \mid f = g + ih \text{ con } g, h \in \mathfrak{g}^*\}$.

Definición 57: Sea M una variedad de dimensión n y $p \in M$. Llamamos a $a \in \wedge^k(T_p^*M)$ k-covector en p. Además, llamamos a $\wedge^k(T^*M) = \bigcup_{p\in M} \wedge^k(T_p^*M)$ haz de k-formas diferenciales. Más aún, llamamos a una sección suave de $\wedge^k(T^*M)$, $f : M \to \wedge^k(T^*M)$ k-forma diferencial de M. El conjunto de todas las k-formas diferenciales de M es denotado por $\Omega^k(M)$.

Definición 58: Sea A una $*$-álgebra de Hopf y (Γ, d) un CDPO sobre A. Llamamos a (Γ, d) un $*$-CDPO sobre A si para todo $a_k, b_k \in A$ tales que $\sum_k a_k b_k = 0$ entonces $\sum_k d(b_k^*) a_k^* = 0$.

Proposición 58: Sea G un grupo de Lie matricial compacto y $\mathcal{G} = (C^\infty(G), U)$ el grupo matricial compacto cuántico asociado a G . Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) G es derecho paralelizable con el difeomorfismo $t_L : G \times \mathfrak{g} \to TG$ dado por $t_L(A, v) = (A, (dL_A)_e(v))$ con $L_A : G \to G$ dado por $L_A(B) = AB$ y $(dL_A)_e : T_eG = \mathfrak{g} \to T_{L_A(e)}G = T_{Ae}G = T_AG$.

ii) G es izquierdo paralelizable con el difeomorfismo $t_R : \mathfrak{g} \times G \to TG$ dado por $t_R(A, v) = (A, (dR_A)_e(v))$ con $R_A : G \to G$ dado por $R_A(B) = BA$ y $(dR_A)_e : T_eG = \mathfrak{g} \to T_{R_A(e)}G = T_{eA} = T_AG$.

iii) $d(a) = a^{(1)} \otimes d(a^{(2)})_e$ con d la diferencial usual en $C^\infty(G)$.

iv) $d(a) = d(a^{(1)})_e \otimes a^{(2)}$ con d la diferencial usual en $C^\infty(G)$.

v) Si $\mathfrak{h}$ =generado$_{\mathbb{C}}(d(a)_e \mid a \in A$ y d es la diferencial de $C^\infty(\mathbb{C}))$ entonces $(\Gamma = A \otimes \mathfrak{h}, d)$ es un $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ covariante izquierdo con $\Phi_\Gamma = \phi \otimes \mathrm{id}$.

vi) Si $\mathfrak{h}$ =generado$_{\mathbb{C}}(d(a)_e \mid a \in A$ y d es la diferencial de $C^\infty(\mathbb{C}))$ entonces $(\Gamma = \mathfrak{h} \otimes A, d)$ es un $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ covariante derecho con ${}_\Gamma\Phi = \mathrm{id} \otimes \phi$.

Demostración:

i) Se sigue de que cualquier grupo de Lie es paralelizable.

ii) Se sigue de que cualquier grupo de Lie es paralelizable.

iii) Del inciso i), al dualizar $t_L : TG \to G \times \mathfrak{g}$ tenemos que $t_L^* : T^*G \to G \times \mathfrak{g}^*$.
Notemos que dos haces son isomorfos si y solo si sus secciones suaves son isomorfas.
Entonces existe un isomorfismo $f : \Omega^1(G) \to C^\infty(G) \otimes \mathfrak{g}^*$.
De donde $d(a) = a^{(1)} \otimes d(a^{(2)})_e \ \forall\ a \in A$.

iv) Del inciso ii), al dualizar $t_R : TG \to G \times \mathfrak{g}$ tenemos que $t_R^* : T^*G \to \mathfrak{g}^* \times G$.
Notemos que dos haces son isomorfos si y solo si sus secciones suaves son isomorfas.
Entonces existe un isomorfismo $f : \Omega^1(G) \to \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G)$.
De donde $d(a) = d(a^{(1)})_e \otimes a^{(2)} \ \forall\ a \in A$.

v) La demostración de este punto es trivial y se omitirá.

vi) La demostración de este punto es trivial y se omitirá.

Corolario 5: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57 y (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ de la Proposición 58. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) (Γ, d) es un $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante.

ii) Existe un ideal derecho $R \subset \ker(\varepsilon)$ en A tal que $\mathfrak{h} \cong 1_A \otimes \mathfrak{h} = {}_{\mathrm{inv}}\Gamma = 1_A \otimes \frac{\ker(\varepsilon)}{R} \cong \frac{\ker(\varepsilon)}{R}$.

Notemos que los $*$-CDPO de los incisos v) y vi) de la Proposición 58 son isomorfos y por lo tanto bicovariantes.

Proposición 59: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57 y $R \subset \ker(\varepsilon)$ el ideal derecho en A del Corolario 5. Entonces $R = \ker(\varepsilon)^2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i, b_i \in \ker(\varepsilon)\}$.

Demostración: Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ la complexificación del espacio dual del álgebra de Lie de G.

Entonces $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \frac{F}{F^2}$ con $F = \{f \in C^\infty(G) \mid \varepsilon(f) = 0\}$ y $F^2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i, b_i \in F\}$.

De donde $d(f)_e = [f]_{F^2}$ por lo que $d(a)_e = \pi(a) = [a]_R = [a]_{F^2}$ $\forall$ $a \in \ker(\varepsilon)$.

Entonces $a \in R$ si y solo si $a \in F^2 \cap \ker(\varepsilon) = \ker^2(\varepsilon)$.

De donde $R = \ker^2(\varepsilon)$.

Proposición 60: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ del Corolario 5 y R el ideal derecho en A de la Proposición 59. Entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

Demostración: Primero, se verificará que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

Notemos que por definición, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

Luego, se verificará que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{h}$.

Notemos que por definición, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset M_n(\mathbb{C})$.

Entonces existe una base $\{v_i\}_{i=1}^{n} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j N_{ij} \mid a_j \in \mathbb{C}$ y $\{N_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ es una base de $M_n(\mathbb{C})\}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que $d(w_{ij})_e(v_k) = v_{ij}$.

De donde existe una base $\{d(a_i)_e\}_{i=1}^{n} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j d(w_{ij})_e \mid a_j \in \mathbb{C}$ y $d(w_{ij})_e \in \mathfrak{h}\}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ tal que $d(a_i)_e(v_j) = \delta_{ij}$.

Por lo que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{h}$.

Notemos que por el Corolario 5, $\mathfrak{h} = {}_{\text{inv}}\Gamma$ entonces $\mathfrak{h} = {}_{\text{inv}}\Gamma = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

Corolario 6: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Entonces $(\Gamma = A \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*, d)$ es un $*$-sub CDPO sobre $\mathcal{G}$ del $*$-CDPO $(\tilde{\Gamma} = C^\infty(G) \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*, \tilde{d})$ sobre $\mathcal{G}$ donde $d = \tilde{d}|_A$.

Definición 59: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6 y $\otimes_{\text{inv}}\Gamma$ el álgebra tensorial de ${}_{\text{inv}}\Gamma$. Definimos $S = \text{generado}(S = \pi(a^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)}) \mid a \in R = \ker^2(\varepsilon))$ como el ideal izquierdo y derecho generado por S en $\otimes_{\text{inv}}\Gamma$. Llamamos a ${}_{\text{inv}}\Gamma^{\wedge} = \frac{\otimes_{\text{inv}}\Gamma}{S}$ CDAO de formas diferenciales de (Γ, d).

Proposición 61: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\pi : A \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico y $\pi(h) \circ g = \pi(hg - \varepsilon(h)g)$ la acción derecha de A sobre ${}_{\text{inv}}\Gamma$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\pi(hg) = \pi(h)\varepsilon(g) + \varepsilon(h)\pi(g) \ \forall \ h, g \in \ker(\varepsilon)$.

ii) $\pi(h) \circ g = \pi(h)\varepsilon(g) \ \forall \ h, g \in \ker(\varepsilon)$.

Demostración:

i) Se sigue de que π es la diferencial de una función en la identidad.

ii) Sean $h, g \in \ker(\varepsilon)$.
Así, se calcula $\pi(h) \circ g = \pi(hg - \varepsilon(h)g) = \pi(hg) - \pi(\varepsilon(h)g) = \pi(h)\varepsilon(g) + \varepsilon(h)\pi(g) - \varepsilon(h)\pi(g) = \pi(h)\varepsilon(g)$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Đurđević, 1996].

Proposición 62: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6. Sea $\Gamma^{\wedge}$ el CDAO envolvente universal de (Γ, d). Entonces $\Gamma^{\wedge} = A \otimes {}_{\text{inv}}\Gamma^{\wedge}$.

Proposición 63: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6 y $\Gamma^{\wedge}$ el CDAO envolvente universal de (Γ, d). Entonces $\Gamma^{\wedge} = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$.

Demostración: Sea $g = ab \in R = \ker^2(\varepsilon)$.

Se calcula $S = \pi(g^{(1)}) \otimes \pi(g^{(2)}) = \pi(a^{(1)}b^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)}b^{(2)})$.

Notemos que por el inciso ii) de la Proposición 33, $\pi(ab) = \varepsilon(a)\pi(b) + \pi(a) \circ b$.

Así, se calcula $S = (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) + \pi(a^{(1)}) \circ b^{(1)}) \otimes (\varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)}) + \pi(a^{(2)}) \circ b^{(2)}) =$
$(\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) + (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)}) \circ b^{(2)}) +$
$(\pi(a^{(1)}) \circ b^{(1)} \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) + (\pi(a^{(1)}) \circ b^{(1)} \otimes \pi(a^{(2)}) \circ b^{(2)})$.

Luego, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 61, $\pi(h) \circ g = \pi(h)\varepsilon(g)$.

Ahora, se calcula $S = (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) + (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)})\varepsilon(b^{(2)})) +$
$(\pi(a^{(1)})\varepsilon(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) + (\pi(a^{(1)})\varepsilon(b^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)})\varepsilon(b^{(2)})) =$
$(\varepsilon(b^{(1)})\pi(a^{(1)}) \otimes \varepsilon(b^{(2)})\pi(a^{(2)})) + (\varepsilon(b^{(1)})\pi(a^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) +$
$(\pi(b^{(1)})\varepsilon(a^{(1)}) \otimes \varepsilon(b^{(2)})\pi(a^{(2)})) + (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) =$
$(\varepsilon(b^{(1)}\varepsilon(b^{(2)}))\pi(a^{(1)}) \otimes \pi(a^{(2)})) + (\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(b^{(2)})\pi(a^{(2)})) +$
$(\varepsilon(b^{(1)})\pi(a^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) + (\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)})\pi(b^{(2)})) =$
$(\varepsilon(a^{(1)})\pi(b^{(1)}) \otimes \varepsilon(b^{(2)})\pi(a^{(2)})) + (\varepsilon(b^{(1)})\pi(a^{(1)}) \otimes \varepsilon(a^{(2)})\pi(b^{(2)})) =$
$(\pi(b^{(1)}\varepsilon(b^{(2)})) \otimes \pi(\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)})) + (\pi(a^{(1)}\varepsilon(a^{(2)})) \otimes \pi(\varepsilon(b^{(1)})b^{(2)})) =$
$\pi(b) \otimes \pi(a) + \pi(a) \otimes \pi(b) = \pi(a) \otimes \pi(b) + \pi(b) \otimes \pi(a)$.

Entonces $\pi(a) \otimes \pi(b) + \pi(b) \otimes \pi(a) = 0$ en ${}_{\text{inv}}\Gamma^{\wedge}$.

De donde ${}_{\text{inv}}\Gamma^{\wedge} = \wedge_{\text{inv}}\Gamma$.

Luego, notemos que por la Proposición 62, $\Gamma^{\wedge} = A \otimes {}_{\text{inv}}\Gamma^{\wedge}$.

Por lo que $\Gamma^{\wedge} = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$.

Definición 60: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra y $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de subespacios vectoriales de A. Sea $d : A \to A$ un mapeo. Llamamos a A una $*$-álgebra diferencial graduada si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$.

ii) $A^k A^l \subset A^{k+l}$ $\forall$ $k \geq 0$ y $\forall$ $l \geq 0$.

iii) $(vw)^* = (-1)^{kl} w^* v^*$ $\forall$ $v \in A^k$ y $\forall$ $w \in A^l$.

iv) $d_{k+l}(av + bw) = ad_k(v) + bd_l(w)$ $\forall$ $a, b \in \mathbb{C}$, $\forall$ $v \in A^k$ y $\forall$ $w \in A^l$.

v) $d_{k+l}(vw) = d_k(v)w + (-1)^k v d_l(w)$ $\forall$ $v \in A^k$ y $\forall$ $w \in A^l$.

vi) $d_m(A^k) \subset A^{k+m}$ $\forall$ $k \geq 0$ y $m \geq 0$ fijo.

vii) $d_k \circ d_{k-1} = 0$ $\forall$ $k \geq 1$.

viii) $d_k(v^*) = d_k(v)^*$ $\forall$ $v \in A^k$.

Corolario 7: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6 y $\Gamma^{\wedge}$ el CDAO envolvente universal de la Proposición 63. Entonces $(\Gamma^{\wedge} = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma, d)$ es una $*$-sub álgebra diferencial graduada de la $*$-álgebra diferencial graduada $(\tilde{\Gamma}^{\wedge} = C^{\infty}(G) \otimes \wedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*, \tilde{d})$ donde $d = \tilde{d}|_A$ es la derivada exterior.

Proposición 64: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante sobre A del Corolario 6. Sea S_2 el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1,2\}$ y B_2 el grupo trenzado. Sea $\phi_2 : B_2 \to GL(\Gamma^{\otimes 2})$ la representación de B_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$ e $I(\tau) = \text{card}\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 2 \text{ y } \tau(i) > \tau(j)\}$ el número de inversiones para $\tau \in S_2$. Sea $\pi_2 : S_2 \to B_2$ el mapeo inyectivo de la Proposición 49 y $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el mapeo de virado. Sea $\pi : \ker(\varepsilon) \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico restringido a $\ker(\varepsilon)$ y $A_2 : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el operador de antitrenzado. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $S_2 = \{e, \tau_1\}$ con $e(1,2) = (1,2)$ y $\tau_1(1,2) = (2,1)$.

ii) $B_2 = \{\sigma_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con σ_1 el generador de B_2.

iii) $\sigma(w_1 \otimes w_2) = w_2 \otimes w_1$ con $w_1, w_2 \in \Gamma$.

iv) $\phi_2(\sigma_1) = \sigma$.

v) $I(e) = 0$ e $I(\tau_1) = 1$.

vi) $\pi_2(e) = e$ y $\pi_2(\tau_1) = \sigma_1$.

vii) $A_2 = \text{id} - \sigma$.

Demostración:

i) Notemos que las únicas permutaciones de $\{1,2\}$ son $S_2 = \{e, \tau_1\}$.

ii) Por definición, B_2 es el grupo generado por σ_1.

Ahora, notemos que por el inciso iii) de la Proposición 46, $B_2 \cong \mathbb{Z}$ es un grupo cíclico, infinito y abeliano.

Entonces $B_2 = \{\sigma_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

iii) Sea $w \in \Gamma = A \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

Notemos que como ${}_{\text{inv}}\Gamma = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{h} = \text{generado}_{\mathbb{C}}(d(a)_e \mid a \in A \text{ y } d \text{ es la diferencial de } C^\infty(\mathbb{C}))$ entonces por el inciso i) de la Proposición 11, $w = \sum_i \alpha_i d(a_i)_e$.

Así, se calcula $\sigma(w_1 \otimes w_2) = \sigma(\sum_i \alpha_i d(a_i)_e \otimes \sum_j \beta_j d(b_j)_e) = \sum_i \sum_j \sigma(\alpha_i d(a_i)_e \otimes \beta_j d(b_j)_e) =$
$\sum_i \sum_j \sigma(\alpha_i d(a_i)_e \beta_j \otimes d(b_j)_e) = \sum_i \sum_j \sigma(\alpha_i \sum_k \gamma_{ik}(\beta_j) d(a_k)_e \otimes d(b_j)_e) =$
$\sum_i \sum_j \sum_k \sigma(\alpha_i \gamma_{ik}(\beta_j) d(a_k)_e \otimes d(b_j)_e) = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \gamma_{ik}(\beta_j) \sigma(d(a_k)_e \otimes d(b_j)_e) =$
$\sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \gamma_{ik}(\beta_j)(d(b_j)_e \otimes d(a_k)_e) = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \delta_{ik} \beta_j (d(b_j)_e \otimes d(a_k)_e) =$
$\sum_j \sum_k \alpha_k \beta_j (d(b_j)_e \otimes d(a_k)_e) = \sum_j \sum_k \beta_j \alpha_k (d(b_j)_e \otimes d(a_k)_e) = \sum_j \sum_k (\beta_j \alpha_k d(b_j)_e \otimes d(a_k)_e) =$
$\sum_j \sum_k (\beta_j \sum_l d(b_l)_e \gamma_{jl}(\alpha_k) \otimes d(a_k)_e) = \sum_j \sum_k \sum_l (\beta_j d(b_l)_e \gamma_{jl}(\alpha_k) \otimes d(a_k)_e) =$
$\sum_j \sum_k \sum_l (\beta_j d(b_l)_e \otimes \gamma_{jl}(\alpha_k) d(a_k)_e) = \sum_j \sum_k \sum_l (\beta_j d(b_l)_e \otimes \delta_{jl} \alpha_k d(a_k)_e) =$
$\sum_k \sum_l (\beta_l d(b_l)_e \otimes \alpha_k d(a_k)_e) = \sum_l \beta_l d(b_l)_e \otimes \sum_k \alpha_k d(a_k)_e = w_2 \otimes w_1$.

iv) De la Proposición 47, tomamos la asignación $\sigma_1 \to \sigma$ que induce la representación de B_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$ $\phi_2 : B_2 \to GL(\Gamma^{\otimes 2})$ dada por $\phi_2(\sigma_1) = \sigma$.

v) Notemos que el único par en $\{1,2\}$ que satisface $1 \leq i < j \leq 2$ es $(1,2)$.

Así, se calcula $I(e) = \text{card}\{(i,j)|1 \leq i < j \leq 2 \text{ y } e(i) > e(j)\} = 0$.

Ahora, se calcula $I(\tau_1) = \text{card}\{(i,j)|1 \leq i < j \leq 2 \text{ y } \tau_1(i) > \tau_1(j)\} = 1$.

vi) Del inciso v), $I(e) = 0$ e $I(\tau_1) = 1$.

Notemos que por el inciso iii) y ii) de la Proposición 48, existen únicos índices vacíos y $s_1 \in \{1\}$ respectivamente tales que $e = e$ y $\tau_1 = \tau_{s_1}$, respectivamente.

Luego, notemos que por la Proposición 49, $\pi_2(e) = e$ y $\pi_2(\tau_1) = \sigma_1$ respectivamente.

vii) Por definición, $A_2 = \sum_{\tau \in S_2} \text{sign}(\tau)\phi_2(\pi_2(\tau)) = \text{sign}(e)\phi_2(\pi_2(e)) + \text{sign}(\tau_1)\phi_2(\pi_2(\tau_1)) = \phi_2(e) - \phi_2(\sigma_1)$.

Notemos que por el inciso iv), $\phi_2(\sigma_1) = \sigma$.

Luego, notemos que por la Proposición 47, ϕ_2 es un homomorfismo de grupos entonces $\phi_2(e) = \text{id}$.

De donde $A_2 = \text{id} - \sigma$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [Woronowicz, 1989].

Proposición 65: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6. Sea $\wedge\Gamma$ el CDAO trenzado de (Γ, d). Entonces $\wedge\Gamma = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$.

Corolario 8: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 57. Sea $\mathfrak{h}$ y R el ideal derecho en A de la Proposición 60. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO sobre $\mathcal{G}$ bicovariante del Corolario 6 y $\wedge\Gamma$ el CDAO trenzado de (Γ, d). Entonces $\wedge\Gamma = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$ es el álgebra exterior de formas diferenciales.

Demostración: Sea $a \otimes b \in \Gamma^{\otimes 2}$.

Notemos que por el inciso vii) de la Proposición 64, $A_2 = \text{id} - \sigma$.

Así, se calcula $A_2(f \otimes g) = (\text{id} - \sigma)(a \otimes b) = a \otimes b - b \otimes a$.

Entonces $\ker(A_2) = \{a \otimes b + b \otimes a \mid a, b \in \Gamma\}$.

De donde $\wedge\Gamma$ es el álgebra exterior de formas diferenciales.

Luego, notemos que por la Proposición 65, $\wedge\Gamma = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$.

Entonces $\wedge\Gamma = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$ es el álgebra exterior de formas diferenciales.

Notemos que por la Proposición 63, el CDAO envolvente universal es $\Gamma^{\wedge} = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$ y por el Corolario 8, el CDAO trenzado es $\wedge\Gamma = A \otimes \wedge_{\text{inv}}\Gamma$ por lo que concluimos que son iguales, lo que indica que el epimorfismo del Teorema 1 puede ser un isomorfismo.

7.2. Grupo de Enteros Módulo 2

Esta sección se ha dedicado a mostrar un ejemplo en el que el epimorfismo del Teorema 1 puede no ser un isomorfismo. Para conveniencia del lector esta sección es autocontenida y está basada en su mayoría en el siguiente artículo del Dr. Saldaña [Saldaña, 2021].

Proposición 66: Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ el grupo de enteros módulo 2 y $\mathcal{G} = (C^\infty(\mathbb{Z}_2), U)$ el grupo matricial compacto cuántico asociado a $\mathbb{Z}_2$. Sea $P(\mathcal{G}) = A$ la $*$-subálgebra de Hopf densa en $C^\infty(\mathbb{Z}_2)$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $A = \{f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C} \mid f \text{ es una función}\}$ es una $*$-álgebra.

ii) $\left\{ f_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{si z=0} \\ 0 & \text{si z=1} \end{cases}, f_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{si z=0} \\ 1 & \text{si z=1} \end{cases} \right\}$ es una base de A.

iii) El coproducto $\phi : A \to A \otimes A$ está dado por $\phi(f_0) = f_0 \otimes f_0 + f_1 \otimes f_1$ y $\phi(f_1) = f_0 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_0$.

iv) La counidad $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ está dada por $\varepsilon(f_0) = 1$ y $\varepsilon(f_1) = 0$.

v) La antípoda $\kappa(a) : A \to A$ está dada por $\kappa(f_0) = f_0$ y $\kappa(f_1) = f_1$.

Las demostraciones de las siguientes dos proposiciones se pueden encontrar en [Sontz, 2015].

Proposición 67: Sea A una $*$-álgebra de Hopf y (U_L, D_L) el $*$-CDPO universal izquierdo sobre A. Sean $\Phi_{U_L} : U_L \to A \otimes U_L$ y ${}_{U_L}\Phi : U_L \to U_L \otimes A$ mapeos lineales dados por $\Phi_{U_L}(a \otimes b) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b$ y ${}_{U_L}\Phi(a \otimes b) = a^{(1)} \otimes b^{(2)} \otimes a^{(2)}\kappa(b^{(1)})b^{(3)}$. Entonces (U_L, D_L) es un $*$-CDPO bicovariante con respecto a Φ_{U_L} y ${}_{U_L}\Phi$.

Proposición 68: Sea A una $*$-álgebra de Hopf y (U_L, D_L) el $*$-CDPO universal izquierdo sobre A. Sea $R \subset \ker(\varepsilon)$ un ideal derecho en A tal que $\kappa(R)^* \subset R$ y $ad_R(R) \subset R \otimes A$. Definimos $N_R = A \otimes R$ y $\Gamma_{L,N_R} = \frac{U_L}{N_R}$. Sea $\pi_{L,N_R} : U_L \to \Gamma_{L,N_R}$ el epimorfismo canónico de A-bimódulos definimos $d_{L,N_R} = \pi_{L,N_R} \circ D_L : A \to \Gamma_{L,N_R}$. Entonces (Γ_{L,N_R}, d) es un $*$-CDPO bicovariante sobre A con respecto a $\Phi_{\Gamma_{L,N_R}} : \Gamma_{L,N_R} \to A \otimes \Gamma_{L,N_R}$ y ${}_{\Gamma_{L,N_R}}\Phi : \Gamma_{L,N_R} \to \Gamma_{L,N_R} \otimes A$. Más aún, cualquier $*$-CDPO bicovariante sobre A, (Γ, d), es isomorfo a (Γ_{L,N_R}, d) para algún A-subbimódulo N_R de U_L.

Corolario 9: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 66. Entonces solo hay dos $*$-CDPO bicovariantes sobre A.

Demostración: Notemos que $\ker(\varepsilon) = \text{generado}(f_1)$.

Entonces los únicos ideales derechos de A son $R = \ker(\varepsilon)$ y $R = 0$.

Ahora, notemos que por la Proposición 68, los únicos $*$-CDPO bicovariantes sobre A son $(\Gamma = A, d = \text{id})$ y $(\Gamma = U_L, d = D_L)$.

Proposición 69: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 66. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO universal bicovariante sobre A del Corolario 9 y $\pi : \ker(\varepsilon) \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuánticos restringido a $\ker(\varepsilon)$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\pi(f_0) = -\pi(f_1)$.

ii) $\pi(f_0) \neq 0$ y $\pi(f_1) \neq 0$.

iii) $D_L(f_0) = -(f_0 - f_1)\pi(f_1) = -D_L(f_1)$.

iv) $D_L(h) = (b - a)(f_0 - f_1)\pi(f_1)\ \forall\ h = af_0 + bf_1 \in A$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Demostración:

i) Primero, notemos que $f_0 + f_1 = 1$.
Así, se calcula $\pi(f_0) + \pi(f_1) = \pi(1) = 0$.
entonces $\pi(f_0) = -\pi(f_1)$.

ii) Primero, notemos que por el inciso i) $\pi(f_0) = -\pi(f_1)$.
Sea $\pi(f_0) = 0$ entonces $\pi(f_1) = 0$.
Ahora, notemos que como $\{f_0, f_1\}$ es una base de A, $h = af_0 + bf_1\ \forall\ h \in A$ con $a, b \in \mathbb{C}$.
Así, se calcula $\pi(h) = a\pi(f_0) + b\pi(f_1) = 0$.
Entonces $\text{Im}(\pi) = 0$.
Luego, notemos que como π es suprayectiva $\text{Im}(\pi) = {}_{\text{inv}}\Gamma$.
De donde ${}_{\text{inv}}\Gamma = 0$.
Después, notemos que ${}_{\text{inv}}\Gamma \cong \frac{\ker(\varepsilon)}{R} = \ker(\varepsilon) = \text{generado}(f_1) \neq 0$, lo cual es una contradicción.
Por lo que $\pi(f_0) \neq 0$ y $\pi(f_1) \neq 0$.

iii) Primero, notemos que por el inciso vi) de la Proposición 32, $D_L(f_0) = f_0^{(1)}\pi(f_0^{(2)})$.
Entonces $D_L = \mu \circ (\text{id} \otimes \pi) \circ \phi$.
Ahora, notemos que $\pi(f_0) = -\pi(f_1)$.
Por un lado, se calcula $D_L(f_0) = (\mu \circ (\text{id} \otimes \pi))(\phi(f_0)) = (\mu \circ (\text{id} \otimes \pi))(f_0 \otimes f_0 + f_1 \otimes f_1) = (\mu \circ (\text{id} \otimes \pi))(f_0 \otimes f_0) + (\mu \circ (\text{id} \otimes \pi))(f_1 \otimes f_1) = f_0\pi(f_0) + f_1\pi(f_1) = -f_0\pi(f_1) + f_1\pi(f_1) = -(f_0 - f_1)\pi(f_1)$.

Por otro lado, se calcula $D_L(f_1) = (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \pi))(\phi(f_1)) = (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \pi))(f_0 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_0) = (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \pi))(f_0 \otimes f_1) + (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \pi))(f_1 \otimes f_0) = f_0\pi(f_1) + f_1\pi(f_0) = f_0\pi(f_1) - f_1\pi(f_1) = (f_0 - f_1)\pi(f_1)$.

De donde $D_L(f_0) = -(f_0 - f_1)\pi(f_1) = -D_L(f_1)$.

iv) Sea $h = af_0 + bf_1 \in A$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Se calcula $D_L(h) = D_L(af_0 + bf_1) = aD_L(f_0) + bD_L(f_1)$.

Notemos que por el inciso iii), $D_L(f_0) = -(f_0 - f_1)\pi(f_1) = -D_L(f_1)$.

Ahora, se calcula $D_L(h) = -a(f_0 - f_1)\pi(f_1) + b(f_0 - f_1)\pi(f_1) = (b - a)(f_0 - f_1)\pi(f_1)$.

Proposición 70: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 66. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO universal bicovariante sobre A del Corolario 9 y $\Gamma^\wedge$ el CDAO envolvente universal de (Γ, d). Entonces $\Gamma^\wedge = \otimes\Gamma$.

Demostración: Sea $\sum_i a_i D_L(b_i) = 0$ con $a_i, b_i \in A$.

Notemos que por el inciso iv) de la Proposición 69, $D_L(h) = (b - a)(f_0 - f_1)\pi(f_1)$.

Entonces $\sum_i a_i D_L(b_i) = \sum_i a_i \tilde{b}_i (f_0 - f_1)\pi(f_1) = 0$ con $\tilde{b}_i = \tilde{b}_{i1} - \tilde{b}_{i0} \in \mathbb{C}$.

Luego, notemos que como $\{\pi(f_1)\}$ es una base de ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ entonces por el inciso ii) de la Proposición 11, $\sum_i a_i D_L(b_i) = (\sum_i a_i \tilde{b}_i (f_0 - f_1))\pi(f_1) = 0$.

Ahora, notemos que por el inciso i) de la Proposición 69, $\pi(f_1) \neq 0$.

Entonces $\sum_i a_i \tilde{b}_i (f_0 - f_1) = 0$.

Después, notemos que $(f_0 - f_1)(z) = \begin{cases} 1 & \text{si z=0} \\ -1 & \text{si z=1} \end{cases}$.

Entonces $(f_0 - f_1)(z)$ es invertible con inversa dada por $(f_0 - f_1)^{-1}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si z=0} \\ -1 & \text{si z=1} \end{cases}$.

Entonces $\sum_i a_i \tilde{b}_i = 0$.

Así, se calcula $D_L(\sum_i a_i \tilde{b}_i) = D_L(0)$ entonces $\sum_i \tilde{b}_i D_L(a_i) = 0$.

Ahora, se calcula $Q = \sum_i D_L(a_i) \otimes D_L(b_i) = \sum_i D_L(a_i) \otimes (\tilde{b}_i(f_0 - f_1)\pi(f_1)) = \sum_i (D_L(a_i)\tilde{b}_i(f_0 - f_1)) \otimes \pi(f_1) = (\sum_i D_L(a_i)\tilde{b}_i(f_0 - f_1)) \otimes \pi(f_1) = ((\sum_i \tilde{b}_i D_L(a_i))(f_0 - f_1)) \otimes \pi(f_1) = 0 \otimes \pi(f_1) = 0$.

De donde $\mathcal{Q} = \text{generado}(Q = \sum_i D_L(a_i) \otimes_A D_L(b_i) \mid a_i, b_i \in A \text{ y } \sum_i a_i D_L(b_i) = 0) = 0$.

7.2 Grupo de Enteros Módulo 2

Por lo que $\Gamma^{\wedge} = \otimes\Gamma$.

Proposición 71: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 66. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO universal bicovariante sobre A del Corolario 9. Sea S_2 el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2\}$ y B_2 el grupo trenzado. Sea $\phi_2 : B_2 \to GL(\Gamma^{\otimes 2})$ la representación de B_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$ e
$I(\tau) = \text{card}\{(i, j)|1 \leq i < j \leq 2 \text{ y } \tau(i) > \tau(j)\}$ el número de inversiones para $\tau \in S_2$. Sea $\pi_2 : S_2 \to B_2$ el mapeo inyectivo de la Proposición 49 y $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el mapeo de virado. Sea $\pi : \ker(\varepsilon) \to {}_{\text{inv}}\Gamma$ el mapeo de gérmenes cuántico restringido a $\ker(\varepsilon)$ y $A_2 : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ el operador de antitrenzado. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $S_2 = \{e, \tau_1\}$ con $e(1, 2) = (1, 2)$ y $\tau_1(1, 2) = (2, 1)$.

ii) $B_2 = \{\sigma_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con σ_1 el generador de B_2.

iii) $\sigma(w_1 \otimes w_2) = w_1 \otimes w_2 = \text{id}(w_1 \otimes w_2)$ con $w_1, w_2 \in \Gamma$.

iv) $\phi_2(\sigma_1) = \sigma$.

v) $I(e) = 0$ e $I(\tau_1) = 1$.

vi) $\pi_2(e) = e$ y $\pi_2(\tau_1) = \sigma_1$.

vii) $A_2 = 0$.

Demostración:

i) Análoga a la demostración del inciso i) de la Proposición 64.

ii) Análoga a la demostración del inciso ii) de la Proposición 64.

iii) Sea $w \in \Gamma$.

Notemos que como ${}_{\text{inv}}\Gamma \cong \frac{\ker(\varepsilon)}{R} = \ker(\varepsilon) = \text{generado}(f_1)$ entonces por el inciso i) de la Proposición 11, $w = \sum_i a_i\pi(f_1) = a\pi(f_1)$ con $a_i \in A$ donde $a = \sum_i a_i$.

Así, se calcula $\sigma(w_1 \otimes w_2) = \sigma(a\pi(f_1) \otimes b\pi(f_1)) = \sigma(a\pi(f_1)b \otimes \pi(f_1)) = \sigma(ac\pi(f_1) \otimes \pi(f_1)) = ac\sigma(\pi(f_1) \otimes \pi(f_1)) = ac(\pi(f_1) \otimes \pi(f_1)) = ac\pi(f_1) \otimes \pi(f_1) = a\pi(f_1)b \otimes \pi(f_1) = a\pi(f_1) \otimes b\pi(f_1) = w_1 \otimes w_2$.

De donde $\sigma = \text{id}$.

iv) De la Proposición 47, tomamos la asignación $\sigma_1 \to \sigma$ que induce la representación de B_2 en $\Gamma^{\otimes 2}$ $\phi_2 : B_2 \to GL(\Gamma^{\otimes 2})$ dada por $\phi_2(\sigma_1) = \sigma = \text{id}$.

v) Análoga a la demostración del inciso v) de la Proposición 64.

vi) Análoga a la demostración del inciso vi) de la Proposición 64.

vii) Por definición, $A_2 = \sum_{\tau \in S_2} \operatorname{sign}(\tau)\phi_2(\pi_2(\tau)) = \operatorname{sign}(e)\phi_2(\pi_2(e)) + \operatorname{sign}(\tau_1)\phi_2(\pi_2(\tau_1)) = \phi_2(e) - \phi_2(\sigma_1)$.

Notemos que por el inciso iv), $\phi_2(\sigma_1) = \sigma = \mathrm{id}$.

Luego, notemos que por la Proposición 47, ϕ_2 es un homomorfismo de grupos entonces $\phi_2(e) = \mathrm{id}$.

De donde $A_2 = \mathrm{id} - \mathrm{id} = 0$.

Corolario 10: Sea A la $*$-álgebra de Hopf de la Proposición 66. Sea (Γ, d) el $*$-CDPO universal bicovariante sobre A del Corolario 9 y $\wedge\Gamma$ el CDAO trenzado de (Γ, d). Entonces $\wedge\Gamma = A \bigoplus \Gamma$.

Demostración: Primero, notemos que por el inciso vii) de la Proposición 71, $A_2 = 0$.

Así, se calcula $\ker(A_2) = \Gamma^{\otimes 2}$.

Entonces $\wedge^2\Gamma = 0$.

Ahora, notemos que cualquier n-forma con $n \geq 2$ se puede escribir como combinación lineal de $\frac{n}{2}$ productos exteriores de 2-formas si n es par o $\frac{n-1}{2}$ productos exteriores de 2-formas y una 1-forma si n es impar.

Entonces $\wedge^n\Gamma = 0 \ \forall \ n \geq 2$.

De donde $\wedge\Gamma = A \bigoplus \Gamma$.

Notemos que por la Proposición 70, el CDAO envolvente universal es $\Gamma^\wedge = \otimes\Gamma$ y por el Corolario 10, el CDAO trenzado es $\wedge\Gamma = A \bigoplus \Gamma$ por lo que concluimos que no son isomorfos, lo que indica que el epimorfismo del Teorema 1 puede no ser un isomorfismo.

7.2 Grupo de Enteros Módulo 2

8. Conclusiones

El presente trabajo establece una conexión formal y rigurosa entre dos de las construcciones más importantes de la geometría no conmutativa. El CDAO envolvente universal y el CDAO trenzado sobre una álgebra de Hopf. Este estudio culminó con la demostración de la existencia de un epimorfismo entre estos dos CDAO.

El camino para establecer este puente epimórfico requirió de la introducción de álgebras de Hopf y su coacción sobre bimódulos bicovariantes. Dichas coacciones codifican la noción de simetría cuántica.

Sobre estas álgebras de Hopf, se desarrolló la teoría de CDPO. La cual se enfocó en la caracterización de CDPO bicovariantes a través de sus espacios invariantes y sus ideales derechos correspondientes. Así, cualquier CDPO bicovariante queda completamente determinado por sus espacios invariantes.

Posteriormente, se definieron las dos estructuras de orden superior. El CDAO envolvente universal se construyó como un cociente del álgebra tensorial por elementos cuadráticos, diseñado para ser la extensión más libre de un CDPO. Por otro lado, el CDAO trenzado se definió utilizando la rica estructura de los grupos trenzados y el operador de antitrenzado, imponiendo relaciones de simetría más estrictas.

Finalmente, se exploró la naturaleza de este epimorfismo a través de dos ejemplos importantes. Se demostró que para el álgebra de Hopf de funciones sobre un grupo de Lie compacto clásico, la conmutatividad del álgebra obliga a que la trenza sea el mapeo de virado y el epimorfismo se convierte en un isomorfismo. En contraste, para el álgebra de Hopf del grupo de los enteros módulo 2, se demostró que la trenza es trivial y las estructuras no son isomorfas, revelando que el puente es naturalmente un epimorfismo.

Bibliografía

Woronowicz, S. L. (1987). Compact Matrix Pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, *111*, 613-665.

Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry* (1.ª ed.). Academic Press.

Đurđević, M. (2001). Quantum Geometry and New Concept of Space. *Preprint*.

Woronowicz, S. L. (1989). Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, *122*, 125-170.

Sontz, S. B. (2015). *Principal Bundles: The Quantum Case* (1.ª ed.). Springer.

Klimyk, A., & Schmüdgen, K. (1997). *Quantum Groups and their Representations* (1st). Springer.

Đurđević, M. (1996). Geometry of Quantum Principal Bundles I. *Communications in Mathematical Physics*, *175*, 457-520.

Đurđević, M. (1997). Geometry of Quantum Principal Bundles II. *Reviews in Mathematical Physics*, *9*(5), 531-607.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer.

Moore, E. H. (1897). Concerning the Abstract Group of Order $k!$ and $1/2k!$ ... *Proceedings of the London Mathematical Society*, *28*(1), 357-366.

Kassel, C., & Turaev, V. (2008). *Braid Groups* (1.ª ed.). Springer.

Saldaña, G. A. (2025). Some Constructions on Quantum Principal Bundles. *arXiv preprint arXiv:2502.19702*.

Saldaña, G. A. (2021). Geometry of Associated Quantum Vector Bundles and the Quantum Gauge Group. *arXiv preprint arXiv:2109.01550*.